

MATURA Z MATEMATYKI · EGZAMIN ÓSMOKLASISTY

KLUCZE

Klucze rozpoznawcze i algorytmy punktowe

System rozpoznawania typów zadań: teoria w pigułce, wzory, algorytm, pułapki, przykład wzorcowy i ślad w prawdziwych arkuszach CKE.

15

kluczy

150

zadań treningowych

100%

z rozwiązaniami

Analiza: arkusze CKE z egzaminu ósmoklasisty 2021–2025 (5 arkuszy, termin główny). Zadania treningowe są autorskie i odwzorowują typy umiejętności — nie są kopiami zadań CKE.

Spis treści

Jak korzystać z opracowania

- OS01** Liczby i działania: ułamki, liczby ujemne, oś liczbowa
- OS02** Procenty i obliczenia praktyczne
- OS03** Potęgi i pierwiastki
- OS04** Podzielność i własności liczb naturalnych
- OS05** Wyrażenia algebraiczne i przekształcanie wzorów
- OS06** Równania i zadania tekstowe z równaniem
- OS07** Proporcjonalność, skala i prędkość
- OS08** Średnia arytmetyczna i odczyt danych
- OS09** Prawdopodobieństwo i zliczanie
- OS10** Kąty i własności trójkątów oraz czworokątów
- OS11** Pola i obwody figur płaskich
- OS12** Twierdzenie Pitagorasa
- OS13** Graniastosłupy i ostrosłupy
- OS14** Układ współrzędnych i odczyt z wykresu
- OS15** Obliczenia zegarowe, kalendarzowe i jednostki

Ściąga — wszystkie klucze

Źródła i metodologia

Jak korzystać z opracowania

Każde zadanie maturalne należy do jednego z **15 kluczy** — powtarzalnych typów umiejętności. Zanim zaczniesz liczyć, **nazwij klucz**: to uruchamia gotowy schemat i chroni przed typowymi błędami.

1. Rozpoznaj

sekcja „Jak rozpoznać” — sygnały w treści i na rysunku.

2. Przypomnij

„Teoria w pigułce” i „Wzory” — tylko to, co naprawdę potrzebne.

3. Zastosuj

„Algorytm” — kolejne kroki, które prowadzą do punktów.

4. Sprawdź

„Pułapki” — porównaj swój zapis z typowymi błędami.

Legenda

Priorytet	A+ najwyższy zwrot z nauki · A bardzo ważny · B ważny po opanowaniu filarów
Częstotliwość	w ilu z analizowanych arkuszy (arkusze CKE z egzaminu ósmoklasisty 2021–2025 (5 arkuszy, termin główny)) pojawiło się zadanie z danego klucza.
Punkty w arkuszu	ile punktów faktycznie przypadało na klucz w tych arkuszach (tabela „Ślad” w każdym kluczu). Arkusz ósmoklasisty ma 25–30 pkt: 15 zadań zamkniętych po 1 pkt i 4–6 zadań otwartych po 2–3 pkt.
Poziom zadań	★★★ rozpoznanie schematu · ★★ standard maturalny · ★★★★★ zadanie wymagające

Plan nauki według priorytetów

A+ — najwyższy zwrot z nauki

OS01 Liczby i działania: ułamki, liczby ujemne, oś liczbowa

OS02 Procenty i obliczenia praktyczne

OS03 Potęgi i pierwiastki

OS05 Wyrażenia algebraiczne i przekształcanie wzorów

OS06 Równania i zadania tekstowe z równaniem

OS07 Proporcjonalność, skala i prędkość

OS09 Prawdopodobieństwo i zliczanie

OS10 Kąty i własności trójkątów oraz czworokątów

OS11 Pola i obwody figur płaskich

OS12 Twierdzenie Pitagorasa

OS13 Graniastosłupy i ostrosłupy

A — bardzo ważny

OS04 Podzielność i własności liczb naturalnych

OS08 Średnia arytmetyczna i odczyt danych

OS14 Układ współrzędnych i odczyt z wykresu

B — ważny po opanowaniu filarów

OS15 Obliczenia zegarowe, kalendarzowe i jednostki

Jak trenować klucz

- Przeczytaj klucz i przykład wzorcowy — zasłoń rozwiązanie i spróbuj sam.
- Rozwiąż zadania ★★★ bez zaglądania do wzorów.
- Zadania ★★ rozwiązuje na czas: zamknięte ok. 2–3 min, otwarte 2 pkt ok. 5 min.
- Zadania ★★ i otwarte sprawdzaj z rozwiązaniem i **schematem punktowania** — ucz się pisać tak, by egzaminator widział każdy krok.
- Klucz uznaj za opanowany, gdy rozwiążesz 9/10 zadań i potrafisz nazwać metodę przed liczeniem.

**Sygnał:** Ułamki i nawiasy → wspólny mianownik, potem kolejność działań i znaki.**Co musisz umieć**

- wykonywać działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych oraz liczbach ujemnych,
- zachowywać kolejność działań i poprawnie stosować nawiasy,
- zamieniać liczby mieszane na ułamki niewłaściwe i odwrotnie,
- odczytywać i wyznaczać współrzędne punktów na osi liczbowej.

**Jak rozpoznać zadanie**

- w zadaniu jest wyrażenie z ułamkami i nawiasami → kolejność działań,
- „jaka część”, „o ile większa” → ułamek albo różnica, nie procent,
- oś liczbową z podziałem na równe części → długość jednej części = różnica wartości podzielona przez liczbę odcinków,
- liczba mieszana z minusem, np. $-5\frac{1}{3}$ → zamień na ułamek niewłaściwy przed działaniem.

**Teoria w pigułce**

- Kolejność działań: nawiasy → potęgi i pierwiastki → mnożenie i dzielenie → dodawanie i odejmowanie.
- Dzielenie przez ułamek = mnożenie przez odwrotność: $a : \frac{p}{q} = a \cdot \frac{q}{p}$.
- Znaki: minus przed nawiasem zmienia znaki wszystkich składników; iloczyn dwóch liczb ujemnych jest dodatni.
- Liczba mieszana: $5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$ — najpierw zamiana, potem działanie.
- Na osi liczbowej długość jednej działki obliczamy, dzieląc różnicę dwóch znanych wartości przez liczbę działek między nimi.
- Porównywanie ułamków: sprowadź do wspólnego mianownika albo zamień na ułamki dziesiętne.

Σ Najważniejsze wzory

$$a : \frac{p}{q} = a \cdot \frac{q}{p}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$-(a - b) = -a + b$$

$$c \frac{a}{b} = \frac{ca + a}{b}$$

**Algorytm krok po kroku**

- Zamień liczby mieszane i procenty na ułamki (lub liczby dziesiętne).
- Wykonaj działania w nawiasach.
- Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika.
- Wykonaj mnożenie i dzielenie, potem dodawanie i odejmowanie — pilnując znaków.
- Skróć wynik i sprawdź, czy odpowiedź ma sens (rzęd wielkości, znak).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times -5\frac{1}{3} = -5 + \frac{1}{3}$	$\checkmark -5\frac{1}{3} = -\frac{16}{3}$	minus dotyczy całej liczby
$\times \frac{4^2}{5} - 3^2 = \frac{16-9}{5}$	$\checkmark \frac{16}{5} - 9$	potęga tylko w liczniku
$\times$ dodawanie ułamków „po przekątnej”	$\checkmark$ wspólny mianownik	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$
$\times$ działka na osi „na oko”	$\checkmark$ policz z dwóch znanych punktów	różnica podzielona przez liczbę działek

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 2 z egzaminu 2025

Oblicz wartość wyrażenia $(2,4 - 5\frac{1}{3}) : (-2)$.

ROZWIĄZANIE

1. Zamieniamy na ułamki zwykłe: $2,4 = \frac{12}{5}$, $5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$.
2. $\frac{12}{5} - \frac{16}{3} = \frac{36}{15} - \frac{80}{15} = -\frac{44}{15}$.
3. $-\frac{44}{15} : (-2) = -\frac{44}{15} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{44}{30} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$.

Odpowiedź: $\frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — poprawne wykonanie działania w nawiasie,
- 2 pkt — poprawne dzielenie przez (-2) i skrócony wynik.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 2, 12, 16	4 pkt	$(2,4 - 5\frac{1}{3}) : (-2)$; podział odcinka na osi; $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + x = \frac{7}{15}$ (2 pkt)
2024	zad. 2, 4	2 pkt	ułamki o mianowniku 4 w przedziale $(3; 5)$; porównanie $\frac{4}{5} \cdot (-\frac{4}{3})$ i $\frac{4}{5} - \frac{4}{3}$
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	zad. 2, 9, 11	3 pkt	$\frac{4^2}{5} - 3^2$; oś liczbową (odcinek <i>PS</i>); ułamki masy ziemi ogrodowej
2021	zad. 2, 3, 16	4 pkt	działania na liczbach ujemnych; wartość wyrażenia; podział tabliczki czekolady (2 pkt)

Trening: zadania **OS01.1–OS01.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS02 Procenty i obliczenia praktyczne

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,4 pkt (1–3)

FORMY ZADAŃ

1 zadanie zamknięte co roku, co drugi rok
zadanie otwarte za 3 pkt (zakupy, ceny, rabaty)

 **Sygnal:** Ustal 100%, potem licz krok po kroku; procenty mnożymy, nie dodajemy.

Co musisz umieć

- obliczać procent danej liczby i liczbę z danego procentu,
- obliczać, jakim procentem jednej liczby jest druga,
- stosować podwyżki i obniżki (także kilkukrotne) oraz obliczać cenę po rabacie,
- czytać dane z tabel i cenników oraz planować obliczenia w kilku krokach.

