

MATURA Z MATEMATYKI · MATURA ROZSZERZONA

ZADANIA

10 zadań na każdy klucz — w formacie maturalnym

Po 10 zadań treningowych na każdy klucz — w formacie maturalnym (ABCD, prawda/fałsz, odpowiedź krótka, zadania otwarte z punktacją), od łatwych do wymagających.

20

kluczy

200

zadań treningowych

100%

z rozwiązaniami

Analiza: majowe arkusze CKE 2020–2026 (7 arkuszy: Formuła 2015 i Formuła 2023), poziom rozszerzony. Zadania treningowe są autorskie i odwzorowują typy umiejętności — nie są kopiami zadań CKE.

Jak pracować z zadaniami

Zadania są ułożone **progresywnie**: od rozpoznania schematu (★★★) przez standard maturalny (★★★) do zadań wymagających (★★★). Przy każdym zadaniu podano typ i liczbę punktów, jak w arkuszu CKE.

- **Zamknięte (ABCD) i prawda/fałsz** — 1 pkt; w P/F punkt tylko za komplet poprawnych ocen.
- **Odpowiedź krótka** — wpisz sam wynik (czasem z krótkim uzasadnieniem).
- **Otwarte** — zapisz pełne rozwiązanie w kratce; porównaj je potem ze **schematem punktowania** w pliku rozwiązań.

Odpowiedzi skrócone znajdziesz na końcu pliku — celowo oddzielone od zadań, żeby nie podglądać.

Spis treści

PR01	Funkcja wykładnicza i logarytmiczna
PR02	Dowody algebraiczne i nierówności
PR03	Wartość bezwzględna — równania i nierówności
PR04	Wielomiany i nierówności wymierne
PR05	Ciągi arytmetyczne i geometryczne — zadania łączone
PR06	Szereg geometryczny nieskończony
PR07	Granice ciągów i funkcji
PR08	Kombinatoryka rozszerzona
PR09	Prawdopodobieństwo: klasyczne, warunkowe, Bernoulli
PR10	Tożsamości trygonometryczne
PR11	Równania trygonometryczne
PR12	Planimetria z twierdzeniem sinusów i cosinusów
PR13	Okręgi i czworokąty wpisane/opisane
PR14	Geometria analityczna: proste, punkty, pola
PR15	Okrąg w układzie współrzędnych
PR16	Stereometria rozszerzona
PR17	Parametr, funkcja kwadratowa i wzory Viète'a
PR18	Pochodna, monotoniczność i ekstrema
PR19	Optymalizacja z pochodną
PR20	Dowód geometryczny i zadania mieszane

Odpowiedzi

PR01 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

🔑 Dziedzina → wspólna podstawa lub podstawienie → porównanie (podstawa < 1 odwraca znak).

PR01.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0-2 pkt

Rozwiąż równanie $4^x = 8^{x-1}$.

PR01.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0-2 pkt

Rozwiąż równanie $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3$.

PR01.3 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} > 27$.

PR01.4 OTWARTE ★★☆☆

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) \geq -3$.

PR01.5 OTWARTE ★★☆☆

0-2 pkt

Masę substancji (w gramach) po t dobach opisuje wzór $m(t) = 5 \cdot 0,8^t$. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa substancji po raz pierwszy będzie mniejsza od 1 grama.

PR01.6 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Temperatura kawy (w $^{\circ}\text{C}$) po t minutach jest równa $T(t) = 20 + 60 \cdot k^t$. Po 10 minutach kawa ma 50°C . Oblicz temperaturę kawy po 20 minutach.

PR01.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wykaż, że jeżeli $\log_2 3 = a$, to $\log_6 24 = \frac{a+3}{a+1}$.

PR01.8 OTWARTE ★★★

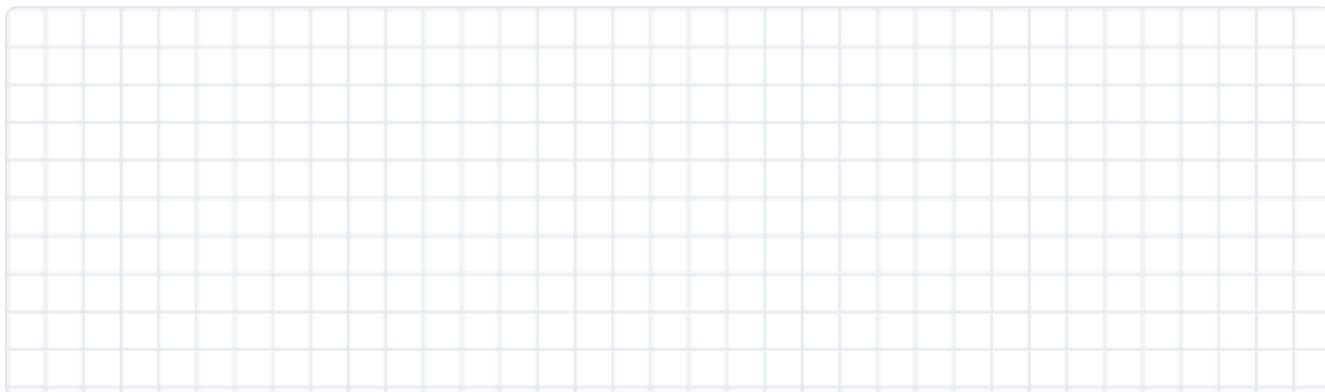
0–3 pkt

Rozwiąż równanie $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

PR01.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

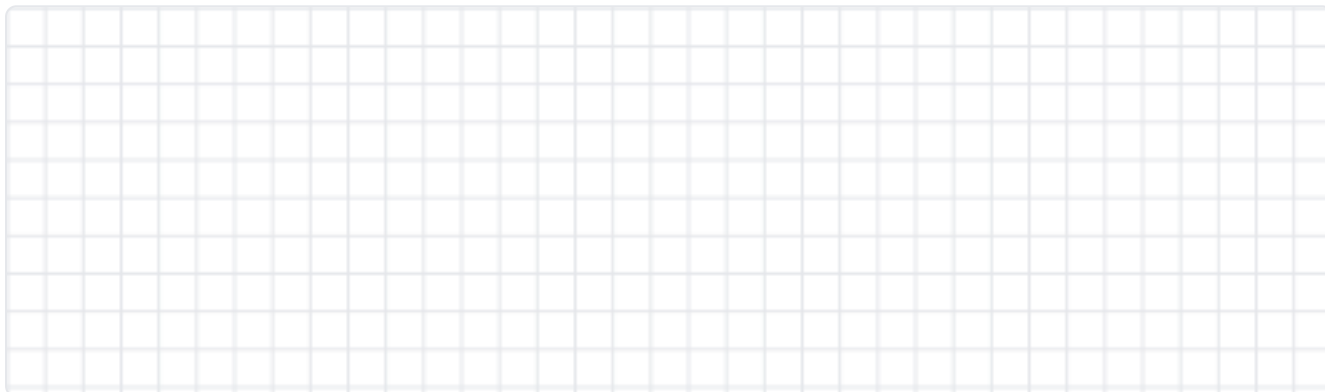
Rozwiąż nierówność $\log_2 x + \log_2(x - 2) < 3$.



PR01.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $\log_2(x^2 - 1) = 2 + \log_2(x - 1)$.



PR02 Dowody algebraiczne i nierówności

🔑 Wszystko na jedną stronę → rozkład z $(a - b)^2$ → znak każdego czynnika → wniosek.

PR02.1 OTWARTE ★★★

0-2 pkt

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

PR02.2 OTWARTE ★★★

0-2 pkt

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x prawdziwa jest nierówność $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

PR02.3 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$.

PR02.4 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4 - 4x + 3 \geq 0$.

PR02.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

PR02.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Liczby rzeczywiste a i b spełniają warunki $a + b = 2$ oraz $a^2 + b^2 \leq 2$. Wykaż, że $a = b = 1$.

PR02.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność $(a + b)^3 \geq 4ab(a + b)$.

