

MATURA Z MATEMATYKI · MATURA ROZSZERZONA

ROZWIĄZANIA

Pełne rozwiązania krok po kroku

Pełne rozwiązania krok po kroku wszystkich zadań treningowych: rozpoznanie metody, obliczenia, odpowiedź, typowe błędy i schemat punktowania.

20

kluczy

200

zadań treningowych

100%

z rozwiązaniami

Analiza: majowe arkusze CKE 2020–2026 (7 arkuszy: Formuła 2015 i Formuła 2023), poziom rozszerzony. Zadania treningowe są autorskie i odwzorowują typy umiejętności — nie są kopiami zadań CKE.

Spis treści

- PR01 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna
- PR02 Dowody algebraiczne i nierówności
- PR03 Wartość bezwzględna — równania i nierówności
- PR04 Wielomiany i nierówności wymierne
- PR05 Ciągi arytmetyczne i geometryczne — zadania łączone
- PR06 Szereg geometryczny nieskończony
- PR07 Granice ciągów i funkcji
- PR08 Kombinatoryka rozszerzona
- PR09 Prawdopodobieństwo: klasyczne, warunkowe, Bernoulli
- PR10 Tożsamości trygonometryczne
- PR11 Równania trygonometryczne
- PR12 Planimetria z twierdzeniem sinusów i cosinusów
- PR13 Okręgi i czworokąty wpisane/opisane
- PR14 Geometria analityczna: proste, punkty, pola
- PR15 Okrąg w układzie współrzędnych
- PR16 Stereometria rozszerzona
- PR17 Parametr, funkcja kwadratowa i wzory Viète'a
- PR18 Pochodna, monotoniczność i ekstrema
- PR19 Optymalizacja z pochodną
- PR20 Dowód geometryczny i zadania mieszane

PR01 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

🔑 Dziedzina → wspólna podstawa lub podstawienie → porównanie (podstawa < 1 odwraca znak).

PR01.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Rozwiąż równanie $4^x = 8^{x-1}$.

ROZWIĄZANIE

1. $2^{2x} = 2^{3x-3} \Rightarrow 2x = 3x - 3 \Rightarrow x = 3$.

Odpowiedź: $x = 3$

PR01.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Rozwiąż równanie $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

ROZWIĄZANIE

1. Dziedzina: $x > 1$.

2. $\log_2((x-1)(x+1)) = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x = \pm 3$.

3. Z dziedziny $x = 3$.

Odpowiedź: $x = 3$

PR01.3 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Rozwiąż nierówność $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} > 27$.

ROZWIĄZANIE

1. $3^{-(2x-1)} > 3^3$; podstawa $3 > 1$, więc $-2x + 1 > 3 \Rightarrow x < -1$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -1)$

PR01.4 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq -3$.

ROZWIĄZANIE

1. Dziedzina: $x > 2$.

2. $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$; podstawa $\frac{1}{2} < 1$ — funkcja malejąca, więc $x - 2 \leq 8$, czyli $x \leq 10$.

3. Z dziedziny: $x \in (2, 10]$.

Odpowiedź: $x \in (2, 10]$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — dziedzina i zapis $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$,
- 2 pkt — poprawny zbiór $(2, 10]$ (ze zmianą zwrotu).

PR01.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Masę substancji (w gramach) po t dobach opisuje wzór $m(t) = 5 \cdot 0,8^t$. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa substancji po raz pierwszy będzie mniejsza od 1 grama.

ROZWIĄZANIE

- $5 \cdot 0,8^t < 1 \iff 0,8^t < 0,2$.
- $0,8^7 \approx 0,2097 > 0,2$, $0,8^8 \approx 0,1678 < 0,2$.
- (Albo: $t > \frac{\log 0,2}{\log 0,8} \approx 7,21$.) Po 8 pełnych dobach.

Odpowiedź: po 8 dobach

Schemat punktowania:

- 1 pkt — nierówność $0,8^t < 0,2$ (lub obliczenie $m(7)$ i $m(8)$),
- 2 pkt — odpowiedź: po 8 dobach.

PR01.6 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Temperatura kawy (w $^{\circ}\text{C}$) po t minutach jest równa $T(t) = 20 + 60 \cdot k^t$. Po 10 minutach kawa ma 50°C . Oblicz temperaturę kawy po 20 minutach.

ROZWIĄZANIE

- $20 + 60k^{10} = 50 \Rightarrow k^{10} = \frac{1}{2}$.
- $T(20) = 20 + 60 \cdot (k^{10})^2 = 20 + 60 \cdot \frac{1}{4} = 35$.

Odpowiedź: 35°C

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie $k^{10} = \frac{1}{2}$,
- 2 pkt — $T(20) = 35^{\circ}\text{C}$.

PR01.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wykaż, że jeżeli $\log_2 3 = a$, to $\log_6 24 = \frac{a+3}{a+1}$.

ROZWIĄZANIE

- Zmiana podstawy na 2: $\log_6 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 6}$.
- $\log_2 24 = \log_2(8 \cdot 3) = 3 + a$, $\log_2 6 = \log_2(2 \cdot 3) = 1 + a$.
- Stąd $\log_6 24 = \frac{a+3}{a+1}$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zamiana na logarytmy o podstawie 2,
- 2 pkt — zapis licznika $3 + a$ i mianownika $1 + a$,
- 3 pkt — pełne uzasadnienie.

PR01.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.**ROZWIĄZANIE**

1. $t = 3^x > 0$: $t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1$ lub $t = 3$.
2. $3^x = 1 \Rightarrow x = 0$; $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$.

Odpowiedź: $x \in \{0, 1\}$ **Schemat punktowania:**

- 1 pkt — podstawienie $t = 3^x$ i równanie kwadratowe,
- 2 pkt — $t = 1$, $t = 3$,
- 3 pkt — $x = 0$ i $x = 1$.

PR01.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż nierówność $\log_2 x + \log_2(x - 2) < 3$.**ROZWIĄZANIE**

1. Dziedzina: $x > 2$.
2. $\log_2(x(x - 2)) < \log_2 8$; podstawa $2 > 1$: $x^2 - 2x - 8 < 0$.
3. $(x - 4)(x + 2) < 0 \Rightarrow x \in (-2, 4)$. Z dziedziną: $x \in (2, 4)$.

Odpowiedź: $x \in (2, 4)$ **Schemat punktowania:**

- 1 pkt — dziedzina $x > 2$,
- 2 pkt — nierówność $x^2 - 2x - 8 < 0$ i jej rozwiązanie,
- 3 pkt — zbiór $(2, 4)$.

PR01.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $\log_2(x^2 - 1) = 2 + \log_2(x - 1)$.**ROZWIĄZANIE**

1. Dziedzina: $x^2 - 1 > 0$ i $x - 1 > 0$, czyli $x > 1$.
2. $\log_2(x^2 - 1) = \log_2(4(x - 1)) \Rightarrow x^2 - 1 = 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$.
3. $x = 1$ lub $x = 3$; $x = 1$ nie należy do dziedziny. Odpowiedź: $x = 3$.

Odpowiedź: $x = 3$ **Wskazówka:** Kto nie wyznaczy dziedziny, poda dwa rozwiązania i straci punkt.**Schemat punktowania:**

- 1 pkt — dziedzina,
- 2 pkt — równanie $x^2 - 4x + 3 = 0$,
- 3 pkt — odrzucenie $x = 1$ i odpowiedź $x = 3$.

PR02 Dowody algebraiczne i nierówności

🔑 Wszystko na jedną stronę → rozkład z $(a - b)^2$ → znak każdego czynnika → wniosek.

PR02.1 OTWARTE ★★★

0-2 pkt

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

ROZWIĄZANIE

1. $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, więc $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Równość tylko dla $a = b$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$,
- 2 pkt — wniosek z nieujemności kwadratu.

PR02.2 OTWARTE ★★★

0-2 pkt

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x prawdziwa jest nierówność $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

ROZWIĄZANIE

1. Mnożymy przez $x > 0$: $x^2 + 1 \geq 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x - 1)^2 \geq 0$ — prawda. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — pomnożenie przez $x > 0$ z komentarzem,
- 2 pkt — postać $(x - 1)^2 \geq 0$ i wniosek.

PR02.3 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$.

ROZWIĄZANIE

1. Wymnażamy: $1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.
2. Z zadania 2 (dla $x = \frac{a}{b} > 0$): $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
3. Zatem lewa strona ≥ 4 . ■ (Równość dla $a = b$.)

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wymnożenie nawiasów,
- 2 pkt — uzasadnienie $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (np. $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$),
- 3 pkt — wniosek.

PR02.4 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4 - 4x + 3 \geq 0$.

ROZWIĄZANIE

1. $x = 1$ jest pierwiastkiem: $1 - 4 + 3 = 0$. Dzielimy: $x^4 - 4x + 3 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x - 3)$.
2. Znow $x = 1$: $x^3 + x^2 + x - 3 = (x - 1)(x^2 + 2x + 3)$. Zatem $x^4 - 4x + 3 = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)$.
3. $(x - 1)^2 \geq 0$ oraz $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$, więc iloczyn ≥ 0 . ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zauważenie pierwiastka $x = 1$ i podzielenie wielomianu,
- 2 pkt — rozkład $(x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)$,
- 3 pkt — uzasadnienie znaków obu czynników.

PR02.5 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

ROZWIĄZANIE

1. $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = a^2(a - b) - b^2(a - b) = (a - b)(a^2 - b^2) = (a - b)^2(a + b)$.
2. $(a - b)^2 \geq 0$ i $a + b > 0$, więc wyrażenie jest nieujemne. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — przeniesienie i pogrupowanie wyrazów,
- 2 pkt — rozkład $(a - b)^2(a + b)$,
- 3 pkt — uzasadnienie znaku i wniosek.

PR02.6 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Liczyby rzeczywiste a i b spełniają warunki $a + b = 2$ oraz $a^2 + b^2 \leq 2$. Wykaż, że $a = b = 1$.

ROZWIĄZANIE

1. $(a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) - (a + b)^2$ (sprawdź, wymnażając).
2. Zatem $(a - b)^2 \leq 2 \cdot 2 - 4 = 0$.
3. Kwadrat jest nieujemny, więc $(a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$, a z $a + b = 2$: $a = b = 1$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis tożsamości $(a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) - (a + b)^2$ lub obliczenie $ab \geq 1$,
- 2 pkt — wniosek $(a - b)^2 \leq 0$,
- 3 pkt — $a = b = 1$.

Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność $(a+b)^3 \geq 4ab(a+b)$.

ROZWIĄZANIE

- $(a+b)^3 - 4ab(a+b) = (a+b)[(a+b)^2 - 4ab] = (a+b)(a-b)^2$.
- $a+b > 0$ i $(a-b)^2 \geq 0$, więc różnica jest nieujemna. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wyłączenie $(a+b)$ przed nawias,
- 2 pkt — zapis $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$,
- 3 pkt — uzasadnienie i wniosek.

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

ROZWIĄZANIE

- Mnożymy przez 2: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$.
- Lewa strona to $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ — suma kwadratów, więc jest ≥ 0 . ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — pomnożenie przez 2 i przeniesienie wyrazów,
- 2 pkt — zapis w postaci sumy trzech kwadratów,
- 3 pkt — wniosek.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.

ROZWIĄZANIE

- $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$. Zapisujemy $n^2 + 1 = (n^2 - 4) + 5$:
- $n^5 - n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1)$.
- Pierwszy składnik — iloczyn pięciu kolejnych liczb całkowitych — dzieli się przez 2, 3 i 5, więc przez 30.
- Drugi: $(n-1)n(n+1)$ dzieli się przez 6, więc $5 \cdot (n-1)n(n+1)$ przez 30. Suma dzieli się przez 30. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozkład $n(n-1)(n+1)(n^2+1)$,
- 2 pkt — uzasadnienie podzielności przez 6 i przez 5 (np. rozbiecie $n^2+1 = (n^2-4) + 5$ lub reszty z dzielenia przez 5),
- 3 pkt — pełny wniosek.

Liczby dodatnie a i b spełniają warunek $a + b = 1$. Wykaż, że $ab \leq \frac{1}{4}$ oraz $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$.

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{1}{4} - ab = \frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$, więc $ab \leq \frac{1}{4}$.
2. $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = 1 + \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{ab} = 1 + \frac{2}{ab}$.
3. Skoro $0 < ab \leq \frac{1}{4}$, to $\frac{2}{ab} \geq 8$ i całe wyrażenie ≥ 9 . ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wykazanie $ab \leq \frac{1}{4}$,
- 2 pkt — przekształcenie do postaci $1 + \frac{2}{ab}$,
- 3 pkt — wniosek ≥ 9 .

PR03 Wartość bezwzględna — równania i nierówności

🔑 Miejsca zerowe pod modułami → przedziały → rozwiązanie $\cap$ przedział → suma.

PR03.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Rozwiąż równanie $|2x - 3| = 5$.

ROZWIĄZANIE

1. $2x - 3 = 5 \Rightarrow x = 4$ lub $2x - 3 = -5 \Rightarrow x = -1$.

Odpowiedź: $x = -1$ lub $x = 4$

PR03.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Rozwiąż równanie $|x + 1| + |x - 3| = 4$.

ROZWIĄZANIE

1. Suma odległości x od -1 i od 3 jest równa 4 — dokładnie długości odcinka $[-1, 3]$.

2. Każdy $x \in [-1, 3]$ spełnia równanie; poza odcinkiem suma jest większa.

Odpowiedź: $x \in [-1, 3]$

PR03.3 OTWARTE ★★★

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $|x - 2| < 2x + 1$.

ROZWIĄZANIE

1. $x \geq 2$: $x - 2 < 2x + 1 \Rightarrow x > -3$ — cały przedział $[2, \infty)$.

2. $x < 2$: $2 - x < 2x + 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ — $(\frac{1}{3}, 2)$.

3. Suma: $(\frac{1}{3}, \infty)$.

Odpowiedź: $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozwiązanie w jednym z przypadków,
- 2 pkt — poprawny zbiór.

PR03.4 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Rozwiąż nierówność $|x + 2| - |x - 1| \geq 1$.

ROZWIĄZANIE

1. $x < -2$: $-(x + 2) - (1 - x) = -3 \geq 1$ — sprzeczność.

2. $-2 \leq x < 1$: $(x + 2) - (1 - x) = 2x + 1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0 \rightarrow [0, 1)$.

3. $x \geq 1$: $(x + 2) - (x - 1) = 3 \geq 1$ — cały $[1, \infty)$.

4. Suma: $[0, \infty)$.

Odpowiedź: $x \in [0, +\infty)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — podział na przedziały i jeden przypadek,
- 2 pkt — dwa przypadki,
- 3 pkt — poprawny zbiór $[0, \infty)$.

Rozwiąż nierówność $|x - 1| + 2|x + 2| > 7$.

ROZWIĄZANIE

1. $x < -2$: $(1 - x) - 2(x + 2) = -3x - 3 > 7 \Rightarrow x < -\frac{10}{3}$.
2. $-2 \leq x < 1$: $(1 - x) + 2(x + 2) = x + 5 > 7 \Rightarrow x > 2$ — brak w przedziale.
3. $x \geq 1$: $(x - 1) + 2(x + 2) = 3x + 3 > 7 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$.
4. Suma: $(-\infty, -\frac{10}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -\frac{10}{3}) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — przedziały i jeden przypadek,
- 2 pkt — dwa przypadki,
- 3 pkt — trzy przypadki,
- 4 pkt — poprawna suma.

Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 2x \leq 9$.

ROZWIĄZANIE

1. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$.
2. $x \geq 3$: $x - 3 + 2x \leq 9 \Rightarrow x \leq 4 \rightarrow [3, 4]$.
3. $x < 3$: $3 - x + 2x \leq 9 \Rightarrow x \leq 6 \rightarrow (-\infty, 3)$.
4. Suma: $(-\infty, 4]$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, 4]$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zamiana na $|x - 3|$,
- 2 pkt — rozwiązanie w jednym przypadku,
- 3 pkt — poprawny zbiór.

Rozwiąż nierówność $|x^2 - 4| < 3x$.

ROZWIĄZANIE

1. Prawa strona musi być dodatnia: $x > 0$.
2. $x \geq 2$: $x^2 - 4 < 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Rightarrow x \in (-1, 4) \rightarrow [2, 4)$.
3. $0 < x < 2$: $4 - x^2 < 3x \Rightarrow x^2 + 3x - 4 > 0 \Rightarrow x < -4$ lub $x > 1 \rightarrow (1, 2)$.
4. Suma: $(1, 4)$.

Odpowiedź: $x \in (1, 4)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozpatrzenie przypadku $x^2 - 4 \geq 0$ lub zapis $-3x < x^2 - 4 < 3x$,
- 2 pkt — rozwiązanie jednej z nierówności kwadratowych,
- 3 pkt — rozwiązanie obu,
- 4 pkt — poprawny zbiór $(1, 4)$.

Wyznacz liczbę rozwiązań równania $|x^2 - 4x| = m$ w zależności od parametru m .

ROZWIĄZANIE

1. Wykres $y = |x^2 - 4x|$: parabola $y = x^2 - 4x$ (miejsca zerowe 0 i 4, wierzchołek $(2, -4)$) z częścią pod osią odbitą do góry — „garb” o wierzchołku $(2, 4)$.
2. Prosta $y = m$: dla $m < 0$ — brak punktów wspólnych; $m = 0$ — dwa ($x = 0, x = 4$); $0 < m < 4$ — cztery.
3. $m = 4$ — trzy (wierzchołek garbu i dwa na ramionach); $m > 4$ — dwa.

Odpowiedź: $m < 0$: 0; $m = 0$: 2; $0 < m < 4$: 4; $m = 4$: 3; $m > 4$: 2

Schemat punktowania:

- 1 pkt — szkic wykresu $y = |x^2 - 4x|$,
- 2 pkt — poprawne przypadki $m < 0$ i $m = 0$,
- 3 pkt — przypadek $0 < m < 4$,
- 4 pkt — przypadki $m = 4$ i $m > 4$.

Rozwiąż równanie $|x - 1| = |2x + 4|$.

ROZWIĄZANIE

1. $|a| = |b| \iff a = b$ lub $a = -b$.
2. $x - 1 = 2x + 4 \Rightarrow x = -5$; $x - 1 = -2x - 4 \Rightarrow x = -1$.
3. Sprawdzenie: $|-6| = |-6|$, $|-2| = |2| \checkmark$.

Odpowiedź: $x = -5$ lub $x = -1$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis dwóch przypadków,
- 2 pkt — oba rozwiązania.

Rozwiąż równanie $|x + 3| + |x - 2| = 3x + 1$.

ROZWIĄZANIE

1. $x < -3$: $-2x - 1 = 3x + 1 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$ — poza przedziałem.
2. $-3 \leq x < 2$: $5 = 3x + 1 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \checkmark$.
3. $x \geq 2$: $2x + 1 = 3x + 1 \Rightarrow x = 0$ — poza przedziałem.
4. Odpowiedź: $x = \frac{4}{3}$.

Odpowiedź: $x = \frac{4}{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — podział na przedziały i jeden przypadek,
- 2 pkt — wszystkie przypadki,
- 3 pkt — odrzucenie rozwiązań spoza przedziałów i odpowiedź.

PR04 Wielomiany i nierówności wymierne

🔑 Pierwiastek z dzielników wyrazu wolnego → Horner → wężyk. Ułamki: wspólny mianownik, nie mnożyć!

PR04.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ przez dwumian $x - 2$.

ROZWIĄZANIE

1. Z twierdzenia Bézouta reszta to $W(2) = 8 - 8 + 6 - 5 = 1$.

Odpowiedź: 1

PR04.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Wyznacz m , dla którego liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + mx^2 - 4x + 4$.

ROZWIĄZANIE

1. $W(2) = 8 + 4m - 8 + 4 = 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -1$.

Odpowiedź: $m = -1$

PR04.3 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Rozwiąż nierówność $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \geq 0$.

ROZWIĄZANIE

1. Grupowanie: $x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 2)(x + 2)$.

2. Pierwiastki $-2, 2, 3$; wężyk od prawej nad osią.

3. $W(x) \geq 0$ dla $x \in [-2, 2] \cup [3, \infty)$.

Odpowiedź: $x \in [-2, 2] \cup [3, +\infty)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozkład na czynniki,
- 2 pkt — pierwiastki i szkic,
- 3 pkt — zbiór rozwiązań.

PR04.4 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Rozwiąż równanie $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$.

ROZWIĄZANIE

1. Kandydaci: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$. $W(2) = 16 - 12 - 6 + 2 = 0$.

2. Horner: $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(2x^2 + x - 1) = (x - 2)(2x - 1)(x + 1)$.

3. Rozwiązania: $2, \frac{1}{2}, -1$.

Odpowiedź: $x \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — znalezienie pierwiastka,
- 2 pkt — podzielenie i trójmian $2x^2 + x - 1$,
- 3 pkt — wszystkie rozwiązania.

PR04.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż nierówność $\frac{x+1}{x-2} \geq 2$.

ROZWIĄZANIE

1. Dziedzina: $x \neq 2$. $\frac{x+1}{x-2} - 2 = \frac{x+1-2x+4}{x-2} = \frac{5-x}{x-2} \geq 0$.
2. $\Leftrightarrow (5-x)(x-2) \geq 0$ i $x \neq 2 \Leftrightarrow (x-5)(x-2) \leq 0, x \neq 2$.
3. $x \in (2, 5]$.

Odpowiedź: $x \in (2, 5]$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — sprowadzenie do postaci $\frac{5-x}{x-2} \geq 0$,
- 2 pkt — zamiana na nierówność iloczynową z dziedziną,
- 3 pkt — zbiór $(2, 5]$.

PR04.6 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Rozwiąż nierówność $\frac{x^2-1}{x+3} \leq x-1$.

ROZWIĄZANIE

1. Dziedzina: $x \neq -3$. $\frac{x^2-1-(x-1)(x+3)}{x+3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2-1-x^2-2x+3}{x+3} = \frac{2-2x}{x+3} \leq 0$.
2. $\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \geq 0, x \neq -3$.
3. $x \in (-\infty, -3) \cup [1, \infty)$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wspólny mianownik,
- 2 pkt — postać $\frac{2-2x}{x+3} \leq 0$,
- 3 pkt — zamiana na iloczyn z dziedziną,
- 4 pkt — poprawny zbiór.

PR04.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ jest podzielny przez dwumiany $x-1$ oraz $x+2$. Wyznacz a i b oraz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

ROZWIĄZANIE

1. $W(1) = 1 + a + b - 6 = 0 \Rightarrow a + b = 5$.
2. $W(-2) = -8 + 4a - 2b - 6 = 0 \Rightarrow 2a - b = 7$.
3. Dodając: $3a = 12 \Rightarrow a = 4, b = 1$.
4. $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$ — trzeci pierwiastek -3 .

Odpowiedź: $a = 4, b = 1$, trzeci pierwiastek -3

Schemat punktowania:

- 1 pkt — układ równań z Bézouta,
- 2 pkt — $a = 4, b = 1$,
- 3 pkt — trzeci pierwiastek -3 .

PR04.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - 1$ jest równa 3 , a przez $x + 2$ jest równa -3 . Wyznacz resztę z dzielenia $W(x)$ przez $(x - 1)(x + 2)$.

ROZWIĄZANIE

1. $W(x) = (x - 1)(x + 2)Q(x) + ax + b$.
2. $W(1) = a + b = 3$, $W(-2) = -2a + b = -3$.
3. $3a = 6 \Rightarrow a = 2$, $b = 1$: $R(x) = 2x + 1$.

Odpowiedź: $R(x) = 2x + 1$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis reszty jako $ax + b$ i warunków $W(1) = 3$, $W(-2) = -3$,
- 2 pkt — rozwiązanie układu,
- 3 pkt — $R(x) = 2x + 1$.

PR04.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wyznacz wszystkie wartości m , dla których wielomian $W(x) = x^3 - 3x + m$ ma pierwiastek podwójny.

ROZWIĄZANIE

1. Pierwiastek wielokrotny x_0 spełnia $W(x_0) = 0$ i $W'(x_0) = 0$.
2. $W'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = \pm 1$.
3. $W(1) = m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$: $W = (x - 1)^2(x + 2)$. $W(-1) = m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$:
 $W = (x + 1)^2(x - 2)$.

Odpowiedź: $m = -2$ lub $m = 2$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek $W(x_0) = W'(x_0) = 0$ (lub zapis $W = (x - p)^2(x - q)$),
- 2 pkt — $x_0 = \pm 1$,
- 3 pkt — $m = 2$ i $m = -2$.

PR04.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż nierówność $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$.

ROZWIĄZANIE

1. $t = x^2 \geq 0$: $t^2 - 5t + 4 < 0 \Rightarrow 1 < t < 4$.
2. $1 < x^2 < 4 \Rightarrow 1 < |x| < 2$.
3. $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$.

Odpowiedź: $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — podstawienie lub rozkład $(x^2 - 1)(x^2 - 4)$,
- 2 pkt — $1 < x^2 < 4$,
- 3 pkt — poprawny zbiór.

PR05 Ciągi arytmetyczne i geometryczne — zadania łączone

🔑 Wszystko przez a_1 i r (lub środkowy wyraz) $\rightarrow b^2 = ac / 2b = a + c \rightarrow$ równanie $\rightarrow$ odrzuć sprzeczne.

PR05.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Ile ujemnych wyrazów ma ciąg $a_n = 3n - 7$ ($n \geq 1$)?

ROZWIĄZANIE

1. $3n - 7 < 0 \Rightarrow n < \frac{7}{3}$, czyli $n \in \{1, 2\}$.

Odpowiedź: 2

PR05.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 7.

ROZWIĄZANIE

1. Liczby $14, 21, \dots, 98$ — ciąg arytmetyczny, $r = 7, n = 13$.

2. $S = \frac{14+98}{2} \cdot 13 = 728$.

Odpowiedź: 728

PR05.3 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

W ciągu arytmetycznym (a_n) spełnione są warunki $a_2 + a_5 = 17$ oraz $a_3 \cdot a_4 = 70$. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

ROZWIĄZANIE

1. $2a_1 + 5r = 17$. Oznaczmy $s = a_1 + \frac{5}{2}r = \frac{17}{2}$; wtedy $a_3 = s - \frac{r}{2}$, $a_4 = s + \frac{r}{2}$.

2. $a_3 a_4 = s^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{289}{4} - \frac{r^2}{4} = 70 \Rightarrow r^2 = 9$.

3. $r = 3$: $a_1 = 1$; $r = -3$: $a_1 = 16$.

Odpowiedź: $a_1 = 1, r = 3$ lub $a_1 = 16, r = -3$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — układ równań z a_1 i r ,
- 2 pkt — równanie z jedną niewiadomą ($r^2 = 9$),
- 3 pkt — oba ciągi.

PR05.4 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny i rosnący, a suma jego wyrazów jest równa 39. Liczby x, y, z są — odpowiednio — pierwszym, drugim i piątym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz x, y, z .

ROZWIĄZANIE

1. $x = a, y = a + r, z = a + 4r$ ($r \neq 0$, bo ciąg rosnący).
2. $(a + r)^2 = a(a + 4r) \Rightarrow r^2 = 2ar \Rightarrow r = 2a$.
3. Wtedy $(x, y, z) = (a, 3a, 9a)$, suma $13a = 39 \Rightarrow a = 3$.
4. $(3, 9, 27)$ — rosnący, $q = 3$ ✓.

Odpowiedź: $x = 3, y = 9, z = 27$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis wyrazów przez a i r ,
- 2 pkt — warunek geometryczny i $r = 2a$,
- 3 pkt — równanie z sumą,
- 4 pkt — $x = 3, y = 9, z = 27$.

PR05.5 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Ciąg arytmetyczny (a_n) ma różnicę $r \neq 0$ i $a_1 = 2$. Wyrazy a_1, a_2, a_5 tworzą (w tej kolejności) ciąg geometryczny. Oblicz r oraz taką liczbę n , że suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 200.

ROZWIĄZANIE

1. $(2 + r)^2 = 2(2 + 4r) \Rightarrow r^2 - 4r = 0, r \neq 0 \Rightarrow r = 4$.
2. $a_n = 4n - 2, S_n = \frac{2+4n-2}{2}n = 2n^2$.
3. $2n^2 = 200 \Rightarrow n = 10$.

Odpowiedź: $r = 4, n = 10$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek $(2 + r)^2 = 2(2 + 4r)$,
- 2 pkt — $r = 4$,
- 3 pkt — $S_n = 2n^2$,
- 4 pkt — $n = 10$.

PR05.6 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny, a ich suma jest równa 26. Liczby $a + 1, b + 6, c + 3$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz a, b, c .

ROZWIĄZANIE

1. Arytmetyczny: $2(b + 6) = a + 1 + c + 3 \Rightarrow a + c = 2b + 8$.
2. Z sumą: $3b + 8 = 26 \Rightarrow b = 6, a + c = 20$.
3. Geometryczny: $ac = 36, a, c$ — pierwiastki $t^2 - 20t + 36 = 0$: 2 i 18.
4. $(2, 6, 18) \rightarrow (3, 12, 21)$ ✓; $(18, 6, 2) \rightarrow (19, 12, 5)$ ✓.

Odpowiedź: $(2, 6, 18)$ lub $(18, 6, 2)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek arytmetyczny,
- 2 pkt — $b = 6$,
- 3 pkt — układ $a + c = 20, ac = 36$,
- 4 pkt — obie trójki.

Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n+1}{2n+3}$, $n \geq 1$.

ROZWIĄZANIE

- $a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{2n+5} - \frac{n+1}{2n+3} = \frac{(n+2)(2n+3) - (n+1)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)}$.
- Licznik: $2n^2 + 7n + 6 - (2n^2 + 7n + 5) = 1$.
- $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(2n+5)(2n+3)} > 0$ — ciąg rosnący.

Odpowiedź: ciąg rosnący

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis różnicy $a_{n+1} - a_n$
- 2 pkt — sprowadzenie do wspólnego mianownika,
- 3 pkt — uzasadnienie znaku i wniosku.

Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2n$ dla $n \geq 1$. Wyznacz wzór ogólny ciągu i oblicz a_{10} .

ROZWIĄZANIE

- $a_n = a_1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2(n-1) = 2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = n^2 - n + 2$.
- $a_{10} = 100 - 10 + 2 = 92$.

Odpowiedź: $a_n = n^2 - n + 2$, $a_{10} = 92$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis a_n jako sumy przyrostów,
- 2 pkt — wzór $n^2 - n + 2$,
- 3 pkt — $a_{10} = 92$.