Jak rozpoznać zadanie

- „o ile procent większa/mniejsza” → różnica podzielona przez wartość **wyjściową**,
- „jaki procent stanowi” → iloraz razy 100%,
- „cena po obniżce o $p\%$ ” → mnożenie przez $(1 - \frac{p}{100})$,
- tabela z cenami i masami → policz osobno każdy rodzaj, dopiero potem sumuj.

Teoria w pigułce

- $p\%$ liczby a to $\frac{p}{100} \cdot a$.
- Jaki procent liczby b stanowi liczba a : $\frac{a}{b} \cdot 100\%$.
- Podwyżka o $p\%$: $a \cdot (1 + \frac{p}{100})$; obniżka: $a \cdot (1 - \frac{p}{100})$.
- Dwie kolejne zmiany **mnożymy**: wzrost o 10% i spadek o 10% daje $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$, czyli spadek o 1%.
- „O ile procent więcej” liczymy zawsze względem wartości, z którą porównujemy (punkt odniesienia w treści).
- W zadaniach praktycznych: najpierw ustal jednostki (kg, zł, sztuki), potem licz.

Σ Najważniejsze wzory

$$p\% \cdot a = \frac{p}{100} a$$

$$\frac{a}{b} \cdot 100\%$$

$$a \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$a \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Algorytm krok po kroku

1. Wypisz dane z treści lub tabeli (co jest całością, a co częścią).
2. Ustal punkt odniesienia dla procentu (100%).
3. Zapisz działanie: procent liczby, liczba z procentu albo stosunek.
4. Wykonaj obliczenia krok po kroku — nie skracaj etapów w pamięci.
5. Sprawdź sens wyniku (czy cena po obniżce jest mniejsza, czy procent mieści się w 0–100%).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X porównanie do wartości końcowej	✓ do wartości wyjściowej	punkt odniesienia z treści
X dodawanie procentów: $+10\%$ i -10% $= 0$	✓ $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$	procenty się mnoży
X 10% ze 120 kg to 10 kg	✓ 12 kg	$10\% = \frac{1}{10}$ całości
X mieszanie jednostek (kg i opakowania)	✓ policz liczbę opakowań	masa : masa opakowania

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 18 z egzaminu 2024

Pan Jan sprzedał **120 kg** truskawek: połowę masy w opakowaniach po **1 kg** (cena **18 zł**), **10%** masy w opakowaniach po **0,5 kg** (cena **10 zł**), a resztę w opakowaniach po **0,25 kg** (cena **6 zł**). Oblicz, jaką kwotę otrzymał ze sprzedaży wszystkich truskawek.

ROZWIĄZANIE

1. Masy: duże $\frac{1}{2} \cdot 120 = 60$ kg, średnie $10\% \cdot 120 = 12$ kg, małe $120 - 60 - 12 = 48$ kg.
2. Liczba opakowań: $60 : 1 = 60$, $12 : 0,5 = 24$, $48 : 0,25 = 192$.
3. Kwoty: $60 \cdot 18 = 1080$ zł, $24 \cdot 10 = 240$ zł, $192 \cdot 6 = 1152$ zł.
4. Razem: $1080 + 240 + 1152 = 2472$ zł.

Odpowiedź: 2472 zł

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie mas truskawek w każdym rodzaju opakowań,
- 2 pkt — obliczenie liczby opakowań i kwot z co najmniej dwóch rodzajów,
- 3 pkt — poprawny wynik końcowy **2472 zł**.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 1	1 pkt	oszczędzanie na deskorolce: jaka część kwoty i o ile procent więcej
2024	zad. 18	3 pkt	sprzedaż truskawek: połowa masy, 10% masy, ceny opakowań — łączna kwota
2023	zad. 6	1 pkt	grusze o 40% liczniejsze od jabłoni, różnica 50 drzew
2022	zad. 10	1 pkt	rozmiar pliku 2,5 raza większy
2021	zad. 6	1 pkt	podatek dochodowy z tabeli progów

Trening: zadania **OS02.1–OS02.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS03 Potęgi i pierwiastki

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,8 pkt (1–2)

FORMY ZADAŃ

1–2 zadania zamknięte po 1 pkt: działania na potęgach, szacowanie pierwiastków

 **Sygnal:** Sprowadź do wspólnej podstawy, potem dodawaj lub odejmuj wykładniki.

Co musisz umieć

- stosować działania na potęgach o tej samej podstawie i o tym samym wykładniku,
- zapisywać liczby jako potęgi tej samej podstawy (np. $8 = 2^3$, $9 = 3^2$),
- obliczać pierwiastki kwadratowe i sześciennie z liczb i ułamków,
- szacować pierwiastki, wskazując sąsiednie liczby całkowite.

Jak rozpoznać zadanie

- „zapisz w postaci potęgi liczby 2” → sprowadź wszystkie czynniki do podstawy 2,
- duże liczby typu 200 000 → rozbij na $2 \cdot 10^5$,
- „między którymi liczbami leży $\sqrt{60}$ ” → szukaj kwadratów sąsiednich liczb całkowitych,
- pierwiastek z ułamka → pierwiastkuj licznik i mianownik osobno.

Teoria w pigułce

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ oraz $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.
- $a^0 = 1$ (dla $a \neq 0$), $a^1 = a$.
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (dla $a, b \geq 0$, $b \neq 0$).
- $\sqrt{a^2} = a$ dla $a \geq 0$; $\sqrt[3]{a^3} = a$ dla każdego a .
- Szacowanie: $\sqrt{60}$ leży między $\sqrt{49} = 7$ a $\sqrt{64} = 8$, bliżej 8.

Σ Najważniejsze wzory

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Algorytm krok po kroku

1. Sprowadź wszystkie liczby do tej samej podstawy (np. $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$).
2. Zastosuj wzory na mnożenie i dzielenie potęg.
3. Przy pierwiastkach wyłącz czynnik przed pierwiastek albo oblicz go dokładnie.
4. Przy szacowaniu wskaż dwa sąsiednie kwadraty liczb całkowitych.
5. Sprawdź wynik przybliżeniem liczbowym.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$	$\checkmark a^{m+n}$	wykładniki dodajemy
$\times \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\checkmark$ nieprawda	pierwiastek nie jest addytywny
$\times (2 \cdot 10^5)^3 = 2 \cdot 10^{15}$	$\checkmark 8 \cdot 10^{15}$	potęgujemy oba czynniki
$\times \sqrt{60} \approx 6$	$\checkmark \approx 7,7$	bo $7^2 = 49$, $8^2 = 64$

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 8 z egzaminu 2025

Zapisz wartość wyrażenia $8^6 : 4^3$ w postaci potęgi liczby 2.

ROZWIĄZANIE

- $8 = 2^3$, więc $8^6 = (2^3)^6 = 2^{18}$.
- $4 = 2^2$, więc $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$.
- $8^6 : 4^3 = 2^{18} : 2^6 = 2^{18-6} = 2^{12}$.

Odpowiedź: 2^{12}

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapisanie obu liczb jako potęg liczby 2,
- 2 pkt — poprawne zastosowanie wzoru na dzielenie potęg i wynik 2^{12} .

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 7, 8	2 pkt	wyrażenia z pierwiastkami $\sqrt{\frac{1}{16}}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $8^6 : 4^3$ jako potęga 2
2024	zad. 7	1 pkt	$3 \cdot 9^5 = 3^{11}$ oraz $\frac{2^8 \cdot 2^7}{2^{10}} = 2^5$
2023	zad. 5, 7	2 pkt	$\sqrt{81} - \sqrt{49}$, $\sqrt{144} + \sqrt{25}$; $\frac{10^8}{5^8}$, $2^6 \cdot 25^3$
2022	zad. 5, 8	2 pkt	porównanie potęg liczby 10; szacowanie $\sqrt{60}$
2021	zad. 4, 7	2 pkt	$(200\,000)^3$ w notacji wykładniczej; $-\sqrt{10} + 5$

Trening: zadania **OS03.1–OS03.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS04 Podzielność i własności liczb naturalnych

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

4/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,4 pkt (0–2)

FORMY ZADAŃ

1–2 zadania zamknięte: cechy podzielności, reszty z dzielenia, NWD i NWW, regularności

 **Sygnal:** Cechy podzielności i zapis $a = kn + r$ zamiast dzielenia pisemnego.

Co musisz umieć

- stosować cechy podzielności przez 2, 3, 4, 5, 9, 10 i 100,
- obliczać resztę z dzielenia i wykorzystywać ją w zadaniach,
- wyznaczać NWD i NWW oraz rozkładać liczby na czynniki pierwsze,
- dostrzegać regularności w ciągach liczb i figur.

Jak rozpoznać zadanie

- „czy liczba jest podzielna przez...” → cechy podzielności, a nie dzielenie pisemne,
- „reszta z dzielenia” → zapis $a = k \cdot n + r$,
- „na ile równych części można podzielić” → dzielniki, NWD,
- „co ile powtarza się...” → NWW albo okresowość.