PR02.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

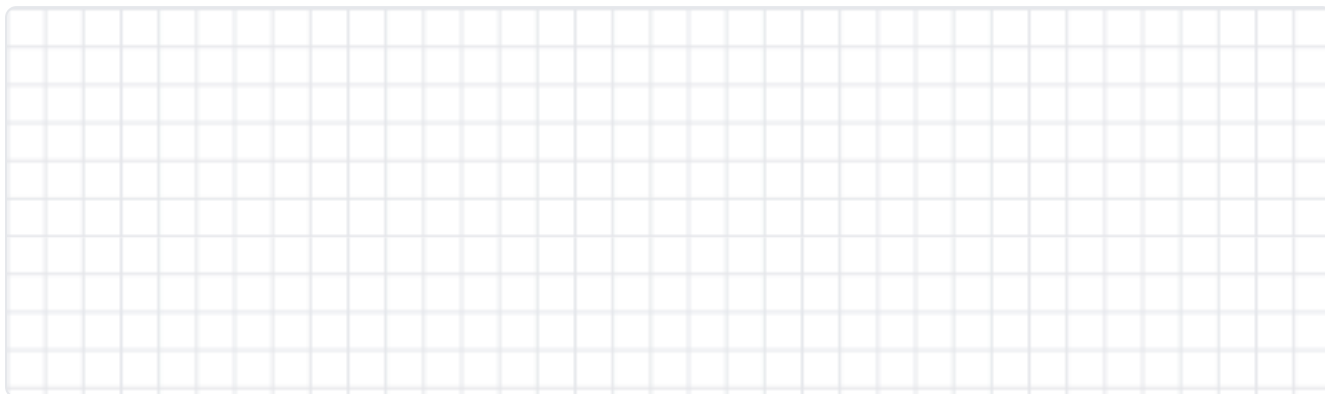
Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

PR02.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

Liczby dodatnie a i b spełniają warunek $a + b = 1$. Wykaż, że $ab \leq \frac{1}{4}$ oraz $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$.



PR03

PR03.1

ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Rozwiąż równanie $|2x - 3| = 5$.

PR03.2

ODPOWIEDŹ KRÓTKA

0-2 pkt

Rozwiąż równanie $|x + 1| + |x - 3| = 4$.

PR03.3OTWARTE

0–2 pkt

Rozwiąż nierówność $|x - 2| < 2x + 1$.

PR03.4OTWARTE

0–3 pkt

Rozwiąż nierówność $|x + 2| - |x - 1| \geq 1$.

PR03.5 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

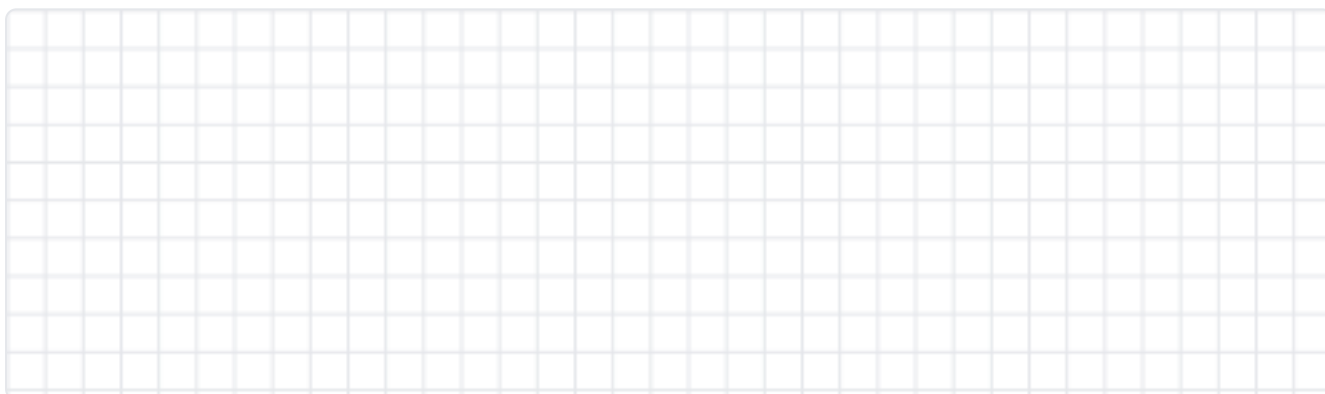
Rozwiąż nierówność $|x - 1| + 2|x + 2| > 7$.



PR03.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 2x \leq 9$.



PR03.7 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Rozwiąż nierówność $|x^2 - 4| < 3x$.



PR03.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Wyznacz liczbę rozwiązań równania $|x^2 - 4x| = m$ w zależności od parametru m .

PR03.9 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Rozwiąż równanie $|x - 1| = |2x + 4|$.

PR03.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $|x + 3| + |x - 2| = 3x + 1$.

PR04

🔑 Pierwiastek z dzielników wyrazu wolnego → Horner → wężyk. Ułamki: wspólny mianownik, nie mnożyć!

PR04.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★☆☆

0-2 pkt

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ przez dwumian $x - 2$.

PR04.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Wyznacz m , dla którego liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + mx^2 - 4x + 4$.

PR04.3 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Rozwiąż nierówność $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \geq 0$.

PR04.4 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$.

PR04.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż nierówność $\frac{x+1}{x-2} \geq 2$.

PR04.6 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Rozwiąż nierówność $\frac{x^2-1}{x+3} \leq x-1$.

PR04.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ jest podzielny przez dwumiany $x-1$ oraz $x+2$. Wyznacz a i b oraz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

PR04.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 1$ jest równa 3 , a przez $x + 2$ jest równa -3 . Wyznacz resztę z dzielenia $W(x)$ przez $(x - 1)(x + 2)$.

PR04.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wyznacz wszystkie wartości m , dla których wielomian $W(x) = x^3 - 3x + m$ ma pierwiastek podwójny.

PR04.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż nierówność $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$.

PR05.5 OTWARTE ★★★

0-4 pkt

Ciąg arytmetyczny (a_n) ma różnicę $r \neq 0$ i $a_1 = 2$. Wyrazy a_1, a_2, a_5 tworzą (w tej kolejności) ciąg geometryczny. Oblicz r oraz taką liczbę n , że suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 200.

PR05.6 OTWARTE ★★★

0-4 pkt

Liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny, a ich suma jest równa 26. Liczby $a + 1, b + 6, c + 3$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz a, b, c .

PR05.7 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n+1}{2n+3}, n \geq 1$.

PR05.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n$ dla $n \geq 1$. Wyznacz wzór ogólny ciągu i oblicz a_{10} .

PR05.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Na początku każdego roku przez **10** lat wpłacamy na konto **1000** zł. Oprocentowanie wynosi **5%** w skali roku, odsetki są kapitalizowane na koniec roku. Oblicz stan konta na koniec dziesiątego roku (wynik zaokrąglaj do grosza).

PR05.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa **21**, a ich iloczyn **216**. Wyznacz te wyrazy.

PR06

PR06.1

ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0-2 pkt

Oblicz sumę szeregu $12 + 6 + 3 + \dots$

PR06.2

ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0-2 pkt

Zapisz liczbę $0,(36)$ w postaci ułamka nieskracalnego.

PR06.3ODPOWIEDŹ KRÓTKA

0-2 pkt

Wyznacz wszystkie x , dla których szereg $1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + \dots$ jest zbieżny.

PR06.4

OTWARTE 

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots = \frac{3}{2}$, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

PR06.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa **16**, a jego pierwszy wyraz jest równy **12**. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu.

PR06.6 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Nieskończony ciąg geometryczny jest zbieżny, suma jego dwóch pierwszych wyrazów jest równa **12**, a suma wszystkich wyrazów jest równa **16**. Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki.

PR06.7 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Trójkąt równoboczny T_1 ma bok długości a . Trójkąt T_{n+1} ma wierzchołki w środkach boków trójkąta T_n . Oblicz sumę obwodów oraz sumę pól wszystkich trójkątów $T_1, T_2, T_3, \dots$

PR06.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Rozwiąż równanie $1 - x + x^2 - x^3 + \dots = 2x$, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

PR06.9 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego, zapisz liczbę $2,1(6)$ w postaci ułamka nieskracalnego.

PR06.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$ dla tych x , dla których szereg jest zbieżny. Wyznacz dziedzinę funkcji f i rozwiąż równanie $f(x) = \frac{3}{2}$.

PR07

🔑 $\frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ najwyższa potęga; $\frac{0}{0} \rightarrow$ skrócić; $\frac{c}{0} \rightarrow$ znak mianownika.

PR07.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★☆☆

0-2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n}{2n^2 + 5}$.

PR07.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★☆☆

0-2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2+1}$.

PR07.3 OTWARTE ★★☆☆

0-2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n} - n \right)$.

PR07.4 OTWARTE ★★☆☆

0-2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+1}{2}}{n^2 + 3}$.

PR07.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

PR07.6 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$.

PR07.7 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} - 1}$.

PR07.8 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$.

PR07.9 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2 - 3n}$.

PR07.10 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{dla } x \neq 2 \\ m & \text{dla } x = 2 \end{cases}$. Wyznacz m , dla którego funkcja f jest ciągła w punkcie $x = 2$.

PR08.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Spośród 7 kobiet i 5 mężczyzn wybieramy czteroosobową komisję. Oblicz, na ile sposobów można to zrobić, aby w komisji były co najmniej dwie kobiety.

PR08.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie cyfra 5 występuje dokładnie dwa razy.

PR08.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Oblicz, ile jest trójkątów, których wierzchołkami są wierzchołki dziesięciokąta foremnego i które nie mają żadnego boku wspólnego z tym dziesięciokątem.