Na początku każdego roku przez 10 lat wpłacamy na konto 1000 zł. Oprocentowanie wynosi 5% w skali roku, odsetki są kapitalizowane na koniec roku. Oblicz stan konta na koniec dziesiątego roku (wynik zaokrąglij do grosza).

ROZWIĄZANIE

- Wpłata z początku roku k rośnie przez $11 - k$ lat: $1000 \cdot 1,05^{11-k}$.
- Suma: $1000(1,05 + 1,05^2 + \dots + 1,05^{10}) = 1000 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{0,05}$.
- $1,05^{10} \approx 1,628895$, więc $\approx 1000 \cdot 1,05 \cdot 12,5779 = 13\,206,79$ zł.

Odpowiedź: 13 206,79 zł

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis sumy jako ciągu geometrycznego,
- 2 pkt — zastosowanie wzoru na sumę,
- 3 pkt — wynik 13 206,79 zł.

Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa **21**, a ich iloczyn **216**. Wyznacz te wyrazy.

ROZWIĄZANIE

1. $a_1 a_2 a_3 = a_2^3 = 216 \Rightarrow a_2 = 6$.
2. $a_1 + a_3 = 15$, $a_1 a_3 = a_2^2 = 36$ — pierwiastki $t^2 - 15t + 36 = 0$: 3 i 12.
3. $(3, 6, 12)$, $q = 2$ lub $(12, 6, 3)$, $q = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: **(3, 6, 12)** lub **(12, 6, 3)**

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $a_2 = 6$,
- 2 pkt — układ $a_1 + a_3 = 15$, $a_1 a_3 = 36$,
- 3 pkt — oba ciągi.

PR06 Szereg geometryczny nieskończony

 Najpierw $|q| < 1$. Suma $\frac{a_1}{1-q}$. Rozważ q dodatnie i ujemne.

PR06.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz sumę szeregu $12 + 6 + 3 + \dots$

ROZWIĄZANIE

$$1. a_1 = 12, q = \frac{1}{2}: S = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = 24.$$

Odpowiedź: 24

PR06.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Zapisz liczbę $0,(36)$ w postaci ułamka nieskracalnego.

ROZWIĄZANIE

$$1. 0,(36) = \frac{36}{100} + \frac{36}{100^2} + \dots = \frac{0,36}{1-0,01} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}.$$

Odpowiedź: $\frac{4}{11}$

PR06.3 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Wyznacz wszystkie x , dla których szereg $1 + (x-1) + (x-1)^2 + \dots$ jest zbieżny.

ROZWIĄZANIE

$$1. q = x-1, |x-1| < 1 \iff 0 < x < 2.$$

Odpowiedź: $x \in (0, 2)$

PR06.4 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots = \frac{3}{2}$, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

ROZWIĄZANIE

$$1. q = 2x, \text{ zbieżność: } |2x| < 1 \iff x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$2. \frac{1}{1-2x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 - 2x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{6}.$$

$$3. \frac{1}{6} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \checkmark.$$

Odpowiedź: $x = \frac{1}{6}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek zbieżności,
- 2 pkt — równanie $\frac{1}{1-2x} = \frac{3}{2}$,
- 3 pkt — $x = \frac{1}{6}$ ze sprawdzeniem.

PR06.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa **16**, a jego pierwszy wyraz jest równy **12**. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu.

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{12}{1-q} = 16 \Rightarrow 1 - q = \frac{3}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{4} \quad (|q| < 1 \checkmark).$$

$$2. a_3 = 12 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{4}.$$

Odpowiedź: $a_3 = \frac{3}{4}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie z sumą,
- 2 pkt — $q = \frac{1}{4}$,
- 3 pkt — $a_3 = \frac{3}{4}$.

PR06.6 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Nieskończony ciąg geometryczny jest zbieżny, suma jego dwóch pierwszych wyrazów jest równa **12**, a suma wszystkich wyrazów jest równa **16**. Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki.

ROZWIĄZANIE

$$1. a_1(1+q) = 12 \text{ i } \frac{a_1}{1-q} = 16 \Rightarrow a_1 = 16(1-q).$$

$$2. 16(1-q)(1+q) = 12 \Rightarrow 1 - q^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}.$$

$$3. q = \frac{1}{2}: a_1 = 8 \text{ (ciąg } 8, 4, 2, \dots); q = -\frac{1}{2}: a_1 = 24 \text{ (ciąg } 24, -12, 6, \dots). \text{ Oba } |q| < 1 \checkmark.$$

Odpowiedź: $a_1 = 8, q = \frac{1}{2}$ lub $a_1 = 24, q = -\frac{1}{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — układ równań $a_1(1+q) = 12, \frac{a_1}{1-q} = 16$,
- 2 pkt — równanie $1 - q^2 = \frac{3}{4}$,
- 3 pkt — $q = \pm \frac{1}{2}$,
- 4 pkt — oba ciągi.

PR06.7 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Trójkąt równoboczny T_1 ma bok długości a . Trójkąt T_{n+1} ma wierzchołki w środkach boków trójkąta T_n . Oblicz sumę obwodów oraz sumę pól wszystkich trójkątów $T_1, T_2, T_3, \dots$

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{Boki: } a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \dots \text{ — iloraz } \frac{1}{2}. \text{ Obwody: } 3a \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 6a.$$

$$2. \text{Pola: } \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \frac{a^2\sqrt{3}}{16}, \dots \text{ — iloraz } \frac{1}{4}.$$

$$3. \text{Suma pól: } \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Odpowiedź: suma obwodów $6a$, suma pól $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — iloraz $\frac{1}{2}$ dla boków,
- 2 pkt — suma obwodów $6a$,
- 3 pkt — iloraz $\frac{1}{4}$ dla pól,
- 4 pkt — suma pól.

PR06.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Rozwiąż równanie $1 - x + x^2 - x^3 + \dots = 2x$, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

ROZWIĄZANIE

1. $q = -x$, zbieżność: $|x| < 1$. Suma: $\frac{1}{1+x}$.
2. $\frac{1}{1+x} = 2x \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.
3. $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \approx -1,37$ — poza $(-1, 1)$. Zostaje $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0,37$.

Odpowiedź: $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek $|x| < 1$ i suma $\frac{1}{1+x}$,
- 2 pkt — równanie kwadratowe,
- 3 pkt — odrzucenie jednego rozwiązania,
- 4 pkt — odpowiedź.

PR06.9 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego, zapisz liczbę **2,1(6)** w postaci ułamka nieskracalnego.

ROZWIĄZANIE

1. $2,1(6) = 2,1 + 0,06 + 0,006 + \dots$
2. $0,06 + 0,006 + \dots = \frac{0,06}{1-0,1} = \frac{1}{15}$.
3. $2,1 + \frac{1}{15} = \frac{21}{10} + \frac{1}{15} = \frac{63+2}{30} = \frac{65}{30} = \frac{13}{6}$.

Odpowiedź: $\frac{13}{6}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis części okresowej jako szeregu,
- 2 pkt — wynik $\frac{13}{6}$.

PR06.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$ dla tych x , dla których szereg jest zbieżny. Wyznacz dziedzinę funkcji f i rozwiąż równanie $f(x) = \frac{3}{2}$.

ROZWIĄZANIE

1. $q = \frac{1}{x}$, zbieżność: $|\frac{1}{x}| < 1 \iff |x| > 1$.
2. $f(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$.
3. $\frac{x}{x-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = 3x - 3 \Rightarrow x = 3, |3| > 1 \checkmark$.

Odpowiedź: $D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty), x = 3$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — dziedzina $|x| > 1$,
- 2 pkt — wzór $f(x) = \frac{x}{x-1}$,
- 3 pkt — $x = 3$ ze sprawdzeniem dziedziny.

PR07 Granice ciągów i funkcji

🔑 $\frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ najwyższa potęga; $\frac{0}{0} \rightarrow$ skrócić; $\frac{c}{0} \rightarrow$ znak mianownika.

PR07.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n}{2n^2 + 5}$.

ROZWIĄZANIE

1. Dzielimy przez n^2 : $\frac{3 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n^2}} \rightarrow \frac{3}{2}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{2}$

PR07.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n^2 + 1}$.

ROZWIĄZANIE

1. Stopień licznika mniejszy od stopnia mianownika: $\frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 0$.

Odpowiedź: 0

PR07.3 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n)$.

ROZWIĄZANIE

1. $\sqrt{n^2 + 4n} - n = \frac{n^2 + 4n - n^2}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n}$.
2. Dzielimy przez n : $\frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1} \rightarrow \frac{4}{2} = 2$.

Odpowiedź: 2

Schemat punktowania:

- 1 pkt — pomnożenie przez sprzężenie,
- 2 pkt — granica 2.

PR07.4 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+1}{2}}{n^2 + 3}$.

ROZWIĄZANIE

1. $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$.
2. $\frac{n^2 + n}{2(n^2 + 3)} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozpisanie symbolu Newtona,
- 2 pkt — granica $\frac{1}{2}$.

PR07.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

ROZWIĄZANIE

1. Dla $x \neq 3$: $\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3 \rightarrow 6$.

Odpowiedź: 6

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozkład i skrócenie,
- 2 pkt — granica 6.

PR07.6 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$.

ROZWIĄZANIE

1. $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, więc dla $x \neq 1$: $\frac{x+2}{x-1}$.2. $x \rightarrow 1^-$: licznik $\rightarrow 3 > 0$, mianownik $\rightarrow 0^-$. Granica: $-\infty$.Odpowiedź: $-\infty$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — skrócenie do $\frac{x+2}{x-1}$,
- 2 pkt — wynik $-\infty$ z uzasadnieniem znaku.

PR07.7 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} - 1}$.

ROZWIĄZANIE

1. Dzielimy przez 3^n : $\frac{1 + (\frac{2}{3})^n}{3 - (\frac{1}{3})^n} \rightarrow \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}$.Odpowiedź: $\frac{1}{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — podzielenie przez 3^n ,
- 2 pkt — granica $\frac{1}{3}$.

PR07.8 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$.

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$.
2. Dla $x \rightarrow 0$: $\frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — sprzężenie i skrócenie x ,
- 2 pkt — granica $\frac{1}{4}$.

PR07.9 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2-3n}$.

ROZWIĄZANIE

1. $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2-3n} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis sumy $\frac{n(n+1)}{2}$,
- 2 pkt — granica $\frac{1}{2}$.

PR07.10 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ m & \text{dla } x = 2 \end{cases}$. Wyznacz m , dla którego funkcja f jest ciągła w punkcie $x = 2$.

ROZWIĄZANIE

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$
2. Ciągłość: $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow m = 4$

Odpowiedź: $m = 4$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie granicy 4,
- 2 pkt — $m = 4$.

PR08 Kombinatoryka rozszerzona

🔑 Kolejność? powtórzenia? → wzór. Zero z przodu i sąsiedztwo — odejmij lub sklej.

PR08.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Na ile sposobów można wybrać trzysobową delegację spośród 10 osób?

ROZWIĄZANIE

1. Kolejność nie ma znaczenia: $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$.

Odpowiedź: 120

PR08.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Ile różnych „słów” (ciągów liter) można utworzyć, przestawiając litery słowa MATMA?

ROZWIĄZANIE

1. 5 liter, w tym M i A po dwa razy: $\frac{5!}{2!2!} = 30$.

Odpowiedź: 30

PR08.3 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry parzyste i dokładnie dwie cyfry nieparzyste.

ROZWIĄZANIE

- Wybór cyfr: nieparzyste $\binom{5}{2} = 10$, parzyste $\binom{5}{2} = 10$; ustawienia: $4! = 24$. Razem **2400** (z zerem na początku).
- Złe: **0** na początku — druga parzysta **4** sposoby, nieparzyste $\binom{5}{2} = 10$, reszta ustawiona na $3! = 6$ sposobów: **240**.
- 2400 – 240 = 2160**.

Odpowiedź: 2160

Schemat punktowania:

- 1 pkt — liczba wyborów cyfr i ustawień (z zerem na początku),
- 2 pkt — poprawne policzenie przypadków z zerem na początku,
- 3 pkt — wynik **2160**.

PR08.4 OTWARTE ★★

0–3 pkt

Na ile sposobów można posadzić 6 osób na 6 krzesłach ustawionych w rzędzie tak, aby Ania i Bartek siedzieli obok siebie?

ROZWIĄZANIE

- Sklejamy Anię i Bartka w blok: 5 „obiektów” — $5! = 120$ ustawień.
- Wewnątrz bloku: **2** ustawienia. Razem **240**.

Odpowiedź: 240

Schemat punktowania:

- 1 pkt — pomysł z blokiem,
- 2 pkt — **5!** ustawień bloku,
- 3 pkt — wynik **240**.

PR08.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Spośród 7 kobiet i 5 mężczyzn wybieramy czteroosobową komisję. Oblicz, na ile sposobów można to zrobić, aby w komisji były co najmniej dwie kobiety.

ROZWIĄZANIE

- 2K+2M: $\binom{7}{2} \binom{5}{2} = 210$; 3K+1M: $\binom{7}{3} \binom{5}{1} = 175$; 4K: $\binom{7}{4} = 35$.
- Razem **420** (kontrola: $\binom{12}{4} - \binom{5}{4} - \binom{7}{1} \binom{5}{3} = 495 - 5 - 70 = 420 \checkmark$).

Odpowiedź: 420**Schemat punktowania:**

- 1 pkt — rozbicie na przypadki (lub dopełnienie),
- 2 pkt — poprawne policzenie przypadków,
- 3 pkt — wynik **420**.

PR08.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie cyfra 5 występuje dokładnie dwa razy.

ROZWIĄZANIE

- Przypadek 1: pierwsza cyfra to 5 — drugą piątkę na jedno z 5 miejsc, pozostałe 4 cyfry: po 9 możliwości:
 $5 \cdot 9^4 = 32\,805$.
- Przypadek 2: pierwsza cyfra $\neq 0, 5$ — 8 możliwości; dwie piątki na $\binom{5}{2} = 10$ sposobów; pozostałe 3 cyfry po 9:
 $8 \cdot 10 \cdot 9^3 = 58\,320$.
- Razem $32\,805 + 58\,320 = 91\,125$.

Odpowiedź: 91 125**Schemat punktowania:**

- 1 pkt — rozbicie na przypadki ze względu na pierwszą cyfrę,
- 2 pkt — poprawnie jeden przypadek,
- 3 pkt — wynik **91 125**.

PR08.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Oblicz, ile jest trójkątów, których wierzchołkami są wierzchołki dziesięciokąta foremnego i które nie mają żadnego boku wspólnego z tym dziesięciokątem.

ROZWIĄZANIE

- Wszystkich trójkątów: $\binom{10}{3} = 120$.
- Z dwoma bokami dziesięciokąta (trzy kolejne wierzchołki): **10**.
- Z dokładnie jednym bokiem: **10** boków $\cdot$ **6** wierzchołków niesąsiednich z tym bokiem = **60**.
- $120 - 10 - 60 = 50$.

Odpowiedź: 50**Schemat punktowania:**

- 1 pkt — liczba wszystkich trójkątów,
- 2 pkt — policzenie trójkątów z jednym i z dwoma bokami,
- 3 pkt — wynik **50**.

PR08.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Na ile sposobów można rozmieścić **5** różnych kul w **3** różnych szufladach tak, aby żadna szuflada nie była pusta?

ROZWIĄZANIE

1. Wszystkich rozmieszczeń: $3^5 = 243$.
2. Włączenia–wyłączenia: pusta co najmniej jedna szuflada: $3 \cdot 2^5 - 3 \cdot 1^5 = 96 - 3 = 93$.
3. $243 - 93 = 150$.

