

MATURA Z MATEMATYKI · MATURA ROZSZERZONA

KLUCZE

Klucze rozpoznawcze i algorytmy punktowe

System rozpoznawania typów zadań: teoria w pigułce, wzory, algorytm, pułapki, przykład wzorcowy i ślad w prawdziwych arkuszach CKE.

20

kluczy

200

zadań treningowych

100%

z rozwiązaniami

Analiza: majowe arkusze CKE 2020–2026 (7 arkuszy: Formuła 2015 i Formuła 2023), poziom rozszerzony. Zadania treningowe są autorskie i odwzorowują typy umiejętności — nie są kopiami zadań CKE.

Spis treści

Jak korzystać z opracowania

- PR01 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna
- PR02 Dowody algebraiczne i nierówności
- PR03 Wartość bezwzględna — równania i nierówności
- PR04 Wielomiany i nierówności wymierne
- PR05 Ciągi arytmetyczne i geometryczne — zadania łączone
- PR06 Szereg geometryczny nieskończony
- PR07 Granice ciągów i funkcji
- PR08 Kombinatoryka rozszerzona
- PR09 Prawdopodobieństwo: klasyczne, warunkowe, Bernoulli
- PR10 Tożsamości trygonometryczne
- PR11 Równania trygonometryczne
- PR12 Planimetria z twierdzeniem sinusów i cosinusów
- PR13 Okręgi i czworokąty wpisane/opisane
- PR14 Geometria analityczna: proste, punkty, pola
- PR15 Okrąg w układzie współrzędnych
- PR16 Stereometria rozszerzona
- PR17 Parametr, funkcja kwadratowa i wzory Viète’a
- PR18 Pochodna, monotoniczność i ekstrema
- PR19 Optymalizacja z pochodną
- PR20 Dowód geometryczny i zadania mieszane

Ściąga — wszystkie klucze

Źródła i metodologia

Jak korzystać z opracowania

Każde zadanie maturalne należy do jednego z **20 kluczy** — powtarzalnych typów umiejętności. Zanim zaczniesz liczyć, **nazwij klucz**: to uruchamia gotowy schemat i chroni przed typowymi błędami.

1. Rozpoznaj

sekcja „Jak rozpoznać” — sygnały w treści i na rysunku.

2. Przypomnij

„Teoria w pigułce” i „Wzory” — tylko to, co naprawdę potrzebne.

3. Zastosuj

„Algorytm” — kolejne kroki, które prowadzą do punktów.

4. Sprawdź

„Pułapki” — porównaj swój zapis z typowymi błędami.

Legenda

Priorytet	A+ najwyższy zwrot z nauki · A bardzo ważny · B ważny po opanowaniu filarów
Częstotliwość	w ilu z analizowanych arkuszy (majowe arkusze CKE 2020–2026 (7 arkuszy: Formuła 2015 i Formuła 2023), poziom rozszerzony) pojawiło się zadanie z danego klucza.
Punkty w arkuszu	ile punktów faktycznie przypadało na klucz w tych arkuszach (tabela „Ślad” w każdym kluczu). Arkusz rozszerzony ma 50 pkt (1 pkt = 2% wyniku); wszystkie zadania są otwarte — tak samo było w Formule 2015 (2020–2022).
Poziom zadań	★★★ rozpoznanie schematu · ★★ standard maturalny · ★★ zadanie wymagające