PR08.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Na ile sposobów można rozmieścić **5** różnych kul w **3** różnych szufladach tak, aby żadna szuflada nie była pusta?

PR08.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Ile jest ciągów długości **8** o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, w których występują dokładnie trzy jedynki i żadne dwie jedynki nie stoją obok siebie?

PR08.10 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, w których wszystkie liczby parzyste stoją na miejscach o numerach parzystych?

PR09.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jedną szóstkę, pod warunkiem że suma wyrzuconych oczek jest równa **10**.

PR09.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

W urnie I są **3** kule białe i **2** czarne, a w urnie II — **1** biała i **4** czarne. Rzucamy monetą: orzeł — losujemy kulę z urny I, reszka — z urny II. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

PR09.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Ze zbioru **{1, 2, 3, 4, 5, 6}** losujemy bez zwracania sześć razy po jednej liczbie i zapisujemy je w kolejności losowania, tworząc ciąg. Oblicz prawdopodobieństwo, że liczby **1** i **2** stoją w tym ciągu obok siebie.

PR09.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

W sytuacji z zadania PR09.6 wylosowano kulę białą. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodziła z urny I.

PR09.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Ile co najmniej razy trzeba rzucić symetryczną kostką, aby prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej szóstki było większe od **0,9**?

PR09.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Z urny, w której jest **5** kul białych i **3** czarne, losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie są białe, pod warunkiem że co najmniej jedna jest biała.

PR10

PR10.1

ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★☆☆

0-2 pkt

Oblicz $\sin 75^\circ$.

PR10.2

ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★☆☆

0-2 pkt

Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz $\cos 2\alpha$.

PR10.3

ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★☆☆

0–2 pkt

Oblicz $\sin^2 15^\circ$.

PR10.4

OTWARTE 

0-2 pkt

Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = \sin 2\alpha$.

PR10.5

OTWARTE

0–3 pkt

Wykaż, że dla każdego kąta α , dla którego $\sin 2\alpha \neq 0$, prawdziwa jest równość $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

PR10.6 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Kąt α spełnia warunki $\operatorname{tg} \alpha = 2$ oraz $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$. Oblicz $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$.

PR10.7 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

PR10.8 OTWARTE ★★☆☆

0–2 pkt

Oblicz wartość wyrażenia $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$.

PR10.9 OTWARTE ★★☆☆

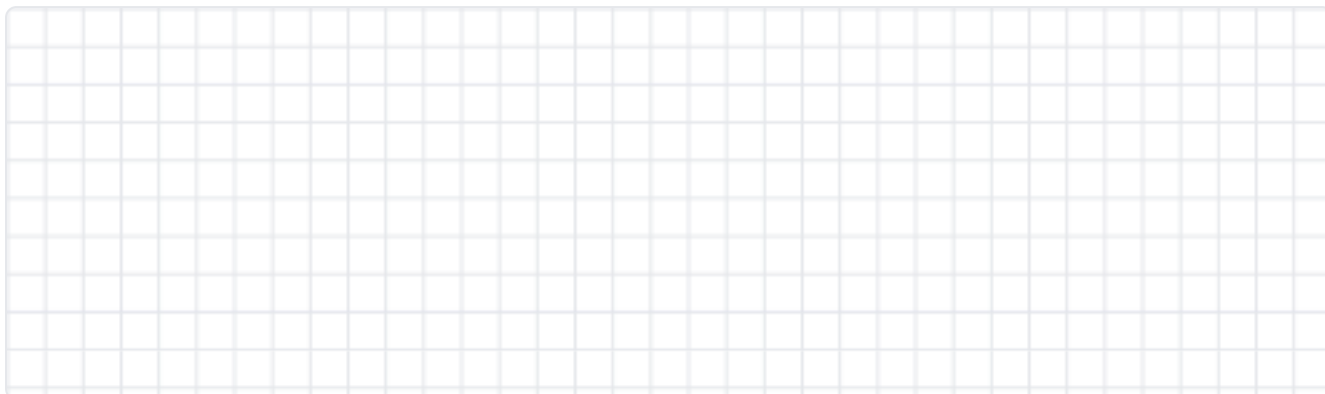
0–2 pkt

Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$.

PR10.10 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Kąty α i β są ostre, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\cos \beta = \frac{5}{13}$. Oblicz $\sin(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha - \beta)$.



PR11 Równania trygonometryczne

🔑 Wyłącz, nie dziel. Jednorodne $\rightarrow \tan x$. Sinus: dwie serie. Na końcu przedział.

PR11.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Rozwiąż równanie $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

PR11.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0-2 pkt

Rozwiąż równanie $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

PR11.3 OTWARTE ★★☆☆

0-3 pkt

Rozwiąż równanie $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

PR11.4 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $\sin 2x = \cos x$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

PR11.5 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Rozwiąż równanie $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$.



PR11.6 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Rozwiąż równanie $\sin^2 x - (1 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$ w przedziale $[0, \pi]$.



PR11.7 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Rozwiąż równanie $\sin 3x + \sin x = 0$.



PR11.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = 0$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

PR11.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $2 \sin 5x \cos 3x = \sin 8x + \frac{1}{2}$.

PR11.10 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Rozwiąż nierówność $2 \sin^2 x > \sin x$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

PR12



PR12.1

0-2 pkt

W trójkącie dwa boki mają długości **7** i **8**, a kąt między nimi ma miarę **120°** . Oblicz długość trzeciego boku.

PR12.2

0-2 pkt

W trójkącie bok $a = 6$ leży naprzeciw kąta $\alpha = 45^\circ$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

PR12.3

0–3 pkt

Trójkąt ma boki długości **5**, **7** i **8**. Oblicz miarę kąta leżącego naprzeciw boku długości **7** oraz pole trójkąta.

PR12.4

0-3 pkt

W trójkącie ABC : $|BC| = 10$, $|\angle BAC| = 30^\circ$, $|\angle ABC| = 45^\circ$. Oblicz długości boków AC i AB .

PR12.5 OTWARTE ★★★

0-4 pkt

W trójkącie równobocznym ABC o boku 6 punkt D leży na boku BC i $|BD| = 2$. Oblicz $|AD|$ oraz $\sin \angle BAD$.

PR12.6 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Równoległobok ma boki długości 5 i 8 oraz kąt ostry 60° . Oblicz długości jego przekątnych.

PR12.7 OTWARTE ★★★

0-4 pkt

Pole trójkąta jest równe $12\sqrt{3}$, a dwa jego boki mają długości 6 i 8 . Oblicz długość trzeciego boku. Rozważ wszystkie przypadki.

PR12.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

W trójkącie ABC : $|AB| = 8$, $|AC| = 5$, $|\angle BAC| = 60^\circ$. Oblicz długość dwusiecznej AD kąta BAC .



PR12.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

W trójkącie ABC : $|AB| = 6$, $|AC| = 4$, a środkowa AM ma długość $\sqrt{19}$. Oblicz $|BC|$ i miarę kąta BAC .



W trójkącie ABC : $|AB| = 5$, $|BC| = 8$, $|CA| = 7$. Oblicz miarę kąta ABC , pole trójkąta, promienie okręgów opisanego i wpisanego oraz wysokość opuszczoną z wierzchołka A .



PR13 Okręgi i czworokąty wpisane/opisane

🔑 Wpisany: kąty do 180° . Opisany: sumy boków. Przekątna + tw. cosinusów w dwóch trójkątach.

PR13.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0-2 pkt

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach **6, 8, 10**.

PR13.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★☆☆

0–2 pkt

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie o bokach **5, 5, 6**.

PR13.3 OTWARTE ★★☆☆

0-3 pkt

Trapez prostokątny o podstawach **12** i **6** jest opisany na okręgu. Oblicz promień tego okręgu.

PR13.4 OTWARTE ★★

0-2 pkt

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, $|\angle DAB| = 70^\circ$, $|\angle ABC| = 95^\circ$. Oblicz miary pozostałych kątów czworokąta.

PR13.5 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Trójkąt ma boki długości **13, 14, 15**. Oblicz jego pole oraz promienie okręgów wpisanego i opisanego.

PR13.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Z punktu ***P*** poprowadzono dwie styczne do okręgu o środku ***O*** i promieniu **5**, styczne w punktach ***A*** i ***B***. $|PO| = 13$. Oblicz długość odcinka stycznej ***PA*** oraz długość cięciwy ***AB***.

PR13.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Okrąg wpisany w trójkąt ***ABC*** o bokach $|BC| = 7$, $|CA| = 8$, $|AB| = 9$ jest styczny do boku ***AB*** w punkcie ***K***. Oblicz $|AK|$ i $|KB|$.

