

MATURA Z MATEMATYKI · MATURA PODSTAWOWA

ROZWIĄZANIA

Pełne rozwiązania krok po kroku

Pełne rozwiązania krok po kroku wszystkich zadań treningowych: rozpoznanie metody, obliczenia, odpowiedź, typowe błędy i schemat punktowania.

25

kluczy

250

zadań treningowych

100%

z rozwiązaniami

Analiza: majowe arkusze CKE 2020–2026 (7 arkuszy: Formuła 2015 i Formuła 2023), poziom podstawowy. Zadania treningowe są autorskie i odwzorowują typy umiejętności — nie są kopiami zadań CKE.

Spis treści

- PP01 Potęgi i pierwiastki
- PP02 Logarytmy
- PP03 Wartość bezwzględna i przedziały
- PP04 Wzory skróconego mnożenia
- PP05 Dowody algebraiczne i podzielność
- PP06 Równania liniowe, iloczynowe i wymierne
- PP07 Wielomiany i rozkład na czynniki
- PP08 Nierówności liniowe i kwadratowe
- PP09 Układy równań i zadania tekstowe
- PP10 Procenty i procent składany
- PP11 Odczytywanie własności funkcji i funkcje kawałkami
- PP12 Funkcja liniowa i proste
- PP13 Funkcja kwadratowa
- PP14 Ciąg arytmetyczny
- PP15 Ciąg geometryczny
- PP16 Trygonometria podstawowa
- PP17 Trójkąty: Pitagoras, pola, sinus i cosinus
- PP18 Podobieństwo, twierdzenie Talesa i dwusieczna
- PP19 Okrąg i kąty
- PP20 Geometria analityczna
- PP21 Stereometria
- PP22 Kombinatoryka
- PP23 Prawdopodobieństwo
- PP24 Statystyka: średnia, mediana, dominanta
- PP25 Optimalizacja i modelowanie funkcją kwadratową

PP01 Potęgi i pierwiastki

🔑 Różne podstawy → sprowadź do liczby pierwszej. Suma potęg → wyłącz najmniejszą.

PP01.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $\sqrt{72} - \sqrt{8}$ jest równa

- A. $\sqrt{64}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

- Wyłączamy czynniki spod pierwiastków: $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$, $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$.
- $6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Odpowiedź: B

Dlaczego nie pozostałe? A to błąd $\sqrt{72} - \sqrt{8} = \sqrt{72 - 8}$ — pierwiastki odejmujemy dopiero po wyłączeniu wspólnego czynnika.

PP01.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ jest równa

- A. -9 B. $\frac{1}{9}$ C. 9 D. -18

ROZWIĄZANIE

- $\frac{1}{27} = 3^{-3}$, więc $(3^{-3})^{-\frac{2}{3}} = 3^{(-3) \cdot (-\frac{2}{3})} = 3^2 = 9$.

Odpowiedź: C

Dlaczego nie pozostałe? A i D — wykładnik ujemny nie zmienia znaku liczby; B — zgubiony minus w wykładniku (wyszłoby 3^{-2}).

PP01.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $\left(\frac{1}{16}\right)^5 \cdot 8^7$ jest równa

- A. 2 B. 2^{41} C. $\frac{1}{2}$ D. 4^2

ROZWIĄZANIE

- Sprowadzamy do podstawy 2: $\frac{1}{16} = 2^{-4}$, $8 = 2^3$.
- $(2^{-4})^5 \cdot (2^3)^7 = 2^{-20} \cdot 2^{21} = 2^1 = 2$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — pominięty minus przy 2^{-20} ; C — odwrotna kolejność odejmowania wykładników.

PP01.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $\sqrt[3]{-\frac{54}{125}} \cdot \sqrt[3]{4}$ jest równa

A. $-\frac{6}{5}$

B. $\frac{6}{5}$

C. $-\frac{6}{25}$

D. $\frac{36}{25}$

ROZWIĄZANIE

1. Iloczyn pierwiastków tego samego stopnia to pierwiastek iloczynu: $\sqrt[3]{-\frac{54}{125}} \cdot 4 = \sqrt[3]{-\frac{216}{125}}$.
2. $216 = 6^3$, $125 = 5^3$, a pierwiastek 3. stopnia z liczby ujemnej istnieje: $\sqrt[3]{-\frac{216}{125}} = -\frac{6}{5}$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — zgubiony znak; C — spierwiastkowany tylko licznik; D — pomyłony stopień pierwiastka.

PP01.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Po usunięciu niewymierności z mianownika liczba $\frac{6}{\sqrt{3}}$ ma postać

A. $2\sqrt{3}$

B. $6\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $3\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

1. Mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt{3}$: $\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — pominięte dzielenie przez 3 w mianowniku.

PP01.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $\sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{5}}$ jest równa

A. $5^{\frac{2}{3}}$

B. $5^{\frac{4}{3}}$

C. $5^{\frac{1}{6}}$

D. $5^{\frac{5}{6}}$

ROZWIĄZANIE

1. Pod pierwiastkiem: $5 \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{1+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{3}}$.
2. $\sqrt{5^{\frac{4}{3}}} = \left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{3}}$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — zapomniany zewnętrzny pierwiastek; C — pomnożone wykładniki $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ zamiast dodania $1 + \frac{1}{3}$.

PP01.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $\frac{2^{30} + 2^{31} + 2^{32}}{7 \cdot 2^{29}}$ jest równa

- A. 2 B. 2^{64} C. $\frac{2^{64}}{7}$ D. 8

ROZWIĄZANIE

- Wyłączamy najmniejszą potęgę: $2^{30} + 2^{31} + 2^{32} = 2^{30}(1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^{30}$.
- $\frac{7 \cdot 2^{30}}{7 \cdot 2^{29}} = 2^{30-29} = 2$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B/C — dodane wykładniki w liczniku ($30 + 31 + 32 = 93$, potem $93 - 29 = 64$) — to błąd sumy potęg.

PP01.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

1.	Liczba $6^{10} \cdot 5^4$ jest podzielna przez 900.	P	F
2.	Liczba $2^8 \cdot 3^5$ jest podzielna przez 36^3 .	P	F

ROZWIĄZANIE

- $1. 900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. $6^{10} \cdot 5^4 = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^4$ zawiera 2^2 , 3^2 i 5^2 — liczba **jest** podzielna przez 900 (P).
- $2. 36^3 = (2^2 \cdot 3^2)^3 = 2^6 \cdot 3^6$, a w liczbie $2^8 \cdot 3^5$ czynnik 3 występuje tylko w potęgze $5 < 6$ — liczba **nie jest** podzielna przez 36^3 (F).

Odpowiedź: P, F

PP01.9 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Wykaż, że liczba $3^{2026} + 3^{2025} + 3^{2024}$ jest podzielna przez 13.

ROZWIĄZANIE

- Wyłączamy przed nawias najmniejszą potęgę: $3^{2026} + 3^{2025} + 3^{2024} = 3^{2024}(3^2 + 3 + 1)$.
- $3^2 + 3 + 1 = 13$, więc liczba jest równa $13 \cdot 3^{2024}$.
- 3^{2024} jest liczbą całkowitą, zatem liczba jest iloczynem 13 i liczby całkowitej — jest podzielna przez 13. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wyłączenie wspólnego czynnika i zapis $3^{2024}(9 + 3 + 1)$,
- 2 pkt — zapis w postaci $13 \cdot 3^{2024}$ wraz z uzasadnieniem (zdanie końcowe o podzielności).

Uporządkuj rosnąco liczby $a = \sqrt[3]{3}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt[6]{10}$.

ROZWIĄZANIE

1. Sprowadzamy pierwiastki do wspólnego stopnia 6: $a = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{9}$, $b = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{8}$, $c = \sqrt[6]{10}$.
2. Pierwiastek 6. stopnia jest funkcją rosnącą, więc wystarczy porównać liczby podpierwiastkowe:
 $8 < 9 < 10$.
3. Zatem $b < a < c$.

Odpowiedź: $b < a < c$

Wskazówka: Nie licz przybliżeń kalkulatorem — na maturze ważny jest argument: wspólny stopień pierwiastka.

PP02 Logarytmy

🔑 Współczynnik → do wykładnika, suma → iloczyn, różnica → iloraz; na końcu argument jako potęga podstawy.

PP02.1 ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Liczba $\log_2 32$ jest równa

- A. 16 B. 5 C. $\frac{1}{5}$ D. 30

ROZWIĄZANIE1. $32 = 2^5$, więc $\log_2 32 = 5$.**Odpowiedź: B****Dlaczego nie pozostałe?** A — podzielenie $32 : 2$; logarytm to wykładnik, a nie iloraz.**PP02.2** ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Liczba $\log_3 81 - \log_3 3$ jest równa

- A. $\log_3 78$ B. 3 C. 27 D. 4

ROZWIĄZANIE1. $\log_3 81 - \log_3 3 = \log_3 \frac{81}{3} = \log_3 27$.2. $27 = 3^3$, więc wynik to 3.**Odpowiedź: B****Dlaczego nie pozostałe?** A — odjęte argumenty; D — policzone tylko $\log_3 81$.**PP02.3** ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Liczba $\log_9 3$ jest równa

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

ROZWIĄZANIE1. Szukamy c : $9^c = 3$. Ponieważ $9 = 3^2$, to $3^{2c} = 3^1$, więc $c = \frac{1}{2}$.**Odpowiedź: C****Dlaczego nie pozostałe?** D to $\log_3 9$ — odwrócona rola podstawy i argumentu.

PP02.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $\log_{\sqrt{2}} 8$ jest równa

- A. 6 B. $\frac{3}{2}$ C. 4 D. $3\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

1. Podstawa i argument jako potęgi dwójki: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $8 = 2^3$.
2. $(2^{\frac{1}{2}})^c = 2^3 \Rightarrow \frac{c}{2} = 3 \Rightarrow c = 6$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — pomnożone zamiast podzielone wykładniki ($3 \cdot \frac{1}{2}$).

PP02.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $\log_4 2 - \log_4 32$ jest równa

- A. -2 B. 2 C. $\log_4(-30)$ D. $-\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

1. $\log_4 2 - \log_4 32 = \log_4 \frac{2}{32} = \log_4 \frac{1}{16}$.
2. $\frac{1}{16} = 4^{-2}$, więc wynik to -2.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? C — logarytm liczby ujemnej nie istnieje; B — zgubiony znak.

PP02.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $2\log_3 6 - \log_3 4$ jest równa

- A. 2 B. $\log_3 8$ C. $\log_3 32$ D. 1

ROZWIĄZANIE

1. $2\log_3 6 = \log_3 36$.
2. $\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 9 = 2$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — $2\log_3 6$ potraktowane jak $\log_3 12$; C — odjęte argumenty $36 - 4$.

PP02.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba x spełniająca równanie $\log_x 49 = 2$ jest równa

- A. 7 B. -7 lub 7 C. $24,5$ D. 49^2

ROZWIĄZANIE

1. Z definicji: $x^2 = 49$.
2. Podstawa logarytmu musi być dodatnia i różna od 1 , więc $x = 7$ (liczba -7 odpada).

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — pominięty warunek $x > 0$ dla podstawy; D — pomyłona rola podstawy i argumentu.

PP02.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

1.	$\log_2 12 - \log_2 3 = 2$	P	F
2.	$\log_5 10 + \log_5 2,5 = \log_5 12,5$	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 4 = 2$ — prawda.
2. $\log_5 10 + \log_5 2,5 = \log_5 (10 \cdot 2,5) = \log_5 25$, a nie $\log_5 12,5$ — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP02.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Wiadomo, że $a = \log_2 5$. Zapisz liczbę $\log_2 40$ za pomocą a .

ROZWIĄZANIE

1. $40 = 8 \cdot 5$, więc $\log_2 40 = \log_2 8 + \log_2 5$.
2. $\log_2 8 = 3$, zatem $\log_2 40 = 3 + a$.

Odpowiedź: $3 + a$

PP02.10 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Wiadomo, że $\log_a 2 = 0,3$ oraz $\log_a 3 = 0,5$. Oblicz $\log_a 72$.

ROZWIĄZANIE

1. Rozkładamy argument: $72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2$.
2. $\log_a 72 = \log_a 2^3 + \log_a 3^2 = 3 \log_a 2 + 2 \log_a 3$.
3. $= 3 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 = 0,9 + 1 = 1,9$.

Odpowiedź: 1,9

Wskazówka: Rozkład na czynniki pierwsze to klucz do każdego logarytmu „z danymi”.

PP03 Wartość bezwzględna i przedziały

🔑 Moduł = odległość. „Mniejsze” → przedział wokół środka, „większe” → dwa ramiona.

PP03.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $|x - 3| < 5$ jest

- A. $(-2, 8)$ B. $(-\infty, -2) \cup (8, \infty)$ C. $(-8, 2)$ D. $[-2, 8]$

ROZWIĄZANIE

1. Liczby odległe od 3 o mniej niż 5: $3 - 5 < x < 3 + 5$, czyli $x \in (-2, 8)$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — to rozwiązanie nierówności „ $>$ ”; C — środek -3 ; D — końce powinny być otwarte.

PP03.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $|x + 2| \geq 4$ jest

- A. $[-6, 2]$ B. $(-\infty, -6] \cup [2, \infty)$ C. $(-\infty, -2] \cup [6, \infty)$ D. $(-\infty, -6) \cup (2, \infty)$

ROZWIĄZANIE

1. $|x + 2| = |x - (-2)|$ — środek -2 , promień 4.

2. „ $\geq$ ” → dwa ramiona: $x \leq -6$ lub $x \geq 2$.

Odpowiedź: B

Dlaczego nie pozostałe? C — środek $+2$ zamiast -2 ; D — nierówność nieostra wymaga domkniętych końców.

PP03.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Rozwiązaniami równania $|x - 4| = 6$ są liczby

- A. -2 i 10 B. 2 i 10 C. -10 i 2 D. tylko 10

ROZWIĄZANIE

1. $x - 4 = 6$ lub $x - 4 = -6$, czyli $x = 10$ lub $x = -2$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? D — pominięty przypadek ujemny; C — środek -4 .

PP03.4 ZAMKNIĘTE ★★

0-1 pkt

Przedział $[-3, 7]$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

- A. $|x - 2| \leq 5$ B. $|x + 2| \leq 5$ C. $|x - 5| \leq 2$ D. $|x - 2| \geq 5$

ROZWIĄZANIE

- Środek przedziału: $\frac{-3 + 7}{2} = 2$, promień: $\frac{7 - (-3)}{2} = 5$.
- Końce domknięte $\rightarrow |x - 2| \leq 5$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — zamienione środek i promień; D — opisuje dwa ramiona poza przedziałem.

PP03.5 ZAMKNIĘTE ★★

0-1 pkt

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $|2x - 1| \geq 3$ jest

- A. $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ B. $[-1, 2]$ C. $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

ROZWIĄZANIE

- $2x - 1 \geq 3$ lub $2x - 1 \leq -3$.
- $x \geq 2$ lub $x \leq -1$, czyli $x \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — przy $2x - 1 \leq -3$ ktoś podzielił źle; najłatwiej:
 $|2x - 1| = 2|x - \frac{1}{2}| \geq 3 \Rightarrow |x - \frac{1}{2}| \geq \frac{3}{2}$.

PP03.6 ZAMKNIĘTE ★★

0-1 pkt

Na osi liczbowej zaznaczono zbiór:



Jest to zbiór wszystkich rozwiązań nierówności

- A. $|x + 1| > 3$ B. $|x - 1| > 3$ C. $|x + 1| \geq 3$ D. $|x + 1| < 3$

ROZWIĄZANIE

- Dwa ramiona, końce otwarte $\rightarrow$ nierówność ostra typu „ $>$ ”.
- Środek: $\frac{-4 + 2}{2} = -1$, promień: $2 - (-1) = 3 \rightarrow |x + 1| > 3$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — końce na rysunku są niezamalowane, więc nierówność ostra; B — środek $+1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

1.	Nierówność $ x - 5 < 0$ nie ma rozwiązań.	P	F
2.	Nierówność $ x \leq -1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Wartość bezwzględna jest zawsze nieujemna, więc $|x - 5| < 0$ nie ma rozwiązań — prawda.
2. $|x| \leq -1$ nie ma żadnego rozwiązania (moduł nie może być ujemny) — fałsz.