Odpowiedź: 150**Schemat punktowania:**

- 1 pkt — liczba wszystkich rozmieszczeń,
- 2 pkt — poprawne odjęcie przypadków z pustą szufladą,
- 3 pkt — wynik **150**.

PR08.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Ile jest ciągów długości **8** o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, w których występują dokładnie trzy jedynki i żadne dwie jedynki nie stoją obok siebie?

ROZWIĄZANIE

1. Ustawiamy **5** zer — powstaje **6** luk (przed, między i za zerami).
2. Jedynki wstawiamy do **3** różnych luk: $\binom{6}{3} = 20$.

Odpowiedź: 20**Schemat punktowania:**

- 1 pkt — pomysł z lukami między zerami,
- 2 pkt — **6** luk i wybór **3** z nich,
- 3 pkt — wynik **20**.

PR08.10 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, w których wszystkie liczby parzyste stoją na miejscach o numerach parzystych?

ROZWIĄZANIE

1. Miejsca parzyste: **2, 4, 6** — dokładnie trzy, liczby parzyste też trzy: $3! = 6$ ustawień.
2. Liczby nieparzyste na pozostałych **4** miejscach: $4! = 24$.
3. $6 \cdot 24 = 144$.

Odpowiedź: 144**Schemat punktowania:**

- 1 pkt — $3!$ dla liczb parzystych,
- 2 pkt — wynik **144**.

PR09 Prawdopodobieństwo: klasyczne, warunkowe, Bernoulli

 Nazwij model: klasyczny / Bernoulli / warunkowy / drzewo. Zapisz wzór z liczbami, potem licz.

PR09.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Zdarzenia A i B spełniają: $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$, $P(A \cap B) = 0,2$. Oblicz $P(A \cup B)$.

ROZWIĄZANIE

1. $P(A \cup B) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7$.

Odpowiedź: 0,7

PR09.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Dla zdarzeń z zadania PR09.1 oblicz $P(A|B)$.

ROZWIĄZANIE

1. $P(A|B) = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$.

Odpowiedź: 0,5

PR09.3 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rzucamy 5 razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie trzech orłów.

ROZWIĄZANIE

1. Bernoulli: $n = 5$, $k = 3$, $p = \frac{1}{2}$.

2. $\binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$.

Odpowiedź: $\frac{5}{16}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozpoznanie schematu Bernoulliego,
- 2 pkt — zapis $\binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^5$,
- 3 pkt — wynik $\frac{5}{16}$.

PR09.4 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Strzelec trafia do celu z prawdopodobieństwem 0,7 w każdym strzale (niezależnie). Oddaje 4 strzały. Oblicz prawdopodobieństwo, że trafi co najmniej 3 razy.

ROZWIĄZANIE

1. $P(S_4 \geq 3) = \binom{4}{3} \cdot 0,7^3 \cdot 0,3 + \binom{4}{4} \cdot 0,7^4$.

2. $= 4 \cdot 0,343 \cdot 0,3 + 0,2401 = 0,4116 + 0,2401 = 0,6517$.

Odpowiedź: 0,6517

Schemat punktowania:

- 1 pkt — Bernoulli z $n = 4$, $p = 0,7$,
- 2 pkt — suma dla $k = 3$ i $k = 4$,
- 3 pkt — wynik 0,6517.

PR09.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jedną szóstkę, pod warunkiem że suma wyrzuconych oczek jest równa 10.

ROZWIĄZANIE

1. B — suma 10: rozkłady $\{6, 3, 1\}$, $\{6, 2, 2\}$, $\{5, 4, 1\}$, $\{5, 3, 2\}$, $\{4, 4, 2\}$, $\{4, 3, 3\}$ dają $6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27$ wyników.
2. $A \cap B$ — suma 10 z szóstką: $\{6, 3, 1\}$ (6 ustawień) i $\{6, 2, 2\}$ (3) — 9 wyników.
3. $P(A|B) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $\frac{1}{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $|B| = 27$,
- 2 pkt — $|A \cap B| = 9$,
- 3 pkt — wynik $\frac{1}{3}$.

PR09.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

W urnie I są 3 kule białe i 2 czarne, a w urnie II — 1 biała i 4 czarne. Rzucamy monetą: orzeł — losujemy kulę z urny I, reszka — z urny II. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

ROZWIĄZANIE

1. Prawdopodobieństwo całkowite: $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$.

Odpowiedź: $\frac{2}{5}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — drzewo lub zapis wzoru,
- 2 pkt — poprawne iloczyny gałęzi,
- 3 pkt — wynik $\frac{2}{5}$.

PR09.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ losujemy bez zwracania sześć razy po jednej liczbie i zapisujemy je w kolejności losowania, tworząc ciąg. Oblicz prawdopodobieństwo, że liczby 1 i 2 stoją w tym ciągu obok siebie.

ROZWIĄZANIE

1. $|\Omega| = 6! = 720$.
2. Blok „12” lub „21”: $2 \cdot 5! = 240$.
3. $P = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $\frac{1}{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $|\Omega| = 720$,
- 2 pkt — $|A| = 240$,
- 3 pkt — wynik $\frac{1}{3}$.

PR09.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

W sytuacji z zadania PR09.6 wylosowano kulę białą. Oblicz prawdopodobieństwo, że pochodziła z urny I.

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{ Bayes: } P(I|B) = \frac{P(B|I)P(I)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}.$$

Odpowiedź: $\frac{3}{4}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis prawdopodobieństwa warunkowego,
- 2 pkt — licznik $\frac{3}{10}$ i mianownik $\frac{2}{5}$,
- 3 pkt — wynik $\frac{3}{4}$.

PR09.9 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Ile co najmniej razy trzeba rzucić symetryczną kostką, aby prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednej szóstki było większe od 0,9?

ROZWIĄZANIE

- $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9 \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1.$
- $n > \frac{\log 0,1}{\log \frac{5}{6}} \approx 12,63.$
- Kontrola: $\left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 0,112, \left(\frac{5}{6}\right)^{13} \approx 0,093.$ Odpowiedź: **13**.

Odpowiedź: **13**

Schemat punktowania:

- 1 pkt — nierówność $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1,$
- 2 pkt — oszacowanie n (logarytm lub tablica potęg),
- 3 pkt — $n = 13.$

PR09.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Z urny, w której jest 5 kul białych i 3 czarne, losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie są białe, pod warunkiem że co najmniej jedna jest biała.

ROZWIĄZANIE

- $|\Omega| = \binom{8}{2} = 28. B$ — co najmniej jedna biała: $28 - \binom{3}{2} = 25.$
- $A \cap B$ — obie białe: $\binom{5}{2} = 10.$
- $P(A|B) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$

Odpowiedź: $\frac{2}{5}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $|B| = 25,$
- 2 pkt — $|A \cap B| = 10,$
- 3 pkt — wynik $\frac{2}{5}.$

PR10 Tożsamości trygonometryczne

 Rozpisz kąty podwojone, sumy zamień na iloczyny, wszystko przez sin i cos.

PR10.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Oblicz $\sin 75^\circ$.

ROZWIĄZANIE

$$1. \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Odpowiedź: $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

PR10.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz $\cos 2\alpha$.

ROZWIĄZANIE

$$1. \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Odpowiedź: $\frac{7}{9}$

PR10.3 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Oblicz $\sin^2 15^\circ$.

ROZWIĄZANIE

$$1. \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

Odpowiedź: $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

PR10.4 OTWARTE ★★★

0-2 pkt

Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = \sin 2\alpha$.

ROZWIĄZANIE

$$1. (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha. \blacksquare$$

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozwinięcie kwadratu i jedynka trygonometryczna,
- 2 pkt — wniosek.

Wykaż, że dla każdego kąta α , dla którego $\sin 2\alpha \neq 0$, prawdziwa jest równość $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

ROZWIĄZANIE

1. $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ (przy czym $\sin \alpha \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$).
2. $\frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$,
- 2 pkt — rozpisanie $\sin 2\alpha$,
- 3 pkt — skrócenie z komentarzem i wniosek.

Kąt α spełnia warunki $\operatorname{tg} \alpha = 2$ oraz $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$. Oblicz $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$.

ROZWIĄZANIE

1. $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\frac{3}{5}$.
2. Kontrola: w III ćwiartce $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, więc $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \checkmark$.

Odpowiedź: $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wyznaczenie $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ze znakami (lub wzory z tangensem),
- 2 pkt — $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$,
- 3 pkt — $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$.

Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

ROZWIĄZANIE

1. $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$.
2. $= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x$.
3. $= 3 \sin x - 4 \sin^3 x$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozpisanie $\sin(2x + x)$,
- 2 pkt — zastosowanie wzorów na $\sin 2x$, $\cos 2x$,
- 3 pkt — doprowadzenie do postaci $3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

PR10.8 OTWARTE ★★★

0-2 pkt

Oblicz wartość wyrażenia $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$.

ROZWIĄZANIE

$$1. \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} = 2 \cos 60^\circ \sin 45^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odpowiedź: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zastosowanie wzoru na różnicę sinusów,
- 2 pkt — wynik $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

PR10.9 OTWARTE ★★★

0-2 pkt

Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$.

ROZWIĄZANIE

$$1. \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha \cdot 1. \blacksquare$$

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — różnica kwadratów,
- 2 pkt — jedynka i wzór na $\cos 2\alpha$.

PR10.10 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Kąty α i β są ostre, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\cos \beta = \frac{5}{13}$. Oblicz $\sin(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha - \beta)$.

ROZWIĄZANIE

$$1. \cos \alpha = \frac{4}{5}, \sin \beta = \frac{12}{13} \text{ (kąty ostre).}$$

$$2. \sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{15+48}{65} = \frac{63}{65}.$$

$$3. \cos(\alpha - \beta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{20+36}{65} = \frac{56}{65}.$$

Odpowiedź: $\sin(\alpha + \beta) = \frac{63}{65}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{56}{65}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $\cos \alpha$ i $\sin \beta$,
- 2 pkt — $\sin(\alpha + \beta)$,
- 3 pkt — $\cos(\alpha - \beta)$.

PR11 Równania trygonometryczne

🔑 Wyłącz, nie dziel. Jednorodne $\rightarrow \operatorname{tg} x$. Sinus: dwie serie. Na końcu przedział.

PR11.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Rozwiąż równanie $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

ROZWIĄZANIE

$$1. x = \frac{\pi}{3} \text{ lub } x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Odpowiedź: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

PR11.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Rozwiąż równanie $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

ROZWIĄZANIE

$$1. 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Odpowiedź: $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

PR11.3 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

ROZWIĄZANIE

$$1. t = \sin x: 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ lub } t = -\frac{1}{2}.$$

$$2. \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

$$3. \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \text{ lub } x = \frac{11\pi}{6}.$$

Odpowiedź: $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie kwadratowe z $t = \sin x$,
- 2 pkt — $t = 1, t = -\frac{1}{2}$,
- 3 pkt — trzy rozwiązania z przedziału.

PR11.4 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $\sin 2x = \cos x$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

ROZWIĄZANIE

$$1. 2\sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0.$$

$$2. \cos x = 0: \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$$

$$3. \sin x = \frac{1}{2}: \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}.$$

Odpowiedź: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozkład $\cos x(2\sin x - 1) = 0$,
- 2 pkt — rozwiązania jednego czynnika,
- 3 pkt — wszystkie cztery rozwiązania.

Rozwiąż równanie $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$.

ROZWIĄZANIE

1. $2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x - 3 = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$.

2. $\sin x = 1$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$.

3. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zamiana $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,
- 2 pkt — $\sin x = 1$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$,
- 3 pkt — rozwiązania dla jednego przypadku,
- 4 pkt — wszystkie serie rozwiązań.

Rozwiąż równanie $\sin^2 x - (1 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$ w przedziale $[0, \pi]$.

ROZWIĄZANIE

1. Gdyby $\cos x = 0$, to $\sin^2 x = 0$ — sprzeczność z jedynką. Dzielimy przez $\cos^2 x$:

2. $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow (\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$.

3. $\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$; $\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ (w $[0, \pi]$).

Odpowiedź: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — uzasadnienie $\cos x \neq 0$,
- 2 pkt — równanie z $\tan x$,
- 3 pkt — $\tan x = 1$ lub $\tan x = \sqrt{3}$,
- 4 pkt — oba rozwiązania z przedziału.

Rozwiąż równanie $\sin 3x + \sin x = 0$.

ROZWIĄZANIE

1. $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x = 0$.

2. $\sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$; $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ — zawiera się w poprzedniej serii.

3. Odpowiedź: $x = \frac{k\pi}{2}$.

Odpowiedź: $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zamiana sumy na iloczyn,
- 2 pkt — rozwiązanie $\sin 2x = 0$,
- 3 pkt — rozwiązanie $\cos x = 0$,
- 4 pkt — poprawna odpowiedź końcowa.

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = 0$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

ROZWIĄZANIE

1. $2 \cos^2 x - 1 + 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$.
2. $\cos x = -\frac{1}{2}$ lub $\cos x = -1$.
3. $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi$.

Odpowiedź: $\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$,
- 2 pkt — równanie kwadratowe i jego rozwiązania,
- 3 pkt — rozwiązania jednej serii,
- 4 pkt — wszystkie trzy rozwiązania.

Rozwiąż równanie $2 \sin 5x \cos 3x = \sin 8x + \frac{1}{2}$.

ROZWIĄZANIE

1. $2 \sin 5x \cos 3x = \sin 8x + \sin 2x$.
2. Równanie: $\sin 8x + \sin 2x = \sin 8x + \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$.
3. $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, więc $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zamiana iloczynu na sumę,
- 2 pkt — równanie $\sin 2x = \frac{1}{2}$,
- 3 pkt — obie serie rozwiązań.

Rozwiąż nierówność $2 \sin^2 x > \sin x$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

ROZWIĄZANIE

1. $\sin x(2 \sin x - 1) > 0 \iff \sin x < 0$ lub $\sin x > \frac{1}{2}$.
2. $\sin x > \frac{1}{2}: x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$.
3. $\sin x < 0: x \in (\pi, 2\pi)$.
4. Suma: $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \cup (\pi, 2\pi)$.

Odpowiedź: $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \cup (\pi, 2\pi)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — postać $\sin x(2 \sin x - 1) > 0$,
- 2 pkt — warunek $\sin x < 0$ lub $\sin x > \frac{1}{2}$,
- 3 pkt — jeden z przedziałów,
- 4 pkt — poprawna suma.

PR12 Planimetria z twierdzeniem sinusów i cosinusów

🔑 Bok–kąt–bok → cosinusów; kąt naprzeciw boku + R → sinusów. Sinus kąta daje dwa kąty.

PR12.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

W trójkącie dwa boki mają długości **7** i **8**, a kąt między nimi ma miarę **120°**. Oblicz długość trzeciego boku.

ROZWIĄZANIE

$$1. c^2 = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 113 + 56 = 169, c = 13.$$

Odpowiedź: **13**

PR12.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

W trójkącie bok **$a = 6$** leży naprzeciw kąta **$\alpha = 45^\circ$** . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

ROZWIĄZANIE

$$1. 2R = \frac{6}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6\sqrt{2}, R = 3\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: **$3\sqrt{2}$**

PR12.3 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Trójkąt ma boki długości **5**, **7** i **8**. Oblicz miarę kąta leżącego naprzeciw boku długości **7** oraz pole trójkąta.