PR13.8 OTWARTE ★★★

0–5 pkt

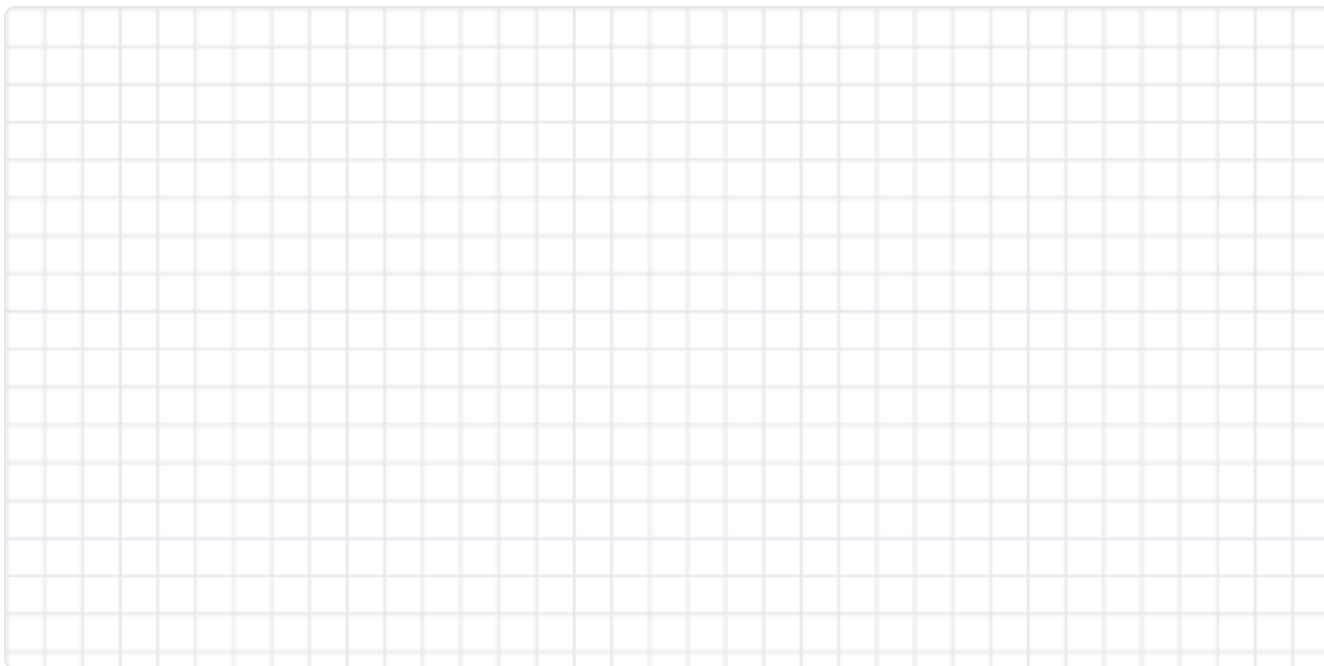
Deltoid $ABCD$, w którym $|AB| = |AD| = 6$ i $|CB| = |CD|$, jest wpisany w okrąg, a $|\angle BAD| = 60^\circ$. Oblicz długości boków BC i CD oraz promień okręgu wpisanego w ten deltoid.

PR13.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Trójkąt prostokątny ma przyprostokątne a i b oraz przeciwprostokątną c . Wykaż, że $r + R = \frac{a+b}{2}$, gdzie r i R — promienie okręgów wpisanego i opisanego.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. $|AB| = 3$, $|BC| = 5$, $|CD| = 8$, $|\angle ABC| = 120^\circ$ oraz $|AD| > |AB|$. Oblicz $|AC|$, promień okręgu, $|AD|$ oraz pole czworokąta.



PR14



PR14.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0-2 pkt

Oblicz odległość punktu $P = (3, 4)$ od prostej $3x - 4y + 12 = 0$.

PR14.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★☆☆

0-2 pkt

Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (4, 1)$, $C = (1, 3)$.

PR14.3 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Dana jest prosta $k: 2x - y + 3 = 0$ i punkt $P = (4, 1)$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do k przechodzącej przez P , punkt przecięcia prostych k i l oraz odległość punktu P od prostej k .

PR14.4 OTWARTE ★★☆☆

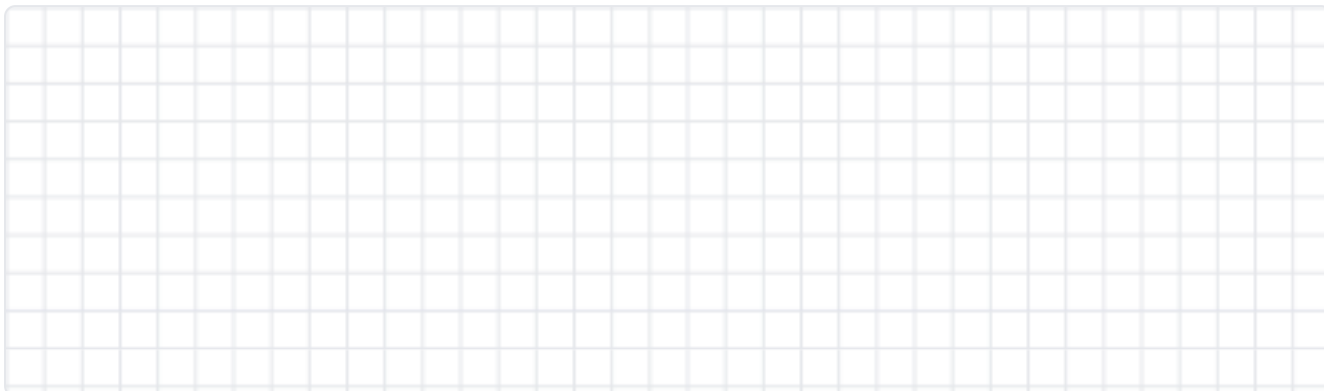
0–3 pkt

Wyznacz współrzędne punktu P' symetrycznego do punktu $P = (5, 0)$ względem prostej $y = x + 1$.

PR14.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

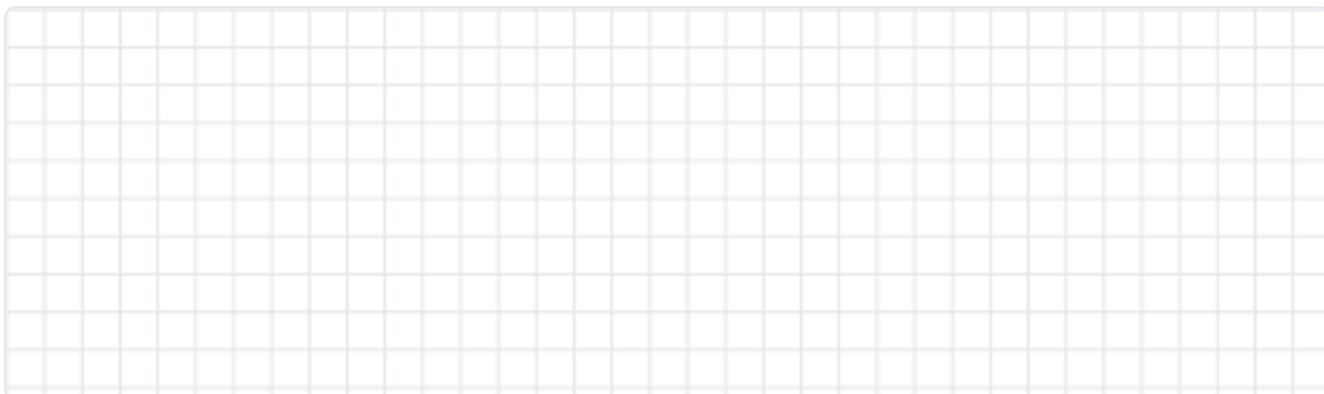
Prostokąt $ABCD$ ma wierzchołki $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (6, 4)$, $D = (0, 4)$. Punkt M jest środkiem boku BC . Prosta AM przecina przekątną BD w punkcie P . Oblicz współrzędne punktu P i pole trójkąta ABP .



PR14.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 1)$, $B = (4, -1)$, $C = (2, 5)$. Oblicz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka C oraz pole trójkąta.



PR14.7 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Punkty $A = (-1, 2)$ i $B = (5, 4)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Wierzchołek C leży na prostej $y = x - 3$. Oblicz współrzędne punktu C i pole trójkąta ABC .



PR14.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Dane są punkty $A = (1, 2)$ i $B = (4, 6)$. Wyznacz współrzędne punktu C takiego, że trójkąt ABC jest prostokątny z kątem prostym przy wierzchołku A i $|AC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .

PR14.9 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz miarę kąta ostrego między prostymi $y = 2x$ oraz $y = -3x + 1$.

PR14.10 OTWARTE ★★★

0–5 pkt

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (2, 6)$. Wyznacz środek ciężkości S , środek okręgu opisanego O i ortocentrum H tego trójkąta. Wykaż, że punkty S , O , H leżą na jednej prostej.