Odpowiedź: P, F

Wypisz wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność $|x - 1| < 3$.

ROZWIĄZANIE

1. $|x - 1| < 3 \iff -2 < x < 4$.
2. Liczby całkowite z przedziału $(-2, 4)$: $-1, 0, 1, 2, 3$ (jest ich 5).

Odpowiedź: $-1, 0, 1, 2, 3$

Liczba $|\sqrt{3} - 2| + |\sqrt{3} - 1|$ jest równa

- A. 1 B. $2\sqrt{3} - 3$ C. $3 - 2\sqrt{3}$ D. -1

ROZWIĄZANIE

1. $\sqrt{3} \approx 1,73$, więc $\sqrt{3} - 2 < 0$ i $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$.
2. $\sqrt{3} - 1 > 0$, więc $|\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$.
3. Suma: $2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — moduł „zdjęty” bez zmiany znaku przy liczbie ujemnej $\sqrt{3} - 2$.

Dane są zbiory $A = [-3, 5)$ oraz B — zbiór rozwiązań nierówności $|x - 4| < 3$. Wyznacz $A \cap B$ oraz $A \cup B$.

ROZWIĄZANIE

1. $|x - 4| < 3 \iff 1 < x < 7$, czyli $B = (1, 7)$.
2. Część wspólna: liczby w obu zbiorach — $(1, 5)$ (liczba $5 \notin A$).
3. Suma: od -3 (włącznie) do 7 (bez) — $[-3, 7)$.

Odpowiedź: $A \cap B = (1, 5)$, $A \cup B = [-3, 7)$

PP04 Wzory skróconego mnożenia

🔑 Widzisz $A^2 - B^2$ albo trójmian z „podwojonym iloczynem” → najpierw zwiń, potem licz.

PP04.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wyrażenie $(x - 4)^2$ jest równe

- A. $x^2 - 16$ B. $x^2 - 8x + 16$ C. $x^2 + 16$ D. $x^2 - 4x + 16$

ROZWIĄZANIE

1. $(x - 4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 16 = x^2 - 8x + 16$.

Odpowiedź: B

Dlaczego nie pozostałe? A — pomylenie z różnicą kwadratów; D — wyraz środkowy bez podwojenia.

PP04.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wyrażenie $(2a + 3)^2$ jest równe

- A. $4a^2 + 9$ B. $4a^2 + 6a + 9$ C. $4a^2 + 12a + 9$ D. $2a^2 + 12a + 9$

ROZWIĄZANIE

1. $(2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 = 4a^2 + 12a + 9$.

Odpowiedź: C

Dlaczego nie pozostałe? B — brak podwojenia; D — $(2a)^2$ policzone jako $2a^2$.

PP04.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ jest równa

- A. 4 B. 10 C. $2\sqrt{21}$ D. $4 - 2\sqrt{21}$

ROZWIĄZANIE

1. Różnica kwadratów: $(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 7 - 3 = 4$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — dodane zamiast odejtych kwadratów; D — pomylenie z $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$.

PP04.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Dla każdej liczby rzeczywistej a wyrażenie $(2a - 5)^2 - (2a + 5)^2$ jest równe

- A. $-40a$ B. 0 C. -50 D. $8a^2 + 50$

ROZWIĄZANIE

1. $A = 2a - 5$, $B = 2a + 5$: $A - B = -10$, $A + B = 4a$.

2. $(A - B)(A + B) = -10 \cdot 4a = -40a$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — zgubione wyrazy $\pm 20a$; C — zostały tylko wyrazy wolne ze złym znakiem.

PP04.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wartość wyrażenia $x^2 - 6x + 9$ dla $x = 3 + \sqrt{5}$ jest równa

- A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. $14 + 6\sqrt{5}$ D. 25

ROZWIĄZANIE

1. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ — pełny kwadrat.
2. Dla $x = 3 + \sqrt{5}$: $(\sqrt{5})^2 = 5$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? C — policzone tylko x^2 ; zwinięcie do kwadratu skraca rachunek do jednej linijki.

PP04.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $(\sqrt{5} - 1)^2$ jest równa

- A. 4 B. $6 - 2\sqrt{5}$ C. 6 D. $4 - 2\sqrt{5}$

ROZWIĄZANIE

1. $(\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 1 + 1^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$.

Odpowiedź: B

Dlaczego nie pozostałe? A — potraktowane jak różnica kwadratów; C — zgubiony wyraz $2ab$.

PP04.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wyrażenie $x^3 - 8$ można zapisać w postaci

- A. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ B. $(x - 2)^3$
C. $(x - 2)(x^2 - 2x + 4)$ D. $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

ROZWIĄZANIE

1. $x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ — wzór na różnicę sześcianów.
2. Kontrola dla $x = 3$: $27 - 8 = 19$ oraz $1 \cdot (9 + 6 + 4) = 19$ ✓.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? C — zły znak w drugim nawiasie; D — to rozkład sumy $x^3 + 8$.

PP04.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

1.	Dla każdej liczby rzeczywistej x : $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.	P	F
2.	Liczba $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$ jest niewymierna.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Wzór $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ — prawda.
2. $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2}) = 6$ — liczba wymierna, więc zdanie jest fałszywe.

Odpowiedź: P, F

Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$.

ROZWIĄZANIE

1. Mnożymy przez sprzężenie $\sqrt{5}+1$: $\frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1}$.

2. $= \sqrt{5}+1$.

Odpowiedź: $\sqrt{5}+1$

Liczby rzeczywiste a i b spełniają warunki $a+b=6$ oraz $ab=4$. Oblicz a^2+b^2 oraz $(a-b)^2$.

ROZWIĄZANIE

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, więc $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 36 - 8 = 28$.

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 28 - 8 = 20$.

3. Nie trzeba wyznaczać a i b — wystarczą wzory skróconego mnożenia.

Odpowiedź: $a^2 + b^2 = 28$, $(a-b)^2 = 20$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie $a^2 + b^2 = 28$ z zapisem wzoru,
- 2 pkt — obliczenie obu wartości.

PP05 Dowody algebraiczne i podzielność

🔑 Cel: $d \cdot (\text{liczba całkowita})$. Nieparzysta $\rightarrow 2k + 1$. Na końcu zdanie z wnioskiem.

PP05.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Dla każdej liczby całkowitej k liczbą nieparzystą jest

- A. $2k$ B. $2k + 1$ C. $k + 1$ D. $4k$

ROZWIĄZANIE

1. $2k$ jest parzysta, więc $2k + 1$ jest nieparzysta dla każdego k .

Odpowiedź: B

Dlaczego nie pozostałe? C — dla $k = 1$ daje 2 (parzystą).

PP05.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Dla każdej liczby całkowitej n liczba $n(n + 1)$ jest

- A. nieparzysta B. parzysta
C. podzielna przez 3 D. kwadratem liczby całkowitej

ROZWIĄZANIE

1. Wśród dwóch kolejnych liczb całkowitych jedna jest parzysta, więc ich iloczyn jest parzysty.

Odpowiedź: B

Dlaczego nie pozostałe? C — np. $1 \cdot 2 = 2$ nie dzieli się przez 3.

PP05.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba $3n + 7$, gdzie n jest liczbą naturalną, przy dzieleniu przez 3 daje resztę

- A. 0 B. 1 C. 2 D. zależną od n

ROZWIĄZANIE

1. $3n + 7 = 3n + 6 + 1 = 3(n + 2) + 1$, a $n + 2$ jest liczbą całkowitą.
2. Reszta wynosi 1.

Odpowiedź: B

Dlaczego nie pozostałe? A — pomyłone „ $3n$ ” z całą liczbą; reszty z 7 nie wolno pominąć.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

1.	Dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 + n$ jest parzysta.	P	F
2.	Dla każdej liczby naturalnej n liczba $n^2 + 1$ jest nieparzysta.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $n^2 + n = n(n + 1)$ — iloczyn kolejnych liczb, zawsze parzysty — prawda.
2. Dla $n = 1$: $1^2 + 1 = 2$ — liczba parzysta, więc zdanie jest fałszywe (wystarczy jeden kontrprzykład).

Odpowiedź: P, F

Wskazówka: Aby obalić zdanie „dla każdego”, wystarczy jeden kontrprzykład.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $(n + 3)^2 - (n - 3)^2$ jest podzielna przez 12.

ROZWIĄZANIE

- Różnica kwadratów:

$$(n + 3)^2 - (n - 3)^2 = [(n + 3) - (n - 3)] \cdot [(n + 3) + (n - 3)] = 6 \cdot 2n = 12n.$$
- n jest liczbą całkowitą, więc $12n$ jest podzielne przez 12. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — przekształcenie do postaci $12n$ (lub rozwinięcie nawiasów z błędem rachunkowym, ale poprawną metodą),
- 2 pkt — postać $12n$ i wniosek o podzielności.

Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n liczba $n^2 + 3$ jest podzielna przez 4.

ROZWIĄZANIE

- n nieparzysta, więc $n = 2k + 1$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 0$.
- $n^2 + 3 = (2k + 1)^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 1 + 3 = 4k^2 + 4k + 4 = 4(k^2 + k + 1).$
- $k^2 + k + 1$ jest liczbą całkowitą, więc $n^2 + 3$ jest podzielna przez 4. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — podstawienie $n = 2k + 1$ i poprawne przekształcenie,
- 2 pkt — zapis $4(k^2 + k + 1)$ z wnioskiem.

Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1.

ROZWIĄZANIE

1. Kolejne liczby: n i $n + 1$. Suma kwadratów: $n^2 + (n + 1)^2 = 2n^2 + 2n + 1 = 2n(n + 1) + 1$.
2. $n(n + 1)$ jest parzysty (iloczyn kolejnych liczb), więc $n(n + 1) = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$.
3. Zatem $n^2 + (n + 1)^2 = 2 \cdot 2m + 1 = 4m + 1$ — reszta z dzielenia przez 4 wynosi 1. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis $2n(n + 1) + 1$ (lub $2n^2 + 2n + 1$ z próbą uzasadnienia),
- 2 pkt — uzasadnienie parzystości $n(n + 1)$ i postać $4m + 1$.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $3n^2 + 9n$ jest podzielna przez 6.

ROZWIĄZANIE

1. $3n^2 + 9n = 3n(n + 3)$.
2. n i $n + 3$ mają różną parzystość, więc $n(n + 3)$ jest parzysty: $n(n + 3) = 2m$.
3. $3n^2 + 9n = 3 \cdot 2m = 6m$ — liczba jest podzielna przez 6. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis $3n(n + 3)$,
- 2 pkt — uzasadnienie parzystości $n(n + 3)$ i wniosek.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.

ROZWIĄZANIE

1. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ — iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych.
2. Wśród nich jest liczba parzysta i liczba podzielna przez 3, więc iloczyn dzieli się przez 2 i przez 3.
3. 2 i 3 są względnie pierwsze, zatem iloczyn dzieli się przez 6. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozkład $(n - 1)n(n + 1)$,
- 2 pkt — uzasadnienie podzielności przez 2 i przez 3 oraz wniosek.

Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby całkowitej n liczba $n^2 - 1$ jest podzielna przez 8.

ROZWIĄZANIE

1. $n = 2k + 1$: $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$.
2. $k(k + 1)$ — iloczyn kolejnych liczb — jest parzysty: $k(k + 1) = 2m$.
3. $n^2 - 1 = 4 \cdot 2m = 8m$ — liczba jest podzielna przez 8. ■

Odpowiedź: dowód

Wskazówka: To ten sam pomysł co w maturze 2023: $(2n + 1)^2 - 1$ jest podzielne przez 8.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis $4k(k + 1)$,
- 2 pkt — uzasadnienie parzystości $k(k + 1)$ i wniosek.

PP06 Równania liniowe, iloczynowe i wymierne

🔑 Iloczyn = 0 → każdy czynnik osobno. Ułamek → najpierw dziedzina!

PP06.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Rozwiązaniem równania $3(x - 2) = 2x + 5$ jest liczba

- A. 11 B. -1 C. 3 D. 7

ROZWIĄZANIE

1. $3x - 6 = 2x + 5 \Rightarrow x = 11$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — ktoś napisał $3x - 2$ (nie wymnożył całego nawiasu).

PP06.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Równanie $(x - 3)(x + 5)(x^2 + 4) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie

- A. dwa rozwiązania B. trzy rozwiązania
C. cztery rozwiązania D. jedno rozwiązanie

ROZWIĄZANIE

1. $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$; $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$.

2. $x^2 + 4 = 0$ nie ma rozwiązań ($x^2 \geq 0$). Razem dwa rozwiązania.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? C — z czynnika $x^2 + 4$ „wyszły” liczby ± 2 , a przecież $x^2 = -4$ jest niemożliwe.

PP06.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Rozwiązaniem równania $\frac{x+2}{x-1} = 0$ jest

- A. $x = -2$ B. $x = 1$ C. $x = -2$ lub $x = 1$ D. brak rozwiązań

ROZWIĄZANIE

1. Dziedzina: $x \neq 1$. Ułamek jest zerem, gdy licznik jest zerem: $x = -2$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B/C — $x = 1$ zeruje mianownik, więc nie należy do dziedziny.

PP06.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Równanie $\frac{x^2 - 9}{x + 3} = 0$ ma w zbiorze liczb rzeczywistych

- A. dokładnie jedno rozwiązanie: 3
B. dwa rozwiązania: 3 i -3
C. dokładnie jedno rozwiązanie: -3
D. nie ma rozwiązań

ROZWIĄZANIE

1. Dziedzina: $x \neq -3$.
2. Licznik: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ lub $x = -3$; odrzucamy -3.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — pominięta dziedzina.

PP06.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Rozwiązaniem równania $\frac{x-1}{2x+3} = \frac{1}{3}$ jest liczba

- A. 6
B. 0
C. -6
D. 4

ROZWIĄZANIE

1. Mnożymy „na krzyż”: $3(x-1) = 2x+3 \Rightarrow 3x-3 = 2x+3 \Rightarrow x = 6$.
2. Sprawdzenie dziedziny: $2 \cdot 6 + 3 \neq 0 \checkmark$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? D — przy mnożeniu na krzyż pomnożono tylko x , a nie cały licznik.

PP06.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Dane jest równanie $(x-4)(x+m)(2x-6) = 0$ z niewiadomą x . Suma wszystkich rozwiązań tego równania jest równa 5. Liczba m jest równa

- A. 2
B. -2
C. 12
D. -5

ROZWIĄZANIE

1. Rozwiązania: $x = 4, x = -m, x = 3$.
2. $4 + 3 + (-m) = 5 \Rightarrow m = 2$ (wtedy rozwiązania 4, -2, 3 są różne, suma 5 $\checkmark$).

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — z czynnika $(x+m)$ odczytane $x = m$ zamiast $x = -m$; C — z $(2x-6)$ odczytane $x = 6$.

Dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ i $x \neq -3$ wyrażenie $\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 6x + 9} \cdot \frac{x + 3}{x}$ jest równe

A. 1

B. x C. $\frac{x + 3}{x}$ D. $\frac{x}{x + 3}$

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{x(x + 3)}{(x + 3)^2} \cdot \frac{x + 3}{x}$ — w liczniku $x(x + 3)^2$, w mianowniku $x(x + 3)^2$.

2. Po skróceniu zostaje 1.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? D — nie zauważono, że $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń.