Teoria w pigułce

- Cechy podzielności: przez 2 — ostatnia cyfra parzysta; przez 5 — 0 lub 5; przez 10 — 0.
- Przez 3 i przez 9 — suma cyfr dzieli się odpowiednio przez 3 i przez 9; przez 4 — dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4.
- Reszta: $a = k \cdot n + r$, gdzie $0 \leq r < n$. Np. $92 = 13 \cdot 7 + 1$, więc reszta z dzielenia 92 przez 7 wynosi 1.
- Wśród dowolnych n kolejnych liczb całkowitych dokładnie jedna dzieli się przez n .
- NWD — największy wspólny dzielnik (do dzielenia na równe części), NWW — najmniejsza wspólna wielokrotność (do „spotkań” i wspólnych mianowników).
- Liczba pierwsza ma dokładnie dwa dzielniki: 1 i samą siebie (1 nie jest liczbą pierwszą).

Σ Najważniejsze wzory

$$a = k \cdot n + r$$

$$\text{NWD}(a, b) \cdot \text{NWW}(a, b) = a \cdot b$$

suma cyfr $\div 3$

dwie ostatnie cyfry $\div 4$

Algorytm krok po kroku

1. Sprawdź, o jaką własność pyta zadanie (podzielność, reszta, dzielniki).
2. Zastosuj cechę podzielności zamiast liczyć „na piechotę”.
3. Przy resztach zapisz liczbę w postaci $k \cdot n + r$.
4. Przy NWD/NWW rozłóż liczby na czynniki pierwsze.
5. W zadaniach z regularnością wypisz kilka pierwszych przypadków i poszukaj wzoru.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X liczba parzysta = podzielna przez 4	✓ nieprawda	6 jest parzysta, ale $6 : 4$ daje resztę
X reszta może być równa dzielnikowi	✓ $0 \leq r < n$	reszta jest zawsze mniejsza od dzielnika
X NWD i NWW pomyłone	✓ NWD — dzielenie na części, NWW — wspólne wielokrotności	czytaj kontekst
X 1 jest liczbą pierwszą	✓ nie jest	ma tylko jeden dzielnik

👉 Przykład wzorcowy typ zadania 3 z egzaminu 2025

Która z liczb **91, 92, 95, 97** przy dzieleniu przez **7** daje resztę **1**?

ROZWIĄZANIE

1. Szukamy liczby postaci $7k + 1$.
2. $91 = 7 \cdot 13$ — reszta 0; $92 = 7 \cdot 13 + 1$ — reszta 1.
3. $95 = 7 \cdot 13 + 4$ — reszta 4; $97 = 7 \cdot 13 + 6$ — reszta 6.
4. Warunek spełnia liczba **92**.

Odpowiedź: 92

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — wskazanie liczby **92** (np. po zauważeniu, że **91** jest podzielne przez **7**).

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 3	1 pkt	która z liczb 91, 92, 95, 97 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 7
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	zad. 2, 13	2 pkt	sześcian liczby 4 i NWW mianowników; regularność w figurze z 40 odcinków
2022	zad. 3, 4	2 pkt	liczby trzycyfrowe o sumie cyfr 6 ; podzielność sumy 323 + 160 przez 3
2021	zad. 5, 13	2 pkt	podzielność iloczynu pięciu kolejnych liczb przez 10 ; podział listewki (NWD)

Trening: zadania **OS04.1–OS04.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS05 Wyrażenia algebraiczne i przekształcanie wzorów

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

4/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,4 pkt (0–2)

FORMY ZADAŃ

1–2 zadania zamknięte: zapisywanie treści wyrażeniem, redukcja wyrazów, wyznaczanie wielkości ze wzoru

 **Sygnal:** Tłumacz zdanie po kolei; nawias przed mnożeniem; minus zmienia znaki.

Co musisz umieć

- zapisywać treść zadania za pomocą wyrażenia algebraicznego,
- redukować wyrazy podobne i opuszczać nawiasy (także z minusem),
- obliczać wartość wyrażenia dla danej wartości zmiennej,
- przekształcać wzory, aby wyznaczyć wskazaną wielkość.

Jak rozpoznać zadanie

- „zapisz w postaci wyrażenia” → wprowadź oznaczenie i tłumacz zdanie po kolei,
- „wyznacz a ze wzoru” → przenoś składniki i dziel obie strony,
- „dla której liczby wartość wyrażenia jest...” → podstaw kolejne liczby,
- „o ile większa”, „ k razy mniejsza” → dodawanie i dzielenie, nie odwrotnie.

Teoria w pigułce

- „Liczba o **7** większa od x ” to $x + 7$; „**4** razy większa” to $4x$; „**3** razy mniejsza” to $\frac{x}{3}$.
- Kolejność czynności z treści przekłada się na nawiasy: „powiększono o **7**, a wynik zwiększono **4**-krotnie” to $4(x + 7)$.
- Opuszczanie nawiasu z minusem zmienia znaki: $-3(2x - 5) = -6x + 15$.
- Redukcja wyrazów podobnych — dodajemy tylko wyrazy z tą samą potęgą tej samej zmiennej.
- Przekształcanie wzoru: wykonujemy na obu stronach te same działania (dodawanie, mnożenie, dzielenie przez liczbę różną od zera).
- Wartość wyrażenia sprawdzamy, podstawiając liczbę w miejsce każdej zmiennej — w nawiasach!

Najważniejsze wzory

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$-(a - b) = -a + b$$

$$L = 2a + 2b + c \Rightarrow a = \frac{L - 2b - c}{2}$$

Algorytm krok po kroku

1. Wprowadź oznaczenie dla szukanej wielkości i zapisz pozostałe wielkości przez nią.
2. Zapisz treść krok po kroku, pilnując nawiasów.
3. Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.
4. Przy przekształcaniu wzoru izoluj szukaną wielkość po jednej stronie.
5. Sprawdź wynik, podstawiając konkretną liczbę.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times -3(2x - 5) = -6x - 15$	$\checkmark -6x + 15$	minus zmienia oba znaki
$\times$ „4 razy większa od $x + 7$ ” jako $4x + 7$	$\checkmark 4(x + 7)$	najpierw nawias
$\times x \cdot x = 2x$	$\checkmark x^2$	mnożenie to nie dodawanie
$\times$ dzielenie tylko jednej strony wzoru	$\checkmark$ obie strony	równość musi być zachowana

🔧 Przykład wzorcowy typ zadania 5 z egzaminu 2025

Obwód pięciokąta wyraża się wzorem $L = 2a + 2b + c$. Wyznacz a z tego wzoru.

ROZWIĄZANIE

1. Przenosimy składniki bez a na lewą stronę: $L - 2b - c = 2a$.

2. Dzielimy obie strony przez 2: $a = \frac{L - 2b - c}{2}$.

3. Sprawdzenie: dla $b = 3$, $c = 4$, $a = 5$ mamy $L = 10 + 6 + 4 = 20$ oraz $\frac{20 - 6 - 4}{2} = 5 \checkmark$

Odpowiedź: $a = \frac{L - 2b - c}{2}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — poprawne przeniesienie składników na jedną stronę,
- 2 pkt — podzielenie obu stron przez 2 i zapisanie wzoru na a .

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 5, 6	2 pkt	wyznaczenie a ze wzoru $L = 2a + 2b + c$; zapisanie liczby piątek wyrażeniem z x
2024	zad. 6, 9	2 pkt	przekształcenia równania $5x = \frac{y}{w}$; uproszczenie $x(x + 4) - 3(2x - 5)$
2023	zad. 3, 8	2 pkt	które wyrażenie zeruje się dla $x = 1$ i $x = -1$; zapis „powiększono o 7, zwiększono 4-krotnie”
2022	zad. 7	1 pkt	wartość wyrażenia $\frac{n^4 - 3}{6}$ dla danych liczb
2021	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **OS05.1–OS05.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS06 Równania i zadania tekstowe z równaniem

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,0 pkt (1–3)

FORMY ZADAŃ

zadanie otwarte 2–3 pkt w każdym arkuszu:
ułożyć równanie i rozwiązać (ceny, wiek, liczby
przedmiotów)

 **Sygnal:** Jedno oznaczenie → wszystkie wielkości przez nie → równanie z treści.

Co musisz umieć

- wprowadzać oznaczenie i zapisywać pozostałe wielkości za jego pomocą,
- układać równanie odpowiadające treści zadania,
- rozwiązywać równania z jedną niewiadomą (także z ułamkami),
- sprawdzać, czy wynik spełnia warunki zadania, i zapisywać odpowiedź.

Jak rozpoznać zadanie

- w treści są dwie wielkości powiązane zależnością („o ile więcej”, „ile razy mniej”) → jedno oznaczenie,
- „zapłacono łącznie”, „razem jest...” → suma wyrażeń równa danej liczbie,
- „zabrakło **11 zł**”, „zostało **9 zł**” → dwa wyrażenia na tę samą kwotę,
- w zadaniu otwartym zawsze musi pojawić się **obliczenie i odpowiedź**.

Teoria w pigułce

- Równanie rozwiązujemy, wykonując te same działania na obu stronach (dodawanie, mnożenie, dzielenie przez liczbę różną od zera).
- Ułamki w równaniu usuwamy, mnożąc obie strony przez wspólny mianownik.
- „O **n** więcej” → $x + n$; „ **k** razy więcej” → kx ; „ **k** razy mniej” → $\frac{x}{k}$.
- Gdy dwie sytuacje dotyczą tej samej kwoty, zapisujemy obie i przyrównujemy: $10c - 11 = 6c + 9$.
- Po rozwiązaniu sprawdzamy sens: liczba przedmiotów musi być całkowita i dodatnia.
- W odpowiedzi podajemy to, o co pyta zadanie (czasem nie samą niewiadomą, lecz wielkość od niej zależną).