Plan nauki według priorytetów

A+ — najwyższy zwrot z nauki

PR02 Dowody algebraiczne i nierówności

PR03 Wartość bezwzględna — równania i nierówności

PR05 Ciągi arytmetyczne i geometryczne — zadania łączone

PR09 Prawdopodobieństwo: klasyczne, warunkowe, Bernoulli

PR11 Równania trygonometryczne

PR12 Planimetria z twierdzeniem sinusów i cosinusów

PR15 Okrąg w układzie współrzędnych

PR17 Parametr, funkcja kwadratowa i wzory Viète’a

PR19 Optymalizacja z pochodną

A — bardzo ważny

PR01 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

PR06 Szereg geometryczny nieskończony

PR07 Granice ciągów i funkcji

PR08 Kombinatoryka rozszerzona

PR13 Okręgi i czworokąty wpisane/opisane

PR14 Geometria analityczna: proste, punkty, pola

PR16 Stereometria rozszerzona

PR18 Pochodna, monotoniczność i ekstrema

PR20 Dowód geometryczny i zadania mieszane

B — ważny po opanowaniu filarów

PR04 Wielomiany i nierówności wymierne

PR10 Tożsamości trygonometryczne



Jak trenować klucz

1. Przeczytaj klucz i przykład wzorcowy — zasłoń rozwiązanie i spróbuj sam.
2. Rozwiąż zadania ★★ bez zaglądania do wzorów.
3. Zadania ★★ rozwiązuje na czas: zamknięte ok. 2–3 min, otwarte 2 pkt ok. 5 min.
4. Zadania ★★★ i otwarte sprawdzaj z rozwiązaniem i **schematem punktowania** — ucz się pisać tak, by egzaminator widział każdy krok.
5. Klucz uznaj za opanowany, gdy rozwiążesz 9/10 zadań i potrafisz nazwać metodę przed liczeniem.

PR01 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,1 pkt (0–5)

FORMY ZADAŃ

otwarte 2 pkt (model wzrostu/rozpadu), 2–3 pkt (wykaż tożsamość logarytmiczną)

 **Sygnal:** Dziedzina → wspólna podstawa lub podstawienie → porównanie (podstawa < 1 odwraca znak).

Co musisz umieć

- rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze (wspólna podstawa, podstawienie $t = a^x$),
- rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z dziedziną i monotonicznością ($a > 1 / 0 < a < 1$),
- stosować zmianę podstawy logarytmu i wykazywać równości z parametrami $a = \log \dots$,
- budować i stosować modele $N(t) = N_0 k^t$ (wzrost, rozpad, stygnięcie).

Jak rozpoznać zadanie

- „masa maleje o $p\%$ na dobę”, „liczebność podwaja się co ...” → model wykładniczy,
- „wykaż, że jeżeli $\log_5 4 = a$, to ...” → zmiana podstawy na wspólną,
- $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ → podstawienie $t = 3^x > 0$.

Teoria w pigułce

- $f(x) = a^x$: dla $a > 1$ rosnąca, dla $0 < a < 1$ malejąca; $a^x > 0$ zawsze.
 $a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$.
- Nierówność: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ — dla $a > 1$ zachowujemy znak, dla $0 < a < 1$ **odwracamy**. To samo dla logarytmów.
- Dziedzina logarytmu: argument > 0 , podstawa > 0 i $\neq 1$ — wyznacz ją **przed** przekształceniami.
- Zmiana podstawy: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; w szczególności $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.
- $a^{\log_a b} = b$, np. $81^{\log_3 x} = (3^{\log_3 x})^4 = x^4$.

Σ Najważniejsze wzory

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$N(t) = N_0 \cdot k^t$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

Algorytm krok po kroku

- Wyznacz dziedzinę (logarytmu) lub zauważ $a^x > 0$ (wykładnicze).
- Sprowadź do wspólnej podstawy albo podstaw $t = a^x / t = \log_a x$.
- Porównaj wykładniki/argumenty — przy podstawie z $(0, 1)$ odwróć znak nierówności.
- Odrzuć rozwiązania spoza dziedziny (i ujemne t przy $t = a^x$).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq -3 \Rightarrow x-2 \geq 8$	$\checkmark x-2 \leq 8$	podstawa < 1 odwraca znak
$\times$ pominięta dziedzina	$\checkmark x^2 - 1 > 0$ i $x-1 > 0$	często jedno rozwiązanie odpada
$\times t = 3^x, t = -1 \Rightarrow x = \dots$	$\checkmark t > 0$ — odrzucamy	3^x nie jest ujemne
$\times$ „po 7,2 doby” jako odpowiedź na „pełnych dób”	$\checkmark 8$ dób	zaokrąglaj zgodnie z treścią

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 1 z matury 2025

Liczebność populacji bakterii opisuje wzór $N(t) = N_0 \cdot k^t$, gdzie t — czas w godzinach. Na początku było 1000 bakterii, a po 2 godzinach — 2250. Oblicz k i ustal, po ilu pełnych godzinach liczebność po raz pierwszy przekroczy 10 000.

ROZWIĄZANIE

- $N_0 = 1000, 1000k^2 = 2250 \Rightarrow k^2 = 2,25 \Rightarrow k = 1,5$ ($k > 0$).
- $1000 \cdot 1,5^t > 10\,000 \iff 1,5^t > 10$.
- $1,5^5 \approx 7,59 < 10, 1,5^6 \approx 11,39 > 10$ — pierwszy raz po 6 pełnych godzinach.