ROZWIĄZANIE

$$1. \cos \alpha = \frac{25+64-49}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

$$2. P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: **60° , $P = 10\sqrt{3}$**

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis tw. cosinusów,
- 2 pkt — kąt **60°** ,
- 3 pkt — pole **$10\sqrt{3}$** .

PR12.4 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

W trójkącie **ABC** : **$|BC| = 10$** , **$|\angle BAC| = 30^\circ$** , **$|\angle ABC| = 45^\circ$** . Oblicz długości boków **AC** i **AB** .

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{|AC|}{\sin 45^\circ} = \frac{10}{\sin 30^\circ} = 20 \Rightarrow |AC| = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

$$2. |\angle C| = 105^\circ, \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$3. |AB| = 20 \sin 105^\circ = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Odpowiedź: **$|AC| = 10\sqrt{2}$, $|AB| = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2})$**

Schemat punktowania:

- 1 pkt — tw. sinusów (**$2R = 20$**),
- 2 pkt — **$|AC| = 10\sqrt{2}$** ,
- 3 pkt — **$|AB| = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2})$** .

W trójkącie równobocznym ABC o boku 6 punkt D leży na boku BC i $|BD| = 2$. Oblicz $|AD|$ oraz $\sin \angle BAD$.

ROZWIĄZANIE

1. $\triangle ABD$: $|AD|^2 = 36 + 4 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 28$, $|AD| = 2\sqrt{7}$.
2. Tw. sinusów: $\frac{|BD|}{\sin \angle BAD} = \frac{|AD|}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin \angle BAD = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

Odpowiedź: $|AD| = 2\sqrt{7}$, $\sin \angle BAD = \frac{\sqrt{21}}{14}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — tw. cosinusów w $\triangle ABD$,
- 2 pkt — $|AD| = 2\sqrt{7}$,
- 3 pkt — zapis tw. sinusów,
- 4 pkt — $\sin \angle BAD = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

Równoległobok ma boki długości 5 i 8 oraz kąt ostry 60° . Oblicz długości jego przekątnych.

ROZWIĄZANIE

1. Krótsza przekątna (naprzeciw 60°): $d_1^2 = 25 + 64 - 40 = 49$, $d_1 = 7$.
2. Dłuższa (naprzeciw 120°): $d_2^2 = 25 + 64 + 40 = 129$, $d_2 = \sqrt{129}$.
3. Kontrola: $49 + 129 = 178 = 2(25 + 64) \checkmark$.

Odpowiedź: 7 i $\sqrt{129}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — tw. cosinusów dla jednej przekątnej,
- 2 pkt — $d_1 = 7$,
- 3 pkt — $d_2 = \sqrt{129}$.

Pole trójkąta jest równe $12\sqrt{3}$, a dwa jego boki mają długości 6 i 8. Oblicz długość trzeciego boku. Rozważ wszystkie przypadki.

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \sin \gamma = 12\sqrt{3} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \gamma = 60^\circ$ lub 120° .
2. $\gamma = 60^\circ$: $c^2 = 36 + 64 - 48 = 52$, $c = 2\sqrt{13}$.
3. $\gamma = 120^\circ$: $c^2 = 100 + 48 = 148$, $c = 2\sqrt{37}$.

Odpowiedź: $2\sqrt{13}$ lub $2\sqrt{37}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $\sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
- 2 pkt — dwa kąty 60° i 120° ,
- 3 pkt — jeden przypadek,
- 4 pkt — oba przypadki.

PR12.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

W trójkącie ABC : $|AB| = 8$, $|AC| = 5$, $|\angle BAC| = 60^\circ$. Oblicz długość dwusiecznej AD kąta BAC .

ROZWIĄZANIE

- $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$.
- Dwusieczna dzieli trójkąt na dwa o kątach 30° przy A : $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot d \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot d \cdot \frac{1}{2} = \frac{13d}{4}$.
- $\frac{13d}{4} = 10\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{40\sqrt{3}}{13}$.

Odpowiedź: $|AD| = \frac{40\sqrt{3}}{13}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — pole trójkąta ABC ,
- 2 pkt — zapis pola jako sumy pól z dwusieczną,
- 3 pkt — równanie z d ,
- 4 pkt — $d = \frac{40\sqrt{3}}{13}$.

PR12.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

W trójkącie ABC : $|AB| = 6$, $|AC| = 4$, a środkowa AM ma długość $\sqrt{19}$. Oblicz $|BC|$ i miarę kąta BAC .

ROZWIĄZANIE

- $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \Rightarrow 19 = \frac{32 + 16 - a^2}{4} \Rightarrow a^2 = 28, a = 2\sqrt{7}$.
- $\cos \angle A = \frac{36 + 16 - 28}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \Rightarrow 60^\circ$.

Odpowiedź: $|BC| = 2\sqrt{7}$, $|\angle BAC| = 60^\circ$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na środkową (lub tw. cosinusów w dwóch trójkątach),
- 2 pkt — $|BC| = 2\sqrt{7}$,
- 3 pkt — $\cos \angle A = \frac{1}{2}$,
- 4 pkt — kąt 60° .

PR12.10 OTWARTE ★★★

0–5 pkt

W trójkącie ABC : $|AB| = 5$, $|BC| = 8$, $|CA| = 7$. Oblicz miarę kąta ABC , pole trójkąta, promień okręgów opisanego i wpisanego oraz wysokość opuszczoną z wierzchołka A .

ROZWIĄZANIE

- $\cos \angle B = \frac{25 + 64 - 49}{80} = \frac{1}{2} \Rightarrow 60^\circ$.
- $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.
- $2R = \frac{7}{\sin 60^\circ} \Rightarrow R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.
- $p = 10, r = \frac{P}{p} = \sqrt{3}$.
- $h_A = \frac{2P}{|BC|} = \frac{20\sqrt{3}}{8} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Odpowiedź: 60° ; $P = 10\sqrt{3}$; $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$; $r = \sqrt{3}$; $h_A = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — kąt 60° ,
- 2 pkt — pole,
- 3 pkt — R ,
- 4 pkt — r ,
- 5 pkt — wysokość h_A .

PR13 Okręgi i czworokąty wpisane/opisane

🔑 Wpisany: kąty do 180° . Opisany: sumy boków. Przekątna + tw. cosinusów w dwóch trójkątach.

PR13.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach 6, 8, 10.

ROZWIĄZANIE

$$1. r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{6+8-10}{2} = 2 \text{ (albo } r = \frac{P}{p} = \frac{24}{12}).$$

Odpowiedź: 2

PR13.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie o bokach 5, 5, 6.

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{ Wysokość na podstawę 6: } \sqrt{25-9} = 4, P = 12.$$

$$2. R = \frac{abc}{4P} = \frac{150}{48} = \frac{25}{8}.$$

Odpowiedź: $\frac{25}{8}$

PR13.3 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Trapez prostokątny o podstawach 12 i 6 jest opisany na okręgu. Oblicz promień tego okręgu.

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{ Ramię prostopadłe} = 2r, \text{ ramię ukośne } c. \text{ Warunek: } 12 + 6 = 2r + c \Rightarrow c = 18 - 2r.$$

$$2. \text{ Pitagoras: } c^2 = (2r)^2 + 6^2 \Rightarrow (18 - 2r)^2 = 4r^2 + 36 \Rightarrow 324 - 72r = 36 \Rightarrow r = 4.$$

$$3. \text{ Kontrola: } h = 8, c = 10, 8 + 10 = 18 \checkmark.$$

Odpowiedź: $r = 4$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek opisania,
- 2 pkt — równanie z Pitagorasa,
- 3 pkt — $r = 4$.

PR13.4 OTWARTE ★★★

0-2 pkt

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, $|\angle DAB| = 70^\circ$, $|\angle ABC| = 95^\circ$. Oblicz miary pozostałych kątów czworokąta.

ROZWIĄZANIE

$$1. |\angle C| = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ, |\angle D| = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ.$$

Odpowiedź: $|\angle C| = 110^\circ, |\angle D| = 85^\circ$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek czworokąta wpisanego,
- 2 pkt — oba kąty.

Trójkąt ma boki długości **13, 14, 15**. Oblicz jego pole oraz promienie okręgów wpisanego i opisanego.

ROZWIĄZANIE

1. Wysokość na bok 14: $h^2 = 13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2 \Rightarrow x = 5, h = 12, P = 84$ (albo wzór Herona:
 $\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$).

2. $r = \frac{84}{21} = 4$.

3. $R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{2730}{336} = \frac{65}{8}$.

Odpowiedź: $P = 84, r = 4, R = \frac{65}{8}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — metoda obliczenia pola,
- 2 pkt — $P = 84$,
- 3 pkt — $r = 4$,
- 4 pkt — $R = \frac{65}{8}$.

Z punktu P poprowadzono dwie styczne do okręgu o środku O i promieniu **5**, styczne w punktach A i B . $|PO| = 13$. Oblicz długość odcinka stycznej PA oraz długość cięciwy AB .

ROZWIĄZANIE

1. $OA \perp PA: |PA| = \sqrt{169 - 25} = 12$.

2. Cięciwa AB jest prostopadła do OP ; połowa cięciwy to wysokość trójkąta OAP z A : $\frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$.

3. $|AB| = \frac{120}{13}$.

Odpowiedź: $|PA| = 12, |AB| = \frac{120}{13}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $|PA| = 12$,
- 2 pkt — zauważenie $AB \perp OP$ i wysokości w $\triangle OAP$,
- 3 pkt — $|AB| = \frac{120}{13}$.

Okrąg wpisany w trójkąt ABC o bokach $|BC| = 7, |CA| = 8, |AB| = 9$ jest styczny do boku AB w punkcie K . Oblicz $|AK|$ i $|KB|$.

ROZWIĄZANIE

1. $p = \frac{7+8+9}{2} = 12$. Odcinek stycznej z wierzchołka A : $p - |BC| = 12 - 7 = 5$.

2. Z wierzchołka B : $p - |CA| = 12 - 8 = 4$. Kontrola: $5 + 4 = 9 \checkmark$.

Odpowiedź: $|AK| = 5, |KB| = 4$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równość odcinków stycznych (układ lub wzór $p - a$),
- 2 pkt — $|AK| = 5$,
- 3 pkt — $|KB| = 4$.

PR13.8 OTWARTE ★★★

0-5 pkt

Deltoid $ABCD$, w którym $|AB| = |AD| = 6$ i $|CB| = |CD|$, jest wpisany w okrąg, a $|\angle BAD| = 60^\circ$. Oblicz długości boków BC i CD oraz promień okręgu wpisanego w ten deltoid.

ROZWIĄZANIE

1. Deltoid wpisany: kąty przy B i D są równe i sumują się do 180° , więc są proste. $|\angle BCD| = 120^\circ$.
2. $\triangle ABD$ równoboczny: $|BD| = 6$. W $\triangle BCD$: $36 = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$.
3. $P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$, $p = 6 + 2\sqrt{3}$.
4. $r = \frac{12\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}(6-2\sqrt{3})}{24} = 3\sqrt{3} - 3$.

Odpowiedź: $|BC| = |CD| = 2\sqrt{3}$, $r = 3\sqrt{3} - 3$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — kąty proste przy B i D ,
- 2 pkt — $|BD| = 6$,
- 3 pkt — $|BC| = 2\sqrt{3}$,
- 4 pkt — pole i połowa obwodu,
- 5 pkt — $r = 3\sqrt{3} - 3$.

PR13.9 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Trójkąt prostokątny ma przyprostokątne a i b oraz przeciwprostokątną c . Wykaż, że $r + R = \frac{a+b}{2}$, gdzie r i R — promienie okręgów wpisanego i opisanego.

ROZWIĄZANIE

1. Środek okręgu opisanego to środek przeciwprostokątnej: $R = \frac{c}{2}$.
2. Odcinki stycznych: $c = (a - r) + (b - r) \Rightarrow r = \frac{a+b-c}{2}$.
3. $r + R = \frac{a+b-c}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2}$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $R = \frac{c}{2}$,
- 2 pkt — $r = \frac{a+b-c}{2}$ z uzasadnieniem,
- 3 pkt — wniosek.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. $|AB| = 3$, $|BC| = 5$, $|CD| = 8$, $|\angle ABC| = 120^\circ$ oraz $|AD| > |AB|$. Oblicz $|AC|$, promień okręgu, $|AD|$ oraz pole czworokąta.

ROZWIĄZANIE

1. $\triangle ABC$: $|AC|^2 = 9 + 25 + 15 = 49$, $|AC| = 7$. $R = \frac{7}{2\sin 120^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.
2. $|\angle ADC| = 60^\circ$. $\triangle ACD$: $49 = 64 + x^2 - 8x \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = 3$ lub $x = 5$.
3. Warunek $|AD| > |AB| = 3$: $|AD| = 5$.
4. $P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} + 10\sqrt{3} = \frac{55\sqrt{3}}{4}$.

Odpowiedź: $|AC| = 7$, $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$, $|AD| = 5$, $P = \frac{55\sqrt{3}}{4}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $|AC| = 7$,
- 2 pkt — R ,
- 3 pkt — kąt $ADC = 60^\circ$ i równanie z tw. cosinusów,
- 4 pkt — rozwiązania 3 i 5,
- 5 pkt — wybór $|AD| = 5$,
- 6 pkt — pole.

PR14 Geometria analityczna: proste, punkty, pola

🔑 Brak współrzędnych? Wprowadź układ. Prostopadłość = iloczyn skalarny 0. Pole = $\frac{1}{2}|\text{wyznacznik}|$.

PR14.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz odległość punktu $P = (3, 4)$ od prostej $3x - 4y + 12 = 0$.

ROZWIĄZANIE

$$1. d = \frac{|9 - 16 + 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{5}{5} = 1.$$

Odpowiedź: 1

PR14.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (4, 1)$, $C = (1, 3)$.

ROZWIĄZANIE

$$1. \vec{AB} = [4, 1], \vec{AC} = [1, 3]: P = \frac{1}{2}|4 \cdot 3 - 1 \cdot 1| = \frac{11}{2}.$$

Odpowiedź: $\frac{11}{2}$

PR14.3 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Dana jest prosta $k: 2x - y + 3 = 0$ i punkt $P = (4, 1)$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do k przechodzącej przez P , punkt przecięcia prostych k i l oraz odległość punktu P od prostej k .

ROZWIĄZANIE

$$1. k: y = 2x + 3, \text{ więc } l: y = -\frac{1}{2}x + b; 1 = -2 + b \Rightarrow b = 3.$$

$$2. 2x + 3 = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow x = 0, \text{ punkt } (0, 3).$$

$$3. d = \frac{|8 - 1 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \text{ (= odległość } P \text{ od } (0, 3) \text{)}.$$

Odpowiedź: $l: y = -\frac{1}{2}x + 3; (0, 3); d = 2\sqrt{5}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie prostej l ,
- 2 pkt — punkt przecięcia,
- 3 pkt — odległość $2\sqrt{5}$.

PR14.4 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wyznacz współrzędne punktu P' symetrycznego do punktu $P = (5, 0)$ względem prostej $y = x + 1$.

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{ Prosta przez } P \text{ prostopadła do } y = x + 1: y = -x + 5.$$

$$2. \text{ Przecięcie: } x + 1 = -x + 5 \Rightarrow x = 2, S = (2, 3) \text{ — środek } PP'.$$

$$3. P' = 2S - P = (4 - 5, 6 - 0) = (-1, 6).$$

Odpowiedź: $P' = (-1, 6)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — prosta prostopadła przez P ,
- 2 pkt — punkt $S = (2, 3)$,
- 3 pkt — $P' = (-1, 6)$.