Σ Najważniejsze wzory

$$ax + b = c \Rightarrow x = \frac{c - b}{a}$$

mnożenie przez wspólny mianownik

$$x + n, kx, \frac{x}{k}$$

Algorytm krok po kroku

1. Oznacz literą tę wielkość, o którą pyta zadanie (albo najprostszą z zależności).
2. Zapisz pozostałe wielkości za pomocą tej litery.
3. Ułóż równanie zgodne z warunkiem z treści.
4. Rozwiąż równanie (usuń ułamki, uporządkuj wyrazy).
5. Sprawdź warunki zadania i zapisz pełną odpowiedź.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X odpowiedź = wartość niewiadomej	✓ sprawdź, o co pyta zadanie	czasem trzeba jeszcze coś doliczyć
X mnożenie przez mianownik tylko jednego składnika	✓ całej strony równania	każdy wyraz
X „3 razy mniej” jako $3x$	✓ $\frac{x}{3}$	mniej = dzielenie
X brak zapisu obliczeń	✓ CKE punktuje tok rozwiązania	sam wynik to zwykle 0 pkt

🔧 Przykład wzorcowy typ zadania 17 z egzaminu 2025

Andrzej ma o 28 plakatów więcej od Basi, a Marek ma ich 3 razy mniej od Basi. Andrzej i Marek mają razem 2 razy więcej plakatów od Basi. Oblicz, ile plakatów ma każde z nich.

ROZWIĄZANIE

- Niech b — liczba plakatów Basi. Wtedy Andrzej ma $b + 28$, a Marek $\frac{b}{3}$.
- Warunek: $(b + 28) + \frac{b}{3} = 2b$.
- $28 = 2b - b - \frac{b}{3} = \frac{2}{3}b$, więc $b = 42$.
- Andrzej: $42 + 28 = 70$; Marek: $42 : 3 = 14$. Sprawdzenie: $70 + 14 = 84 = 2 \cdot 42$ ✓

Odpowiedź: Basia 42, Andrzej 70, Marek 14

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapisanie liczby plakatów Andrzeja i Marka za pomocą tej samej niewiadomej,
- 2 pkt — ułożenie poprawnego równania i obliczenie liczby plakatów Basi,
- 3 pkt — podanie wszystkich trzech liczb.

📅 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 17	3 pkt	plakaty Andrzeja, Basi i Marka — jedno równanie z jedną niewiadomą
2024	zad. 16	2 pkt	puzzle: $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x = 440$
2023	zad. 16	2 pkt	bilety do teatru i kina: $4(x + 64) + 5x = 400$
2022	zad. 12	1 pkt	ceny biletów autobusowych — porównanie zestawów
2021	zad. 18	2 pkt	puszki karmy: brakło 11 zł przy 10 sztukach, przy 6 zostało 9 zł

Trening: zadania **OS06.1–OS06.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS07 Proporcjonalność, skala i prędkość

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

4/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,8 pkt (0–5)

FORMY ZADAŃ

zadania zamknięte (przeliczenia, skala) i
otwarte 2 pkt (droga–prędkość–czas)

 **Sygnal:** Skala działa na długości; pola zmieniają się z kwadratem skali.

Co musisz umieć

- stosować proporcje i przeliczenia „ile na ile”,
- korzystać ze skali planu i mapy (w tym przy polach),
- stosować zależność $s = v \cdot t$ i przeliczać jednostki prędkości,
- rozpoznawać wielkości wprost proporcjonalne i odwrotnie proporcjonalne.

Jak rozpoznać zadanie

- „na 8 gofrów potrzeba..., ile na 40” → proporcja (mnożnik),
- „w skali 1 : n ” → wymiar rzeczywisty = wymiar z rysunku $\cdot n$,
- „w tym samym czasie”, „ze stałą prędkością” → $s = v \cdot t$,
- pola figur przy skali 1 : n zmieniają się n^2 razy.

Teoria w pigułce

- Proporcja: jeśli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to $ad = bc$ (mnożenie na krzyż).
- Skala 1 : n oznacza, że 1 cm na planie to n cm w rzeczywistości; pola zmieniają się n^2 razy.
- $s = v \cdot t$, $v = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{v}$ — pilnuj zgodności jednostek.
- $1 \frac{m}{s} = 3,6 \frac{km}{h}$; 15 min = 0,25 h.
- Wielkości wprost proporcjonalne: iloraz stały ($\frac{y}{x} = a$); odwrotnie proporcjonalne: iloczyn stały ($xy = a$).
- Przy „tej samej ilości materiału” lub „tej samej pracy” działa proporcjonalność odwrotna.

Σ Najważniejsze wzory

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

$$\text{skala } 1 : n \rightarrow \text{pole} \cdot n^2$$

$$1 \frac{m}{s} = 3,6 \frac{km}{h}$$

Algorytm krok po kroku

1. Ustal, co jest stałe (prędkość, ilość materiału, skala).
2. Zapisz proporcję albo wzór $s = vt$.
3. Przelicz jednostki zanim podstawisz liczby.
4. Wykonaj obliczenia; przy polach pamiętaj o kwadracie skali.
5. Sprawdź sens wyniku (czy czas/prędkość są realne).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X pole w skali 1 : 20 maleje 20 razy	✓ 400 razy	skala pól to n^2
X 15 min = 0,15 h	✓ 0,25 h	minuty dzielimy przez 60
X $v = \frac{t}{s}$	✓ $v = \frac{s}{t}$	droga przez czas
X proporcjonalność odwrotna liczona jak wprost	✓ iloczyn stały	więcej osób = krócej

🔧 Przykład wzorcowy typ zadania 19 z egzaminu 2025

Mała tablica narysowana w skali **1 : 20** jest kwadratem o boku **3 cm**. Rzeczywiste wymiary dużej tablicy to **240 cm** i **90 cm**. Oblicz, ile razy pole dużej tablicy jest większe od pola małej.

ROZWIĄZANIE

- Rzeczywisty bok małej tablicy: **$3 \cdot 20 = 60$ cm.**
- Pole małej: **$60 \cdot 60 = 3600 \text{ cm}^2$** ; pole dużej: **$240 \cdot 90 = 21\,600 \text{ cm}^2$.**
- $\frac{21\,600}{3600} = 6$.**

Odpowiedź: 6 razy

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie rzeczywistego boku małej tablicy,
- 2 pkt — obliczenie obu pól i ich ilorazu.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 9, 19	3 pkt	czas przejazdu przy $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; skala 1 : 20 i porównanie pól tablic (2 pkt)
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	zad. 1, 4, 10, 17	5 pkt	proporcje składników ciasta; książki na półkach; plan miasta 1 : 4000 ; prędkość pociągu (2 pkt)
2022	zad. 6, 17	3 pkt	materiał na bluzki S i L; prędkość 22,5 km w 15 min (2 pkt)
2021	zad. 17	3 pkt	spotkanie Adama i Bartka — droga, czas i prędkość

Trening: zadania **OS07.1–OS07.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS08 Średnia arytmetyczna i odczyt danych

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

4/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,2 pkt (0–2)

FORMY ZADAŃ

1–2 zadania zamknięte: odczyt z diagramu lub tabeli, obliczanie średniej, uzupełnianie danych

 **Sygnal:** Zamień średnią na sumę: suma = średnia razy liczba danych.

Co musisz umieć

- obliczać średnią arytmetyczną i wyznaczać brakującą daną, gdy średnia jest znana,
- odczytywać dane z diagramów słupkowych, tabel i wykresów,
- porównywać dane i obliczać, o ile (lub ile razy) jedna wielkość różni się od drugiej,
- przeliczać dane na procenty i części całości.

Jak rozpoznać zadanie

- „średnia arytmetyczna jest równa...” → suma = średnia $\times$ liczba danych,
- diagram słupkowy → odczytaj wartości i dopiero potem licz,
- „o ile więcej”, „ile razy więcej” → różnica albo iloraz,
- „jaki procent stanowi” → iloraz razy **100%**.

Teoria w pigułce

- Średnia arytmetyczna n liczb: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.
- Z definicji: suma wszystkich danych = $\bar{x} \cdot n$ — to najczęściej używany krok w zadaniach.
- Dodanie do zestawu liczby równej średniej nie zmienia średniej; liczba większa od średniej ją podnosi.
- Przy łączeniu dwóch zestawów liczymy **sumy**, a nie średnie średnich.
- Odczyt z diagramu: sprawdź, co jest na osi pionowej i jaka jest wartość jednej działki.
- Mediana to wartość środkowa po uporządkowaniu danych (przy parzystej liczbie danych — średnia dwóch środkowych).