Odpowiedź: $k = 1,5$; po 6 godzinach

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie $k = 1,5$,
- 2 pkt — ustalenie, że nastąpi to po 6 godzinach (z uzasadnieniem rachunkowym).

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2025	zad. 1	2 pkt	populacja bakterii $N(t) = N_0 \cdot k^t$
2024	zad. 1, 5	5 pkt	stygnięcie kawy (model wykładniczy); wykaż $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a(1+b)}$
2023	zad. 1, 12.1	4 pkt	rozpad substancji (ubywa 19% na dobę); przekształcenia z $81^{\log_3 x}$
2022	zad. 1	1 pkt	$\log_3 \sqrt{27} - \log_{27} \sqrt{3}$
2021	zad. 6	3 pkt	wykaż, że $\log_3 4 = \frac{4}{c-1}$, gdy $\log_2 18 = c$
2020	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza

Trening: zadania **PR01.1–PR01.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR02 Dowody algebraiczne i nierówności

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,1 pkt (0–3)

FORMY ZADAŃ

otwarte „Wykaż, że...” za 3 pkt (nierówność lub warunek wymuszający równość)

 **Sygnal:** Wszystko na jedną stronę → rozkład z $(a - b)^2$ → znak każdego czynnika → wniosek.

Co musisz umieć

- przekształcać nierówność równoważnie do postaci „wyrażenie ≥ 0 ”,
- rozkładać na czynniki: $(a - b)^2(a + b)$, $(x - 1)^2(\dots)$, grupowanie,
- stosować $(a - b)^2 \geq 0$, nierówność między średnimi $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, sumę kwadratów,
- uzasadniać znak każdego czynnika i wskazywać przypadek równości.

Jak rozpoznać zadanie

- „Wykaż, że dla każdych dodatnich x, y ...” — nierówność wielomianowa lub wymierna,
- „liczby spełniają równanie ... i nierówność Wykaż, że $x = \dots$ ” — nierówność typu $(x - y)^2 \cdot (\dots) \leq 0$,
- założenie $b \neq \frac{1}{2}a \rightarrow$ w rozkładzie pojawi się $(a - 2b)^2$.

Teoria w pigułce

- Dowód nierówności: przenieś wszystko na jedną stronę i wykaż, że otrzymane wyrażenie jest nieujemne (dodatnie).
- Kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny: $(a - b)^2 \geq 0$, równość tylko dla $a = b$.
- Dla $a, b > 0$: $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a - b)^2(a + b) \geq 0$.
- Przy mianownikach dodatnich ($x, y > 0$) mnożymy obie strony przez wspólny mianownik bez zmiany znaku.
- Suma kwadratów równa zero (lub ≤ 0) $\Rightarrow$ każdy kwadrat jest zerem.

Σ Najważniejsze wzory

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a, b \geq 0)$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Algorytm krok po kroku

1. Przenieś wszystko na jedną stronę (przy $x, y > 0$ pomnóż przez wspólny mianownik).
2. Rozłóż na czynniki — szukaj $(a - b)$ przez grupowanie.
3. Uzasadnij znak każdego czynnika (kwadrat ≥ 0 , suma dodatnich > 0).
4. Zakończ wnioskiem; przy „wykaż, że $x = y$ ” — z $(x - y)^2 \leq 0$ wynika $x = y$.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X „dla $x = 1, y = 2$ działa”	✓ dowód ogólny	przykład nie jest dowodem
X mnożenie przez $x - y$ bez znaku	✓ mnożymy tylko przez wyrażenia o znanym znaku	zmiana zwrotu
X zaczynanie od tezy i dojście do prawdy	✓ przekształcenia równoważne ($\Leftrightarrow$) lub od prawdy do tezy	kierunek wnioskowania
X brak uzasadnienia $a + b > 0$	✓ „bo $a, b > 0$ ”	każdy czynnik z komentarzem

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 4 z matury 2023

Liczby rzeczywiste x i y spełniają równanie $x + y = 6$ oraz nierówność $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$. Wykaż, że $x = 3$ i $y = 3$.