1.	Równanie $\frac{x}{x - 2} = \frac{2}{x - 2}$ ma rozwiązanie $x = 2$.	P	F
2.	Równanie $(x - 1)^2(x + 2) = 0$ ma dokładnie dwa rozwiązania.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. 1. Dla $x \neq 2$: $x = 2$ — sprzeczność z dziedziną, więc równanie nie ma rozwiązań — fałsz.

2. 2. $(x - 1)^2(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1$ lub $x = -2$ — dwa różne rozwiązania — prawda.

Odpowiedź: F, P

Rozwiąż równanie $2x(x - 5) = 3(x - 5)$.

ROZWIĄZANIE

1. Przenosimy wszystko na lewą stronę: $2x(x - 5) - 3(x - 5) = 0$.

2. Wyłączamy $(x - 5)$: $(x - 5)(2x - 3) = 0$.

3. $x = 5$ lub $x = \frac{3}{2}$.

Odpowiedź: $x = 5$ lub $x = \frac{3}{2}$

Wskazówka: Nigdy nie dziel obu stron przez wyrażenie z niewiadomą — tak ginie rozwiązanie $x = 5$.

Rozwiąż równanie $\frac{x+3}{x-1} = \frac{x+1}{x-2}$.

ROZWIĄZANIE

1. Dziedzina: $x \neq 1$ i $x \neq 2$.
2. Mnożymy na krzyż: $(x+3)(x-2) = (x+1)(x-1)$.
3. $x^2 + x - 6 = x^2 - 1 \Rightarrow x = 5$.
4. 5 należy do dziedziny, więc $x = 5$.

Odpowiedź: $x = 5$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis dziedziny i przekształcenie do równania bez ułamków,
- 2 pkt — rozwiązanie $x = 5$ ze sprawdzeniem dziedziny.

PP07 Wielomiany i rozkład na czynniki

🔑 Cztery wyrazy stopnia 3 → grupuj „2 + 2”. Wspólny czynnik → wyłącz, nigdy nie dziel.

PP07.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Stopień wielomianu $W(x) = (2x^3 - 1)(x^2 + 4)$ jest równy

- A. 5 B. 6 C. 3 D. 2

ROZWIĄZANIE

1. Najwyższa potęga iloczynu: $2x^3 \cdot x^2 = 2x^5 \rightarrow$ stopień 5.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — pomnożone stopnie $3 \cdot 2$ zamiast dodania.

PP07.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu

- A. $x^3 + 8$ B. $x^3 - 8$ C. $x^2 + 4$ D. $x^2 + 2x + 2$

ROZWIĄZANIE

1. Podstawiamy $x = -2$: $(-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0 \checkmark$.

2. Pozostałe: $-8 - 8 \neq 0$, $4 + 4 \neq 0$, $4 - 4 + 2 \neq 0$.

Odpowiedź: **A**

PP07.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wielomian $x^3 - 9x$ w postaci iloczynowej ma postać

- A. $x(x - 3)(x + 3)$ B. $x(x - 3)^2$ C. $(x - 3)(x + 3)$ D. $x^2(x - 9)$

ROZWIĄZANIE

1. $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — zgubiony czynnik x .

PP07.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ jest

- A. $\{-1, 1, 4\}$ B. $\{1, 4\}$ C. $\{-4, -1, 1\}$ D. $\{4\}$

ROZWIĄZANIE

1. $x^2(x - 4) - (x - 4) = (x - 4)(x^2 - 1) = (x - 4)(x - 1)(x + 1)$.

2. Rozwiązania: 4, 1, -1 .

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — z $x^2 = 1$ wzięto tylko $x = 1$.

PP07.5 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x$. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	W jest iloczynem wielomianów $2x$ oraz $x^2 - 2x + 3$.	P	F
2.	Równanie $W(x) = 0$ ma trzy rozwiązania.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $2x \cdot (x^2 - 2x + 3) = 2x^3 - 4x^2 + 6x$ — prawda.
2. $W(x) = 0 \iff x = 0$ lub $x^2 - 2x + 3 = 0$; dla trójmianu $\Delta = 4 - 12 < 0$, więc jedyne rozwiązanie to $x = 0$ — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP07.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wartość wielomianu $W(x) = x^3 - 3x + 1$ dla $x = \sqrt{3}$ jest równa

- A. 1 B. $3\sqrt{3} + 1$ C. -1 D. $6\sqrt{3} + 1$

ROZWIĄZANIE

1. $(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$, więc $W(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 1 = 1$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — $(\sqrt{3})^3$ policzone jako 3; D — zły znak przy $-3x$.

PP07.7 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia wielomian $x^4 - 16$.

ROZWIĄZANIE

1. $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$ — różnica kwadratów.
2. $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, a $x^2 + 4$ nie rozkłada się dalej ($\Delta < 0$).

Odpowiedź: $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

PP07.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Rozwiąż równanie $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$.

ROZWIĄZANIE

1. Grupujemy: $x^2(2x - 1) - 4(2x - 1) = 0$.
2. $(2x - 1)(x^2 - 4) = 0$, czyli $(2x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0$.
3. $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ lub $x = -2$.

Odpowiedź: $x \in \{-2, \frac{1}{2}, 2\}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis w postaci iloczynu $(2x - 1)(x^2 - 4)$,
- 2 pkt — rozwiązanie jednego z czynników lub pełny rozkład,
- 3 pkt — wszystkie trzy rozwiązania.

Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$.

ROZWIĄZANIE

1. $x^2(x + 2) - 3(x + 2) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x^2 - 3) = 0$.

2. $x = -2$ lub $x^2 = 3$, czyli $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$.

Odpowiedź: $x \in \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — postać iloczynowa $(x + 2)(x^2 - 3)$,
- 2 pkt — rozwiązanie jednego czynnika,
- 3 pkt — wszystkie rozwiązania: $-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

Rozwiąż równanie $x(x - 2)(x + 2) = x(x - 2)$.

ROZWIĄZANIE

1. Przenosimy na jedną stronę: $x(x - 2)(x + 2) - x(x - 2) = 0$.

2. Wyłączamy $x(x - 2)$: $x(x - 2)[(x + 2) - 1] = x(x - 2)(x + 1) = 0$.

3. $x = 0$, $x = 2$ lub $x = -1$.

Odpowiedź: $x \in \{-1, 0, 2\}$

Wskazówka: Kto podzieli obie strony przez $x(x - 2)$, dostanie tylko $x = -1$ i straci dwa punkty.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — przeniesienie na jedną stronę i wyłączenie $x(x - 2)$,
- 2 pkt — postać $x(x - 2)(x + 1) = 0$,
- 3 pkt — trzy rozwiązania.

PP08 Nierówności liniowe i kwadratowe

🔑 Wszystko na lewo → miejsca zerowe → szkic paraboli → odczyt. Dzielisz przez minus → odwracasz znak.

PP08.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0-1 pkt

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $2x - 3 > 5$ jest przedział

- A. $(4, \infty)$ B. $(-\infty, 4)$ C. $(1, \infty)$ D. $[4, \infty)$

ROZWIĄZANIE

1. $2x > 8 \Rightarrow x > 4$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? D — nierówność ostra, więc 4 nie należy do zbioru.

PP08.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0-1 pkt

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $-3x \leq 12$ jest przedział

- A. $[-4, \infty)$ B. $(-\infty, -4]$ C. $(-\infty, 4]$ D. $[4, \infty)$

ROZWIĄZANIE

1. Dzielimy przez -3 i **odwracamy znak**: $x \geq -4$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — nie odwrócono znaku nierówności.

PP08.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0-1 pkt

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $-2(x + 1) \leq \frac{3 - x}{2}$ jest przedział

- A. $\left[-\frac{7}{3}, \infty\right)$ B. $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right]$ C. $\left[\frac{7}{3}, \infty\right)$ D. $[-1, \infty)$

ROZWIĄZANIE

1. Mnożymy przez 2: $-4(x + 1) \leq 3 - x \Rightarrow -4x - 4 \leq 3 - x$.

2. $-3x \leq 7 \Rightarrow x \geq -\frac{7}{3}$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — zapomniana zmiana znaku przy dzieleniu przez -3 .

PP08.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $x^2 < 9$ jest

- A. $(-3, 3)$ B. $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ C. $(-\infty, 3)$ D. $(-9, 9)$

ROZWIĄZANIE

1. $x^2 - 9 < 0 \iff (x - 3)(x + 3) < 0$ — parabola w górę, ujemna między -3 a 3 .

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — z $x^2 < 9$ „wyciągnięto pierwiastek” jak z równania: $x < 3$.

PP08.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $x^2 - 4x \geq 0$ jest

- A. $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$ B. $[0, 4]$ C. $[4, \infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

ROZWIĄZANIE

1. $x(x - 4) \geq 0$; miejsca zerowe 0 i 4 , ramiona w górę.
2. Nieujemne na zewnątrz (z końcami): $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — obie strony podzielone przez x (niewiadomy znak!); D — zgubione końce przy znaku $\geq$.

PP08.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $x^2 + 2x + 5 > 0$ jest

- A. $\mathbb{R}$ B. $\emptyset$ C. $(-1, \infty)$ D. $(-\infty, -1)$

ROZWIĄZANIE

1. $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ i $a = 1 > 0$, więc trójmian jest dodatni dla każdej liczby rzeczywistej.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — „brak miejsc zerowych” to nie „brak rozwiązań nierówności”.

PP08.7 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Funkcja kwadratowa f ma miejsca zerowe 0 i 4 , a jej wykres jest parabolą o wierzchołku $(2, -4)$. Zapisz zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) \leq 0$.

ROZWIĄZANIE

1. Wierzchołek leży pod osią Ox , a parabola przecina oś w 0 i 4 — ramiona skierowane w górę.
2. Wartości niedodatnie przyjmuje między miejscami zerowymi, z nimi: $x \in [0, 4]$.

Odpowiedź: $[0, 4]$

Rozwiąż nierówność $2(x^2 - 1) < 3x$.

ROZWIĄZANIE

1. $2x^2 - 2 < 3x \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 < 0$.

2. $\Delta = 9 + 16 = 25$, $x_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3+5}{4} = 2$.

3. Ramiona w górę, więc wartości ujemne między miejscami zerowymi: $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

Odpowiedź: $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — miejsca zerowe $-\frac{1}{2}$ i 2 ,
- 2 pkt — zbiór rozwiązań $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

Rozwiąż nierówność $3x^2 + 5x \geq x + 4$.

ROZWIĄZANIE

1. $3x^2 + 4x - 4 \geq 0$.

2. $\Delta = 16 + 48 = 64$, $x_1 = \frac{-4-8}{6} = -2$, $x_2 = \frac{-4+8}{6} = \frac{2}{3}$.

3. Ramiona w górę → nieujemne na zewnątrz: $x \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — miejsca zerowe -2 i $\frac{2}{3}$,
- 2 pkt — poprawna odpowiedź.

Rozwiąż nierówność $(x - 2)(x + 1) \leq 2(x + 1)$.

ROZWIĄZANIE

1. Przenosimy: $(x - 2)(x + 1) - 2(x + 1) \leq 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 4) \leq 0$.

2. Miejsca zerowe -1 i 4 , ramiona w górę.

3. $x \in [-1, 4]$.

Odpowiedź: $x \in [-1, 4]$

Wskazówka: Podzielenie przez $(x + 1)$ dałoby $x \leq 4$ — błędny zbiór, bo nie znamy znaku $x + 1$.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — postać $(x + 1)(x - 4) \leq 0$ lub miejsca zerowe -1 i 4 ,
- 2 pkt — zbiór $[-1, 4]$.

PP09 Układy równań i zadania tekstowe

 Dwie niewiadome + dwie informacje → układ. Na końcu sprawdzenie w treści.

PP09.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$ jest para liczb

- A. $x = 5, y = 2$ B. $x = 2, y = 5$ C. $x = 4, y = 3$ D. $x = 3, y = 4$

ROZWIĄZANIE

1. Dodajemy równania stronami: $2x = 10 \Rightarrow x = 5$.
2. $y = 7 - 5 = 2$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B i D spełniają tylko pierwsze równanie; C — tylko pierwsze ($4 - 3 \neq 3$).

PP09.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ jest para liczb

- A. $x = 2, y = 1$ B. $x = 1, y = 3$ C. $x = 3, y = -1$ D. $x = 1, y = 2$

ROZWIĄZANIE

1. Z pierwszego: $y = 5 - 2x$.
2. $3x - 2(5 - 2x) = 4 \Rightarrow 7x - 10 = 4 \Rightarrow x = 2, y = 1$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B i C spełniają tylko pierwsze równanie — zawsze sprawdzaj oba.

PP09.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Układ równań $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

- A. ma dokładnie jedno rozwiązanie B. ma nieskończenie wiele rozwiązań
C. nie ma rozwiązań D. ma dokładnie dwa rozwiązania

ROZWIĄZANIE

1. Podstawiamy y : $4x - 2(2x - 1) = 2 \Rightarrow 2 = 2$ — tożsamość.
2. Oba równania opisują tę samą prostą, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedź: **B**

Dlaczego nie pozostałe? D — układ równań liniowych nigdy nie ma dokładnie dwóch rozwiązań.

Interpretacją geometryczną układu równań $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = -1 \end{cases}$ są dwie proste

- A. przecinające się w punkcie $(1, 2)$ B. równoległe i różne
C. pokrywające się D. prostopadłe

ROZWIĄZANIE

1. Proste $y = -x + 3$ i $y = -x - 1$ mają ten sam współczynnik kierunkowy -1 i różne wyrazy wolne.
2. Są więc równoległe i różne — układ jest sprzeczny.

Odpowiedź: **B**

Układ równań $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$ nie ma rozwiązań dla a równego

- A. 4 B. -4 C. 1 D. 2

ROZWIĄZANIE

1. Brak rozwiązań $\Leftrightarrow$ proste równoległe i różne: $1 \cdot a - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow a = 4$.
2. Dla $a = 4$: drugie równanie to $x + 2y = \frac{1}{2}$, a pierwsze $x + 2y = 4$ — sprzeczność $\checkmark$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? D — dla $a = 2$ proste się przecinają (współczynniki nie są proporcjonalne).

W dwóch magazynach było łącznie 1500 ton zboża. Z pierwszego sprzedano 20%, a z drugiego 10% zboża. Wtedy w drugim magazynie zostało o 350 ton mniej niż w pierwszym. Jeśli x i y to początkowe ilości zboża (w tonach) w pierwszym i drugim magazynie, to

- A. $\begin{cases} x + y = 1500 \\ 0,9y = 0,8x - 350 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + y = 1500 \\ 0,1y = 0,2x - 350 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x + y = 1500 \\ 0,8y = 0,9x - 350 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 1500 \\ 0,9y = 0,8x + 350 \end{cases}$

ROZWIĄZANIE

1. łącznie: $x + y = 1500$.
2. Zostało: w pierwszym $0,8x$, w drugim $0,9y$; w drugim o 350 mniej: $0,9y = 0,8x - 350$.
3. (Rozwiązanie: $x = 1000$, $y = 500$; sprawdzenie: $800 - 450 = 350 \checkmark$.)

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — porównano ilości **sprzedane**, a nie pozostałe; C — zamienione procenty; D — „o 350 mniej” zapisane jak „więcej”.

PP09.7 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Za 3 długopisy i 2 zeszyty zapłacono 17 zł, a za 2 długopisy i 5 zeszytów — 26 zł. Oblicz cenę jednego długopisu i jednego zeszytu.

ROZWIĄZANIE

1. d — cena długopisu, z — zeszytu:
$$\begin{cases} 3d + 2z = 17 \\ 2d + 5z = 26 \end{cases}$$
2. Mnożymy: pierwsze przez 2, drugie przez 3: $6d + 4z = 34$, $6d + 15z = 78$.
3. Odejmujemy: $11z = 44 \Rightarrow z = 4$; $3d = 17 - 8 \Rightarrow d = 3$.