PR14.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Prostokąt $ABCD$ ma wierzchołki $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (6, 4)$, $D = (0, 4)$. Punkt M jest środkiem boku BC . Prosta AM przecina przekątną BD w punkcie P . Oblicz współrzędne punktu P i pole trójkąta ABP .

ROZWIĄZANIE

1. $M = (6, 2)$, $AM: y = \frac{1}{3}x$. $BD: y = -\frac{2}{3}x + 4$.

2. $\frac{1}{3}x = -\frac{2}{3}x + 4 \Rightarrow x = 4$, $y = \frac{4}{3}$.

3. Pole $ABP = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{4}{3} = 4$.

Odpowiedź: $P = (4, \frac{4}{3})$, pole 4

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równania prostych AM i BD ,
- 2 pkt — współrzędne P ,
- 3 pkt — pole 4

PR14.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 1)$, $B = (4, -1)$, $C = (2, 5)$. Oblicz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka C oraz pole trójkąta.

ROZWIĄZANIE

1. Prosta $AB: x + 3y - 1 = 0$.

2. $h_C = \frac{|2+15-1|}{\sqrt{10}} = \frac{16}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{5}$.

3. $|AB| = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$, $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{16}{\sqrt{10}} = 16$ (kontrola: $\frac{1}{2}|6 \cdot 4 - (-2) \cdot 4| = 16 \checkmark$).

Odpowiedź: $h_C = \frac{8\sqrt{10}}{5}$, $P = 16$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie prostej AB ,
- 2 pkt — wysokość h_C ,
- 3 pkt — pole 16.

PR14.7 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Punkty $A = (-1, 2)$ i $B = (5, 4)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Wierzchołek C leży na prostej $y = x - 3$. Oblicz współrzędne punktu C i pole trójkąta ABC .

ROZWIĄZANIE

1. C leży na symetralnej AB : środek $(2, 3)$, $a_{AB} = \frac{1}{3}$, symetralna $y = -3x + 9$.

2. $x - 3 = -3x + 9 \Rightarrow x = 3$, $C = (3, 0)$.

3. Kontrola: $|AC|^2 = 16 + 4 = 20 = |BC|^2 = 4 + 16 \checkmark$.

4. $\vec{AB} = [6, 2]$, $\vec{AC} = [4, -2]$: $P = \frac{1}{2}|6 \cdot (-2) - 2 \cdot 4| = 10$.

Odpowiedź: $C = (3, 0)$, $P = 10$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie symetralnej AB ,
- 2 pkt — współrzędne C ,
- 3 pkt — pole 10 (lub długość wysokości),
- 4 pkt — pełne rozwiązanie.

PR14.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Dane są punkty $A = (1, 2)$ i $B = (4, 6)$. Wyznacz współrzędne punktu C takiego, że trójkąt ABC jest prostokątny z kątem prostym przy wierzchołku A i $|AC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .

ROZWIĄZANIE

1. $\vec{AB} = [3, 4]$, $|AB| = 5$. Wektor prostopadły: $[-4, 3]$ (długość 5).
2. $\vec{AC} = \pm 2 \cdot [-4, 3]$: $C = (1 - 8, 2 + 6) = (-7, 8)$ lub $C = (9, -4)$.
3. $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25$.

Odpowiedź: $C = (-7, 8)$ lub $C = (9, -4)$; $P = 25$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$,
- 2 pkt — warunek $|AC| = 10$,
- 3 pkt — oba punkty C ,
- 4 pkt — pole 25.

PR14.9 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Oblicz miarę kąta ostrego między prostymi $y = 2x$ oraz $y = -3x + 1$.

ROZWIĄZANIE

1. $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)} \right| = \left| \frac{5}{-5} \right| = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Odpowiedź: 45°

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na tangens kąta między prostymi (lub iloczyn skalarny wektorów kierunkowych),
- 2 pkt — 45° .

PR14.10 OTWARTE ★★★

0–5 pkt

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (2, 6)$. Wyznacz środek ciężkości S , środek okręgu opisanego O i ortocentrum H tego trójkąta. Wykaż, że punkty S , O , H leżą na jednej prostej.

ROZWIĄZANIE

1. $S = \left(\frac{0+8+2}{3}, \frac{0+0+6}{3} \right) = \left(\frac{10}{3}, 2 \right)$.
2. O : symetralna AB to $x = 4$; symetralna AC : przez $(1, 3)$, prostopadła do $[2, 6]$: $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1)$. Dla $x = 4$: $y = 2$. $O = (4, 2)$.
3. H : wysokość z C to $x = 2$; wysokość z A prostopadła do BC ($a_{BC} = -1$): $y = x$. $H = (2, 2)$.
4. Wszystkie trzy punkty mają $y = 2$ — leżą na prostej $y = 2$. ■

Odpowiedź: $S = \left(\frac{10}{3}, 2 \right)$, $O = (4, 2)$, $H = (2, 2)$ — prosta $y = 2$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — środek ciężkości,
- 2 pkt — równania dwóch symetralnych,
- 3 pkt — punkt O ,
- 4 pkt — punkt H ,
- 5 pkt — uzasadnienie współliniowości.

PR15 Okrąg w układzie współrzędnych

🔑 Postać kanoniczna → S, r . Styczna: $d = r$. Dwa okręgi: odejmij równania.

PR15.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Wyznacz środek i promień okręgu $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

ROZWIĄZANIE

$$1. (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 12 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

Odpowiedź: $S = (2, -3), r = 5$

PR15.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m = 0$ opisuje okrąg.

ROZWIĄZANIE

$$1. (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 - m; \text{ okrąg, gdy } 5 - m > 0.$$

Odpowiedź: $m < 5$

PR15.3 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wyznacz równanie okręgu o środku $S = (3, -1)$ stycznego do prostej $4x - 3y + 10 = 0$.

ROZWIĄZANIE

$$1. r = d(S, l) = \frac{|12 + 3 + 10|}{5} = 5.$$

$$2. (x-3)^2 + (y+1)^2 = 25.$$

Odpowiedź: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek $r = d(S, l)$,
- 2 pkt — $r = 5$,
- 3 pkt — równanie okręgu.

PR15.4 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wyznacz punkty wspólne okręgu $x^2 + y^2 = 25$ i prostej $y = x + 1$ oraz długość wyznaczonej przez nie cięciwy.

ROZWIĄZANIE

$$1. x^2 + (x+1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ lub } x = -4.$$

$$2. \text{ Punkty } (3, 4), (-4, -3); \text{ długość } \sqrt{49 + 49} = 7\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: $(3, 4), (-4, -3); 7\sqrt{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie kwadratowe,
- 2 pkt — oba punkty,
- 3 pkt — długość cięciwy.

PR15.5 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Zbadaj wzajemne położenie okręgów $\mathcal{O}_1 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ i $\mathcal{O}_2 : (x-4)^2 + (y-6)^2 = 9$. Jeśli są styczne, wyznacz punkt styczności.

ROZWIĄZANIE

- $S_1 = (1, 2)$, $r_1 = 2$; $S_2 = (4, 6)$, $r_2 = 3$; $|S_1S_2| = \sqrt{9+16} = 5 = r_1 + r_2$ — styczne zewnętrznie.
- Punkt styczności leży na odcinku S_1S_2 w odległości 2 od S_1 : $S_1 + \frac{2}{5}[3, 4] = (\frac{11}{5}, \frac{18}{5})$.

Odpowiedź: styczne zewnętrznie w punkcie $(\frac{11}{5}, \frac{18}{5})$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — środki i promienie,
- 2 pkt — $|S_1S_2| = 5$,
- 3 pkt — wniosek o styczności zewnętrznej,
- 4 pkt — punkt styczności.

PR15.6 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Okręgi $x^2 + y^2 = 10$ oraz $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$ przecinają się w punktach A i B . Wyznacz współrzędne tych punktów i równanie prostej AB .

ROZWIĄZANIE

- Odejmujemy: $x^2 + y^2 - [(x-4)^2 + (y-2)^2] = 0 \Rightarrow 8x + 4y - 20 = 0 \Rightarrow y = 5 - 2x$.
- $x^2 + (5-2x)^2 = 10 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ lub $x = 3$.
- $A = (1, 3)$, $B = (3, -1)$; prosta AB : $y = -2x + 5$.

Odpowiedź: $A = (1, 3)$, $B = (3, -1)$; $y = -2x + 5$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — odjęcie równań,
- 2 pkt — równanie prostej AB ,
- 3 pkt — równanie kwadratowe,
- 4 pkt — oba punkty.

PR15.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (0, 8)$.

ROZWIĄZANIE

- Kąt BAC jest prosty, więc BC jest średnicą. Środek: $(3, 4)$, $r = \frac{|BC|}{2} = 5$.
- $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Odpowiedź: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — środek okręgu,
- 2 pkt — promień,
- 3 pkt — równanie.

Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 = 5$ przechodzących przez punkt $P = (3, 1)$.

ROZWIĄZANIE

1. $|OP| = \sqrt{10} > \sqrt{5}$ — punkt zewnętrzny. Prosta pionowa $x = 3$ ma odległość $3 \neq \sqrt{5}$ — nie jest styczna.
2. $y - 1 = m(x - 3)$, czyli $mx - y + 1 - 3m = 0$. Styczność: $\frac{|1-3m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$.
3. $(1 - 3m)^2 = 5(m^2 + 1) \Rightarrow 4m^2 - 6m - 4 = 0 \Rightarrow m = 2$ lub $m = -\frac{1}{2}$.
4. $y = 2x - 5$ oraz $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Odpowiedź: $y = 2x - 5$ oraz $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie prostej przez P z parametrem,
- 2 pkt — warunek styczności,
- 3 pkt — równanie kwadratowe z m ,
- 4 pkt — obie wartości m ,
- 5 pkt — równania stycznych (i odrzucenie prostej pionowej).

Środek okręgu leży na prostej $y = x + 1$, a okrąg przechodzi przez punkty $A = (1, 0)$ i $B = (3, 2)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

ROZWIĄZANIE

1. Środek leży na symetralnej AB : środek odcinka $(2, 1)$, $a_{AB} = 1$, symetralna $y = -x + 3$.
2. $x + 1 = -x + 3 \Rightarrow x = 1$, $S = (1, 2)$.
3. $r^2 = |SA|^2 = 0 + 4 = 4$ (kontrola $|SB|^2 = 4 + 0 \checkmark$).

Odpowiedź: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — symetralna odcinka AB (lub układ z równymi odległościami),
- 2 pkt — środek $S = (1, 2)$,
- 3 pkt — promień,
- 4 pkt — równanie okręgu.

Prosta $y = x + 2$ przecina parabolę $y = x^2$ w punktach A i B . Odcinek AB jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$. Wyznacz równanie okręgu $\mathcal{O}$ oraz punkty jego przecięcia z osią Oy .

ROZWIĄZANIE

1. $x^2 = x + 2 \Rightarrow x = 2$ lub $x = -1$: $A = (-1, 1)$, $B = (2, 4)$.

2. Środek: $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$, $r^2 = \frac{|AB|^2}{4} = \frac{9+9}{4} = \frac{9}{2}$.

3. Oś Oy ($x = 0$): $\frac{1}{4} + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{17}{4}$.

4. $y = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Odpowiedź: $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{9}{2}$; $(0, \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2})$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — punkty A i B ,
- 2 pkt — środek okręgu,
- 3 pkt — promień,
- 4 pkt — równanie okręgu,
- 5 pkt — równanie po podstawieniu $x = 0$,
- 6 pkt — oba punkty na osi Oy .

PR16 Stereometria rozszerzona

🔑 Ustal spodek wysokości. Kąt = kąt w nazwanym trójkącie. Kąt dwuścienny — wysokości z jednego punktu krawędzi.

PR16.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz objętość czworościanu foremnego o krawędzi 6.

ROZWIĄZANIE

$$1. V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{216\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: $18\sqrt{2}$

PR16.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Ostrosłup prawidłowy trójkątny ma krawędź podstawy 6 i wysokość 4. Oblicz długość krawędzi bocznej.

ROZWIĄZANIE

$$1. R = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}; \text{ krawędź boczna } \sqrt{16 + 12} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

Odpowiedź: $2\sqrt{7}$

PR16.3 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy 6 i krawędź boczną 5. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej.

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{ Połowa przekątnej podstawy: } 3\sqrt{2}; H = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}; V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot \sqrt{7} = 12\sqrt{7}.$$

$$2. \text{ Wysokość ściany: } \sqrt{25 - 9} = 4; P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 48.$$

Odpowiedź: $V = 12\sqrt{7}, P_b = 48$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $H = \sqrt{7}$,
- 2 pkt — objętość,
- 3 pkt — pole boczne.

PR16.4 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Ostrosłup prawidłowy trójkątny ma krawędź podstawy 6, a krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość ostrosłupa i cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.

ROZWIĄZANIE

$$1. R = 2\sqrt{3}, H = R \operatorname{tg} 60^\circ = 6. P_p = 9\sqrt{3}, V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 6 = 18\sqrt{3}.$$

$$2. r = \sqrt{3}; \text{ wysokość ściany bocznej } h_b = \sqrt{36 + 3} = \sqrt{39}.$$

$$3. \cos \beta = \frac{r}{h_b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{39}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

Odpowiedź: $V = 18\sqrt{3}, \cos \beta = \frac{\sqrt{13}}{13}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $H = 6$,
- 2 pkt — objętość,
- 3 pkt — wskazanie kąta ściany (trójkąt H, r, h_b),
- 4 pkt — cosinus.

PR16.5 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi **6** (E nad A , F nad B , G nad C , H nad D). Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej AG do płaszczyzny podstawy oraz pole przekroju sześcianu płaszczyzną ACH .

ROZWIĄZANIE

1. Rzut AG na podstawę to $AC = 6\sqrt{2}$; $|AG| = 6\sqrt{3}$; $\cos \alpha = \frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
2. AC , CH , AH to przekątne ścian — trójkąt równoboczny o boku $6\sqrt{2}$.
3. Pole: $\frac{72\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, pole $18\sqrt{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wskazanie kąta,
- 2 pkt — cosinus,
- 3 pkt — rozpoznanie trójkąta równobocznego,
- 4 pkt — pole przekroju.

PR16.6 OTWARTE ★★★

0–5 pkt

Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają długość a . Oblicz cosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

ROZWIĄZANIE

1. Ściany boczne są trójkątami równobocznymi. Wysokości ścian SBC i SDC opuszczone z B i D na SC mają spodek w środku SC i długość $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
2. $|BD| = a\sqrt{2}$. $\cos \varphi = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2a^2}{2 \cdot \frac{3}{4}a^2} = \frac{-\frac{1}{2}a^2}{\frac{3}{2}a^2} = -\frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $-\frac{1}{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wskazanie kąta między ścianami,
- 2 pkt — długości wysokości ścian,
- 3 pkt — $|BD| = a\sqrt{2}$,
- 4 pkt — tw. cosinusów,
- 5 pkt — $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$.

PR16.7 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Promień okręgu wpisanego w podstawę ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równy **2**, a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej.