ROZWIĄZANIE

1. Przenosimy: $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 \leq 0$.
2. Grupujemy: $x^2(x - y) - y^2(x - y) = (x - y)(x^2 - y^2) = (x - y)^2(x + y) \leq 0$.
3. $x + y = 6 > 0$, więc $(x - y)^2 \leq 0$. Kwadrat jest nieujemny, zatem $(x - y)^2 = 0$, czyli $x = y$.
4. Z $x + y = 6$: $x = y = 3$. ■

Odpowiedź: dowód

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — przekształcenie do postaci $(x - y)^2(x + y) \leq 0$ (lub równoważnej),
- 2 pkt — wykorzystanie $x + y = 6 > 0$ i wniosek $(x - y)^2 \leq 0$,
- 3 pkt — pełne rozumowanie zakończone $x = y = 3$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 3	3 pkt	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ dla $x, y > 0$
2025	zad. 2	3 pkt	$(a + 2b)^3 > 8a^2b + \dots$ dla $a, b > 0, b \neq \frac{1}{2}a$
2024	—	0 pkt	brak (dowód geometryczny — klucz PR20)
2023	zad. 4	3 pkt	$x + y = 4$ i $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3 \Rightarrow x = y = 2$
2022	zad. 6	3 pkt	$7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3$ dla $2x > y$
2021	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2020	zad. 8	3 pkt	$a^2 + 2a = 4b^2 + 4b \Rightarrow a = 2b$ dla $a, b > 0$

Trening: zadania **PR02.1–PR02.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR03 Wartość bezwzględna — równania i nierówności

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

6/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,7 pkt (0–4)

FORMY ZADAŃ

otwarte 4 pkt — nierówność z dwiema wartościami bezwzględnymi (czasem z $\sqrt{x^2 + \dots}$ lub kwadratem)

 **Sygnal:** Miejsca zerowe pod modułami → przedziały → rozwiązanie n przedział → suma.

Co musisz umieć

- rozwiązywać równania i nierówności z modułami metodą przedziałów,
- zamieniać $\sqrt{(x+a)^2}$ na $|x+a|$,
- rozwiązywać nierówności z modułem wyrażenia kwadratowego ($|x^2 - 4| < 3x$),
- badać liczbę rozwiązań równania $|f(x)| = m$ graficznie.

Jak rozpoznać zadanie

- dwa lub więcej modułów różnych wyrażeń → metoda przedziałów,
- $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \rightarrow$ to $|x - 3|$,
- „w zależności od parametru m podaj liczbę rozwiązań” → wykres $y = |f(x)|$ i prosta $y = m$.

Teoria w pigułce

- $|a| = a$ dla $a \geq 0$ i $|a| = -a$ dla $a < 0$; $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Metoda przedziałów: miejsca zerowe wyrażeń pod modułami dzielą oś na przedziały; w każdym opuszczamy moduły z odpowiednim znakiem.
- Rozwiązanie z przedziału przyjmujemy tylko wtedy, gdy **należy do tego przedziału**; na końcu sumujemy wyniki.
- $|f(x)| < a \iff -a < f(x) < a$; $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$.
- $|x - a| + |x - b|$ = suma odległości od a i b ; na odcinku między nimi jest stała i równa $|a - b|$.

Σ Najważniejsze wzory

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|f| < a \iff -a < f < a$$

$$|f| = |g| \iff f = \pm g$$

$$|x - a| \text{ — odległość od } a$$

Algorytm krok po kroku

- Wyznacz miejsca zerowe wyrażeń pod modułami i narysuj oś z przedziałami.
- W każdym przedziale ustal znak każdego wyrażenia (tabela znaków) i opuść moduły.
- Rozwiąż otrzymaną nierówność i wyznacz część wspólną z przedziałem.
- Zsumuj wyniki ze wszystkich przedziałów; sprawdź punkty graniczne.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times x - 2 $ dla $x < 2$: $x - 2$	$\checkmark 2 - x$	ujemne wyrażenie zmienia znak
$\times$ wynik $x > 2$ w przedziale $[-2, 1)$ — przyjęty	$\checkmark$ brak rozwiązań w tym przedziale	część wspólna z przedziałem
$\times \sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 3$	$\checkmark x - 3 $	pierwiastek z kwadratu to moduł
$\times$ zgubiony punkt graniczny	$\checkmark$ włącz go do jednego z przedziałów	np. $x \geq 1$ i $x < 1$

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 5 z matury 2025

Rozwiąż nierówność $|x - 3| - 2|x + 1| < x$.