PR15 Okrąg w układzie współrzędnych

🔑 Postać kanoniczna → S, r . Styczność: $d = r$. Dwa okręgi: odejmij równania.

PR15.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0-2 pkt

Wyznacz środek i promień okręgu $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

PR15.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m = 0$ opisuje okrąg.

PR15.3 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Wyznacz równanie okręgu o środku $S = (3, -1)$ stycznego do prostej $4x - 3y + 10 = 0$.

PR15.4 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Wyznacz punkty wspólne okręgu $x^2 + y^2 = 25$ i prostej $y = x + 1$ oraz długość wyznaczonej przez nie cięciwy.

PR15.5 OTWARTE ★★★

0-4 pkt

Zbadaj wzajemne położenie okręgów $\mathcal{O}_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ i $\mathcal{O}_2 : (x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 9$. Jeśli są styczne, wyznacz punkt styczności.



PR15.6 OTWARTE ★★★

0-4 pkt

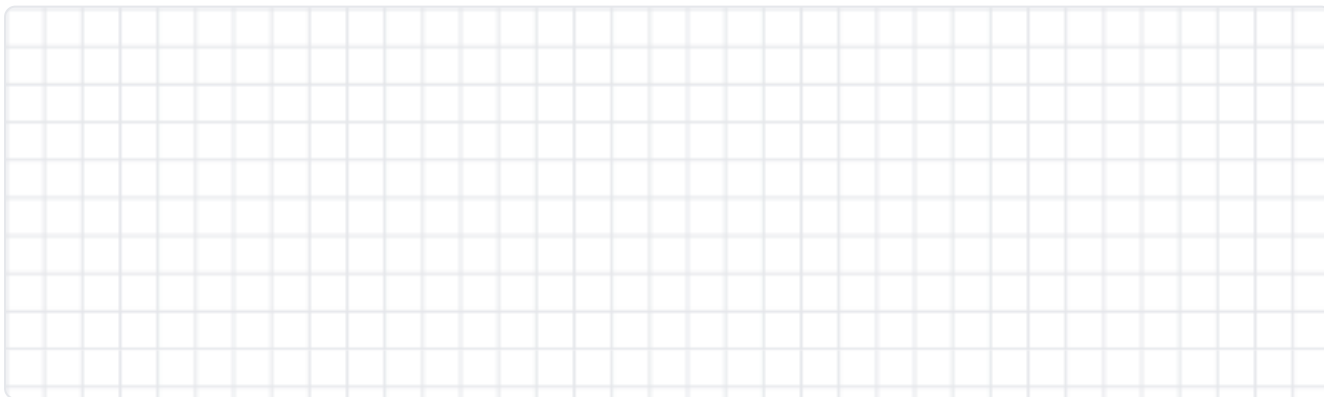
Okręgi $x^2 + y^2 = 10$ oraz $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10$ przecinają się w punktach A i B . Wyznacz współrzędne tych punktów i równanie prostej AB .



PR15.7 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (0, 8)$.



PR15.8 OTWARTE ★★★

0–5 pkt

Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 = 5$ przechodzących przez punkt $P = (3, 1)$.



PR15.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

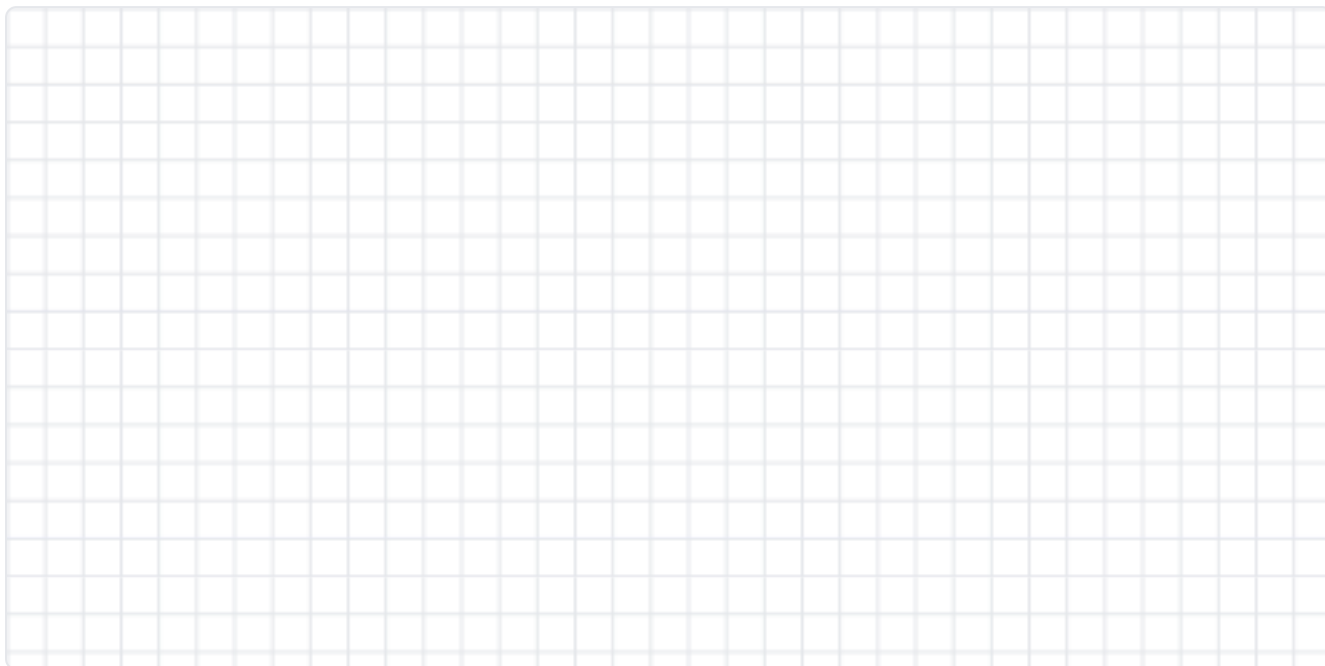
Środek okręgu leży na prostej $y = x + 1$, a okrąg przechodzi przez punkty $A = (1, 0)$ i $B = (3, 2)$. Wyznacz równanie tego okręgu.



PR15.10 OTWARTE ★★★

0–6 pkt

Prosta $y = x + 2$ przecina parabolę $y = x^2$ w punktach A i B . Odcinek AB jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$. Wyznacz równanie okręgu $\mathcal{O}$ oraz punkty jego przecięcia z osią Oy .



Stereometria rozszerzona

0-2 pkt

Oblicz objętość czworościanu foremnego o krawędzi **6**.

0–2 pkt

Ostrosłup prawidłowy trójkątny ma krawędź podstawy **6** i wysokość **4**. Oblicz długość krawędzi bocznej.

0–3 pkt

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy **6** i krawędź boczną **5**. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej.



0–4 pkt

Ostrosłup prawidłowy trójkątny ma krawędź podstawy **6**, a krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem **60°**. Oblicz objętość ostrosłupa i cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.

PR16.5 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi 6 (E nad A , F nad B , G nad C , H nad D). Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej AG do płaszczyzny podstawy oraz pole przekroju sześcianu płaszczyzną ACH .

PR16.6 OTWARTE ★★★

0–5 pkt

Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają długość a . Oblicz cosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

PR16.7 OTWARTE ★★☆☆

0–4 pkt

Promień okręgu wpisanego w podstawę ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równy **2**, a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem **60°** . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej.

PR16.8 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Stożek o wysokości **8** jest wpisany w kulę o promieniu **5** (wierzchołek i okrąg podstawy leżą na sferze). Oblicz objętość stożka.

PR16.9 OTWARTE ★★★

0–5 pkt

Graniastosłup prawidłowy czworokątny $ABCDEFGH$ ma krawędź podstawy **4** i wysokość **6** (G nad C). Oblicz pole przekroju płaszczyzną BDG oraz cosinus kąta nachylenia tego przekroju do płaszczyzny podstawy.



PR16.10 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $|AC| = 6$ i $|BC| = 8$. Wszystkie krawędzie boczne mają długość **13**. Oblicz objętość ostrosłupa.



PR17 Parametr, funkcja kwadratowa i wzory Viète'a

🔑 $a \neq 0 \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow$ warunek przez Viète'a $\rightarrow$ część wspólna.

PR17.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 - 5x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

PR17.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0-2 pkt

10. Nie rozwiązując równania $2x^2 - 6x - 3 = 0$, oblicz sumę i iloczyn jego rozwiązań.

PR17.3 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 + mx + 4 = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

PR17.4 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

PR17.5 OTWARTE ★★★

0-4 pkt

Wyznacz wszystkie $m \neq 2$, dla których równanie $(m - 2)x^2 - 2(m - 1)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania tego samego znaku.

PR17.6 OTWARTE ★★★

0-5 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania spełniające nierówność $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$.