Odpowiedź: długopis 3 zł, zeszyt 4 zł

PP09.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Suma dwóch liczb jest równa 40, a ich różnica jest równa 8. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Większa z tych liczb jest równa 24.	P	F
2.	Iloczyn tych liczb jest równy 400.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $\begin{cases} a + b = 40 \\ a - b = 8 \end{cases} \Rightarrow 2a = 48, a = 24, b = 16$.
2. 1. Większa liczba to 24 — prawda.
3. 2. Iloczyn: $24 \cdot 16 = 384 \neq 400$ — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP09.9 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Na koncert sprzedano łącznie 200 biletów: normalne po 40 zł i ulgowe po 25 zł. Wpływy ze sprzedaży wyniosły 6800 zł. Oblicz, ile sprzedano biletów normalnych, a ile ulgowych.

ROZWIĄZANIE

1. n — bilety normalne, u — ulgowe:
$$\begin{cases} n + u = 200 \\ 40n + 25u = 6800 \end{cases}$$
2. $u = 200 - n$: $40n + 5000 - 25n = 6800 \Rightarrow 15n = 1800 \Rightarrow n = 120, u = 80$.
3. Sprawdzenie: $4800 + 2000 = 6800 \checkmark$.

Odpowiedź: 120 normalnych i 80 ulgowych

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie układu równań opisującego zadanie,
- 2 pkt — obliczenie liczby biletów obu rodzajów.

Pociąg pokonał trasę długości **240** km ze stałą prędkością. Gdyby jechał z prędkością o $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ większą, pokonałby tę trasę w czasie o **1** godzinę krótszym. Oblicz prędkość pociągu.

ROZWIĄZANIE

1. v — prędkość (km/h), t — czas (h):
$$\begin{cases} v \cdot t = 240 \\ (v + 20)(t - 1) = 240 \end{cases}$$
2. Rozwijamy drugie: $vt - v + 20t - 20 = 240 \Rightarrow 240 - v + 20t - 20 = 240 \Rightarrow v = 20t - 20$.
3. Podstawiamy do $vt = 240$: $(20t - 20)t = 240 \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t + 3) = 0$.
4. $t > 0$, więc $t = 4$ h i $v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Sprawdzenie: $80 \cdot 3 = 240 \checkmark$.

Odpowiedź: $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie układu równań (lub równania $\frac{240}{v} - \frac{240}{v+20} = 1$),
- 2 pkt — doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą,
- 3 pkt — obliczenie prędkości **60** km/h z odrzuceniem ujemnego rozwiązania.

PP10 Procenty i procent składany

 Zmiana o $p\%$ = mnożnik $1 \pm \frac{p}{100}$. Kolejne zmiany mnożysz, wartość początkową odzyskujesz dzieleniem.

PP10.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

15% liczby 240 jest równe

A. 36

B. 16

C. 3,6

D. 225

ROZWIĄZANIE

$$1. 0,15 \cdot 240 = 36.$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — podzielono $240 : 15$.

PP10.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Cenę towaru równą 80 zł podwyższono o 25%. Nowa cena jest równa

A. 100 zł

B. 105 zł

C. 20 zł

D. 60 zł

ROZWIĄZANIE

$$1. 80 \cdot 1,25 = 100 \text{ zł.}$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — dodano 25 zł zamiast 25%; C — to sama podwyżka.

PP10.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Po obniżce o 20% kurtka kosztuje 96 zł. Przed obniżką kurtka kosztowała

A. 120 zł

B. 115,20 zł

C. 116 zł

D. 76,80 zł

ROZWIĄZANIE

$$1. 0,8 \cdot x = 96 \Rightarrow x = \frac{96}{0,8} = 120 \text{ zł.}$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — doliczono 20% od ceny **po** obniżce; D — obniżono drugi raz.

PP10.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Cenę towaru podwyższono o **10%**, a następnie nową cenę obniżono o **10%**. W porównaniu z ceną początkową cena końcowa

- A. nie zmieniła się
- B. zmaląa o **1%**
- C. wzrosła o **1%**
- D. zmaląa o **10%**

ROZWIĄZANIE

1. Mnożniki: $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$.
2. Cena końcowa stanowi **99%** początkowej — zmaląa o **1%**.

Odpowiedź: **B**

Dlaczego nie pozostałe? A — obniżka liczona jest od **wyższej** ceny, więc „zabiera” więcej niż dała podwyżka.

PP10.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczba **a** jest o **25%** większa od liczby dodatniej **b**. Wynika stąd, że liczba **b** jest mniejsza od liczby **a** o

- A. **25%**
- B. **20%**
- C. **75%**
- D. **80%**

ROZWIĄZANIE

1. $a = 1,25b \Rightarrow b = \frac{a}{1,25} = 0,8a$.
2. **b** stanowi **80%** liczby **a**, czyli jest o **20%** mniejsza.

Odpowiedź: **B**

Dlaczego nie pozostałe? A — procent zawsze liczymy od liczby, z którą porównujemy (tu od **a**).

PP10.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Oprocentowanie kredytu wzrosło z **5%** do **7%**. Oznacza to, że oprocentowanie wzrosło o

- A. **2 punkty procentowe, czyli o 40%**
- B. **2%**, czyli o **2 punkty procentowe**
- C. **40 punktów procentowych**
- D. **20%**

ROZWIĄZANIE

1. Różnica: $7\% - 5\% = 2$ punkty procentowe.
2. Zmiana względna: $\frac{7-5}{5} \cdot 100\% = 40\%$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — pomyłone punkty procentowe z procentami.

PP10.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Na lokatę dwuletnią z oprocentowaniem **4%** w skali roku i roczną kapitalizacją odsetek wpłacono **5000 zł**. Po dwóch latach (bez podatku) na lokacie będzie

- A. 5408 zł** **B. 5400 zł** **C. 5416 zł** **D. 5200 zł**

ROZWIĄZANIE

1. $5000 \cdot 1,04^2 = 5000 \cdot 1,0816 = 5408 \text{ zł}$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — procent prosty (bez odsetek od odsetek); D — tylko jeden rok.

PP10.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Kurtka kosztowała **400 zł**. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Po obniżce o 15% kurtka kosztuje 340 zł .	P	F
2.	Po dwóch kolejnych obniżkach o 10% kurtka kosztuje 320 zł .	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $1. 400 \cdot 0,85 = 340 \text{ zł}$ — prawda.

2. $2. 400 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 324 \text{ zł}$, a nie **320 zł** — fałsz (dwie obniżki po **10%** to obniżka o **19%**).

Odpowiedź: P, F

PP10.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Kwotę **2000 zł** złożono na lokatę na **3** lata z oprocentowaniem **5%** w skali roku i roczną kapitalizacją odsetek. Oblicz kwotę na lokacie po **3** latach (pomiń podatek).

ROZWIĄZANIE

1. $K_3 = 2000 \cdot 1,05^3$.

2. $1,05^3 = 1,157625$, więc $K_3 = 2315,25 \text{ zł}$.

Odpowiedź: 2315,25 zł

Cenę roweru obniżono o **20%**, a po miesiącu nową cenę podwyższono o **15%**. Po tych zmianach rower kosztuje **1472** zł. Oblicz cenę początkową roweru i ustal, o ile procent cena końcowa różni się od ceny początkowej.

ROZWIĄZANIE

1. x — cena początkowa: $x \cdot 0,8 \cdot 1,15 = 1472$.
2. $0,92x = 1472 \Rightarrow x = 1600$ zł.
3. Cena końcowa to **92%** początkowej, czyli jest o **8%** niższa.

Odpowiedź: 1600 zł; cena końcowa jest niższa o 8%

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie $0,8 \cdot 1,15 \cdot x = 1472$ lub obliczenie ceny początkowej,
- 2 pkt — cena **1600** zł i zmiana o **8%** (obniżka).

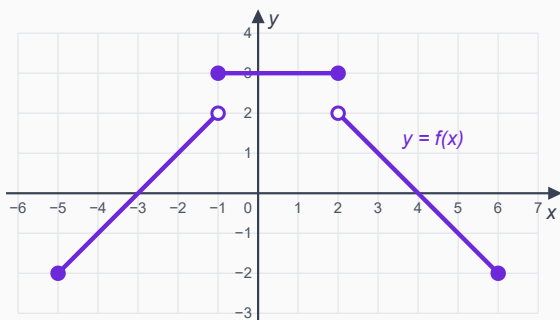
PP11 Odczytywanie własności funkcji i funkcje kawałkami

🔑 Wykres → rzutuj na osie; kółko puste = wartości brak. Klamra → wynik musi leżeć w przedziale wzoru.

PP11.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f (zadania PP11.1–PP11.9 dotyczą tej funkcji). Dziedziną funkcji f jest



A. $[-5, 6]$

B. $[-2, 3]$

C. $(-5, 6)$

D. $[-5, 6)$

ROZWIĄZANIE

- Wykres zaczyna się w $x = -5$ (kółko pełne) i kończy w $x = 6$ (kółko pełne); nad każdym x z tego przedziału jest punkt wykresu.
- $D = [-5, 6]$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — to przybliżony zbiór wartości (oś Oy), a nie dziedzina.

PP11.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Zbiorem wartości funkcji f jest

📐 Rysunek jak w zadaniu PP11.1.

A. $[-2, 2) \cup \{3\}$

B. $[-2, 3]$

C. $[-2, 2] \cup \{3\}$

D. $(-2, 3]$

ROZWIĄZANIE

- Pierwszy odcinek daje wartości $[-2, 2)$ (w $x = -1$ kółko puste).
- Środkowy odcinek: tylko wartość 3.
- Trzeci odcinek: od 2 (kółko puste) do -2 — też $[-2, 2)$.
- Wartość 2 nie jest osiągnięta: $ZW = [-2, 2) \cup \{3\}$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — pominięta „dziura” między 2 a 3; C — puste kółka oznaczają, że 2 nie jest wartością funkcji.

PP11.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby

 Rysunek jak w zadaniu PP11.1.

A. -3 i 4 B. -3 i 2 C. tylko -3 D. 3 i -4

ROZWIĄZANIE

1. Wykres przecina oś Ox w $x = -3$ (na odcinku $y = x + 3$) oraz w $x = 4$ (na odcinku $y = -x + 4$).

Odpowiedź: A

PP11.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Równanie $f(x) = 3$

 Rysunek jak w zadaniu PP11.1.

A. ma nieskończenie wiele rozwiązań

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie

C. ma dokładnie dwa rozwiązania

D. nie ma rozwiązań

ROZWIĄZANIE

1. Prosta $y = 3$ pokrywa się ze środkowym odcinkiem wykresu dla wszystkich $x \in [-1, 2]$.

2. Równanie ma więc nieskończenie wiele rozwiązań.

Odpowiedź: A

PP11.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[0, 5]$ jest równa

 Rysunek jak w zadaniu PP11.1.

A. -1 B. 3 C. -2 D. 0

ROZWIĄZANIE

1. Na $[0, 2]$ funkcja ma wartość 3 ; na $(2, 5]$ maleje od 2 do $f(5) = -5 + 4 = -1$.

2. Najmniejsza wartość: -1 (dla $x = 5$).

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? C — to najmniejsza wartość na całej dziedzinie, a nie w przedziale $[0, 5]$.

PP11.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Funkcja f jest malejąca w przedziale

 Rysunek jak w zadaniu PP11.1.

A. $[2, 6]$ B. $[-5, -1)$ C. $[-1, 2]$ D. $[-1, 6]$

ROZWIĄZANIE

1. Na $[-5, -1)$ rośnie, na $[-1, 2]$ jest stała, a dla $x \geq 2$ jej wartości maleją: $f(2) = 3$, potem od 2 do -2 .

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? C — funkcja stała nie jest malejąca; D — na $[-1, 2]$ wartości się nie zmieniają.

PP11.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0-1 pkt

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ jest

Rysunek jak w zadaniu PP11.1.

- A. $(-3, 4)$ B. $(-3, -1) \cup (2, 4)$ C. $[-3, 4]$ D. $(-5, 6)$

ROZWIĄZANIE

- Wykres jest nad osią Ox : od $x = -3$ (bez) przez cały środkowy odcinek aż do $x = 4$ (bez).
- Łącznie $x \in (-3, 4)$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — pominięty środkowy odcinek $y = 3$, który też leży nad osią; C — w miejscach zerowych $f(x) = 0$, a nie > 0 .

PP11.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0-1 pkt

Oceń prawdziwość stwierdzeń dotyczących funkcji f .

Rysunek jak w zadaniu PP11.1.

1.	$f(-2) + f(5) = 0$.	P	F
2.	Funkcja f przyjmuje wartość 2 dla dokładnie dwóch argumentów.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $f(-2) = -2 + 3 = 1$, $f(5) = -5 + 4 = -1$, suma 0 — prawda.
2. $f(x) = 2$: na $[-5, -1]$ daje $x = -1$ — poza przedziałem; na $[-1, 2]$ wartość to 3; na $(2, 6]$ daje $x = 2$ — poza przedziałem. Brak argumentów — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP11.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = f(x - 2)$. Podaj dziedzinę funkcji g oraz jej miejsca zerowe.

Rysunek jak w zadaniu PP11.1.

ROZWIĄZANIE

- $g(x) = f(x - 2)$ — wykres f przesunięty o 2 jednostki w prawo.
- Dziedzina: $[-5 + 2, 6 + 2] = [-3, 8]$.
- Miejsca zerowe przesuwają się o 2: $-3 + 2 = -1$ oraz $4 + 2 = 6$.

Odpowiedź: $D_g = [-3, 8]$, miejsca zerowe: -1 i 6

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{dla } x \in [-4, -1) \\ 4 & \text{dla } x \in [-1, 1] \\ -2x + 6 & \text{dla } x \in (1, 4] \end{cases}$

a) Podaj zbiór wartości funkcji f . b) Podaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = 2$. c) Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 0$. d) Podaj wszystkie argumenty, dla których f przyjmuje wartość największą.

ROZWIĄZANIE

1. a) $2x + 6$ na $[-4, -1)$: wartości $[-2, 4)$; środek: 4; $-2x + 6$ na $(1, 4]$: wartości $[-2, 4)$. Razem $[-2, 4]$.
2. b) $2x + 6 = 2 \Rightarrow x = -2 \in [-4, -1)$ ✓; $-2x + 6 = 2 \Rightarrow x = 2 \in (1, 4]$ ✓; środkowy wzór daje $4 \neq 2$. Dwa rozwiązania.
3. c) $2x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$: $[-3, -1)$; środek: cały $[-1, 1]$; $-2x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$: $(1, 3]$. Suma: $[-3, 3]$.
4. d) Największa wartość to 4 — przyjmowana dla każdego $x \in [-1, 1]$.

Odpowiedź: a) $[-2, 4]$; b) 2; c) $[-3, 3]$; d) $x \in [-1, 1]$

Schemat punktowania:

- po 1 pkt za każdą z części a), b), c), d).

PP12 Funkcja liniowa i proste

 Równoległe: równe a . Prostopadłe: $a_1 a_2 = -1$. Przez punkt: podstaw i wylicz b .

PP12.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Miejszem zerowym funkcji $f(x) = -2x + 6$ jest liczba

- A. 3 B. -3 C. 6 D. -6

ROZWIĄZANIE

1. $-2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — to wyraz wolny (punkt przecięcia z Oy), nie miejsce zerowe.

PP12.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Funkcja liniowa $f(x) = (2m - 4)x + 1$ jest rosnąca dla każdej liczby m z przedziału

- A. $(2, \infty)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(4, \infty)$ D. $(-\infty, -2)$

ROZWIĄZANIE

1. Rosnąca $\Leftrightarrow 2m - 4 > 0 \Rightarrow m > 2$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — warunek funkcji malejącej; C — rozwiązane $m - 4 > 0$ bez dzielenia.