ROZWIĄZANIE

- Miejsca zerowe: -1 i 3 . Przedziały: $(-\infty, -1)$, $[-1, 3)$, $[3, \infty)$.
- $x < -1$: $(3 - x) - 2(-x - 1) = x + 5 < x \Rightarrow 5 < 0$ — brak rozwiązań.
- $-1 \leq x < 3$: $(3 - x) - 2(x + 1) = 1 - 3x < x \Rightarrow x > \frac{1}{4}$; część wspólna: $(\frac{1}{4}, 3)$.
- $x \geq 3$: $(x - 3) - 2(x + 1) = -x - 5 < x \Rightarrow x > -\frac{5}{2}$; część wspólna: $[3, \infty)$.
- Suma: $x \in (\frac{1}{4}, \infty)$.

Odpowiedź: $x \in (\frac{1}{4}, +\infty)$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — podział na przedziały i poprawne opuszczenie modułów w jednym przedziale,
- 2 pkt — rozwiązanie w dwóch przedziałach,
- 3 pkt — rozwiązanie we wszystkich przedziałach,
- 4 pkt — poprawna suma rozwiązań.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 5	4 pkt	$ 2x - 6 - x^2 - 9 \dots$ — moduł z wielomianem
2025	zad. 5	4 pkt	$ x - 2 - 2 x + 3 \dots$ — dwa moduły
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	zad. 9	4 pkt	$\sqrt{x^2 + 4x + 4} \dots$ — pierwiastek z kwadratu = $ x + 2 $
2022	zad. 7	3 pkt	równanie $ x - 3 = 2x + 11$
2021	zad. 4	1 pkt	liczba pierwiastków $3x + x - 4 = 0$
2020	zad. 6	3 pkt	$ x - 5 = (a - 1)^2 - 4$ — parametr i dwa dodatnie rozwiązania

Trening: zadania **PR03.1–PR03.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR04 Wielomiany i nierówności wymierne

PRIORYTET
B

CZĘSTOTLIWOŚĆ
4/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU
śr. 1,9 pkt (0–4)

FORMY ZADAŃ
rzadko samodzielnie; narzędzie w zadaniach z
modułem, parametrem i pochodną

 **Sygnal:** Pierwiastek z dzielników wyrazu wolnego → Horner → wężyk. Ułamki: wspólny mianownik, nie mnożyć!

Co musisz umieć

- stosować twierdzenie Bézouta i twierdzenie o pierwiastkach wymiernych,
- dzielić wielomiany (schemat Hornera) i wyznaczać resztę z dzielenia,
- rozwiązywać nierówności wielomianowe metodą „wężyka”,
- rozwiązywać nierówności wymierne (wspólny mianownik, dziedzina, iloczyn).

Jak rozpoznać zadanie

- wielomian stopnia ≥ 3 bez oczywistego grupowania → szukaj pierwiastka wśród dzielników wyrazu wolnego,
- „reszta z dzielenia przez $(x - 1)(x + 2)$ ” → reszta $ax + b$ i Bézout,
- ułamek z niewiadomą w mianowniku po stronie nierówności.

Teoria w pigułce

- Bézout: $W(a)$ to reszta z dzielenia $W(x)$ przez $(x - a)$; $W(a) = 0 \iff (x - a) \mid W(x)$.
- Pierwiastki wymierne $\frac{p}{q}$ wielomianu o współczynnikach całkowitych: p dzieli wyraz wolny, q — współczynnik przy najwyższej potęgde.
- Wężyk: zaczynamy od prawej strony nad osią (gdy współczynnik wiodący > 0); przy pierwiastku parzystej krotności wężyk się „odbija”.
- $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \iff f(x)g(x) \geq 0$ i $g(x) \neq 0$. Nie mnożymy nierówności przez mianownik o nieznanym znaku!