Σ Najważniejsze wzory

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{suma} = \bar{x} \cdot n$$

$$\frac{a}{b} \cdot 100\%$$

Algorytm krok po kroku

1. Wypisz dane (z treści, tabeli lub diagramu).
2. Zamień informację o średniej na sumę: suma = $\bar{x} \cdot n$.
3. Wykonaj działanie, którego wymaga pytanie (różnica, iloraz, brakująca liczba).
4. Przy łączeniu zestawów dodaj sumy i podziel przez łączną liczbę danych.
5. Sprawdź, czy wynik mieści się między najmniejszą a największą daną.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X średnia średnich	✓ sumy podzielone przez łączną liczbę	zestawy mogą mieć różną liczbę
X odczyt słupka „na oko”	✓ sprawdź wartość działki	często 1 działka = 5 jednostek
X „o ile procent” liczone od złej wartości	✓ od wartości odniesienia	czytaj uważnie
X mylenie średniej z medianą	✓ to różne miary	mediana = wartość środkowa

🔗 Przykład wzorcowy typ zadania 4 z egzaminu 2025

Średnia arytmetyczna czterech liczb a, b, c, d jest równa 9, a średnia dwóch liczb e, f jest równa 6. Oblicz, o ile suma liczb a, b, c, d jest większa od sumy liczb e, f , oraz podaj średnią wszystkich sześciu liczb.

ROZWIĄZANIE

1. Suma czterech liczb: $9 \cdot 4 = 36$. Suma dwóch liczb: $6 \cdot 2 = 12$.

2. Różnica sum: $36 - 12 = 24$.

3. Średnia sześciu liczb: $\frac{36 + 12}{6} = \frac{48}{6} = 8$.

Odpowiedź: suma większa o 24; średnia sześciu liczb to 8

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie obu sum,
- 2 pkt — obliczenie różnicy i średniej sześciu liczb.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 4	1 pkt	średnia czterech liczb i średnia sześciu liczb
2024	zad. 1, 3	2 pkt	diagram czasu nauki (P/F); średnia trzech liczb i liczba brakująca
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	zad. 1	1 pkt	wyniki ankiety wśród uczniów — odczyt i przeliczenie
2021	zad. 1, 10	2 pkt	diagram medali olimpijskich; średnia cen czterech artykułów

Trening: zadania **OS08.1–OS08.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS09 Prawdopodobieństwo i zliczanie

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,4 pkt (1–3)

FORMY ZADAŃ

1 zadanie zamknięte co roku, czasem otwarte 2 pkt (losowanie z pudełka, losy, kule)

 **Sygnal:** Policz sprzyjające i wszystkie; przy zakresach pamiętaj o „+1”.

Co musisz umieć

- obliczać prawdopodobieństwo jako iloraz liczby zdarzeń sprzyjających do wszystkich możliwych,
- aktualizować liczbę elementów po losowaniu bez zwracania,
- zliczać elementy spełniające warunek (np. numery losów),
- rozwiązywać zadania typu „ile trzeba dołożyć, aby prawdopodobieństwo wynosiło...”.

Jak rozpoznać zadanie

- „jakie jest prawdopodobieństwo” → policz sprzyjające i wszystkie,
- „wyjęto już dwie kule” → zmniejsz obie liczby (losowanie bez zwracania),
- „ile kul dołożyć, aby...” → równanie z niewiadomą w liczniku i mianowniku,
- „co szósty los” → jedna szósta wszystkich.

Teoria w pigułce

- $P = \frac{\text{liczba zdarzeń sprzyjających}}{\text{liczba wszystkich zdarzeń}}$ — dla zdarzeń jednakowo prawdopodobnych.
- $0 \leq P \leq 1$; $P = 0$ — zdarzenie niemożliwe, $P = 1$ — pewne.
- Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego: $P(A') = 1 - P(A)$.
- Losowanie bez zwracania zmienia **obie** liczby: sprzyjających i wszystkich.
- Zliczanie numerów od a do b : jest ich $b - a + 1$ (uwaga na „+1”).
- W zadaniach z dokładaniem elementów zapisujemy równanie, np. $\frac{6+x}{14+x} = \frac{2}{3}$.

Σ Najważniejsze wzory

$$P = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

liczba liczb od a do b : $b - a + 1$

Algorytm krok po kroku

1. Policz wszystkie możliwe wyniki.
2. Policz wyniki sprzyjające (uważnie zliczaj zakresy).
3. Zapisz iloraz i skróć ułamek.
4. Przy losowaniu bez zwracania zaktualizuj liczby po każdym losowaniu.
5. Sprawdź, czy wynik należy do przedziału od 0 do 1.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X zliczanie od a do b jako $b - a$	✓ $b - a + 1$	obie końcówki się liczą
X po wyjęciu kul zmieniamy tylko licznik	✓ także mianownik	ubywa wszystkich elementów
X $P > 1$	✓ zawsze $P \leq 1$	sygnał błędu w zliczaniu
X „co szósty” = 6 losów	✓ $\frac{1}{6}$ wszystkich	to ułamek, nie liczba

🔧 Przykład wzorcowy typ zadania 10 z egzaminu 2025

Na loterię przygotowano **72** losy ponumerowane od **1** do **72**. Wygrywające są losy o numerach od **1** do **9** oraz od **46** do **72**, pozostałe są puste. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu pustego.

ROZWIĄZANIE

1. Losy wygrywające: od **1** do **9** to **9** losów, od **46** do **72** to $72 - 46 + 1 = 27$ losów — razem **36**.

2. Losy puste: $72 - 36 = 36$.

$$3. P = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: $P = \frac{1}{2}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — poprawne zliczenie losów wygrywających (w tym zakresu **46–72**),
- 2 pkt — obliczenie prawdopodobieństwa i skrócenie ułamka.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 10	1 pkt	loteria: 72 losy, wygrywające 1–9 i 46–72 — prawdopodobieństwo losu pustego
2024	zad. 8	1 pkt	balony: po wyjęciu dwóch czerwonych prawdopodobieństwo trzeciego czerwonego
2023	zad. 11	1 pkt	urna z 18 kulami białymi i 12 czarnymi (P/F)
2022	zad. 14, 16	3 pkt	dokładanie kulek zielonych do pudełka; korale w naszyjniku (2 pkt)
2021	zad. 11	1 pkt	loteria: co szósty los wygrywający, 30 losów wyciągniętych

Trening: zadania **OS09.1–OS09.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS10 Kąty i własności trójkątów oraz czworokątów

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,2 pkt (1–2)

FORMY ZADAŃ

zadanie zamknięte co roku (kąt w trapezie, trójkącie), co drugi rok otwarte 2 pkt

 **Sygnal:** Znajdź trójkąt z dwoma znanymi kątami i idź krok po kroku.

Co musisz umieć

- stosować sumę kątów w trójkącie (180°) i w czworokącie (360°),
- korzystać z kątów przyległych, wierzchołkowych, odpowiadających i naprzemianległych,
- stosować własności trójkąta równoramiennego i równobocznego,
- korzystać z własności równoległoboku, rombu i trapezu (kąty przy ramieniu dają 180°).

Jak rozpoznać zadanie

- rysunek z kilkoma kątami → szukaj trójkąta, w którym znasz dwa kąty,
- „odcinek równoległy do ramienia” → powstaje równoległobok,
- trójkąt równoramienny → kąty przy podstawie są równe,
- „kąt między wysokościami” → korzystaj z czworokąta z dwoma kątami prostymi.

Teoria w pigułce

- Suma kątów wewnętrznych: trójkąt 180° , czworokąt 360° , n -kąt $(n - 2) \cdot 180^\circ$.
- Kąty przyległe sumują się do 180° ; kąty wierzchołkowe są równe.
- Przy prostych równoległych kąty odpowiadające i naprzemianległe są równe.
- W trapezie kąty przy tym samym ramieniu sumują się do 180° .
- W równoległoboku kąty przeciwległe są równe, a sąsiednie sumują się do 180° .
- W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe; w równobocznym każdy kąt ma 60° .

Σ Najważniejsze wzory

suma kątów trójkąta = 180°

suma kątów czworokąta = 360°

$(n - 2) \cdot 180^\circ$

kąty przy ramieniu trapezu = 180°

Algorytm krok po kroku

1. Zaznacz na rysunku wszystkie znane kąty.
2. Poszukaj trójkąta, w którym znasz dwa kąty — trzeci policzysz od razu.
3. Wykorzystaj równoległości (kąty odpowiadające, naprzemianległe).
4. Przechodź „krok po kroku” do szukanego kąta, zapisując każde przejście.
5. Sprawdź sumę kątów w figurze (dla czworokąta 360°).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X suma kątów czworokąta = 180°	✓ 360°	to dwa trójkąty
X kąty przy ramieniu trapezu są równe	✓ sumują się do 180°	równe są w trapezie równoramiennym przy podstawie
X trójkąt równoramienny ma kąt 60°	✓ to trójkąt równoboczny	równoramienny ma dwa równe kąty
X zgadywanie z rysunku	✓ rysunek bywa nie w skali	licz, nie mierz

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 18 z egzaminu 2025

W trapezie $ABCD$ kąt ABC ma miarę 48° . Odcinek EC dzieli trapez na równoległobok $AECD$ i trójkąt EBC , w którym kąt BCE ma miarę 57° . Oblicz miary kątów DAB , BCD i CDA .