PP12.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Prosta przechodząca przez punkty $A = (-1, 3)$ i $B = (2, -3)$ ma równanie

- A. $y = -2x + 1$ B. $y = 2x + 5$
C. $y = -2x + 5$ D. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

ROZWIĄZANIE

1. $a = \frac{-3 - 3}{2 - (-1)} = \frac{-6}{3} = -2$.

2. $3 = -2 \cdot (-1) + b \Rightarrow b = 1$, więc $y = -2x + 1$.

3. Kontrola B : $-4 + 1 = -3 \checkmark$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? D — odwrócony iloraz przyrostów; B — przechodzi przez A , ale nie przez B .

PP12.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Funkcje liniowe $f(x) = 2x - 8$ oraz $g(x) = ax + 3$ mają to samo miejsce zerowe. Współczynnik a jest równy

- A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

ROZWIĄZANIE

- Miejsce zerowe f : $2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$.
- $g(4) = 0$: $4a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$.

Odpowiedź: **A**

PP12.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Dana jest funkcja $f(x) = -3x + 6$. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Wykres funkcji f przecina oś Oy w punkcie $(0, 6)$.	P	F
2.	Wykres funkcji f jest nachylony do osi Ox pod kątem ostrym.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $f(0) = 6$, więc wykres przecina Oy w $(0, 6)$ — prawda.
2. $a = -3 < 0$, więc $\text{tg } \alpha < 0$ i kąt nachylenia jest rozwarty — fałsz.

Odpowiedź: **P, F**

PP12.9 ODPOWIEŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz miarę kąta, jaki prosta $y = \sqrt{3}x - 2$ tworzy z dodatnią półosią Ox .

ROZWIĄZANIE

- $\text{tg } \alpha = a = \sqrt{3}$, a $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$, więc $\alpha = 60^\circ$.

Odpowiedź: **60°**

PP12.10 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Dana jest prosta k : $y = 2x - 3$ oraz punkt $P = (4, 1)$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P . Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostych k i l .

ROZWIĄZANIE

- Prostopadła: $a = -\frac{1}{2}$. $1 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b \Rightarrow b = 3$, więc l : $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
- Przecięcie: $2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 6 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$.
- $y = 2 \cdot \frac{12}{5} - 3 = \frac{9}{5}$. Punkt $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$.

Odpowiedź: **l : $y = -\frac{1}{2}x + 3$, punkt przecięcia $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$**

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie prostej l ,
- 2 pkt — współrzędne punktu przecięcia.

PP13 Funkcja kwadratowa

🔑 Wierzchołek → postać kanoniczna. Miejsca zerowe → iloczynowa. **a** z dodatkowego punktu.

PP13.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wierzchołkiem paraboli $y = 2(x - 3)^2 - 5$ jest punkt

- A. $(3, -5)$ B. $(-3, -5)$ C. $(3, 5)$ D. $(-3, 5)$

ROZWIĄZANIE

1. Postać kanoniczna $a(x - p)^2 + q$, $p = 3$, $q = -5$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — z nawiasu $(x - 3)$ odczytujemy $p = 3$ (wzór ma postać $a(x - p)^2 + q$); -3 byłoby dla $(x + 3)$.

PP13.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Oś symetrii wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 1$ jest prosta o równaniu

- A. $x = 3$ B. $x = -3$ C. $x = 6$ D. $y = 3$

ROZWIĄZANIE

1. $p = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$, więc oś symetrii: $x = 3$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? D — oś symetrii paraboli jest pionowa, ma równanie $x = p$.

PP13.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = -2(x + 1)(x - 5)$ są liczby

- A. -1 i 5 B. 1 i -5 C. -2 , -1 i 5 D. 1 i 5

ROZWIĄZANIE

1. Iloczyn równa się zero, gdy $x + 1 = 0$ lub $x - 5 = 0$: $x = -1$ lub $x = 5$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — współczynnik -2 nie jest miejscem zerowym.

PP13.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ jest przedział

- A. $(-\infty, 4]$ B. $[4, \infty)$ C. $(-\infty, 2]$ D. $[2, \infty)$

ROZWIĄZANIE

1. $a = -1 < 0$ — ramiona w dół, wierzchołek $(2, 4)$ jest najwyżej.
2. $ZW = (-\infty, 4]$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — ramiona w górę byłyby dla $a > 0$; C — pierwsza współrzędna wierzchołka dotyczy argumentów.

PP13.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej f jest liczba 1, a osią symetrii wykresu jest prosta $x = 4$.
Drugim miejscem zerowym funkcji f jest liczba

- A. 7 B. -2 C. 3 D. 9

ROZWIĄZANIE

1. Miejsca zerowe są symetryczne względem osi: $\frac{1+x_2}{2} = 4 \Rightarrow x_2 = 7$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — to odległość od osi, a nie drugie miejsce zerowe; B — odbicie względem zera.

PP13.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie $W = (2, -1)$. Wtedy

- A. $b = -4, c = 3$ B. $b = 4, c = 3$ C. $b = -4, c = -1$ D. $b = 4, c = 5$

ROZWIĄZANIE

1. $f(x) = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3$.
2. $b = -4, c = 3$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — przepisano q jako c ; wyraz wolny to $p^2 + q$.

PP13.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Funkcja $f(x) = x^2 - 4x - 5$ jest malejąca w przedziale

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, \infty)$ C. $(-\infty, -5]$ D. $[-1, 5]$

ROZWIĄZANIE

1. $p = \frac{4}{2} = 2, a = 1 > 0$ — funkcja maleje na lewo od wierzchołka: $(-\infty, 2]$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? D — to zbiór, na którym $f(x) \leq 0$ (między miejscami zerowymi), a nie przedział monotoniczności.

PP13.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Największa wartość funkcji f jest równa 4.	P	F
2.	Wykres funkcji f przecina oś Oy w punkcie $(0, 5)$.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $p = \frac{-6}{-2} = 3$, $f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$, ramiona w dół → największa wartość 4 — prawda.
2. $f(0) = -5$, więc wykres przecina Oy w $(0, -5)$ — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP13.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Wykres funkcji kwadratowej f ma wierzchołek $W = (1, 3)$ i przechodzi przez punkt $P = (3, -5)$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

ROZWIĄZANIE

1. $f(x) = a(x - 1)^2 + 3$.
2. P : $-5 = a \cdot (3 - 1)^2 + 3 \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow a = -2$.

Odpowiedź: $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$

PP13.10 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Funkcja kwadratowa f ma miejsca zerowe -1 i 5 , a jej wykres przechodzi przez punkt $(2, -9)$. a) Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej. b) Podaj współrzędne wierzchołka paraboli. c) Podaj zbiór wartości funkcji f . d) Podaj przedział, w którym f jest rosnąca.

ROZWIĄZANIE

1. a) Postać iloczynowa: $f(x) = a(x + 1)(x - 5)$. Punkt $(2, -9)$: $a \cdot 3 \cdot (-3) = -9 \Rightarrow a = 1$.
 $f(x) = x^2 - 4x - 5$.
2. b) $p = \frac{-1 + 5}{2} = 2$, $q = f(2) = 4 - 8 - 5 = -9$. $W = (2, -9)$.
3. c) $a > 0$: $ZW = [-9, \infty)$.
4. d) Rośnie na prawo od wierzchołka: $[2, \infty)$.

Odpowiedź: a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$; b) $W = (2, -9)$; c) $[-9, \infty)$; d) $[2, \infty)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór w postaci ogólnej (lub iloczynowej z $a = 1$),
- 1 pkt — wierzchołek,
- 1 pkt — zbiór wartości,
- 1 pkt — przedział monotoniczności.

PP14 Ciąg arytmetyczny

🔑 Wszystko przez a_1 i r . Trzy kolejne wyrazy: $2b = a + c$. Malejący $\rightarrow r < 0$.

PP14.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3n - 2$ dla $n \geq 1$. Piąty wyraz tego ciągu jest równy

- A. 13 B. 15 C. 3 D. 17

ROZWIĄZANIE

$$1. a_5 = 3 \cdot 5 - 2 = 13.$$

Odpowiedź: A

PP14.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

W ciągu arytmetycznym $a_1 = 4$ i $r = -3$. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy

- A. -23 B. -26 C. -20 D. 34

ROZWIĄZANIE

$$1. a_{10} = a_1 + 9r = 4 - 27 = -23.$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — policzone $a_1 + 10r$; D — dodatnia różnica.

PP14.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

W ciągu arytmetycznym $a_3 = 7$ oraz $a_7 = 19$. Różnica tego ciągu jest równa

- A. 3 B. 12 C. 4 D. $\frac{26}{7}$

ROZWIĄZANIE

$$1. a_7 - a_3 = 4r = 12 \Rightarrow r = 3.$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — różnica wyrazów, a nie ciągu (od a_3 do a_7 są 4 kroki).

PP14.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są $a_1 = 2$ oraz $a_5 = 14$. Dziewiąty wyraz tego ciągu jest równy

- A. 26 B. 28 C. 18 D. 23

ROZWIĄZANIE

$$1. 4r = 14 - 2 = 12 \Rightarrow r = 3.$$

$$2. a_9 = a_1 + 8r = 2 + 24 = 26 \text{ (albo: } a_9 = a_5 + 4r = 14 + 12).$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — pomnożono $a_5 \cdot 2$; C — dodano jeden raz r zamiast czterech.

PP14.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Trzywyrazowy ciąg $(x - 1, 5, 2x + 3)$ jest arytmetyczny. Liczba x jest równa

- A. $\frac{8}{3}$ B. 3 C. 2 D. $\frac{4}{3}$

ROZWIĄZANIE

- $2 \cdot 5 = (x - 1) + (2x + 3) \Rightarrow 10 = 3x + 2 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$.
- Sprawdzenie: $(\frac{5}{3}, 5, \frac{25}{3})$, różnica $\frac{10}{3} \checkmark$.

Odpowiedź: **A**

PP14.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 3$ i $r = 2$, jest równa

- A. 440 B. 410 C. 43 D. 880

ROZWIĄZANIE

$$1. S_{20} = \frac{2 \cdot 3 + 19 \cdot 2}{2} \cdot 20 = \frac{44}{2} \cdot 20 = 440.$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — to a_{21} ; D — pominięte dzielenie przez 2.

PP14.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1 = 3$ oraz $a_{n+1} = a_n + 4$ dla $n \geq 1$. Wyraz a_{10} jest równy

- A. 39 B. 43 C. 40 D. 35

ROZWIĄZANIE

- To ciąg arytmetyczny o $a_1 = 3$ i $r = 4$.
- $a_{10} = 3 + 9 \cdot 4 = 39$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — policzone a_{11} .

PP14.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n + 7$ dla $n \geq 1$. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Ciąg (a_n) jest arytmetyczny o różnicy 2.	P	F
2.	Liczba 100 jest wyrazem ciągu (a_n) .	P	F

ROZWIĄZANIE

- $1. a_{n+1} - a_n = 2(n + 1) + 7 - 2n - 7 = 2$ — stała różnica, prawda.
- $2. 2n + 7 = 100 \Rightarrow n = 46,5 \notin \mathbb{N}$ — fałsz.

Odpowiedź: **P, F**

Pani Anna spłaciła pożyczkę w wysokości **7200 zł** w **16** ratach. Każda kolejna rata była mniejsza od poprzedniej o **20 zł**. Oblicz wysokość pierwszej raty.

ROZWIĄZANIE

1. Raty tworzą ciąg arytmetyczny: $r = -20$, $n = 16$, $S_{16} = 7200$.
2. $S_{16} = \frac{2a_1 + 15 \cdot (-20)}{2} \cdot 16 = 8(2a_1 - 300) = 7200$.
3. $2a_1 - 300 = 900 \Rightarrow a_1 = 600$ zł. (Ostatnia rata: $600 - 300 = 300$ zł.)

Odpowiedź: **600 zł**

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie równania $\frac{2a_1-300}{2} \cdot 16 = 7200$,
- 2 pkt — obliczenie pierwszej raty **600 zł**.

Wyznacz wszystkie wartości m , dla których trzywyrazowy ciąg $(5m + 4, m^2 + 1, 4 - m)$ jest arytmetyczny i rosnący.

ROZWIĄZANIE

1. Warunek: $2(m^2 + 1) = (5m + 4) + (4 - m) \Rightarrow 2m^2 + 2 = 4m + 8 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$.
2. $(m - 3)(m + 1) = 0 \Rightarrow m = 3$ lub $m = -1$.
3. $m = 3$: ciąg $(19, 10, 1)$ — malejący, odrzucamy.
4. $m = -1$: ciąg $(-1, 2, 5)$ — rosnący ✓.

Odpowiedź: **$m = -1$**

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie równania $2(m^2 + 1) = 5m + 4 + 4 - m$,
- 2 pkt — rozwiązanie równania: $m = 3$ lub $m = -1$,
- 3 pkt — odrzucenie $m = 3$ i odpowiedź $m = -1$.

PP15 Ciąg geometryczny

🔑 $a_n = a_1 q^{n-1}$; trzy kolejne: $b^2 = ac$; iloczyny wyrazów — licz sumę indeksów.

PP15.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są $a_1 = 64$ oraz $a_2 = 16$. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy

- A. 1 B. 4 C. -32 D. $\frac{1}{4}$

ROZWIĄZANIE

$$1. q = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}.$$

$$2. a_4 = a_1 q^3 = 64 \cdot \frac{1}{64} = 1.$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — to a_3 ; C — potraktowane jak ciąg arytmetyczny ($r = -48$).

PP15.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Ciąg $(4, x, 9)$ jest geometryczny i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Liczba x jest równa

- A. 6 B. 6,5 C. 36 D. -6

ROZWIĄZANIE

$$1. x^2 = 4 \cdot 9 = 36, x > 0, \text{ więc } x = 6.$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — średnia arytmetyczna (warunek ciągu arytmetycznego); D — wyrazy mają być dodatnie.

PP15.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

W ciągu geometrycznym $a_2 = 6$ oraz $a_5 = 48$. Iloraz tego ciągu jest równy

- A. 2 B. 8 C. 3 D. 14

ROZWIĄZANIE

$$1. a_5 = a_2 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2.$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — to q^3 ; D — różnica wyrazów podzielona przez 3 (ciąg arytmetyczny).

PP15.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Trzywyrazowy ciąg $(48, 12, 2m + 1)$ jest geometryczny. Liczba m jest równa

- A. 1 B. 3 C. -1 D. $-12,5$

ROZWIĄZANIE

1. $q = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$, więc trzeci wyraz to 3.

2. $2m + 1 = 3 \Rightarrow m = 1$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — wartość trzeciego wyrazu, a nie m ; D — potraktowane jak ciąg arytmetyczny.

PP15.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 3$ i $q = 2$, jest równa

- A. 93 B. 96 C. 48 D. 186

ROZWIĄZANIE

1. $S_5 = 3 \cdot \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 3 \cdot 31 = 93$.

2. Kontrola: $3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93 \checkmark$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? C — to a_5 ; B — policzone $3 \cdot 2^5$.

PP15.6 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Ciąg geometryczny (a_n) spełnia warunek $a_4 \cdot a_5 = 12$. Oblicz iloczyn $a_2 \cdot a_7$.

ROZWIĄZANIE

1. $a_4 a_5 = a_1 q^3 \cdot a_1 q^4 = a_1^2 q^7$.

2. $a_2 a_7 = a_1 q \cdot a_1 q^6 = a_1^2 q^7$ — to samo. Wynik: 12.

Odpowiedź: 12

Wskazówka: Suma indeksów $4 + 5 = 2 + 7$ — iloczyny są równe.

PP15.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3 \cdot (-2)^n$ dla $n \geq 1$ jest

- A. geometryczny o ilorazie -2 B. arytmetyczny o różnicy -2
C. geometryczny rosnący D. geometryczny o ilorazie 3

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3(-2)^{n+1}}{3(-2)^n} = -2$ — ciąg geometryczny o ilorazie -2 .