Σ Najważniejsze wzory

$$W(x) = (x - a)Q(x) + W(a)$$

$$R(x) = ax + b \text{ przy dzielniku stopnia } 2$$

$$\frac{f}{g} \geq 0 \iff fg \geq 0, g \neq 0$$

$$\text{pierwiastki: } \pm \frac{p}{q}$$

Algorytm krok po kroku

1. Przenieś wszystko na jedną stronę (przy ułamkach — wspólny mianownik).
2. Znajdź pierwiastek (dzielniki wyrazu wolnego), podziel schematem Hornera, rozłóż do końca.
3. Zaznacz pierwiastki licznika i mianownika na osi (mianownik — kółka puste).
4. Narysuj wężyk i odczytaj zbiór rozwiązań.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times \frac{x+1}{x-2} \geq 2 \Rightarrow x+1 \geq 2(x-2)$	$\checkmark \frac{5-x}{x-2} \geq 0$	nie mnoż przez mianownik o nieznanym znaku
X dołączony pierwiastek mianownika	$\checkmark x \neq 2$ — kółko puste	dziedzina
X wężyk przechodzi przez pierwiastek podwójny	$\checkmark$ odbija się	krotność parzysta
X reszta z dzielenia przez $(x-1)(x+2)$: liczba	$\checkmark R(x) = ax + b$	stopień reszty < stopnia dzielnika

🔥 Przykład wzorcowy — umiejętność wykorzystywana w zad. 5 z matury 2026

Rozwiąż nierówność $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \leq 0$.

ROZWIĄZANIE

1. Szukamy pierwiastka wśród dzielników 6: $W(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$.
2. Horner: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2 + x - 6) = (x+1)(x+3)(x-2)$.
3. Pierwiastki: $-3, -1, 2$; współczynnik wiodący > 0 — wężyk od prawej nad osią.
4. $W(x) \leq 0$ dla $x \in (-\infty, -3] \cup [-1, 2]$.

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -3] \cup [-1, 2]$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — znalezienie pierwiastka i podzielenie wielomianu,
- 2 pkt — pełny rozkład na czynniki liniowe,
- 3 pkt — poprawny zbiór rozwiązań.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 5	4 pkt	nierówność z $ x^2 - 9 $ — po opuszczeniu modułu nierówność wielomianowa
2025	—	0 pkt	pośrednio w zadaniach 11–12
2024	—	0 pkt	pośrednio (styczna w zad. 4)
2023	—	0 pkt	pośrednio (zad. 3 i 12)
2022	zad. 9	4 pkt	reszta z dzielenia $W(x)$ przez $x+2$ i nierówność $W(x) \geq 0$
2021	zad. 3, 7	4 pkt	podzielność $x^4 + 81$; nierówność wymierna $\frac{2x-1}{1-x} \leq \frac{2+2x}{5x}$ (3 pkt)
2020	zad. 1	1 pkt	podzielność $x^{2019} - 3x^{2000} + 2x + 6$ przez $x \pm 1$

Trening: zadania **PR04.1–PR04.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR05

Ciągi arytmetyczne i geometryczne — zadania łączone

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

6/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 3,6 pkt (0–5)

FORMY ZADAŃ

otwarte 4 pkt — wyrazy jednego ciągu tworzą drugi ciąg; układ warunków

Sygnal: Wszystko przez a_1 i r (lub środkowy wyraz) $\rightarrow b^2 = ac / 2b = a + c \rightarrow$ równanie $\rightarrow$ odrzuć sprzeczne.

Co musisz umieć

- parametryzować: arytmetyczny $(a - r, a, a + r)$, geometryczny (a, aq, aq^2) ,
- łączyć warunki $2b = a + c$ i $b^2 = ac$ w jeden układ,
- wykorzystywać $a_n = a_1 + (n - 1)r$ dla wyrazów o dalekich numerach,
- badać monotoniczność ciągu $(a_{n+1} - a_n)$ i stosować wzory na sumy.

Jak rozpoznać zadanie

- „liczby x, y, z są — odpowiednio — pierwszym, drugim i szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego”,
- „po dodaniu ... otrzymamy ciąg geometryczny”,
- dane: suma i iloczyn trzech wyrazów.

Teoria w pigułce

- Wyrazy a_1, a_k, a_m ciągu arytmetycznego to $a_1, a_1 + (k - 1)r, a_1 + (m - 1)r$ — podstaw do $b^2 = ac$.
- Trzy wyrazy arytmetyczne o sumie S : środkowy $= \frac{S}{3}$. Trzy geometryczne o iloczynie P : środkowy $= \sqrt[3]{P}$.
- Ciąg rosnący/malejący i „różnica $\neq 0$ ” — warunki eliminujące przypadki.
- Monotoniczność: znak $a_{n+1} - a_n$ dla każdego n .