ROZWIĄZANIE

- W trapezie kąty przy ramieniu BC sumują się do 180° : $|\angle BCD| = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$.
- $|\angle ECD| = 132^\circ - 57^\circ = 75^\circ$, a w równoległoboku $AECD$ kąt DAE jest przeciwległy, więc $|\angle DAB| = 75^\circ$.
- Kąty przy ramieniu AD : $|\angle CDA| = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.
- Sprawdzenie: $75^\circ + 48^\circ + 132^\circ + 105^\circ = 360^\circ$ ✓

Odpowiedź: $|\angle DAB| = 75^\circ$, $|\angle BCD| = 132^\circ$, $|\angle CDA| = 105^\circ$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie miary dwóch kątów trapezu,
- 2 pkt — obliczenie wszystkich trzech kątów z uzasadnieniem.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 18	2 pkt	kąty trapezu podzielonego na równoległobok i trójkąt (48° , 57°)
2024	zad. 5	1 pkt	kąt α w trapezie z odcinkiem równoległym do ramienia
2023	zad. 15	1 pkt	czworokąt z kątem 131° podzielony na trójkąt równoboczny i równoramienny
2022	zad. 13	1 pkt	trójkąt z kątem 35° i odcinkiem dzielącym kąt
2021	zad. 12	1 pkt	kąt między dwiema wysokościami trójkąta

Trening: zadania **OS10.1–OS10.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS11 Pola i obwody figur płaskich

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

4/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,4 pkt (0–5)

FORMY ZADAŃ

zadania zamknięte (obwód, porównanie pól) +
otwarte 3 pkt (pole figury złożonej)

 **Sygnal:** Podziel figurę na części albo odejmij od całości — zawsze z jednostką.

Co musisz umieć

- stosować wzory na pola i obwody: prostokąta, trójkąta, równoległoboku, rombu i trapezu,
- dzielić figurę złożoną na prostsze części albo odejmować pola,
- obliczać pole, znając przekątne (romb, deltoid) lub wysokość,
- porównywać pola i obwody figur oraz przeliczać jednostki pola.

Jak rozpoznać zadanie

- figura złożona na rysunku → podzielić na trójkąty i prostokąty albo odejmij od całości,
- „podzielono na kwadraty” → oznacz bok najmniejszego kwadratu literą,
- dane są przekątne rombu → $P = \frac{e \cdot f}{2}$,
- „czy można ułożyć kwadrat o polu...” → porównaj sumę pól i długości boków.

Teoria w pigułce

- Prostokąt: $P = ab$, $Obw = 2(a + b)$. Kwadrat: $P = a^2$, $Obw = 4a$.
- Trójkąt: $P = \frac{a \cdot h}{2}$ — wysokość musi być poprowadzona do boku a .
- Równoległobok: $P = a \cdot h$; romb: $P = a \cdot h = \frac{e \cdot f}{2}$.
- Trapez: $P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$, gdzie a, b to podstawy.
- Pole figury złożonej: suma pól części albo pole całości minus pola wycięte.
- Jednostki pola: $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$.

Σ Najważniejsze wzory

$$P_{\text{trójkąta}} = \frac{ah}{2}$$

$$P_{\text{trapezu}} = \frac{(a + b)h}{2}$$

$$P_{\text{rombu}} = \frac{ef}{2}$$

$$P_{\text{równoległoboku}} = ah$$

$$Obw_{\text{prostokąta}} = 2(a + b)$$

Algorytm krok po kroku

1. Narysuj lub odczytaj figurę i zaznacz dane.
2. Zdecyduj: dzielimy na części czy odejmujemy od większej figury?
3. Zapisz wzory na pola poszczególnych części.
4. Wykonaj obliczenia i zsumuj (albo odejmij) pola.
5. Podaj wynik z jednostką — pole w cm^2 , obwód w cm.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
✗ $P = \frac{ah}{2}$ z dowolną wysokością	✓ wysokość do tego samego boku	para bok–wysokość
✗ pole trapezu bez dzielenia przez 2	✓ $\frac{(a+b)h}{2}$	to średnia podstaw razy wysokość
✗ $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ cm}^2$	✓ $10\,000 \text{ cm}^2$	skala pola to kwadrat skali długości
✗ obwód liczony z pola	✓ to różne wielkości	równe pola nie oznaczają równych obwodów

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 20 z egzaminu 2025

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 15 cm . Boki AB i CD podzielono na trzy równe części, a boki AD i BC — na pięć równych części. Punkt E leży na boku BC w odległości 6 cm od B , a punkt F na boku CD w odległości 5 cm od C . Oblicz pole czworokąta $AECF$.

ROZWIĄZANIE

- Pole kwadratu: $15 \cdot 15 = 225 \text{ cm}^2$.
- Trójkąt ABE : $P = \frac{15 \cdot 6}{2} = 45 \text{ cm}^2$ (przyprostokątne $AB = 15$ i $BE = 6$).
- Trójkąt ADF : $|DF| = 15 - 5 = 10 \text{ cm}$, więc $P = \frac{15 \cdot 10}{2} = 75 \text{ cm}^2$.
- $P_{AECF} = 225 - 45 - 75 = 105 \text{ cm}^2$.

Odpowiedź: 105 cm^2

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — poprawne odczytanie długości BE i DF ,
- 2 pkt — obliczenie pól obu trójkątów,
- 3 pkt — obliczenie pola czworokąta 105 cm^2 .

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 11, 13, 20	5 pkt	pole trójkąta w P/F; obwód trapezu złożonego z kwadratu, trójkąta i rombu; pole czworokąta $AECF$ (3 pkt)
2024	zad. 13, 14	2 pkt	stosunek boków prostokąta podzielonego na 6 kwadratów; pole trójkąta prostokątnego
2023	zad. 14, 18	4 pkt	czy z trzech figur można ułożyć kwadrat o polu 400; pole czworokąta z przekątną (3 pkt)
2022	zad. 15	1 pkt	trapez zbudowany z trzech jednakowych trójkątów prostokątnych
2021	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **OS11.1–OS11.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS12 Twierdzenie Pitagorasa

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

4/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,4 pkt (0–5)

FORMY ZADAŃ

zadanie zamknięte (trójki pitagorejskie, długość odcinka) + otwarte 3 pkt (pole z wykorzystaniem Pitagorasa)

 **Sygnal:** Kąt prosty + dwa boki $\rightarrow a^2 + b^2 = c^2$; w rombie połowy przekątnych.

Co musisz umieć

- stosować twierdzenie Pitagorasa do obliczania boków trójkąta prostokątnego,
- rozpoznawać trójki pitagorejskie (3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25) i ich wielokrotności,
- obliczać przekątną prostokąta i kwadratu oraz wysokość trójkąta równobocznego,
- łączyć Pitagorasa ze wzorami na pola (romb, trapez, trójkąt).

Jak rozpoznać zadanie

- w figurze jest kąt prosty i znasz dwa boki $\rightarrow$ Pitagoras,
- romb z przekątnymi $\rightarrow$ przekątne dzielą się na połowy i są prostopadłe,
- „wysokość opuszczona na przekątną” $\rightarrow$ dwa razy pole tego samego trójkąta,
- liczby 6, 8, 10 albo 9, 12, 15 $\rightarrow$ wielokrotności trójki 3, 4, 5.

Teoria w pigułce

- W trójkącie prostokątnym: $a^2 + b^2 = c^2$, gdzie c to przeciwprostokątna (najdłuższy bok).
- Twierdzenie odwrotne: jeśli $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt jest prostokątny.
- Przekątna kwadratu o boku a : $d = a\sqrt{2}$; wysokość trójkąta równobocznego: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- W rombie przekątne przecinają się w połowie pod kątem prostym — tworzą cztery trójkąty prostokątne.
- Pole trójkąta można liczyć na dwa sposoby, co pozwala wyznaczyć wysokość: $\frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2}$.
- Trójki pitagorejskie: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25) oraz ich wielokrotności.

Σ Najważniejsze wzory

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$d_{\text{kwadratu}} = a\sqrt{2}$$

$$h_{\Delta \text{równobocznego}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2}$$

Algorytm krok po kroku

1. Znajdź trójkąt prostokątny (często trzeba go dorysować).
2. Ustal, który bok jest przeciwprostokątną.
3. Zapisz $a^2 + b^2 = c^2$ i podstaw dane.
4. Oblicz brakujący bok (pamiętaj o pierwiastku).
5. Wykorzystaj wynik w dalszej części zadania (pole, obwód).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times c = a + b$	$\checkmark c = \sqrt{a^2 + b^2}$	nie dodaje się boków
$\times$ przeciwprostokątna to dowolny bok	$\checkmark$ najdłuższy, naprzeciw kąta prostego	sprawdź rysunek
$\times$ w rombie przekątna to bok	$\checkmark$ przekątne dzielą się na połowy	$\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2$
$\times$ zapomniane pierwiastkowanie	$\checkmark c^2 = 169 \Rightarrow c = 13$	wynik to długość, nie kwadrat

🔗 Przykład wzorcowy typ zadania 18 z egzaminu 2022

Romb $ABCD$ ma obwód **52** cm, a przekątna AC ma długość **24** cm. Oblicz pole tego rombu.

ROZWIĄZANIE

- Bok rombu: $52 : 4 = 13$ cm.
- Przekątne rombu dzielą się na połowy i są prostopadłe: połowa AC to 12 cm.
- Z Pitagorasa dla połowy drugiej przekątnej: $12^2 + x^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow x = 5$ cm, więc $BD = 10$ cm.
- $P = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120 \text{ cm}^2$.