PR17.7 OTWARTE ★★★

0-4 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 + (m + 1)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania, których odległość na osi liczbowej jest równa 2.

PR17.8 OTWARTE ★★★

0-5 pkt

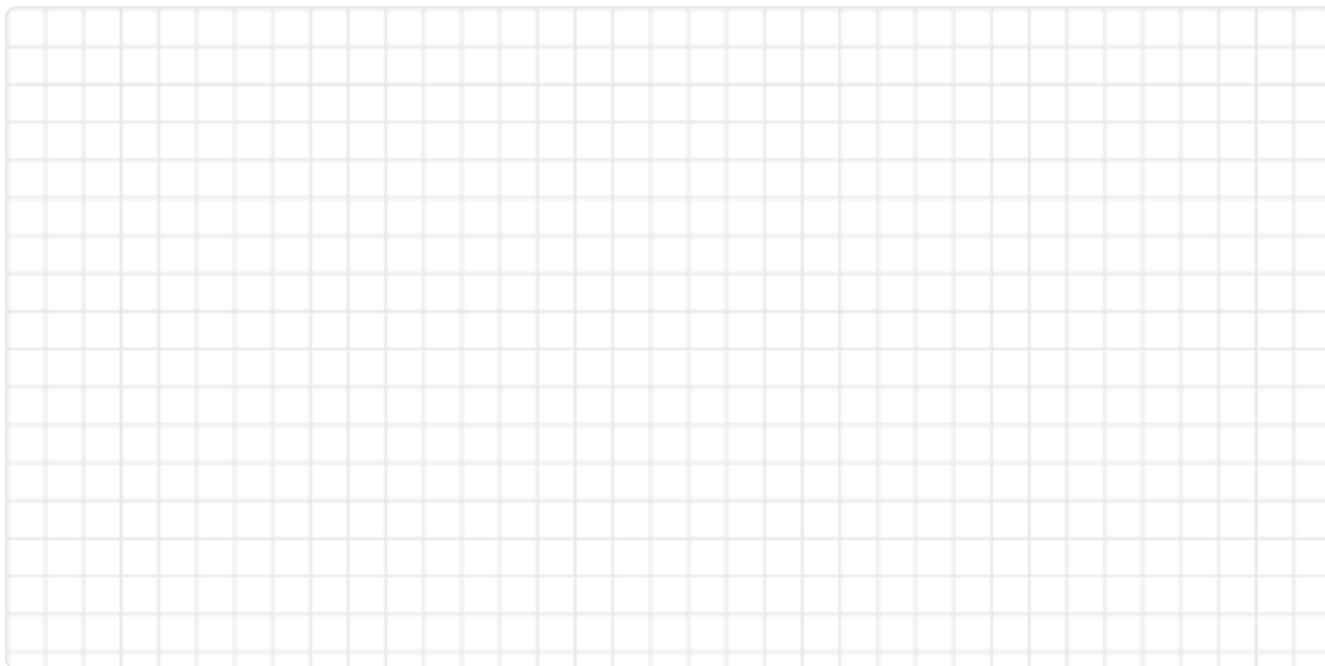
Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 - (m + 2)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

PR17.9 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których liczba 1 leży między rozwiązaniami równania $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$.

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 3 = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 < 22$.



PR18



PR18.1

0–2 pkt

Oblicz $f'(1)$ dla $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.

PR18.2

0-2 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których funkcja $f(x) = x^3 + mx^2 + 3x - 1$ jest rosnąca w $\mathbb{R}$.

PR18.3

0–3 pkt

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 2x + 1$ w punkcie o odciętej 1.

PR18.4

0–3 pkt

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x}$ w punkcie o odciętej 1.

PR18.5 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

PR18.6 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 3x$ w przedziale $[-2, 3]$.

PR18.7 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

PR18.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Punkt $P = (x_0, 2)$, gdzie $x_0 > 0$, należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}$. Wyznacz równanie stycznej do wykresu f w punkcie P .

PR18.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 3x + 2$ równoległych do prostej $y = 9x$.

PR18.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wyznacz wszystkie wartości k , dla których równanie $x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = k$ ma trzy różne rozwiązania.

PR19 Optymalizacja z pochodną

🔑 Model + dziedzina → pochodna → znak → ekstremum globalne → pełna odpowiedź.

PR19.1 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Suma dwóch liczb dodatnich x i y jest równa **12**. Wyznacz te liczby, dla których iloczyn $x \cdot y^2$ jest największy.

PR19.2 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Pudełko w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratowej, bez wieka, ma objętość **32**. Wyznacz wymiary pudełka o najmniejszym polu powierzchni.

PR19.3 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Puszka w kształcie walca ma objętość 16π . Wyznacz promień podstawy i wysokość puszki, dla których pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.



PR19.4 OTWARTE ★★★

0–5 pkt

W półkole o promieniu 5 wpisano prostokąt, którego jeden bok leży na średnicy. Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu.



PR19.5 OTWARTE ★★

0–6 pkt

Rozważamy wszystkie stożki o tworzącej długości **6**. Wyznacz wysokość stożka o największej objętości i oblicz tę objętość.

PR19.6 OTWARTE ★★

0–5 pkt

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa **48**. Wyznacz wymiary graniastosłupa o największej objętości.

PR19.7 OTWARTE ★★★

0–5 pkt

Wyznacz punkty paraboli $y = x^2$ położone najbliżej punktu $A = (0, 3)$ i oblicz tę najmniejszą odległość.



PR19.8 OTWARTE ★★★

0–7 pkt

Rozważamy wszystkie trójkąty równoramienne opisane na okręgu o promieniu 1. a) Wykaż, że pole trójkąta o wysokości h (opuszczonej na podstawę) wyraża się wzorem $P(h) = h\sqrt{\frac{h}{h-2}}$, $h > 2$. b) Wyznacz h , dla którego pole jest najmniejsze, i oblicz to pole.



PR19.9 OTWARTE ★★☆☆

0–4 pkt

Koszt wyprodukowania x sztuk towaru wynosi $K(x) = x^3 - 30x^2 + 400x$ zł, a każdą sztukę sprzedajemy za 400 zł. Ile sztuk należy wyprodukować i sprzedać, aby zysk był największy? Oblicz ten zysk.

PR19.10 OTWARTE ★★☆☆

0–5 pkt

Okno ma kształt prostokąta zwieńczonego półkolem (średnica półkola to górny bok prostokąta). Obwód okna jest równy $4 + \pi$. Wyznacz wymiary okna o największym polu.

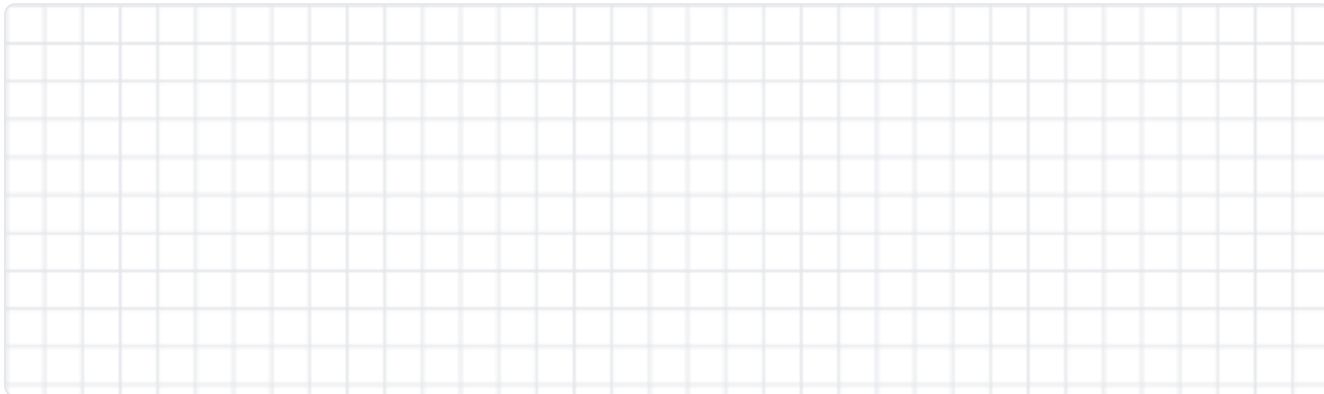
PR20 Dowód geometryczny i zadania mieszane

 Rysunek + założenia. Most: kąty, podobieństwo, wspólna wysokość, tw. sinusów lub współrzędne.