Σ Najważniejsze wzory

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$2b = a + c$$

$$b^2 = ac$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Algorytm krok po kroku

- Zapisz wszystkie wyrazy przez jak najmniej niewiadomych (a_1, r lub środkowy wyraz).
- Ułóż warunek drugiego ciągu i sumy/iloczynu — dostaniesz układ.
- Rozwiąż (często równanie kwadratowe), odrzuć przypadki sprzeczne z treścią ($r \neq 0$, rosnący...).
- Wypisz szukane liczby i sprawdź oba warunki.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRE	DLACZEGO
X szósty wyraz: $a + 6r$	✓ $a + 5r$	$a_6 = a_1 + 5r$
X dzielenie przez r bez założenia	✓ $r \neq 0$ z treści (lub osobny przypadek)	ciąg stały
X jedna trójka w odpowiedzi	✓ sprawdź oba rozwiązania równania	często są dwa ciągi
X $2(b + 6) = a + c$ bez zmian w a, c	✓ zmieniaj każdy wyraz zgodnie z treścią	uważne tłumaczenie

 Przykład wzorcowy typ zadań 7 (2024) i 6 (2026)

Liczby a, b, c w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa **12**. Liczby $a, b, c + 2$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz a, b, c .

ROZWIĄZANIE

- Środkowy wyraz: $b = \frac{12}{3} = 4$, więc $a = 4 - r, c = 4 + r$.
- Warunek geometryczny: $16 = (4 - r)(6 + r) \Rightarrow r^2 + 2r - 8 = 0 \Rightarrow r = 2$ lub $r = -4$.
- $r = 2$: $(2, 4, 6)$, ciąg $(2, 4, 8)$ ✓; $r = -4$: $(8, 4, 0)$, ciąg $(8, 4, 2)$ ✓.

Odpowiedź: $(2, 4, 6)$ lub $(8, 4, 0)$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — $b = 4$ i zapis $a = 4 - r, c = 4 + r$,
- 2 pkt — równanie $16 = (4 - r)(6 + r)$,
- 3 pkt — $r = 2$ lub $r = -4$,
- 4 pkt — obie trójki liczb.

 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 6	4 pkt	ciąg arytmetyczny od 1 do −2025 ; wybrane wyrazy tworzą ciąg geometryczny
2025	zad. 6	4 pkt	geometryczny zbieżny z $a_1 + a_3 = 20, a_1^2 + a_3^2 = 328$ (z szeregiem)
2024	zad. 7	4 pkt	(x, y, z) geometryczny, suma 105 , wyrazy 1., 2., 6. ciągu arytmetycznego
2023	zad. 10	4 pkt	kwadraty wpisane — ciąg geometryczny pól (z szeregiem)
2022	zad. 10	4 pkt	ciąg geometryczny $a_1 = 675$ i suma z ciągiem arytmetycznym
2021	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2020	zad. 10	5 pkt	trzywyrazowy ciąg geometryczny o sumie $\frac{21}{4}$ i ciąg arytmetyczny

Trening: zadania **PR05.1–PR05.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR06 Szereg geometryczny nieskończony

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

2/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,1 pkt (0–4)

FORMY ZADAŃ

otwarte 4 pkt — suma szeregu z warunków, figury wpisane, równanie z szeregiem

Sygnal: Najpierw $|q| < 1$. Suma $\frac{a_1}{1-q}$. Rozważ q dodatnie i ujemne.

Co musisz umieć

- badać zbieżność szeregu geometrycznego ($|q| < 1$),
- obliczać sumę $S = \frac{a_1}{1-q}$ i wyznaczać a_1, q z warunków,
- zamieniać ułamki okresowe na zwykłe,
- rozwiązywać równania, w których występuje suma szeregu (z dziedziną $|q| < 1$).

Jak rozpoznać zadanie

- „suma wszystkich wyrazów ciągu”, „nieskończenie wiele figur” → szereg,
- lewa strona równania $1 + x + x^2 + \dots \rightarrow$ suma szeregu o $q = x$,
- „rozważ wszystkie przypadki” → kilka wartości q , niektóre $|q| \geq 1$ odpadają.

Teoria w pigułce

- Szereg $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots$ jest zbieżny $\iff |q| < 1$ (lub $a_1 = 0$); wtedy $S = \frac{a_1}{1-q}$.
- Figury wpisane (środkie boków): boki tworzą ciąg geometryczny o ilorazie k , pola — o ilorazie k^2 .
- Ułamek okresowy $0,(ab) = \frac{ab}{99}$ — suma szeregu $\frac{ab}{100} + \frac{ab}{100^2} + \dots$
- W równaniu z szeregiem najpierw warunek zbieżności (dziedzina), potem wzór na sumę.