ROZWIĄZANIE

1. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$; $P_p = \frac{48\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$.
2. $H = r \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}$, $h_b = \frac{r}{\cos 60^\circ} = 4$.
3. $V = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24$; $P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $V = 24$, $P_b = 24\sqrt{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — krawędź podstawy,
- 2 pkt — H i h_b ,
- 3 pkt — objętość,
- 4 pkt — pole boczne.

Stożek o wysokości 8 jest wpisany w kulę o promieniu 5 (wierzchołek i okrąg podstawy leżą na sferze). Oblicz objętość stożka.

ROZWIĄZANIE

1. Środek kuli leży na osi stożka w odległości $8 - 5 = 3$ od podstawy.

2. $r^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, $r = 4$.

3. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 8 = \frac{128\pi}{3}$.

Odpowiedź: $\frac{128\pi}{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — odległość środka kuli od podstawy,
- 2 pkt — $r = 4$,
- 3 pkt — objętość.

Gnaniastosłup prawidłowy czworokątny $ABCDEFGH$ ma krawędź podstawy 4 i wysokość 6 (G nad C). Oblicz pole przekroju płaszczyzną BDG oraz cosinus kąta nachylenia tego przekroju do płaszczyzny podstawy.

ROZWIĄZANIE

1. Przekrój to trójkąt równoramienny BDG : $|BD| = 4\sqrt{2}$.

2. O — środek BD ; $|OC| = 2\sqrt{2}$, więc $|OG| = \sqrt{8 + 36} = 2\sqrt{11}$ i $OG \perp BD$.

3. Pole: $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{11} = 4\sqrt{22}$.

4. $\cos \alpha = \frac{|OC|}{|OG|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Odpowiedź: pole $4\sqrt{22}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozpoznanie przekroju,
- 2 pkt — $|OG|$,
- 3 pkt — pole,
- 4 pkt — wskazanie kąta,
- 5 pkt — cosinus.

Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $|AC| = 6$ i $|BC| = 8$. Wszystkie krawędzie boczne mają długość 13 . Oblicz objętość ostrosłupa.

ROZWIĄZANIE

1. Równe krawędzie boczne $\Rightarrow$ spodek wysokości to środek okręgu opisanego na podstawie — środek przeciwprostokątnej AB ; $R = 5$.
2. $H = \sqrt{169 - 25} = 12$.
3. $V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 12 = 96$.

Odpowiedź: 96

Schemat punktowania:

- 1 pkt — położenie spodka wysokości,
- 2 pkt — $R = 5$,
- 3 pkt — $H = 12$,
- 4 pkt — objętość.

PR17 Parametr, funkcja kwadratowa i wzory Viète'a

🔑 $a \neq 0 \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow$ warunek przez Viète'a $\rightarrow$ część wspólna.

PR17.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 - 5x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

ROZWIĄZANIE

$$1. \Delta = 25 - 4m > 0 \iff m < \frac{25}{4}.$$

Odpowiedź: $m < \frac{25}{4}$

PR17.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Nie rozwiązując równania $2x^2 - 6x - 3 = 0$, oblicz sumę i iloczyn jego rozwiązań.

ROZWIĄZANIE

$$1. x_1 + x_2 = \frac{6}{2} = 3, x_1 x_2 = -\frac{3}{2} (\Delta = 36 + 24 > 0).$$

Odpowiedź: $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = -\frac{3}{2}$

PR17.3 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 + mx + 4 = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

ROZWIĄZANIE

$$1. \Delta = m^2 - 16 > 0 \iff m < -4 \text{ lub } m > 4.$$

$$2. x_1 x_2 = 4 > 0 \text{ zawsze; } x_1 + x_2 = -m > 0 \iff m < 0.$$

$$3. \text{Część wspólna: } m < -4.$$

Odpowiedź: $m \in (-\infty, -4)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek $\Delta > 0$,
- 2 pkt — warunki Viète'a na znaki,
- 3 pkt — odpowiedź.

PR17.4 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

ROZWIĄZANIE

$$1. \Delta = 4m^2 - 4(m + 2) > 0 \iff m^2 - m - 2 > 0 \iff m < -1 \text{ lub } m > 2.$$

$$2. x_1^2 + x_2^2 = 4m^2 - 2(m + 2) = 4m^2 - 2m - 4 = 8 \Rightarrow 2m^2 - m - 6 = 0.$$

$$3. m = 2 \text{ lub } m = -\frac{3}{2}. \text{ Dla } m = 2: \Delta = 0 \text{ — odrzucamy. Odpowiedź: } m = -\frac{3}{2}.$$

Odpowiedź: $m = -\frac{3}{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek $\Delta > 0$,
- 2 pkt — wyrażenie przez Viète'a,
- 3 pkt — rozwiązanie równania,
- 4 pkt — odrzucenie $m = 2$ i odpowiedź.

Wyznacz wszystkie $m \neq 2$, dla których równanie $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania tego samego znaku.

ROZWIĄZANIE

1. $\Delta = (m-1)^2 - m(m-2) = 1 > 0$ — zawsze dwa różne rozwiązania.
2. Ten sam znak: $x_1 x_2 = \frac{m}{m-2} > 0 \iff m < 0$ lub $m > 2$.

Odpowiedź: $m \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie Δ ,
- 2 pkt — wniosek $\Delta > 0$ dla każdego $m \neq 2$,
- 3 pkt — warunek $x_1 x_2 > 0$,
- 4 pkt — odpowiedź.

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania spełniające nierówność $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$.

ROZWIĄZANIE

1. $\Delta = 16 - 4(m-1) > 0 \iff m < 5$; pierwiastki niezerowe: $m \neq 1$.
2. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{4}{m-1} > 2 \iff \frac{4-2(m-1)}{m-1} > 0 \iff \frac{6-2m}{m-1} > 0 \iff m \in (1, 3)$.
3. Część wspólna z $m < 5$: $m \in (1, 3)$.

Odpowiedź: $m \in (1, 3)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $\Delta > 0$,
- 2 pkt — wyrażenie $\frac{x_1+x_2}{x_1 x_2}$,
- 3 pkt — nierówność wymierna,
- 4 pkt — jej rozwiązanie,
- 5 pkt — odpowiedź.

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 + (m+1)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania, których odległość na osi liczbowej jest równa 2.

ROZWIĄZANIE

1. $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 > 0 \iff m \neq 1$.
2. Rozwiązania: $x = -1$ i $x = -m$ (albo $|x_1 - x_2| = \sqrt{\Delta} = |m-1|$).
3. $|m-1| = 2 \Rightarrow m = 3$ lub $m = -1$.

Odpowiedź: $m = -1$ lub $m = 3$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $\Delta = (m-1)^2$,
- 2 pkt — $|x_1 - x_2| = |m-1|$,
- 3 pkt — równanie $|m-1| = 2$,
- 4 pkt — odpowiedź.

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 - (m+2)x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

ROZWIĄZANIE

1. $\Delta = (m+2)^2 - 4m = m^2 + 4 > 0$ — zawsze.
2. $x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3ps = (m+2)^3 - 3m(m+2) = (m+2)(m^2 + m + 4)$.
3. $(m+2)(m^2 + m + 4) = 8 \iff m^3 + 3m^2 + 6m = 0 \iff m(m^2 + 3m + 6) = 0$.
4. $m^2 + 3m + 6$ nie ma pierwiastków ($\Delta = -15$), więc $m = 0$ (kontrola: $x^2 - 2x = 0$, $0 + 8 = 8 \checkmark$).

Odpowiedź: $m = 0$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $\Delta > 0$ dla każdego m ,
- 2 pkt — wzór na $x_1^3 + x_2^3$,
- 3 pkt — równanie z m ,
- 4 pkt — rozkład,
- 5 pkt — $m = 0$.

Wyznacz wszystkie m , dla których liczba 1 leży między rozwiązaniami równania $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$.

ROZWIĄZANIE

1. $a = 1 > 0$, więc warunek: $f(1) < 0$.
2. $f(1) = 1 - 2m + m^2 - 1 = m^2 - 2m < 0 \iff m \in (0, 2)$.
3. (Kontrola: pierwiastki to $m - 1$ i $m + 1$; $m - 1 < 1 < m + 1 \iff 0 < m < 2$.)

Odpowiedź: $m \in (0, 2)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek $a \cdot f(1) < 0$,
- 2 pkt — nierówność $m^2 - 2m < 0$,
- 3 pkt — odpowiedź.

Wyznacz wszystkie m , dla których równanie $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3 = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 < 22$.

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{\Delta}{4} = (m+1)^2 - (m^2 + 3) = 2m - 2 > 0 \iff m > 1$.
2. Dodatnie: $x_1 x_2 = m^2 + 3 > 0$ zawsze, $x_1 + x_2 = 2(m+1) > 0 \iff m > -1$.
3. $x_1^2 + x_2^2 = 4(m+1)^2 - 2(m^2 + 3) = 2m^2 + 8m - 2 < 22 \iff m^2 + 4m - 12 < 0 \iff m \in (-6, 2)$.
4. Część wspólna: $m \in (1, 2)$.

Odpowiedź: $m \in (1, 2)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $\Delta > 0$,
- 2 pkt — warunki dodatniości,
- 3 pkt — wyrażenie $x_1^2 + x_2^2$,
- 4 pkt — nierówność $m^2 + 4m - 12 < 0$,
- 5 pkt — jej rozwiązanie,
- 6 pkt — część wspólna.

PR18 Pochodna, monotoniczność i ekstrema

🔑 Pochodna → rozkład → znak → monotoniczność i ekstrema. Styczna: $f'(x_0)$ i punkt.

PR18.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Oblicz $f'(1)$ dla $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.

ROZWIĄZANIE

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f'(1) = 3 - 12 = -9$.

Odpowiedź: -9

PR18.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Wyznacz wszystkie m , dla których funkcja $f(x) = x^3 + mx^2 + 3x - 1$ jest rosnąca w $\mathbb{R}$.

ROZWIĄZANIE

1. $f'(x) = 3x^2 + 2mx + 3 \geq 0$ dla każdego $x \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-3, 3]$.

Odpowiedź: $m \in [-3, 3]$

PR18.3 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 2x + 1$ w punkcie o odciętej 1.

ROZWIĄZANIE

1. $f(1) = 0$, $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f'(1) = 1$.

2. $y = 1 \cdot (x - 1) + 0 = x - 1$.

Odpowiedź: $y = x - 1$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $f(1)$ i $f'(x)$,
- 2 pkt — $f'(1) = 1$,
- 3 pkt — równanie stycznej.

PR18.4 OTWARTE ★★★

0-3 pkt

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x}$ w punkcie o odciętej 1.

ROZWIĄZANIE

1. $f(x) = x + \frac{3}{x}$, $f(1) = 4$.

2. $f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$, $f'(1) = -2$.

3. $y = -2(x - 1) + 4 = -2x + 6$.

Odpowiedź: $y = -2x + 6$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $f(1) = 4$,
- 2 pkt — $f'(1) = -2$,
- 3 pkt — równanie stycznej.

Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

ROZWIĄZANIE

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$.
2. $f' > 0$ dla $x < -1$ lub $x > 3$; $f' < 0$ dla $-1 < x < 3$.
3. Maksimum: $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 1 = 6$; minimum: $f(3) = 27 - 27 - 27 + 1 = -26$.

Odpowiedź: rośnie na $(-\infty, -1]$ i $[3, \infty)$, maleje na $[-1, 3]$; $f_{\max} = f(-1) = 6$, $f_{\min} = f(3) = -26$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — pochodna i jej miejsca zerowe,
- 2 pkt — znak pochodnej,
- 3 pkt — przedziały monotoniczności,
- 4 pkt — ekstrema z wartościami.

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 3x$ w przedziale $[-2, 3]$.

ROZWIĄZANIE

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm 1$ (oba w przedziale).
2. $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(3) = 18$.
3. Najmniejsza: -2 (dla $x = -2$ i $x = 1$), największa: 18 (dla $x = 3$).

Odpowiedź: najmniejsza -2 , największa 18

Schemat punktowania:

- 1 pkt — punkty krytyczne,
- 2 pkt — wartości w punktach krytycznych,
- 3 pkt — wartości na końcach,
- 4 pkt — odpowiedź.

Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

ROZWIĄZANIE

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.
2. $f' > 0$ dla $x < 0$ lub $x > 2$; $f' < 0$ dla $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$.
3. Maksimum lokalne $f(0) = 0$, minimum lokalne $f(2) = 4$.

Odpowiedź: rośnie na $(-\infty, 0]$ i $[2, \infty)$, maleje na $[0, 1)$ i $(1, 2]$; $f_{\max} = f(0) = 0$, $f_{\min} = f(2) = 4$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — dziedzina i pochodna,
- 2 pkt — znak pochodnej,
- 3 pkt — przedziały monotoniczności (osobno po obu stronach $x = 1$),
- 4 pkt — ekstrema.

PR18.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Punkt $P = (x_0, 2)$, gdzie $x_0 > 0$, należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}$. Wyznacz równanie stycznej do wykresu f w punkcie P .

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{3x_0^2 + 1}{x_0^2 + 1} = 2 \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = 1$.
2. $f'(x) = \frac{6x(x^2 + 1) - (3x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$, $f'(1) = 1$.
3. $y = 1 \cdot (x - 1) + 2 = x + 1$.

Odpowiedź: $y = x + 1$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $x_0 = 1$,
- 2 pkt — pochodna,
- 3 pkt — $f'(1) = 1$,
- 4 pkt — równanie stycznej.

PR18.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 3x + 2$ równoległych do prostej $y = 9x$.

ROZWIĄZANIE

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 9 \Rightarrow x = \pm 2$.
2. $f(2) = 4$: $y = 9(x - 2) + 4 = 9x - 14$.
3. $f(-2) = 0$: $y = 9(x + 2) = 9x + 18$.

Odpowiedź: $y = 9x - 14$ oraz $y = 9x + 18$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie $f'(x) = 9$,
- 2 pkt — $x = \pm 2$,
- 3 pkt — jedna styczna,
- 4 pkt — obie styczne.

PR18.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wyznacz wszystkie wartości k , dla których równanie $x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = k$ ma trzy różne rozwiązania.

ROZWIĄZANIE

1. Funkcja $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ (zadanie PR18.5): maksimum lokalne **6** w $x = -1$, minimum lokalne **-26** w $x = 3$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
2. Prosta $y = k$ przecina wykres w trzech punktach $\Leftrightarrow k$ leży ściśle między minimum a maksimum lokalnym.
3. $k \in (-26, 6)$.

Odpowiedź: $k \in (-26, 6)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — ekstrema lokalne,
- 2 pkt — szkic wykresu lub opis przebiegu,
- 3 pkt — odpowiedź $(-26, 6)$.

PR19 Optymalizacja z pochodną

🔑 Model + dziedzina → pochodna → znak → ekstremum globalne → pełna odpowiedź.

PR19.1 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Suma dwóch liczb dodatnich x i y jest równa 12. Wyznacz te liczby, dla których iloczyn $x \cdot y^2$ jest największy.

ROZWIĄZANIE

1. $f(x) = x(12 - x)^2$, $x \in (0, 12)$.
2. $f'(x) = (12 - x)^2 - 2x(12 - x) = (12 - x)(12 - 3x)$.
3. $f' > 0$ na $(0, 4)$, $f' < 0$ na $(4, 12)$ — maksimum w $x = 4$: $y = 8$, $f(4) = 256$.

Odpowiedź: $x = 4$, $y = 8$ (iloczyn 256)

Schemat punktowania:

- 1 pkt — funkcja z dziedziną,
- 2 pkt — pochodna i miejsce zerowe,
- 3 pkt — uzasadnienie i odpowiedź.