2. Wyrazy zmieniają znak: $-6, 12, -24, \dots$ — nie jest monotoniczny.

Odpowiedź: A

PP15.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ dla $n \geq 1$. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	$a_4 = 40$.	P	F
2.	Suma trzech początkowych wyrazów ciągu jest równa 30.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $a_4 = 5 \cdot 2^3 = 40$ — prawda.
2. $5 + 10 + 20 = 35 \neq 30$ — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP15.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Wyznacz wszystkie wartości x , dla których ciąg $(x - 1, 2x, 5x + 3)$ jest geometryczny.

ROZWIĄZANIE

1. $(2x)^2 = (x - 1)(5x + 3) \Rightarrow 4x^2 = 5x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.
2. $(x - 3)(x + 1) = 0$: $x = 3 \rightarrow (2, 6, 18)$, $q = 3$ ✓; $x = -1 \rightarrow (-2, -2, -2)$, $q = 1$ ✓.

Odpowiedź: $x = -1$ lub $x = 3$

PP15.10 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n + 1$ dla $n \geq 1$. Trzywyrazowy ciąg (a_1, a_4, a_k) jest geometryczny. Oblicz k .

ROZWIĄZANIE

1. $a_1 = 3$, $a_4 = 9$, więc iloraz $q = 3$ i $a_k = 27$ (albo: $a_4^2 = a_1 \cdot a_k \Rightarrow 81 = 3a_k$).
2. $2k + 1 = 27 \Rightarrow k = 13$.
3. Sprawdzenie: $(3, 9, 27)$ ✓.

Odpowiedź: $k = 13$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie $a_1 = 3$ i $a_4 = 9$ lub zapis $a_4^2 = a_1 a_k$,
- 2 pkt — obliczenie $a_k = 27$,
- 3 pkt — $k = 13$.

PP16 Trygonometria podstawowa

🔑 Jedynka + tangens = iloraz. Kąt rozwarty $\rightarrow$ cosinus i tangens ujemne.

PP16.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości **3** i **4**. Sinus kąta leżącego naprzeciw krótszej przyprostokątnej jest równy

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

ROZWIĄZANIE

1. Przeciwnprostokątna: $\sqrt{9 + 16} = 5$.

2. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — cosinus tego kąta; C — tangens.

PP16.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy $\cos \alpha$ jest równy

A. $\frac{12}{13}$

B. $\frac{8}{13}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{13}{12}$

ROZWIĄZANIE

1. $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, kąt ostry $\rightarrow \cos \alpha = \frac{12}{13}$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — odjęto liczniki ($13 - 5$) zamiast kwadratów.

PP16.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Wtedy $\cos \alpha$ jest równy

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

ROZWIĄZANIE

1. $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$. Z jedynki: $4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$.

2. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — to $\sin \alpha$; C — odwrotność tangensa to cotangens, nie cosinus.

PP16.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha$ jest równe

- A. $\cos \alpha$ B. $\sin \alpha$ C. 1 D. $\cos^2 \alpha$

ROZWIĄZANIE

$$1. \cos \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos \alpha \cdot 1 = \cos \alpha.$$

Odpowiedź: **A**

PP16.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wartość wyrażenia $2 \sin 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$ jest równa

- A. $\frac{3}{2}$ B. 1 C. 2 D. $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

ROZWIĄZANIE

$$1. 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? D — pomyłony $\cos 60^\circ$ z $\cos 30^\circ$.

PP16.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Wtedy $\cos \alpha$ jest równy

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

ROZWIĄZANIE

$$1. \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

$$2. \text{Kąt rozwarty} \rightarrow \text{cosinus ujemny: } \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — pominięty znak dla kąta rozwartego; C — to tangens.

PP16.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Kąt α ma wierzchołek w punkcie $O = (0, 0)$, jedno ramię na dodatniej półosi Ox , a drugie przechodzi przez punkt $P = (-4, 3)$. Tangens kąta α jest równy

- A. $-\frac{3}{4}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

ROZWIĄZANIE

$$1. \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — odwrócony iloraz; C — to $\sin \alpha$; D — to $\cos \alpha$.

PP16.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$	P	F
2.	$\cos 120^\circ = \frac{1}{2}$	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ — prawda.
2. $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP16.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

 Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 3$. Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$.

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} - 1 = 3 \Rightarrow 2 \operatorname{tg} \alpha = 4 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2$.

 Odpowiedź: $\operatorname{tg} \alpha = 2$
PP16.10 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

 Kąt α spełnia warunki: $\operatorname{tg} \alpha = -2$ oraz $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

ROZWIĄZANIE

1. $\sin \alpha = -2 \cos \alpha$. Jedynek: $4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$.
2. Kąt rozwarty $\rightarrow \cos \alpha < 0$: $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.
3. $\sin \alpha = -2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (dodatni $\checkmark$).

 Odpowiedź: $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapis układu $\sin \alpha = -2 \cos \alpha$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i obliczenie $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$,
- 2 pkt — obie wartości z poprawnymi znakami.

PP17 Trójkąty: Pitagoras, pola, sinus i cosinus

🔑 Dwa boki + kąt między nimi $\rightarrow \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ i tw. cosinusów. Równoboczny $\rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

PP17.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość **13**, a jedna z przyprostokątnych — **5**. Pole tego trójkąta jest równe

- A. 30 B. 60 C. 32,5 D. 65

ROZWIĄZANIE

1. Druga przyprostokątna: $\sqrt{169 - 25} = 12$.

2. $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — brak $\frac{1}{2}$; C — pomnożono przez przeciwprostokątną.

PP17.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Pole trójkąta równobocznego o boku **6** jest równe

- A. $9\sqrt{3}$ B. $18\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. 36

ROZWIĄZANIE

1. $P = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — to wysokość trójkąta.

PP17.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Pole trójkąta, w którym dwa boki mają długości **8** i **5**, a kąt między nimi ma miarę **30°**, jest równe

- A. 10 B. 20 C. $10\sqrt{3}$ D. 40

ROZWIĄZANIE

1. $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — użyty $\sin 60^\circ$ zamiast $\sin 30^\circ$.

PP17.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Romb ma bok długości 4 i kąt ostry 30° . Pole tego rombu jest równe

- A. 8 B. 16 C. $8\sqrt{3}$ D. 4

ROZWIĄZANIE

$$1. P = a^2 \sin \alpha = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8.$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — pole kwadratu o boku 4.

PP17.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Równoległobok ma boki długości 5 i 6 oraz kąt rozwarty 120° . Pole tego równoległoboku jest równe

- A. $15\sqrt{3}$ B. 15 C. $30\sqrt{3}$ D. 30

ROZWIĄZANIE

$$1. P = ab \sin \alpha = 30 \cdot \sin 120^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — użyte $\cos 60^\circ$; C — pominięte $\frac{\sqrt{3}}{2}$ jako $\sqrt{3}$.

PP17.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

W trójkącie dwa boki mają długości 5 i 8, a kąt między nimi ma miarę 60° . Trzeci bok ma długość

- A. 7 B. $\sqrt{129}$ C. 13 D. $\sqrt{89}$

ROZWIĄZANIE

$$1. c^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49, c = 7.$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — policzone dla 120° ($\cos = -\frac{1}{2}$); D — Pitagoras, choć kąt nie jest prosty.

PP17.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

W trójkącie ABC bok BC ma długość 10, a kąt BAC ma miarę 30° . Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy

- A. 10 B. 20 C. 5 D. $10\sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{Tw. sinusów: } \frac{|BC|}{\sin \angle A} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 = 2R, \text{ więc } R = 10.$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — to $2R$, czyli średnica.

PP17.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Trójkąt ma boki długości **6**, **8** i **10**. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Ten trójkąt jest prostokątny.	P	F
2.	Pole tego trójkąta jest równe 48 .	P	F

ROZWIĄZANIE

1. **1.** $36 + 64 = 100$ — z twierdzenia odwrotnego do tw. Pitagorasa trójkąt jest prostokątny — prawda.

2. **2.** $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \neq 48$ — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP17.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

W okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny. Oblicz długość boku tego trójkąta.

ROZWIĄZANIE

$$1. R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \frac{3R}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}R = \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 12.$$

Odpowiedź: 12

PP17.10 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

W trójkącie ABC dane są $|AB| = 6$, $|AC| = 10$ oraz $|\angle BAC| = 120^\circ$. Oblicz długość boku BC oraz pole trójkąta ABC .

ROZWIĄZANIE

1. Tw. cosinusów: $|BC|^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ = 136 + 60 = 196$, więc $|BC| = 14$.

2. Pole: $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin 120^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $|BC| = 14$, $P = 15\sqrt{3}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — długość $|BC| = 14$ (z poprawnym $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$),
- 2 pkt — dodatkowo pole $15\sqrt{3}$.

PP18 Podobieństwo, twierdzenie Talesa i dwusieczna

🔑 Równe kąty → podobieństwo → proporcja. Pola przez k^2 , objętości przez k^3 .

PP18.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Trójkąty T_1 i T_2 są podobne, przy czym T_2 jest trzy razy większy od T_1 (skala 3). Pole trójkąta T_1 jest równe 5. Pole trójkąta T_2 jest równe

- A. 45 B. 15 C. 135 D. 25

ROZWIĄZANIE

1. Pola podobnych figur: $P_2 = k^2 P_1 = 9 \cdot 5 = 45$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — pomnożone przez k zamiast k^2 ; C — przez k^3 (to dla objętości).

PP18.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Obwody dwóch trójkątów podobnych są równe 12 i 18. Stosunek pola mniejszego trójkąta do pola większego jest równy

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{8}{27}$ D. $\frac{9}{4}$

ROZWIĄZANIE

1. Skala: $k = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

2. Stosunek pól: $k^2 = \frac{4}{9}$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — to stosunek obwodów; D — odwrócona kolejność.

PP18.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Na jednym ramieniu kąta o wierzchołku O leżą punkty A i B (A między O i B), a na drugim punkty A' i B' . Proste AA' i BB' są równoległe. $|OA| = 4$, $|AB| = 6$, $|OA'| = 6$. Długość odcinka $A'B'$ jest równa

- A. 9 B. 4 C. 15 D. 10

ROZWIĄZANIE

1. Tales: $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{6}{|A'B'|}$.

2. $|A'B'| = 9$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — to długość $|OB'|$, a pytanie dotyczy odcinka $A'B'$.

PP18.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Proste k i l są równoległe. Punkty A i D leżą na prostej k , a punkty B i C — na prostej l . Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie O , przy czym $|OA| = 9$, $|OC| = 6$, $|OD| = 12$. Długość odcinka OB jest równa

- A. 8 B. 18 C. 4,5 D. 9

ROZWIĄZANIE

1. $\triangle AOD \sim \triangle COB$ (kąty wierzchołkowe i naprzemianległe).

$$2. \frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OD|}{|OB|} \Rightarrow \frac{9}{6} = \frac{12}{|OB|} \Rightarrow |OB| = 8.$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — odwrócona proporcja ($\frac{9}{6} = \frac{|OB|}{12}$).

PP18.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

W trójkącie ABC dane są $|AC| = 6$, $|BC| = 9$ i $|AB| = 10$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D . Długość odcinka AD jest równa

- A. 4 B. 6 C. 5 D. 3

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \text{ więc } |AD| = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4.$$

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — to $|DB|$; C — dwusieczna potraktowana jak środkowa.

PP18.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 4 i 9. Ta wysokość ma długość

- A. 6 B. 13 C. 36 D. 6,5

ROZWIĄZANIE

1. Trójkąty, na które dzieli wysokość, są podobne: $h^2 = 4 \cdot 9 = 36$, $h = 6$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — to przeciwprostokątna; D — średnia arytmetyczna odcinków.

PP18.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Pole trójkąta ABC jest równe 50. Prosta równoległa do boku AB przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach K i L , przy czym $|CK| : |KA| = 2 : 3$. Pole trójkąta KLC jest równe

- A. 8 B. 20 C. 18 D. 12

ROZWIĄZANIE

- $\triangle KLC \sim \triangle ABC$ w skali $k = \frac{|CK|}{|CA|} = \frac{2}{5}$.
- $P_{KLC} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 50 = \frac{4}{25} \cdot 50 = 8$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — pomnożone przez k , a nie k^2 ; D — skala $\frac{2}{3}$ zamiast $\frac{2}{5}$.

PP18.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Dane są trójkąty o bokach **3, 4, 5** oraz **6, 8, 10**. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Te trójkąty są podobne.	P	F
2.	Pole większego trójkąta jest dwa razy większe od pola mniejszego.	P	F

ROZWIĄZANIE

- $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$ — cecha bbb, trójkąty są podobne — prawda.
2. Stosunek pól to $k^2 = 4$, nie 2 — fałsz.

Odpowiedź: **P, F**

PP18.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Trójkąty prostokątne T_1 i T_2 są podobne. Przyprostokątne trójkąta T_1 mają długości 6 i 8, a przeciwprostokątna trójkąta T_2 ma długość 25. Oblicz pole trójkąta T_2 .

ROZWIĄZANIE

- Przeciwprostokątna T_1 : $\sqrt{36 + 64} = 10$. Skala: $k = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$.
- $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$, $P_2 = k^2 P_1 = \frac{25}{4} \cdot 24 = 150$.

Odpowiedź: **150**

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O . Wykaż, że $|AO| \cdot |OD| = |BO| \cdot |OC|$.

ROZWIĄZANIE

1. Kąty AOB i COD są wierzchołkowe, więc równe.
2. $AB \parallel CD$, więc $|\angle OAB| = |\angle OCD|$ (kąty naprzemianległe przy prostej AC).
3. Zatem $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (cecha kkk) i $\frac{|AO|}{|OC|} = \frac{|BO|}{|OD|}$.
4. Mnożąc „na krzyż”: $|AO| \cdot |OD| = |BO| \cdot |OC|$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — uzasadnienie podobieństwa trójkątów AOB i COD ,
- 2 pkt — zapis proporcji i wniosek.

PP19 Okrąg i kąty

🔑 Wpisany = połowa środkowego. Dwa promienie → trójkąt równoramienny. Średnica → 90° .

PP19.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Kąt środkowy ma miarę 110° . Kąt wpisany oparty na tym samym łuku ma miarę

- A. 55° B. 110° C. 220° D. 70°

ROZWIĄZANIE

1. Kąt wpisany to połowa kąta środkowego: 55° .

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — pomnożono zamiast podzielić; D — $180^\circ - 110^\circ$.

PP19.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Punkty **A**, **B**, **C** leżą na okręgu o środku **O**, przy czym $|\angle ACB| = 40^\circ$ (**C** na dłuższym łuku **AB**). Miara kąta ostrego **OAB** jest równa

- A. 50° B. 40° C. 80° D. 20°

ROZWIĄZANIE

1. $|\angle AOB| = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$.
2. $\triangle AOB$ równoramienny: $|\angle OAB| = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — to kąt środkowy **AOB**, a nie kąt przy wierzchołku **A**.

PP19.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Odcinek **AB** jest średnicą okręgu, a punkt **C** leży na tym okręgu. Kąt **CAB** ma miarę 35° . Kąt **ABC** ma miarę

- A. 55° B. 35° C. 90° D. 145°

ROZWIĄZANIE

1. Kąt **ACB** jest oparty na średnicy, więc $|\angle ACB| = 90^\circ$.
2. $|\angle ABC| = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Odpowiedź: **A**

PP19.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a kąt DAB ma miarę 75° . Kąt BCD ma miarę

- A. 105° B. 75° C. 285° D. 15°

ROZWIĄZANIE

1. W czworokącie wpisanym przeciwległe kąty sumują się do 180° : $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — przeciwległe kąty są równe tylko w równoległoboku; tu się dopełniają.