PR20.1 OTWARTE ★★

0–3 pkt

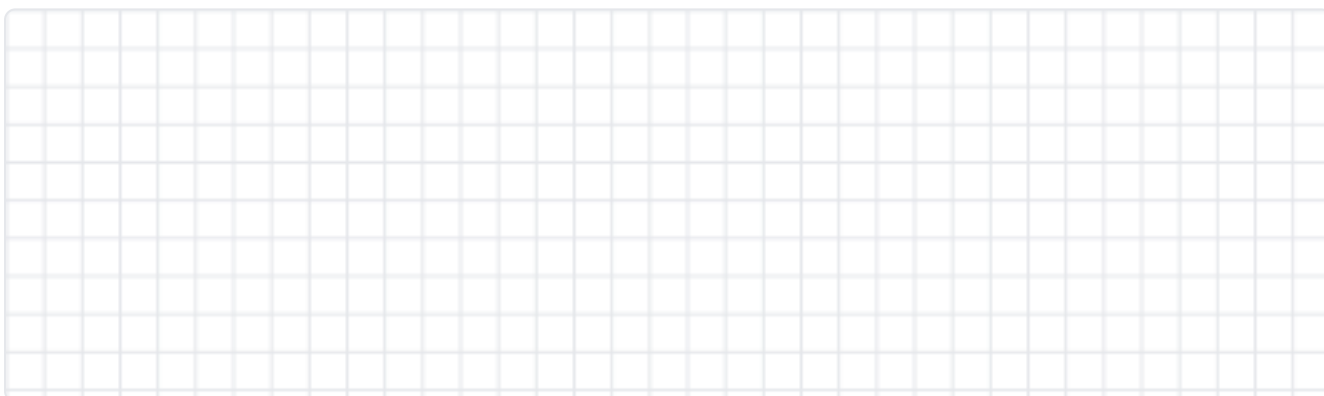
Wykaż, że środkowa trójkąta dzieli go na dwa trójkąty o równych polach.



PR20.2 OTWARTE ★★

0–3 pkt

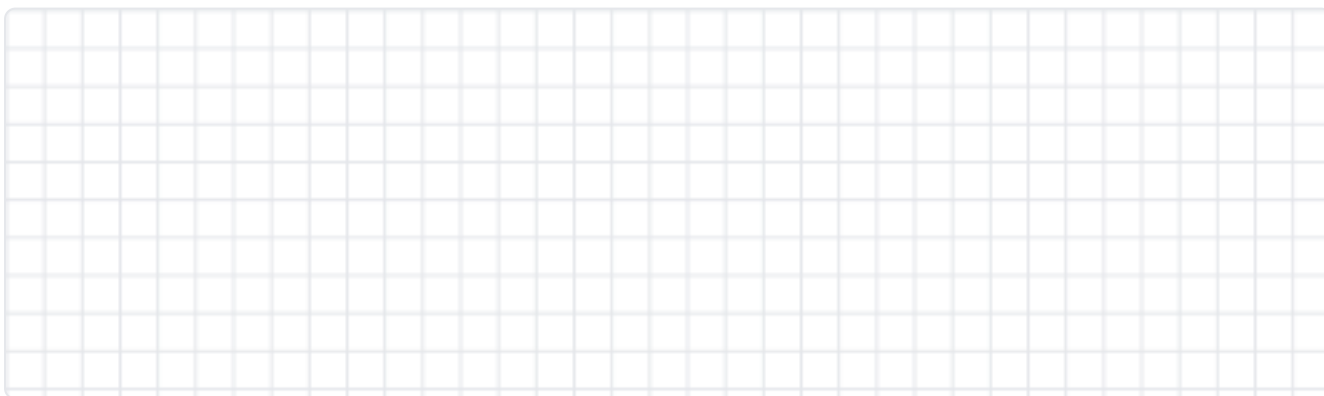
Wykaż, że w trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość równą połowie przeciwprostokątnej.



PR20.3 OTWARTE ★★

0–3 pkt

Punkty M i N są środkami boków AC i BC trójkąta ABC . Wykaż, że $MN \parallel AB$ i $|MN| = \frac{1}{2}|AB|$.



PR20.4 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

Wykaż, że w każdym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.

PR20.5 OTWARTE ★★☆☆

0–3 pkt

W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel CD$) dwusieczne kątów DAB i ADC przecinają się w punkcie P . Wykaż, że kąt APD jest prosty.

PR20.6 OTWARTE ★★☆☆

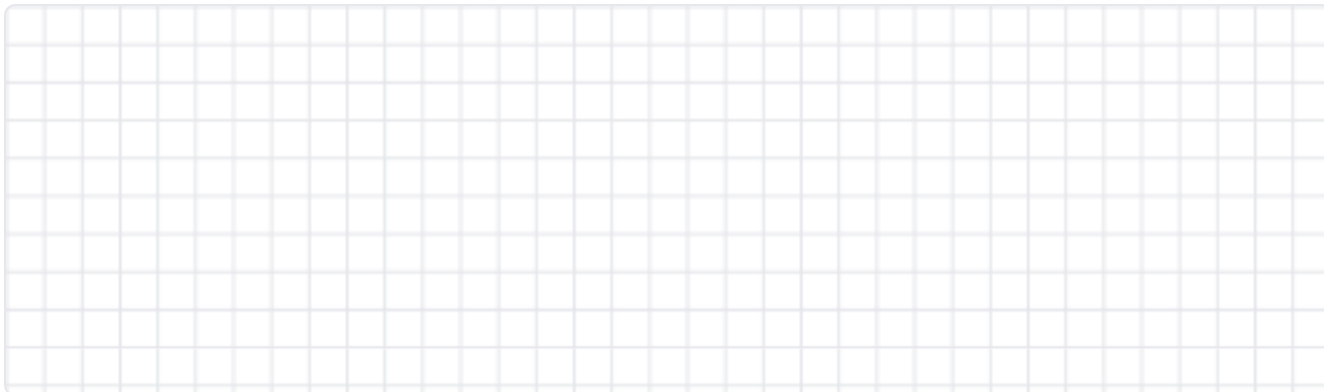
0–3 pkt

Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego o boku a . Wykaż, że suma odległości punktu P od boków trójkąta jest równa wysokości tego trójkąta.

PR20.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

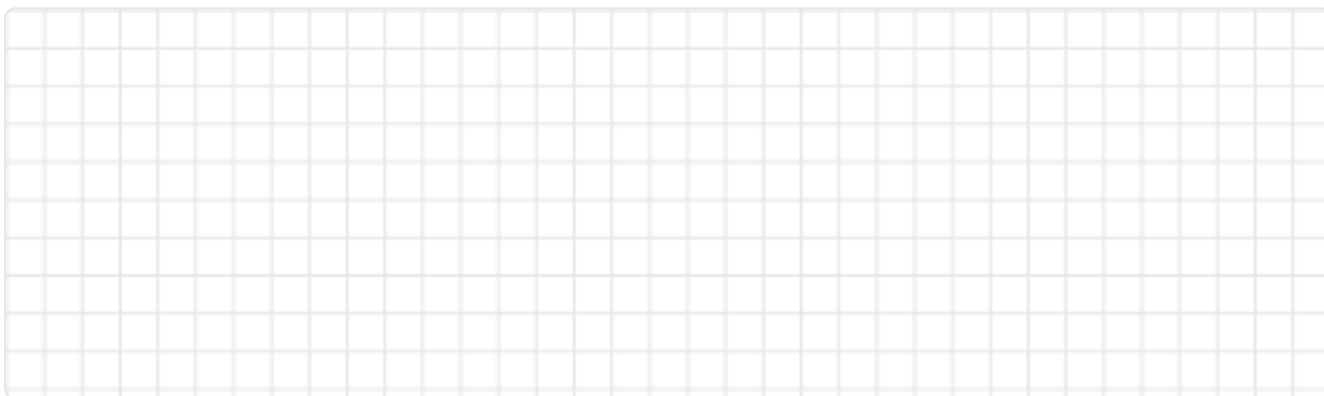
Dany jest prostokąt $ABCD$ i dowolny punkt P płaszczyzny. Wykaż, że $|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$.



PR20.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B . Odcinki AC i AD są średnicami tych okręgów. Wykaż, że punkty C, B, D leżą na jednej prostej.



PR20.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Pole trójkąta ABC jest równe P . Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CA , przy czym $|AK| : |KB| = |BL| : |LC| = |CM| : |MA| = 1 : 2$. Oblicz pole trójkąta KLM .



PR20.10 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

W trapezie $ABCD$ o podstawach $|AB| = a$ i $|CD| = b$ punkty E i F są środkami ramion AD i BC . Stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz stosunek $a : b$.