Odpowiedź: 240 cm²

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie boku rombu,
- 2 pkt — obliczenie połowy drugiej przekątnej z twierdzenia Pitagorasa,
- 3 pkt — obliczenie pola rombu.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	—	0 pkt	pośrednio w zad. 13 (trójkąt 6, 8, 10)
2024	zad. 17	3 pkt	pole trapezu: $ AE ^2 = 15^2 + 20^2$, trójkąt równoramienny
2023	zad. 12	1 pkt	obwód prostokąta z odcinkiem $EF = 10$ cm i $EC = 6$ cm
2022	zad. 18	3 pkt	romb o obwodzie 52 cm i przekątnej 24 cm — pole
2021	zad. 8, 9, 19	5 pkt	trójki pitagorejskie (2 zadania); prostokąt 12×16 — wysokość opuszczona na przekątną (3 pkt)

Trening: zadania **OS12.1–OS12.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS13 Graniastosłupy i ostrosłupy

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 3,2 pkt (2–4)

FORMY ZADAŃ

zadanie zamknięte (liczba wierzchołków, pole powierzchni) + otwarte 2–3 pkt (objętość, siatka)

 **Sygnał:** Ostrosłup $\rightarrow \frac{1}{3}P_p H$; brakujący wymiar $\rightarrow$ Pitagoras w ścianie bocznej.

Co musisz umieć

- obliczać pole powierzchni i objętość graniastosłupów oraz ostrosłupów,
- rozpoznawać siatki brył i odczytywać z nich wymiary,
- liczyć wierzchołki, krawędzie i ściany brył,
- stosować twierdzenie Pitagorasa do wysokości ściany bocznej i krawędzi bocznej.

Jak rozpoznać zadanie

- „ostrosłup prawidłowy czworokątny” $\rightarrow$ podstawa kwadrat, 4 jednakowe ściany boczne,
- „siatka bryły” $\rightarrow$ z wymiarów siatki odczytaj krawędzie podstawy i wysokość,
- „ile wierzchołków ma graniastosłup” $\rightarrow$ dwa razy tyle, co w podstawie,
- „suma długości krawędzi” $\rightarrow$ policz osobno krawędzie podstawy i boczne.

Teoria w pigułce

- Graniastosłup: $V = P_p \cdot H$, $P_c = 2P_p + P_b$; ma $2n$ wierzchołków i $3n$ krawędzi (n — liczba boków podstawy).
- Ostrosłup: $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$, $P_c = P_p + P_b$; ma $n + 1$ wierzchołków i $2n$ krawędzi.
- Ostrosłup prawidłowy czworokątny: podstawa to kwadrat, ściany boczne to 4 jednakowe trójkąty równoramienne.
- Pole ściany bocznej: $\frac{a \cdot h}{2}$, gdzie h — wysokość ściany bocznej (apotema).
- Związek: $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, gdzie b — krawędź boczna, h — wysokość ściany bocznej.
- Prostopadłościan o krawędziach a, b, c : $V = abc$, $P_c = 2(ab + bc + ac)$.

Σ Najważniejsze wzory

$$V_{\text{grania}} = P_p H$$

$$V_{\text{ostros}} = \frac{1}{3} P_p H$$

$$P_c = 2(ab + bc + ac)$$

$$P_{\text{ściany}} = \frac{ah}{2}$$

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Algorytm krok po kroku

1. Rozpoznaj bryłę i narysuj (lub wyobraź) jej podstawę.
2. Wypisz dane: krawędź podstawy, wysokość bryły, wysokość ściany bocznej.
3. Dobierz wzór: objętość czy pole powierzchni?
4. Jeśli brakuje wymiaru — użyj twierdzenia Pitagorasa w odpowiednim trójkącie.
5. Podaj wynik z jednostką (cm^2 dla pola, cm^3 dla objętości).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹLE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times V_{\text{ostrosłupa}} = P_p H$	$\checkmark \frac{1}{3} P_p H$	jedna trzecia!
$\times$ pole powierzchni bocznej = pole jednej ściany	$\checkmark$ suma wszystkich ścian bocznych	w ostrosłupie prawidłowym $\cdot 4$
$\times$ wysokość bryły = wysokość ściany bocznej	$\checkmark$ to różne odcinki	łączy je Pitagoras
$\times$ jednostki: cm^2 dla objętości	$\checkmark \text{cm}^3$	objętość jest trójwymiarowa

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 21 z egzaminu 2025

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ściany bocznej poprowadzona do krawędzi podstawy jest równa **12 cm**, a pole jednej ściany bocznej wynosi **108 cm²**. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

ROZWIĄZANIE

- Ściana boczna to trójkąt: $\frac{a \cdot 12}{2} = 108 \Rightarrow 6a = 108 \Rightarrow a = 18 \text{ cm}$.
- Wysokość ściany bocznej dzieli ją na dwa trójkąty prostokątne o przyprostokątnych **12 cm** i $\frac{a}{2} = 9 \text{ cm}$.
- Krawędź boczna: $b = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$.
- Suma krawędzi: $4a + 4b = 4 \cdot 18 + 4 \cdot 15 = 72 + 60 = 132 \text{ cm}$.

Odpowiedź: 132 cm

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie krawędzi podstawy $a = 18 \text{ cm}$,
- 2 pkt — obliczenie krawędzi bocznej $b = 15 \text{ cm}$,
- 3 pkt — obliczenie sumy długości wszystkich krawędzi.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 15, 21	4 pkt	pole powierzchni prostopadłościanu $5 \times 6 \times 7$; suma krawędzi ostrosłupa (3 pkt)
2024	zad. 15, 19	3 pkt	pola ostrosłupa prawidłowego czworokątnego; objętość ostrosłupa i wysokości wież (2 pkt)
2023	zad. 9, 19	4 pkt	liczba wierzchołków graniastoslupa; objętość klocka z figury (3 pkt)
2022	zad. 19	3 pkt	siatka graniastoslupa prawidłowego czworokątnego — objętość
2021	zad. 14, 15	2 pkt	skrzynia-prostopadłościan; dwa ostrosłupy o polu powierzchni 80 cm²

Trening: zadania **OS13.1–OS13.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS14 Układ współrzędnych i odczyt z wykresu

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

2/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 0,6 pkt (0–2)

FORMY ZADAŃ

1–2 zadania zamknięte: współrzędne punktów, przesunięcia, odczyt z wykresu proporcjonalności

 **Sygnal:** Przesunięcie to dodawanie do współrzędnych; równoległobok — równe wektory boków.

Co musisz umieć

- odczytywać i zapisywać współrzędne punktów,
- wyznaczać współrzędne punktu po przesunięciu o daną liczbę jednostek,
- wyznaczać czwarty wierzchołek równoległoboku,
- odczytywać dane z wykresu zależności dwóch wielkości.

Jak rozpoznać zadanie

- „zwiększ współrzędną x o...” → dodaj do pierwszej liczby,
- „wierzchołki równoległoboku” → przeciwległe boki są równoległe i równe,
- wykres przez początek układu → proporcjonalność prosta,
- „ile potrzeba, aby pokryć...” → odczytaj wartość z wykresu i przelicz.

Teoria w pigułce

- Punkt zapisujemy jako (x, y) : najpierw w prawo/w lewo, potem w górę/w dół.
- Przesunięcie: $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$.
- W równoległoboku $ABCD$ zachodzi: $\vec{AB} = \vec{DC}$, więc $B = A + (C - D)$.
- Długość odcinka poziomego: $|x_2 - x_1|$; pionowego: $|y_2 - y_1|$.
- Wykres proporcjonalności prostej to półprosta z początkiem w $(0, 0)$; współczynnik odczytujemy z dowolnego punktu.
- Przy odczycie z wykresu zawsze sprawdzaj wartość jednej działki na obu osiach.

Σ Najważniejsze wzory

$$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$$

$$B = A + (C - D)$$

$$|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|$$

Algorytm krok po kroku

1. Zaznacz dane punkty w układzie (lub wyobraź sobie ich położenie).
2. Zapisz przekształcenie współrzędnych zgodnie z treścią.
3. Przy równoległoboku skorzystaj z równości wektorów przeciwległych boków.
4. Przy wykresie odczytaj dwa punkty i wyznacz zależność.
5. Sprawdź wynik na rysunku — czy punkt leży tam, gdzie powinien.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹLE	DOBRCZE	DLACZEGO
X zamiana kolejności współrzędnych	✓ (x, y)	najpierw pozioma
X przesunięcie „w dół” jako $+$	✓ w dół to $-$	kierunek osi y
X czwarty wierzchołek „na oko”	✓ z równości wektorów	sprawdź rachunkiem
X odczyt bez sprawdzenia działki	✓ sprawdź skalę osi	działka bywa równa 5 lub 10

🔗 Przykład wzorcowy typ zadania 14 z egzaminu 2025

W układzie współrzędnych zaznaczono wierzchołki równoległoboku $ABCD$: $A = (-3, -2)$, $C = (4, 2)$, $D = (-1, 2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka B .

ROZWIĄZANIE

1. W równoległoboku $ABCD$ boki AB i DC są równoległe i równej długości, więc $\vec{AB} = \vec{DC}$.
2. $\vec{DC} = (4 - (-1), 2 - 2) = (5, 0)$.
3. $B = A + (5, 0) = (-3 + 5, -2 + 0) = (2, -2)$.

Odpowiedź: $B = (2, -2)$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — wykorzystanie własności równoległoboku,
- 2 pkt — obliczenie współrzędnych punktu B .