PP19.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Prosta jest styczna do okręgu o środku O i promieniu 5 w punkcie A . Punkt B leży na tej prostej i $|AB| = 12$. Odległość punktu B od środka okręgu jest równa

- A. 13 B. 17 C. 7 D. $\sqrt{119}$

ROZWIĄZANIE

1. Promień OA jest prostopadły do stycznej, więc $\triangle OAB$ jest prostokątny.
2. $|OB| = \sqrt{25 + 144} = 13$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — dodane długości; D — odjęte kwadraty (przeciwprostokątną jest OB).

PP19.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Długość łuku okręgu o promieniu 6 , na którym oparty jest kąt środkowy 120° , jest równa

- A. 4π B. 12π C. 2π D. 8π

ROZWIĄZANIE

$$1. l = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot 12\pi = 4\pi.$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — pole wycinka ($\frac{1}{3} \cdot 36\pi$); D — cały obwód bez podziału.

PP19.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Pole wycinka koła o promieniu 6 wyznaczonego przez kąt środkowy 60° jest równe

- A. 6π B. 12π C. 36π D. 2π

ROZWIĄZANIE

$$1. P = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 36 = 6\pi.$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? D — długość łuku, a nie pole.

PP19.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Czworokąt opisany na okręgu ma kolejne boki długości **5, 7, 9, x** . Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	$x = 7$	P	F
2.	Obwód tego czworokąta jest równy 30 .	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Warunek czworokąta opisanego: $5 + 9 = 7 + x \Rightarrow x = 7$ — prawda.
2. Obwód: $5 + 7 + 9 + 7 = 28 \neq 30$ — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP19.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Kąt środkowy AOB ma miarę $(3x - 10)^\circ$, a kąt wpisany ACB oparty na tym samym łuku ma miarę $(x + 10)^\circ$. Oblicz x oraz miarę kąta ACB .

ROZWIĄZANIE

1. $3x - 10 = 2(x + 10) \Rightarrow 3x - 10 = 2x + 20 \Rightarrow x = 30$.
2. $|\angle ACB| = 30 + 10 = 40^\circ$ (kontrola: środkowy $80^\circ \checkmark$).

Odpowiedź: $x = 30$, $|\angle ACB| = 40^\circ$

PP19.10 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Punkty A, B, C, D leżą na okręgu (w tej kolejności), a odcinek AC jest średnicą. Wiadomo, że $|\angle BAC| = 28^\circ$ oraz $|\angle DCA| = 40^\circ$. Oblicz miary wszystkich kątów czworokąta $ABCD$.

ROZWIĄZANIE

1. AC — średnica, więc $|\angle ABC| = |\angle ADC| = 90^\circ$.
2. $\triangle ABC$: $|\angle BCA| = 180^\circ - 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$. $\triangle ACD$: $|\angle DAC| = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.
3. $|\angle A| = 28^\circ + 50^\circ = 78^\circ$, $|\angle C| = 62^\circ + 40^\circ = 102^\circ$, $|\angle B| = |\angle D| = 90^\circ$.
4. Kontrola: $78^\circ + 102^\circ = 180^\circ$ — czworokąt wpisany $\checkmark$.

Odpowiedź: $78^\circ, 90^\circ, 102^\circ, 90^\circ$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zauważenie kątów prostych przy B i D oraz wyznaczenie jednego z kątów BCA lub DAC ,
- 2 pkt — wszystkie cztery kąty.

PP20 Geometria analityczna

🔑 Przekątne równoległoboku → wspólny środek. Okrąg: znak w nawiasie odwrotny, prawa strona to r^2 .

PP20.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Odległość między punktami $A = (1, -2)$ i $B = (4, 2)$ jest równa

- A. 5 B. 7 C. $\sqrt{7}$ D. 25

ROZWIĄZANIE

1. $|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — dodane przyrosty 3 + 4; D — brak pierwiastka.

PP20.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Środkiem odcinka o końcach $A = (-3, 5)$ i $B = (7, 1)$ jest punkt

- A. (2, 3) B. (5, -2) C. (4, 6) D. (10, -4)

ROZWIĄZANIE

1. $S = \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{5+1}{2} \right) = (2, 3).$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — połowa różnicy współrzędnych; C — suma bez dzielenia.

PP20.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ ma środek S i promień r . Wtedy

- A. $S = (-2, 3), r = 4$ B. $S = (2, -3), r = 4$
C. $S = (-2, 3), r = 16$ D. $S = (2, -3), r = 16$

ROZWIĄZANIE

1. $(x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 4^2: S = (-2, 3), r = 4.$

Odpowiedź: **A**

PP20.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Okrąg o środku $S = (1, 2)$ przechodzi przez punkt $P = (4, 6)$. Ten okrąg ma równanie

A. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

C. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

D. $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$

ROZWIĄZANIE

1. $r = |SP| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

2. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Odpowiedź: **A**Dlaczego nie pozostałe? B — po prawej r zamiast r^2 ; D — środek w punkcie P .

PP20.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Punkt $A = (1, 1)$ jest środkiem odcinka BC , gdzie $B = (-3, 4)$. Punkt C ma współrzędne

A. $(5, -2)$

B. $(-1; 2,5)$

C. $(-7, 7)$

D. $(4, -3)$

ROZWIĄZANIE

1. $C = 2A - B = (2 + 3, 2 - 4) = (5, -2)$.

Odpowiedź: **A**Dlaczego nie pozostałe? B — policzono środek odcinka AB zamiast punktu C .

PP20.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Punkt symetryczny do punktu $P = (3, -5)$ względem osi Oy ma współrzędne

A. $(-3, -5)$

B. $(3, 5)$

C. $(-3, 5)$

D. $(-5, 3)$

ROZWIĄZANIE

1. Symetria względem Oy zmienia znak pierwszej współrzędnej: $(-3, -5)$.

Odpowiedź: **A**Dlaczego nie pozostałe? B — symetria względem Ox ; C — względem początku układu.

PP20.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Punkty $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (0, 8)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie ma współrzędne

A. $(3, 4)$

B. $(2, \frac{8}{3})$

C. $(3, 0)$

D. $(0, 4)$

ROZWIĄZANIE

1. Kąt prosty jest przy A , więc przeciwprostokątną jest BC ; środek okręgu opisanego to jej środek: $(3, 4)$.

2. (Promień $R = \frac{1}{2}|BC| = 5$.)

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — środek ciężkości trójkąta (punkt przecięcia środkowych), a nie środek okręgu opisanego.

PP20.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0-1 pkt

Dany jest okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Punkt $A = (1, 3)$ leży na tym okręgu.	P	F
2.	Środek tego okręgu leży na osi Oy .	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $(1 + 2)^2 + (3 - 1)^2 = 9 + 4 = 13$ — punkt $(1, 3)$ leży na okręgu — prawda.
2. Środek to $(-2, 1)$ — nie leży na osi Oy (tam $x = 0$) — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP20.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Punkty $A = (-1, 2)$, $B = (5, 0)$, $C = (6, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D .

ROZWIĄZANIE

1. Przekątne AC i BD mają wspólny środek: $D = A + C - B = (-1 + 6 - 5, 2 + 4 - 0) = (0, 6)$.
2. Kontrola: $\overrightarrow{AB} = [6, -2] = \overrightarrow{DC} = [6, -2] \checkmark$.

Odpowiedź: $D = (0, 6)$

PP20.10 OTWARTE ★★★

0-2 pkt

W równoległoboku $ABCD$ dane są $A = (1, -2)$ i $B = (7, 1)$, a przekątne przecinają się w punkcie $P = (5, 4)$. Oblicz długość boku BC oraz obwód równoległoboku.

ROZWIĄZANIE

1. $C = 2P - A = (10 - 1, 8 + 2) = (9, 10)$.
2. $|BC| = \sqrt{(9 - 7)^2 + (10 - 1)^2} = \sqrt{4 + 81} = \sqrt{85}$.
3. $|AB| = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Obwód: $2\sqrt{85} + 2 \cdot 3\sqrt{5} = 2\sqrt{85} + 6\sqrt{5}$.

Odpowiedź: $|BC| = \sqrt{85}$, obwód $2\sqrt{85} + 6\sqrt{5}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — współrzędne $C = (9, 10)$,
- 2 pkt — długość $|BC| = \sqrt{85}$ i obwód.

PP21 Stereometria

🔑 Znajdź trójkąt prostokątny w bryle. Ostrosłup i stożek: $\frac{1}{3}$. Rozwarcie stożka dziel na pół.

PP21.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Objętość sześcianu jest równa **216**. Przekątna tego sześcianu ma długość

- A. $6\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{2}$ C. 18 D. 36

ROZWIĄZANIE

1. $a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$. Przekątna: $a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — przekątna ściany (kwadratu), a nie sześcianu.

PP21.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Prostopadłościan ma krawędzie długości **2, 3 i 6**. Jego przekątna ma długość

- A. 7 B. 11 C. $\sqrt{13}$ D. 49

ROZWIĄZANIE

1. $d = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — suma krawędzi; C — przekątna ściany 2×3 .

PP21.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Gnaniastoslup prawidłowy trójkątny ma krawędź podstawy długości **4** i wysokość **5**. Objętość tego gnaniastoslupa jest równa

- A. $20\sqrt{3}$ B. 80 C. $40\sqrt{3}$ D. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

ROZWIĄZANIE

1. $P_p = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$, $V = 4\sqrt{3} \cdot 5 = 20\sqrt{3}$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? D — wzór dla ostrosłupa (z $\frac{1}{3}$); B — podstawa jako kwadrat.

PP21.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Walec ma promień podstawy **3** i wysokość **5**. Objętość walca jest równa

- A. 45π B. 15π C. 30π D. 75π

ROZWIĄZANIE

1. $V = \pi \cdot 9 \cdot 5 = 45\pi$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — wzór stożka; C — pole powierzchni bocznej $2\pi rH$.

PP21.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Tworząca stożka ma długość **10**, a promień jego podstawy — **6**. Objętość tego stożka jest równa

- A. 96π B. 288π C. 120π D. 60π

ROZWIĄZANIE

1. $H = \sqrt{100 - 36} = 8.$
2. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot 8 = 96\pi.$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — bez $\frac{1}{3}$; C — wysokość zastąpiona tworzącą.

PP21.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Kula ma objętość **36π** . Pole powierzchni tej kuli jest równe

- A. 36π B. 9π C. 12π D. 27π

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3.$
2. $P = 4\pi \cdot 9 = 36\pi.$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — pole koła wielkiego; D — r^3 zamiast pola.

PP21.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy długości **6** i wysokość **4**. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa

- A. **5** B. $\sqrt{52}$ C. **7** D. $\sqrt{34}$

ROZWIĄZANIE

1. Trójkąt: wysokość ostrosłupa **4**, połowa krawędzi podstawy **3**, wysokość ściany — przeciwprostokątna.
2. $h_b = \sqrt{16 + 9} = 5.$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? D — to krawędź boczna (z połową przekątnej $3\sqrt{2}$); B — użyta cała krawędź **6**.

Stożek i walec mają równe wysokości i równe promienie podstaw. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Objętość stożka jest trzy razy mniejsza od objętości walca.	P	F
2.	Jeśli promień podstawy stożka zwiększymy dwukrotnie (przy tej samej wysokości), to objętość stożka wzrośnie dwukrotnie.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}V_w$ — prawda.
2. Po podwojeniu promienia: $\frac{1}{3}\pi(2r)^2 H = 4 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 H$ — objętość rośnie **czterokrotnie** — fałsz.

Odpowiedź: P, F

Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat o przekątnej $8\sqrt{2}$. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

ROZWIĄZANIE

1. Krawędź podstawy: $a = 8$, $P_p = 64$. Połowa przekątnej: $4\sqrt{2}$.
2. Kąt $45^\circ \rightarrow$ trójkąt równoramienny: $H = 4\sqrt{2}$.
3. $V = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{256\sqrt{2}}{3}$.

Odpowiedź: $V = \frac{256\sqrt{2}}{3}$

Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

ROZWIĄZANIE

1. Trójkąt: $h_b = 10$, kąt 60° przy podstawie, przyprostokątne: $\frac{a}{2}$ i H .
2. $\frac{a}{2} = 10 \cos 60^\circ = 5 \Rightarrow a = 10$; $H = 10 \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$.
3. $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{500\sqrt{3}}{3}$.
4. $P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b = 100 + 200 = 300$.

Odpowiedź: $V = \frac{500\sqrt{3}}{3}$, $P_c = 300$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wskazanie właściwego trójkąta i kąta,
- 2 pkt — obliczenie $a = 10$ lub $H = 5\sqrt{3}$,
- 3 pkt — objętość,
- 4 pkt — pole powierzchni całkowitej.

PP22 Kombinatoryka

 Kratki na pozycje, zacznij od najbardziej ograniczonej. Kolizja warunków → przypadki i dodawanie.

PP22.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest

A. 90

B. 100

C. 99

D. 81

ROZWIĄZANIE

1. Cyfra dziesiątek: **1–9** (9 możliwości), jedności: **0–9** (10). $9 \cdot 10 = 90$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — z zerem na początku; C — liczby od 1 do 99.

PP22.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry **1, 2, 3, 4** (cyfry mogą się powtarzać), jest

A. 64

B. 24

C. 12

D. 81

ROZWIĄZANIE

1. Każda z trzech pozycji — **4** możliwości: $4^3 = 64$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — bez powtórzeń ($4 \cdot 3 \cdot 2$).

PP22.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wszystkich kodów czterocyfrowych utworzonych z cyfr **2, 5, 7, 9**, w których każda cyfra występuje dokładnie raz, jest

A. 24

B. 256

C. 16

D. 4

ROZWIĄZANIE

1. Ustawienie **4** różnych cyfr: $4! = 24$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — z powtórzeniami (4^4).

PP22.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych parzystych jest

A. 450

B. 500

C. 405

D. 900

ROZWIĄZANIE

1. Setki: **9**, dziesiątki: **10**, jedności: **0, 2, 4, 6, 8** — $5 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — pierwsza cyfra może być zerem; D — wszystkie trzycyfrowe.

PP22.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych o różnych cyfrach jest

- A. 4536 B. 5040 C. 3024 D. 9000

ROZWIĄZANIE

1. Pierwsza cyfra: **9** (bez zera), druga: **9** (już z zerem, bez pierwszej), trzecia: **8**, czwarta: **7**.
2. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ (z zerem na początku); C — $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ (zero całkiem pominięte).

PP22.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez **5**, w których zapisie wszystkie cyfry są różne, jest

- A. 136 B. 144 C. 180 D. 128

ROZWIĄZANIE

1. Przypadek 1: jedności **0** — setki: **9**, dziesiątki: **8** → **72**.
2. Przypadek 2: jedności **5** — setki: **8** (bez **0** i **5**), dziesiątki: **8** → **64**.
3. Razem: $72 + 64 = 136$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — w obu przypadkach liczono $9 \cdot 8$; C — cyfry mogły się powtarzać ($9 \cdot 10 \cdot 2$).

PP22.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Pięć osób przywitało się, każda z każdą dokładnie jednym uściskiem dłoni. Wszystkich uścisków było

- A. 10 B. 20 C. 25 D. 5

ROZWIĄZANIE

1. Każda z **5** osób ściska **4** dłonie: $5 \cdot 4 = 20$, ale każdy uścisk liczony jest dwa razy. $\frac{20}{2} = 10$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — uścisk **A–B** i **B–A** to ten sam uścisk.

PP22.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Z cyfr **0, 1, 2, 3** tworzymy liczby dwucyfrowe (cyfry mogą się powtarzać). Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Wszystkich takich liczb jest 12 .	P	F
2.	Wśród nich jest 8 liczb parzystych.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. **1**. Dziesiątki: **1, 2, 3** — **3**; jedności: **4** → **12** — prawda.
2. **2**. Parzyste: jedności **0** lub **2** → $3 \cdot 2 = 6 \neq 8$ — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP22.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

W klasie jest **12** dziewcząt i **10** chłopców. Wybieramy przewodniczącego i zastępcę (dwie różne osoby) tak, aby jedną z tych funkcji pełniła dziewczyna, a drugą chłopiec. Oblicz, na ile sposobów można to zrobić.