Odpowiedzi

PR01 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

1. $x = 3$
2. $x = 3$
3. $x \in (-\infty, -1)$
4. $x \in (2, 10]$
5. po 8 dobach
6. 35°C
7. dowód
8. $x \in \{0, 1\}$
9. $x \in (2, 4)$
10. $x = 3$

PR02 Dowody algebraiczne i nierówności

1. dowód
2. dowód
3. dowód
4. dowód
5. dowód
6. dowód
7. dowód
8. dowód
9. dowód
10. dowód

PR03 Wartość bezwzględna — równania i nierówności

1. $x = -1$ lub $x = 4$
2. $x \in [-1, 3]$
3. $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$
4. $x \in [0, +\infty)$
5. $x \in (-\infty, -\frac{10}{3}) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$
6. $x \in (-\infty, 4]$
7. $x \in (1, 4)$
8. $m < 0$; 0 ; $m = 0$; $0 < m < 4$; 4 ; $m = 4$; 3 ; $m > 4$
: 2
9. $x = -5$ lub $x = -1$
10. $x = \frac{4}{3}$

PR04 Wielomiany i nierówności wymierne

1. 1
2. $m = -1$
3. $x \in [-2, 2] \cup [3, +\infty)$
4. $x \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$
5. $x \in (2, 5]$
6. $x \in (-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$
7. $a = 4$, $b = 1$, trzeci pierwiastek -3
8. $R(x) = 2x + 1$
9. $m = -2$ lub $m = 2$
10. $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$

PR05 Ciągi arytmetyczne i geometryczne — zadania łączone

1. 2
2. 728
3. $a_1 = 1$, $r = 3$ lub $a_1 = 16$, $r = -3$
4. $x = 3$, $y = 9$, $z = 27$
5. $r = 4$, $n = 10$
6. $(2, 6, 18)$ lub $(18, 6, 2)$
7. ciąg rosnący
8. $a_n = n^2 - n + 2$, $a_{10} = 92$
9. 13 206,79 zł
10. $(3, 6, 12)$ lub $(12, 6, 3)$

PR06 Szereg geometryczny nieskończony

1. 24
2. $\frac{4}{11}$
3. $x \in (0, 2)$
4. $x = \frac{1}{6}$
5. $a_3 = \frac{3}{4}$
6. $a_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$ lub $a_1 = 24$, $q = -\frac{1}{2}$
7. suma obwodów $6a$, suma pól $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$
8. $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
9. $\frac{13}{6}$
10. $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $x = 3$

PR07 Granice ciągów i funkcji

- | | |
|------------------|------------------|
| 1. $\frac{3}{2}$ | 6. $-\infty$ |
| 2. 0 | 7. $\frac{1}{3}$ |
| 3. 2 | 8. $\frac{1}{4}$ |
| 4. $\frac{1}{2}$ | 9. $\frac{1}{2}$ |
| 5. 6 | 10. $m = 4$ |

PR08 Kombinatoryka rozszerzona

- | | |
|---------|-----------|
| 1. 120 | 6. 91 125 |
| 2. 30 | 7. 50 |
| 3. 2160 | 8. 150 |
| 4. 240 | 9. 20 |
| 5. 420 | 10. 144 |

PR09 Prawdopodobieństwo: klasyczne, warunkowe, Bernoulli

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. 0,7 | 6. $\frac{2}{5}$ |
| 2. 0,5 | 7. $\frac{1}{3}$ |
| 3. $\frac{5}{16}$ | 8. $\frac{3}{4}$ |
| 4. 0,6517 | 9. 13 |
| 5. $\frac{1}{3}$ | 10. $\frac{2}{5}$ |

PR10 Tożsamości trygonometryczne

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | 6. $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}, \cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ |
| 2. $\frac{7}{9}$ | 7. dowód |
| 3. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ | 8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 4. dowód | 9. dowód |
| 5. dowód | 10. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{63}{65}, \cos(\alpha - \beta) = \frac{56}{65}$ |

PR11 Równania trygonometryczne

- | | |
|---|---|
| 1. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ | 6. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ |
| 2. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | 7. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ |
| 3. $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ | 8. $\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$ |
| 4. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ | 9. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| 5. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | 10. $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \cup (\pi, 2\pi)$ |

PR12 Planimetria z twierdzeniem sinusów i cosinusów

- | | |
|---|--|
| 1. 13 | 6. 7 i $\sqrt{129}$ |
| 2. $3\sqrt{2}$ | 7. $2\sqrt{13}$ lub $2\sqrt{37}$ |
| 3. $60^\circ, P = 10\sqrt{3}$ | 8. $ AD = \frac{40\sqrt{3}}{13}$ |
| 4. $ AC = 10\sqrt{2}, AB = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ | 9. $ BC = 2\sqrt{7}, \angle BAC = 60^\circ$ |
| 5. $ AD = 2\sqrt{7}, \sin \angle BAD = \frac{\sqrt{21}}{14}$ | 10. $60^\circ; P = 10\sqrt{3}; R = \frac{7\sqrt{3}}{3}; r = \sqrt{3}; h_A = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ |

PR13 Okręgi i czworokąty wpisane/opisane

- 2
- $\frac{25}{8}$
- $r = 4$
- $|\angle C| = 110^\circ, |\angle D| = 85^\circ$
- $P = 84, r = 4, R = \frac{65}{8}$
- $|PA| = 12, |AB| = \frac{120}{13}$
- $|AK| = 5, |KB| = 4$
- $|BC| = |CD| = 2\sqrt{3}, r = 3\sqrt{3} - 3$
- dowód
- $|AC| = 7, R = \frac{7\sqrt{3}}{3}, |AD| = 5, P = \frac{55\sqrt{3}}{4}$

PR14 Geometria analityczna: proste, punkty, pola

- 1
- $\frac{11}{2}$
- $l: y = -\frac{1}{2}x + 3; (0, 3); d = 2\sqrt{5}$
- $P' = (-1, 6)$
- $P = (4, \frac{4}{3}), \text{pole } 4$
- $h_C = \frac{8\sqrt{10}}{5}, P = 16$
- $C = (3, 0), P = 10$
- $C = (-7, 8)$ lub $C = (9, -4); P = 25$
- 45°
- $S = (\frac{10}{3}, 2), O = (4, 2), H = (2, 2)$ — prosta $y = 2$

PR15 Okrąg w układzie współrzędnych

- $S = (2, -3), r = 5$
- $m < 5$
- $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$
- $(3, 4), (-4, -3); 7\sqrt{2}$
- styczne zewnętrznie w punkcie $(\frac{11}{5}, \frac{18}{5})$
- $A = (1, 3), B = (3, -1); y = -2x + 5$
- $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
- $y = 2x - 5$ oraz $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
- $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
- $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{9}{2}; (0, \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2})$

PR16 Stereometria rozszerzona

- $18\sqrt{2}$
- $2\sqrt{7}$
- $V = 12\sqrt{7}, P_b = 48$
- $V = 18\sqrt{3}, \cos \beta = \frac{\sqrt{13}}{13}$
- $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{pole } 18\sqrt{3}$
- $-\frac{1}{3}$
- $V = 24, P_b = 24\sqrt{3}$
- $\frac{128\pi}{3}$
- pole $4\sqrt{22}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$
- 96

PR17 Parametr, funkcja kwadratowa i wzory Viète'a

- $m < \frac{25}{4}$
- $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = -\frac{3}{2}$
- $m \in (-\infty, -4)$
- $m = -\frac{3}{2}$
- $m \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
- $m \in (1, 3)$
- $m = -1$ lub $m = 3$
- $m = 0$
- $m \in (0, 2)$
- $m \in (1, 2)$

PR18 Pochodna, monotoniczność i ekstrema

- 9
- $m \in [-3, 3]$
- $y = x - 1$
- $y = -2x + 6$
- rośnie na $(-\infty, -1]$ i $[3, \infty)$, maleje na $[-1, 3]$;
 $f_{\max} = f(-1) = 6, f_{\min} = f(3) = -26$
- najmniejsza -2, największa 18
- rośnie na $(-\infty, 0]$ i $[2, \infty)$, maleje na $[0, 1]$ i $(1, 2]$;
 $f_{\max} = f(0) = 0, f_{\min} = f(2) = 4$
- $y = x + 1$
- $y = 9x - 14$ oraz $y = 9x + 18$
- $k \in (-26, 6)$

PR19 Optymalizacja z pochodną

1. $x = 4$, $y = 8$ (iloczyn 256)
2. $4 \times 4 \times 2$, $P = 48$
3. $r = 2$, $h = 4$, $P = 24\pi$
4. $5\sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $P = 25$
5. $h = 2\sqrt{3}$, $V_{\max} = 16\sqrt{3}\pi$
6. sześcian o krawędzi 4, $V = 64$
7. $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right)$, $d = \frac{\sqrt{11}}{2}$
8. $h = 3$, $P_{\min} = 3\sqrt{3}$ (trójkąt równoboczny)
9. 20 sztuk, zysk 4000 zł
10. $r = 1$: prostokąt 2×1 , $P = 2 + \frac{\pi}{2}$

PR20 Dowód geometryczny i zadania mieszane

1. dowód
2. dowód
3. dowód
4. dowód
5. dowód
6. dowód
7. dowód
8. dowód
9. $\frac{P}{3}$
10. $a : b = 3$