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	zad. 14	1 pkt	współrzędne czwartego wierzchołka równoległoboku
2024	zad. 11, 12	2 pkt	wykres proporcjonalności (farba); przesunięcie punktu o wektor
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2021	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **OS14.1–OS14.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

OS15 Obliczenia zegarowe, kalendarzowe i jednostki

PRIORYTET
B

CZĘSTOTLIWOŚĆ
1/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU
śr. 0,2 pkt (0–1)

FORMY ZADAŃ
1 zadanie zamknięte co kilka lat: godziny
odjazdu, czas trwania, zamiana jednostek

 **Sygnal:** Najpierw wróć do rozkładu (odejmij opóźnienie), potem odejmij czas jazdy.

Co musisz umieć

- dodawać i odejmować czas zapisany w godzinach i minutach,
- obliczać godzinę rozpoczęcia lub zakończenia wydarzenia,
- zamieniać jednostki długości, masy, pola, objętości i czasu,
- przeliczać jednostki prędkości i wielkości pamięci.

Jak rozpoznać zadanie

- „przyjechał z opóźnieniem” → najpierw wróć do rozkładu, potem licz,
- godziny w formacie **17:31** → licz w minutach albo rozdziel godziny i minuty,
- zamiana **m²** na **cm²** → mnożnik **10 000**, a nie **100**,
- „ile razy większy plik” → iloraz, uwaga na MB i GB.

Teoria w pigułce

- **1 h = 60 min, 1 min = 60 s; 2 h 54 min = 174 min.**
- Odejmowanie czasu: zamień godziny na minuty albo pożyczaj **60** minut z godziny.
- Długość: **1 m = 100 cm**; pole: **1 m² = 10 000 cm²**; objętość: **1 m³ = 1 000 000 cm³**.
- **1 l = 1 dm³ = 1000 cm³; 1 m³ = 1000 l.**
- Masa: **1 t = 1000 kg, 1 kg = 1000 g.**
- Pamięć: **1 GB = 1024 MB** (w zadaniach szkolnych często przyjmuje się **1000 MB**).

Σ Najważniejsze wzory

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min}$$

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$$

$$1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3$$

Algorytm krok po kroku

1. Zamień wszystkie wielkości na tę samą jednostkę (zwykle najmniejszą).
2. Wykonaj działanie (dodawanie, odejmowanie, dzielenie).
3. Wróć do jednostki, o którą pyta zadanie.
4. Przy godzinach sprawdź, czy nie przekroczyłeś północy.
5. Sprawdź sens wyniku (czy czas jazdy jest realny).

Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRE	DLACZEGO
X 2 h 54 min = 2,54 h	✓ 2,9 h	minuty dzielimy przez 60
X 1 m² = 100 cm²	✓ 10 000 cm²	kwadrat mnożnika
X odejmowanie minut bez pożyczki	✓ pożycz 60 minut	17:10 – 25 min = 16:45
X opóźnienie dodane dwa razy	✓ raz — do rozkładu	czytaj uważnie

 Przykład wzorcowy typ zadania 10 z egzaminu 2024

Podróż pociągiem trwa planowo **2** godziny i **54** minuty. Pociąg wyjechał punktualnie, ale przyjechał z czterominutowym opóźnieniem — o godzinie **17:31**. Oblicz, o której godzinie pociąg wyjechał.

ROZWIĄZANIE

- Planowa godzina przyjazdu: **17:31** — 4 min = **17:27**.
- Pociąg wyjechał punktualnie, więc odjazd to **17:27** — 2 h 54 min.
- 17:27** — 2 h = **15:27**, a **15:27** — 54 min = **14:33**.

Odpowiedź: o godzinie 14:33

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — wskazanie godziny **14:33** (np. po uwzględnieniu opóźnienia).

 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2025	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2024	zad. 10	1 pkt	pociąg: czas jazdy 2 h 54 min , przyjazd z 4 -minutowym opóźnieniem
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	—	0 pkt	jednostki pośrednio w zad. 10 (megabajty)
2021	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **OS15.1–OS15.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

Ściąga — wszystkie klucze na jednej stronie

Sygnał rozpoznawczy i 3–4 najważniejsze wzory każdego klucza. Przejrzyj ją rano przed maturą.

OS01	Liczby i działania: ułamki, liczby ujemne, oś liczbowa Ułamki i nawiasy → wspólny mianownik, potem kolejność działań i znaki.	$a : \frac{p}{q} = a \cdot \frac{q}{p} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad -(a-b) = -a+b$ $c \frac{a}{b} = \frac{cb+a}{b}$
OS02	Procenty i obliczenia praktyczne Ustal 100% , potem licz krok po kroku; procenty mnożymy, nie dodajemy.	$p\% \cdot a = \frac{p}{100}a \quad \frac{a}{b} \cdot 100\% \quad a(1 + \frac{p}{100}) \quad a(1 - \frac{p}{100})$
OS03	Potęgi i pierwiastki Sprowadź do wspólnej podstawy, potem dodawaj lub odejmuj wykładniki.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad a^n b^n = (ab)^n$
OS04	Podzielność i własności liczb naturalnych Cechy podzielności i zapis $a = kn + r$ zamiast dzielenia pisemnego.	$a = k \cdot n + r \quad \text{NWD}(a, b) \cdot \text{NWW}(a, b) = a \cdot b \quad \text{suma cyfr} \div 3$ $\text{dwie ostatnie cyfry} \div 4$
OS05	Wyrażenia algebraiczne i przekształcanie wzorów Tłumacz zdanie po kolei; nawias przed mnożeniem; minus zmienia znaki.	$a(b+c) = ab+ac \quad -(a-b) = -a+b$ $L = 2a + 2b + c \Rightarrow a = \frac{L-2b-c}{2}$
OS06	Równania i zadania tekstowe z równaniem Jedno oznaczenie → wszystkie wielkości przez nie → równanie z treści.	$ax + b = c \Rightarrow x = \frac{c-b}{a} \quad \text{mnożenie przez wspólny mianownik}$ $x + n, kx, \frac{x}{k}$
OS07	Proporcjonalność, skala i prędkość Skala działa na długości; pola zmieniają się z kwadratem skali.	$s = v \cdot t \quad v = \frac{s}{t} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \quad \text{skala } 1 : n \rightarrow \text{pole} \cdot n^2$
OS08	Średnia arytmetyczna i odczyt danych Zamień średnią na sumę: suma = średnia razy liczba danych.	$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad \text{suma} = \bar{x} \cdot n \quad \frac{a}{b} \cdot 100\%$
OS09	Prawdopodobieństwo i zliczanie Policz sprzyjające i wszystkie; przy zakresach pamiętaj o „+1”.	$P = \frac{ A }{ \Omega } \quad P(A') = 1 - P(A) \quad \text{liczba liczb od } a \text{ do } b: b - a + 1$
OS10	Kąty i własności trójkątów oraz czworokątów Znajdź trójkąt z dwoma znanymi kątami i idź krok po kroku.	$\text{suma kątów trójkąta} = 180^\circ \quad \text{suma kątów czworokąta} = 360^\circ$ $(n-2) \cdot 180^\circ \quad \text{kąty przy ramieniu trapezu} = 180^\circ$
OS11	Pola i obwody figur płaskich Podziel figurę na części albo odejmij od całości — zawsze z jednostką.	$P_{\text{trójkąta}} = \frac{ah}{2} \quad P_{\text{trapezu}} = \frac{(a+b)h}{2} \quad P_{\text{rombu}} = \frac{ef}{2}$ $P_{\text{równoległoboku}} = ah$
OS12	Twierdzenie Pitagorasa Kąt prosty + dwa boki → $a^2 + b^2 = c^2$; w rombie połowy przekątnych.	$a^2 + b^2 = c^2 \quad d_{\text{kwadratu}} = a\sqrt{2} \quad h_{\Delta \text{równobocznego}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2}$
OS13	Graniastosłupy i ostrosłupy Ostrosłup → $\frac{1}{3}P_p H$; brakujący wymiar → Pitagoras w ścianie bocznej.	$V_{\text{grania}} = P_p H \quad V_{\text{ostros}} = \frac{1}{3}P_p H \quad P_c = 2(ab+bc+ac)$ $P_{\text{ściany}} = \frac{ah}{2}$
OS14	Układ współrzędnych i odczyt z wykresu Przesunięcie to dodawanie do współrzędnych; równoległobok — równe wektory boków.	$(x, y) \rightarrow (x+a, y+b) \quad B = A + (C-D) \quad x_2 - x_1 ,$ $ y_2 - y_1 $
OS15	Obliczenia zegarowe, kalendarzowe i jednostki Najpierw wróć do rozkładu (odejmij opóźnienie), potem odejmij czas jazdy.	$1 \text{ h} = 60 \text{ min} \quad 1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 \quad 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l} \quad 1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3$

Źródła i metodologia

Analiza dotyczy powtarzalnych **umiejętności i schematów**, a nie przewidywania treści konkretnych zadań. Częstotliwość i punkty policzono na podstawie **pięciu** arkuszy CKE z egzaminu ósmoklasisty z matematyki (termin główny) z lat **2021–2025**, rozpisanych zadanie po zadaniu w serwisie matematix.pl. Arkusze z lat 2021–2024 miały 19 zadań i 25 pkt, a arkusz z 2025 r. — 21 zadań i 30 pkt.

Zadania treningowe są **autorskie** — odwzorowują typy zadań z arkuszy, ale nie są ich kopiami. Wszystkie odpowiedzi zostały zweryfikowane rachunkowo.

- CKE — Egzamin ósmoklasisty z matematyki: arkusze, zasady oceniania i wymagania egzaminacyjne,
- matematix.pl — arkusze egzaminu ósmoklasisty z rozwiązaniami (2019–2025),
- matematix.pl/poradnik-osmoklasisty — interaktywna wersja tego opracowania: zadania z zapisem postępów.