ROZWIĄZANIE

1. Przewodnicząca dziewczyna, zastępca chłopiec: $12 \cdot 10 = 120$.
2. Przewodniczący chłopiec, zastępczyni dziewczyna: $10 \cdot 12 = 120$.
3. Razem: **240**.

Odpowiedź: 240

PP22.10 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których suma cyfr jest równa **3**.

ROZWIĄZANIE

1. Cyfry z sumą **3** i pierwszą cyfrą ≥ 1 : układy cyfr $\{3, 0, 0, 0\}$, $\{2, 1, 0, 0\}$, $\{1, 1, 1, 0\}$.
2. **3000** — **1** liczba; z cyframi **2, 1, 0, 0** — pierwsza **2**: **2100, 2010, 2001**; pierwsza **1**: **1200, 1020, 1002** — **6** liczb.
3. Z cyframi **1, 1, 1, 0**: **1110, 1101, 1011** — **3** liczby. Razem $1 + 6 + 3 = 10$.

Odpowiedź: 10

PP23 Prawdopodobieństwo

 Najpierw $|\Omega|$, potem $|A|$. „Co najmniej jeden” → przeciwne. Pary są uporządkowane.

PP23.1 ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Rzucamy raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek podzielnej przez 3 jest równe

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{2}{3}$

ROZWIĄZANIE

1. Sprzyjające: 3 i 6 — 2 z 6 wyników. $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Odpowiedź: A

PP23.2 ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek jest równa 7, jest równe

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{7}{36}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{5}{36}$

ROZWIĄZANIE

1. $|\Omega| = 36$. Pary o sumie 7: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) — 6.

2. $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? C — policzone tylko 3 pary nieuporządkowane.

PP23.3 ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

W urnie są 4 kule białe i 6 kul czarnych. Losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{1}{4}$

ROZWIĄZANIE

1. $P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — stosunek białych do czarnych, a nie do wszystkich kul.

PP23.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę podzielną przez 3 lub przez 5, jest równe

A. $\frac{9}{20}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{7}{20}$

ROZWIĄZANIE

1. Podzielne przez 3: 6 liczb; przez 5: 4 liczby; przez obie (15): 1.

2. $|A| = 6 + 4 - 1 = 9$, $P = \frac{9}{20}$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — liczba 15 policzona dwa razy.

PP23.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła jest równe

A. $\frac{7}{8}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{1}{2}$

ROZWIĄZANIE

1. Zdarzenie przeciwne: same reszki — 1 wynik z 8.

2. $P = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? C — dokładnie jeden orzeł; B — prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

PP23.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką. Prawdopodobieństwo, że iloczyn wyrzuconych oczek jest parzysty, jest równe

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{2}{3}$

ROZWIĄZANIE

1. Iloczyn nieparzysty $\Leftrightarrow$ oba wyniki nieparzyste: $3 \cdot 3 = 9$ par.

2. $P = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? C — to prawdopodobieństwo iloczynu nieparzystego.

PP23.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy kolejno dwie liczby **bez zwracania**. Prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb jest równa 5, jest równe

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{4}{25}$ D. $\frac{1}{10}$

ROZWIĄZANIE

- $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$.
- Pary: $(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2) — 4$. $P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? C — przestrzeń jak przy losowaniu ze zwracaniem (25); D — pary nieuporządkowane w liczniku przy uporządkowanych w mianowniku.

PP23.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Prawdopodobieństwo wyrzucenia dwa razy tej samej liczby oczek jest równe $\frac{1}{6}$.	P	F
2.	Prawdopodobieństwo, że suma oczek jest równa 12, jest równe $\frac{1}{18}$.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Dublety: 6 z 36 — $\frac{1}{6}$ — prawda.
2. Suma 12 tylko dla $(6, 6)$: $\frac{1}{36} \neq \frac{1}{18}$ — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP23.9 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 3.

ROZWIĄZANIE

- $|\Omega| = 81$. Zdarzenie przeciwne: żadna liczba nie jest podzielna przez 3 — wybory z $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$: $6 \cdot 6 = 36$.
- $|A| = 81 - 36 = 45$, $P(A) = \frac{45}{81} = \frac{5}{9}$.

Odpowiedź: $\frac{5}{9}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $|\Omega| = 81$ i $|A| = 45$ (lub $|A'| = 36$),
- 2 pkt — wynik $\frac{5}{9}$.

Losujemy jedną cyfrę ze zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ — będzie to cyfra dziesiątek, a następnie jedną cyfrę ze zbioru $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ — cyfra jedności. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymana liczba dwucyfrowa jest podzielna przez 3.

ROZWIĄZANIE

1. $|\Omega| = 5 \cdot 7 = 35$.

2. Liczba podzielna przez 3 $\Leftrightarrow$ suma cyfr podzielna przez 3.

3. Dziesiątki 1: 12, 15; 2: 21, 24; 3: 30, 33, 36; 4: 42, 45; 5: 51, 54 — razem 11.

4. $P(A) = \frac{11}{35}$.

Odpowiedź: $\frac{11}{35}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — $|\Omega| = 35$ i poprawne zliczenie (lub wypisanie) 11 liczb,
- 2 pkt — wynik $\frac{11}{35}$.

PP24 Statystyka: średnia, mediana, dominanta

🔑 Suma = $n \cdot \bar{x}$. Mediana: posortuj, licz pozycje. Dominanta to wartość.

PP24.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Średnia arytmetyczna liczb 2, 4, 4, 5, 10 jest równa

- A. 5 B. 4 C. 4,5 D. 25

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{2+4+4+5+10}{5} = \frac{25}{5} = 5$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — mediana (i dominanta), nie średnia.

PP24.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Mediana danych 7, 1, 9, 3, 5, 8 jest równa

- A. 6 B. 5 C. 7 D. 5,5

ROZWIĄZANIE

1. Uporządkowane: 1, 3, 5, 7, 8, 9. Dwie środkowe: 5 i 7, mediana = 6.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B, C — jedna ze środkowych liczb zamiast ich średniej; D — średnia arytmetyczna wszystkich danych, a nie mediana.

PP24.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Dominanta danych 3, 5, 5, 2, 7, 5, 3 jest równa

- A. 5 B. 3 C. 4 D. 7

ROZWIĄZANIE

1. 5 występuje 3 razy — najczęściej.

Odpowiedź: **A**

PP24.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Średnia arytmetyczna liczb a , b , c , d jest równa 5. Średnia arytmetyczna liczb $2a$, $2b$, $2c$, $2d$, 10 jest równa

- A. 10 B. 12 C. 8 D. 11

ROZWIĄZANIE

1. $a + b + c + d = 20$, więc $2a + 2b + 2c + 2d = 40$.

2. Średnia pięciu liczb: $\frac{40+10}{5} = 10$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — dzielenie przez 4 zamiast przez 5.

PP24.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Średnia arytmetyczna liczb 2, 4, 6, x , y jest równa 5. Suma $x + y$ jest równa

- A. 13 B. 3 C. 8 D. 25

ROZWIĄZANIE

1. Suma wszystkich: $5 \cdot 5 = 25$. $x + y = 25 - 12 = 13$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — suma liczona tak, jakby liczb było trzy ($3 \cdot 5 = 12$); C — jakby cztery ($4 \cdot 5 = 12$); D — suma wszystkich pięciu liczb.

PP24.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Oceny ze sprawdzianu: ocena 2 — 3 uczniów, 3 — 5 uczniów, 4 — 6 uczniów, 5 — 4 uczniów, 6 — 2 uczniów. Mediana ocen jest równa

- A. 4 B. 3,5 C. 3 D. 6

ROZWIĄZANIE

1. $n = 20$, mediana — średnia 10. i 11. oceny.

2. Narastająco: 2 → 3, 3 → 8, 4 → 14 — pozycje 10 i 11 to czwórki. Mediana = 4.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? D — największa liczebność (to nie jest wartość danych); B — środek skali ocen.

PP24.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Uczeń otrzymał ocenę 5 ze sprawdzianu (waga 3), ocenę 4 z kartkówki (waga 2) i ocenę 3 z odpowiedzi (waga 1). Średnia ważona tych ocen jest równa

- A. $\frac{13}{3}$ B. 4 C. 4,5 D. $\frac{26}{3}$

ROZWIĄZANIE

1. $\bar{x}_w = \frac{5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{3 + 2 + 1} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \approx 4,33$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — zwykła średnia; D — dzielenie przez liczbę ocen (3), a nie przez sumę wag.

PP24.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Dane są liczby 2, 4, 4, 6, 9. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Średnia arytmetyczna tych liczb jest większa od ich mediany.	P	F
2.	Dominanta tych liczb jest równa 6.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. 1. Średnia: $\frac{25}{5} = 5$, mediana: 4 — średnia jest większa — prawda.

2. 2. Dominanta to 4 — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP24.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz odchylenie standardowe danych: 2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9.

ROZWIĄZANIE

1. $\bar{x} = \frac{40}{8} = 5$.
2. Kwadraty odchyłeń: 9, 1, 1, 1, 0, 0, 4, 16 — suma 32.
3. $\sigma^2 = \frac{32}{8} = 4$, $\sigma = 2$.

Odpowiedź: $\sigma = 2$

PP24.10 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

W teście 24 uczniów uzyskało następujące liczby punktów: 1 pkt — 3 uczniów, 2 pkt — 6 uczniów, 3 pkt — 7 uczniów, 4 pkt — 4 uczniów, 5 pkt — 4 uczniów. Oblicz średnią i medianę liczby punktów.

ROZWIĄZANIE

1. Suma punktów: $3 + 12 + 21 + 16 + 20 = 72$; $\bar{x} = \frac{72}{24} = 3$.
2. Mediana: średnia 12. i 13. wyniku. Narastająco: 1 → 3, 2 → 9, 3 → 16 — oba to 3 pkt. Mediana = 3.

Odpowiedź: średnia 3, mediana 3

Schemat punktowania:

- 1 pkt — średnia 3,
- 2 pkt — dodatkowo mediana 3.

PP25 Optymalizacja i modelowanie funkcją kwadratową

🔑 Zmienna → druga wielkość z warunku → $P(x)$ + dziedzina → wierzchołek → pełna odpowiedź.

PP25.1 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wysokość (w metrach) wyrzuconej pionowo piłki opisuje funkcja $h(t) = -5t^2 + 20t$, gdzie t — czas w sekundach. Piłka osiągnęła największą wysokość w chwili

- A. $t = 2$ s B. $t = 4$ s C. $t = 20$ s D. $t = 1$ s

ROZWIĄZANIE

$$1. p = -\frac{20}{2 \cdot (-5)} = 2 \text{ s.}$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — moment upadku (drugie miejsce zerowe).

PP25.2 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Dla funkcji $h(t) = -5t^2 + 20t$ z zadania PP25.1 największa wysokość, na jaką wzniosła się piłka, jest równa

- A. 20 m B. 2 m C. 40 m D. 15 m

ROZWIĄZANIE

$$1. h(2) = -20 + 40 = 20 \text{ m.}$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — to czas, a nie wysokość.

PP25.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Piłka z zadania PP25.1 ($h(t) = -5t^2 + 20t$) po raz pierwszy po wyrzuceniu uderzyła o ziemię w chwili

- A. $t = 4$ s B. $t = 2$ s C. $t = 20$ s D. $t = 5$ s

ROZWIĄZANIE

$$1. -5t^2 + 20t = 0 \Rightarrow -5t(t - 4) = 0, t = 0 \text{ (wyrzut) lub } t = 4 \text{ s.}$$

Odpowiedź: **A**

PP25.4 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Suma dwóch liczb dodatnich jest równa 10. Największa możliwa wartość ich iloczynu jest równa

- A. 25 B. 24 C. 50 D. 100

ROZWIĄZANIE

$$1. P(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x, p = 5, P(5) = 25.$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — dla liczb całkowitych 4 i 6; maksimum jest dla 5 i 5.

PP25.5 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Spośród wszystkich prostokątów o obwodzie **24** największe pole ma prostokąt o polu

- A. 36 B. 144 C. 35 D. 32

ROZWIĄZANIE

1. $2x + 2y = 24 \Rightarrow y = 12 - x$. $P = x(12 - x)$, $p = 6 \rightarrow$ kwadrat 6×6 , $P = 36$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — 12^2 (połowa obwodu jako bok); C — prostokąt 5×7 .

PP25.6 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Z drutu długości **20** zbudowano ramkę w kształcie prostokąta o bokach x i $10 - x$. Pole prostokąta opisuje funkcja $P(x) = x(10 - x)$. Dziedziną tej funkcji (w tym zadaniu) jest

- A. $(0, 10)$ B. $(0, 20)$ C. $\mathbb{R}$ D. $[0, 10]$

ROZWIĄZANIE

1. Obie długości muszą być dodatnie: $x > 0$ i $10 - x > 0$, czyli $x \in (0, 10)$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? D — dla $x = 0$ lub $x = 10$ prostokąt nie istnieje.

PP25.7 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Liczbę klientów sklepu n -tego dnia miesiąca opisuje wzór $L(n) = -n^2 + 18n + 100$, $n \in \{1, 2, \dots, 30\}$. Najwięcej klientów obsłużono dnia

- A. 9 B. 18 C. 181 D. 30

ROZWIĄZANIE

1. $p = -\frac{18}{2 \cdot (-1)} = 9$ — liczba naturalna z dziedziny.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — to największa liczba klientów, a nie numer dnia.

PP25.8 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Dla funkcji $L(n) = -n^2 + 18n + 100$, $n \in \{1, 2, \dots, 30\}$, z zadania PP25.7 oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Największa liczba klientów obsłużonych jednego dnia to 181 .	P	F
2.	Dnia 20 . obsłużono więcej klientów niż dnia 1 .	P	F

ROZWIĄZANIE

1. $L(9) = -81 + 162 + 100 = 181$ — prawda.

2. $L(20) = -400 + 360 + 100 = 60$, $L(1) = 117$ — dnia **20** było mniej klientów — fałsz.

Odpowiedź: P, F

PP25.9 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Zysk firmy (w zł) ze sprzedaży x sztuk towaru opisuje funkcja $Z(x) = -2x^2 + 120x - 1000$. Oblicz, przy jakiej liczbie sprzedanych sztuk zysk jest największy, i podaj ten zysk.

ROZWIĄZANIE

$$1. p = -\frac{120}{2 \cdot (-2)} = 30.$$

$$2. Z(30) = -1800 + 3600 - 1000 = 800 \text{ zł.}$$

Odpowiedź: $x = 30$, $Z_{\max} = 800 \text{ zł}$

PP25.10 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Z siatki o długości 60 m ogrodzono prostokątny wybieg przylegający jednym bokiem do ściany budynku (wzdłuż ściany siatki nie ma). Wybieg podzielono siatką na dwie części odcinkiem prostopadłym do ściany. Wyznacz wymiary wybiegu, przy których jego pole jest największe, i oblicz to pole.

ROZWIĄZANIE

1. x — długość każdego z trzech odcinków prostopadłych do ściany, y — długość boku równoległego do ściany.

2. Siatka: $3x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - 3x$, przy czym $x \in (0, 20)$.

3. $P(x) = x(60 - 3x) = -3x^2 + 60x$, $p = -\frac{60}{-6} = 10 \in (0, 20)$.

4. $y = 60 - 30 = 30 \text{ m}$, $P(10) = 300 \text{ m}^2$.

Odpowiedź: 10 m (prostopadle do ściany) $\times$ 30 m, $P_{\max} = 300 \text{ m}^2$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zależność $y = 60 - 3x$,
- 1 pkt — funkcja $P(x) = -3x^2 + 60x$ z dziedziną $(0, 20)$,
- 1 pkt — $x = 10$ jako argument maksimum,
- 1 pkt — wymiary 10 m i 30 m oraz pole 300 m².