PR19.2 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Pudełko w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratowej, bez wieka, ma objętość 32. Wyznacz wymiary pudełka o najmniejszym polu powierzchni.

ROZWIĄZANIE

1. a — krawędź podstawy, $h = \frac{32}{a^2}$. $P(a) = a^2 + 4ah = a^2 + \frac{128}{a}$, $a > 0$.
2. $P'(a) = 2a - \frac{128}{a^2} = \frac{2(a^3 - 64)}{a^2}$ — zero w $a = 4$, znak z — na +.
3. $a = 4$, $h = 2$, $P = 16 + 32 = 48$.

Odpowiedź: $4 \times 4 \times 2$, $P = 48$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — funkcja $P(a)$ z dziedziną,
- 2 pkt — pochodna,
- 3 pkt — $a = 4$ i uzasadnienie minimum,
- 4 pkt — wymiary i pole.

Puszka w kształcie walca ma objętość 16π . Wyznacz promień podstawy i wysokość puszeki, dla których pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

ROZWIĄZANIE

$$1. h = \frac{16}{r^2}, P(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{32\pi}{r}, r > 0.$$

$$2. P'(r) = 4\pi r - \frac{32\pi}{r^2} = \frac{4\pi(r^3-8)}{r^2} \text{ — minimum w } r = 2.$$

$$3. h = 4, P = 8\pi + 16\pi = 24\pi.$$

Odpowiedź: $r = 2, h = 4, P = 24\pi$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $P(r)$ z dziedziną,
- 2 pkt — pochodna,
- 3 pkt — $r = 2$ z uzasadnieniem,
- 4 pkt — wymiary i pole.

W półkole o promieniu 5 wpisano prostokąt, którego jeden bok leży na średnicy. Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu.

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{Połowa podstawy } x, \text{ wysokość } \sqrt{25 - x^2}, x \in (0, 5): P(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}.$$

$$2. \text{Wystarczy maksymalizować } g(x) = P^2/4 = x^2(25 - x^2): g' = 50x - 4x^3 = 2x(25 - 2x^2).$$

$$3. x^2 = \frac{25}{2}, x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ (zmiana znaku z } + \text{ na } -). \text{ Wymiary: } 2x = 5\sqrt{2}, \text{ wysokość } \frac{5\sqrt{2}}{2}; P = 25.$$

Odpowiedź: $5\sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2}, P = 25$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — funkcja pola z dziedziną,
- 2 pkt — pochodna,
- 3 pkt — punkt krytyczny,
- 4 pkt — uzasadnienie maksimum,
- 5 pkt — wymiary i pole.

Rozważamy wszystkie stożki o tworzącej długości **6**. Wyznacz wysokość stożka o największej objętości i oblicz tę objętość.

ROZWIĄZANIE

1. $r^2 = 36 - h^2$, $V(h) = \frac{\pi}{3}(36h - h^3)$, $h \in (0, 6)$.
2. $V'(h) = \frac{\pi}{3}(36 - 3h^2) = 0 \iff h = 2\sqrt{3}$; znak $+$ na $-$.
3. $r^2 = 24$, $V = \frac{\pi}{3} \cdot 24 \cdot 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\pi$.

Odpowiedź: $h = 2\sqrt{3}$, $V_{\max} = 16\sqrt{3}\pi$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zależność $r^2 = 36 - h^2$,
- 2 pkt — $V(h)$ z dziedziną,
- 3 pkt — pochodna,
- 4 pkt — $h = 2\sqrt{3}$,
- 5 pkt — uzasadnienie maksimum,
- 6 pkt — objętość.

Rozważamy wszystkie graniastopy prawidłowe czworokątne, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa **48**. Wyznacz wymiary graniastopa o największej objętości.

ROZWIĄZANIE

1. $8a + 4h = 48 \Rightarrow h = 12 - 2a$, $a \in (0, 6)$.
2. $V(a) = a^2(12 - 2a) = 12a^2 - 2a^3$; $V'(a) = 24a - 6a^2 = 6a(4 - a)$.
3. Maksimum w $a = 4$: $h = 4$, $V = 64$.

Odpowiedź: sześcian o krawędzi **4**, $V = 64$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $h = 12 - 2a$,
- 2 pkt — $V(a)$ z dziedziną,
- 3 pkt — pochodna,
- 4 pkt — $a = 4$ z uzasadnieniem,
- 5 pkt — wymiary i objętość.

Wyznacz punkty paraboli $y = x^2$ położone najbliżej punktu $A = (0, 3)$ i oblicz tę najmniejszą odległość.

ROZWIĄZANIE

- $d^2(x) = x^2 + (x^2 - 3)^2 = x^4 - 5x^2 + 9$.
- $(d^2)' = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$: zera $0, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$; minima w $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, maksimum lokalne w 0 .
- $d^2 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 9 = \frac{11}{4}$, $d = \frac{\sqrt{11}}{2}$ (w $x = 0$: $d = 3$ — większe).

Odpowiedź: $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right)$, $d = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — funkcja $d^2(x)$,
- 2 pkt — pochodna i punkty krytyczne,
- 3 pkt — wybór minimum,
- 4 pkt — punkty,
- 5 pkt — odległość.

Rozważamy wszystkie trójkąty równoramienne opisane na okręgu o promieniu 1 . a) Wykaż, że pole trójkąta o wysokości h (opuszczonej na podstawę) wyraża się wzorem $P(h) = h\sqrt{\frac{h}{h-2}}$, $h > 2$. b) Wyznacz h , dla którego pole jest najmniejsze, i oblicz to pole.

ROZWIĄZANIE

- a) Podstawa $2x$, ramię $\sqrt{x^2 + h^2}$. $r = \frac{P}{p}$: $1 = \frac{xh}{x + \sqrt{x^2 + h^2}} \Rightarrow xh - x = \sqrt{x^2 + h^2}$.
- Podnosząc do kwadratu: $x^2h^2 - 2x^2h = h^2 \Rightarrow x^2 = \frac{h}{h-2}$ ($h > 2$), więc $P = xh = h\sqrt{\frac{h}{h-2}}$.
- b) Minimalizujemy $g(h) = P^2 = \frac{h^3}{h-2}$: $g'(h) = \frac{3h^2(h-2)-h^3}{(h-2)^2} = \frac{2h^2(h-3)}{(h-2)^2}$.
- $g' < 0$ na $(2, 3)$, $g' > 0$ na $(3, \infty)$ — minimum w $h = 3$: $P = 3\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $h = 3$, $P_{\min} = 3\sqrt{3}$ (trójkąt równoboczny)

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis $r = \frac{P}{p}$,
- 2 pkt — przekształcenie do $x^2 = \frac{h}{h-2}$,
- 3 pkt — wzór $P(h)$ z dziedziną,
- 4 pkt — pochodna,
- 5 pkt — $h = 3$,
- 6 pkt — uzasadnienie minimum,
- 7 pkt — $P_{\min} = 3\sqrt{3}$.

Koszt wyprodukowania x sztuk towaru wynosi $K(x) = x^3 - 30x^2 + 400x$ zł, a każdą sztukę sprzedajemy za 400 zł. Ile sztuk należy wyprodukować i sprzedać, aby zysk był największy? Oblicz ten zysk.

ROZWIĄZANIE

1. $Z(x) = 400x - K(x) = -x^3 + 30x^2, x \geq 0$.
2. $Z'(x) = -3x^2 + 60x = -3x(x - 20)$ — maksimum w $x = 20$.
3. $Z(20) = -8000 + 12\,000 = 4000$ zł.

Odpowiedź: 20 sztuk, zysk 4000 zł

Schemat punktowania:

- 1 pkt — funkcja zysku,
- 2 pkt — pochodna,
- 3 pkt — $x = 20$ z uzasadnieniem,
- 4 pkt — zysk 4000 zł.

Okno ma kształt prostokąta zwieńczonego półkolem (średnica półkola to górny bok prostokąta). Obwód okna jest równy $4 + \pi$. Wyznacz wymiary okna o największym polu.

ROZWIĄZANIE

1. r — promień, h — wysokość prostokąta: $2r + 2h + \pi r = 4 + \pi \Rightarrow h = \frac{4+\pi-(2+\pi)r}{2}, r \in (0, \frac{4+\pi}{2+\pi})$.
2. $P(r) = 2rh + \frac{\pi r^2}{2} = (4 + \pi)r - 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$.
3. $P'(r) = 4 + \pi - (4 + \pi)r = 0 \iff r = 1$ (znak z + na -).
4. $h = 1$: prostokąt $2 \times 1, P = 2 + \frac{\pi}{2}$.

Odpowiedź: $r = 1$: prostokąt $2 \times 1, P = 2 + \frac{\pi}{2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zależność $h(r)$,
- 2 pkt — $P(r)$ z dziedziną,
- 3 pkt — pochodna i $r = 1$,
- 4 pkt — uzasadnienie maksimum,
- 5 pkt — wymiary i pole.

PR20 Dowód geometryczny i zadania mieszane

 Rysunek + założenia. Most: kąty, podobieństwo, wspólna wysokość, tw. sinusów lub współrzędne.

PR20.1 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wykaż, że środkowa trójkąta dzieli go na dwa trójkąty o równych polach.

ROZWIĄZANIE

1. Środkowa CM dzieli bok AB na równe odcinki AM i MB .
2. Trójkąty AMC i MCB mają wspólną wysokość z wierzchołka C .
3. Mają więc równe podstawy i równe wysokości — równe pola. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równe podstawy,
- 2 pkt — wspólna wysokość,
- 3 pkt — wniosek.

PR20.2 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość równą połowie przeciwprostokątnej.

ROZWIĄZANIE

1. Kąt prosty jest kątem wpisanym opartym na przeciwprostokątnej, więc przeciwprostokątna jest średnicą okręgu opisanego.
2. Jej środek M jest środkiem tego okręgu, więc $|MA| = |MB| = |MC| = R = \frac{c}{2}$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — przeciwprostokątna jako średnica,
- 2 pkt — środek przeciwprostokątnej jako środek okręgu,
- 3 pkt — wniosek.

PR20.3 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Punkty M i N są środkami boków AC i BC trójkąta ABC . Wykaż, że $MN \parallel AB$ i $|MN| = \frac{1}{2}|AB|$.

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{|CM|}{|CA|} = \frac{|CN|}{|CB|} = \frac{1}{2}$ i kąt C wspólny $\Rightarrow \triangle CMN \sim \triangle CAB$ (cecha bkb) w skali $\frac{1}{2}$.
2. Stąd $|MN| = \frac{1}{2}|AB|$ i $|\angle CMN| = |\angle CAB|$ — kąty odpowiadające równe, więc $MN \parallel AB$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — podobieństwo trójkątów CMN i CAB ,
- 2 pkt — $|MN| = \frac{1}{2}|AB|$,
- 3 pkt — uzasadnienie równoległości.

PR20.4 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wykaż, że w każdym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.

ROZWIĄZANIE

1. Boki a, b , kąt ostry α . Tw. cosinusów: $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$,
 $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$.
2. $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — tw. cosinusów dla jednej przekątnej,
- 2 pkt — dla drugiej z $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$,
- 3 pkt — dodanie i wniosek.

PR20.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel CD$) dwusieczne kątów DAB i ADC przecinają się w punkcie P . Wykaż, że kąt APD jest prosty.

ROZWIĄZANIE

1. $AB \parallel CD$, więc $|\angle DAB| + |\angle ADC| = 180^\circ$ (kąty przy jednym ramieniu).
2. W $\triangle APD$: $|\angle PAD| + |\angle PDA| = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.
3. Zatem $|\angle APD| = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — suma kątów przy ramieniu 180° ,
- 2 pkt — suma połówek 90° ,
- 3 pkt — wniosek.

PR20.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego o boku a . Wykaż, że suma odległości punktu P od boków trójkąta jest równa wysokości tego trójkąta.

ROZWIĄZANIE

1. Łączymy P z wierzchołkami — trójkąt dzieli się na trzy trójkąty o podstawach a i wysokościach d_1, d_2, d_3 .
2. $\frac{1}{2}a(d_1 + d_2 + d_3) = P_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot h$.
3. Stąd $d_1 + d_2 + d_3 = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — podział na trzy trójkąty,
- 2 pkt — zapis sumy pól,
- 3 pkt — wniosek.

Dany jest prostokąt $ABCD$ i dowolny punkt P płaszczyzny. Wykaż, że $|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$.

ROZWIĄZANIE

1. Układ: $A = (0, 0)$, $B = (p, 0)$, $C = (p, q)$, $D = (0, q)$, $P = (x, y)$.
2. $|PA|^2 + |PC|^2 = x^2 + y^2 + (x - p)^2 + (y - q)^2$; $|PB|^2 + |PD|^2 = (x - p)^2 + y^2 + x^2 + (y - q)^2$.
3. Obie strony są równe. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wprowadzenie układu współrzędnych,
- 2 pkt — zapis kwadratów odległości,
- 3 pkt — wniosek.

Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B . Odcinki AC i AD są średnicami tych okręgów. Wykaż, że punkty C , B , D leżą na jednej prostej.

ROZWIĄZANIE

1. Kąt ABC jest wpisany w pierwszy okrąg i oparty na średnicy AC — jest prosty.
2. Analogicznie $|\angle ABD| = 90^\circ$.
3. Proste BC i BD są prostopadłe do AB w tym samym punkcie B , więc się pokrywają — C , B , D są współliniowe. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $|\angle ABC| = 90^\circ$,
- 2 pkt — $|\angle ABD| = 90^\circ$,
- 3 pkt — wniosek o współliniowości.

Pole trójkąta ABC jest równe P . Punkty K , L , M leżą odpowiednio na bokach AB , BC , CA , przy czym $|AK| : |KB| = |BL| : |LC| = |CM| : |MA| = 1 : 2$. Oblicz pole trójkąta KLM .

ROZWIĄZANIE

1. $P_{AKM} = \frac{1}{2} |AK| \cdot |AM| \sin A = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot P = \frac{2}{9} P$ (bo $|AK| = \frac{1}{3} |AB|$, $|AM| = \frac{2}{3} |AC|$).
2. Analogicznie $P_{BLK} = P_{CML} = \frac{2}{9} P$.
3. $P_{KLM} = P - 3 \cdot \frac{2}{9} P = \frac{P}{3}$.

Odpowiedź: $\frac{P}{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — metoda (pola „narożnych” trójkątów),
- 2 pkt — $P_{AKM} = \frac{2}{9} P$,
- 3 pkt — pozostałe narożne trójkąty,
- 4 pkt — $P_{KLM} = \frac{P}{3}$.

W trapezie $ABCD$ o podstawach $|AB| = a$ i $|CD| = b$ punkty E i F są środkami ramion AD i BC . Stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz stosunek $a : b$.

ROZWIĄZANIE

1. $|EF| = \frac{a+b}{2}$; oba trapezy mają wysokość $\frac{h}{2}$.
2. $P_{EFCD} = \frac{b + \frac{a+b}{2}}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{(a+3b)h}{8}$, $P_{ABFE} = \frac{(3a+b)h}{8}$.
3. $\frac{a+3b}{3a+b} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5a + 15b = 9a + 3b \Rightarrow a = 3b$.

Odpowiedź: $a : b = 3$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — długość EF i wysokości,
- 2 pkt — pola obu trapezów,
- 3 pkt — równanie,
- 4 pkt — $a : b = 3$.