Σ Najważniejsze wzory

$$S = \frac{a_1}{1-q}, |q| < 1$$

$$0,(a) = \frac{a}{9}, 0,(ab) = \frac{ab}{99}$$

pola: iloraz k^2

Algorytm krok po kroku

1. Zapisz warunek zbieżności $|q| < 1$.
2. Wyraż dane przez a_1 i q ; rozwiąż układ.
3. Odrzuć q spoza $(-1, 1)$.
4. Oblicz $S = \frac{a_1}{1-q}$ dla każdego dopuszczalnego przypadku.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRE	DLACZEGO
$\times S = \frac{a_1}{1-q}$ dla $q = 2$	$\checkmark$ szereg rozbieżny	wymagane $ q < 1$
$\times S = \frac{a_1}{1+q}$	$\checkmark \frac{a_1}{1-q}$	znak w mianowniku
$\times$ pola figur: iloraz k	$\checkmark k^2$	pole skaluje się kwadratem
$\times$ jeden przypadek q	$\checkmark q = \pm \dots$ — sprawdź oba	q ujemne też daje zbieżny szereg

 Przykład wzorcowy typ zadania 6 z matury 2025

Ciąg geometryczny (a_n) jest zbieżny, $a_1 + a_3 = 10$ oraz $a_1^2 + a_3^2 = 68$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki.

ROZWIĄZANIE

1. $a_1 a_3 = \frac{(a_1 + a_3)^2 - (a_1^2 + a_3^2)}{2} = \frac{100 - 68}{2} = 16$, więc $\{a_1, a_3\} = \{2, 8\}$.

2. $a_1 = 2, a_3 = 8: q^2 = 4, |q| = 2$ — szereg rozbieżny, odrzucamy.

3. $a_1 = 8, a_3 = 2: q^2 = \frac{1}{4}, q = \pm \frac{1}{2}$.

4. $q = \frac{1}{2}: S = \frac{8}{1/2} = 16; q = -\frac{1}{2}: S = \frac{8}{3/2} = \frac{16}{3}$.

Odpowiedź: $S = 16$ lub $S = \frac{16}{3}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — $a_1 a_3 = 16$ i wartości 2, 8,
- 2 pkt — odrzucenie $a_1 = 2$ (brak zbieżności),
- 3 pkt — $q = \pm \frac{1}{2}$,
- 4 pkt — obie sumy.

 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak
2025	zad. 6	4 pkt	$a_1 + a_3 = 20, a_1^2 + a_3^2 = 328$ — suma wszystkich wyrazów (przypadki q)
2024	—	0 pkt	brak
2023	zad. 10	4 pkt	nieskończony ciąg kwadratów wpisanych — suma pól
2022	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2021	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2020	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza

Trening: zadania **PR06.1–PR06.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR07 Granice ciągów i funkcji

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,3 pkt (0–2)

FORMY ZADAŃ

otwarte 2 pkt — „Oblicz granicę” (ciągu z symbolem Newtona lub funkcji jednostronnej)

 **Sygnal:** $\frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ najwyższa potęga; $\frac{0}{0} \rightarrow$ skrócić; $\frac{c}{0} \rightarrow$ znak mianownika.

Co musisz umieć

- obliczać granice ilorazów wielomianów (dzielenie przez najwyższą potęgę),
- usuwać niewymierność sprzężeniem: $\sqrt{n^2 + an} - n$,
- rozpisywać symbol Newtona i sumy ($1 + 2 + \dots + n$) przed liczeniem granicy,
- obliczać granice funkcji w punkcie (skracanie) i granice jednostronne niewłaściwe (znak mianownika).

Jak rozpoznać zadanie

- $\lim_{n \rightarrow \infty}$ ułamek z potęgami $n \rightarrow$ najwyższa potęga,
- $\frac{0}{0}$ w punkcie $\rightarrow$ rozkład i skracanie,
- $x \rightarrow a^-$ lub $x \rightarrow a^+$ i mianownik $\rightarrow 0 \rightarrow$ badanie znaku, wynik $\pm\infty$.

Teoria w pigułce

- $\lim \frac{a_k n^k + \dots}{b_m n^m + \dots}$: $k < m \rightarrow 0$; $k = m \rightarrow \frac{a_k}{b_m}$; $k > m \rightarrow \pm\infty$.
- $\lim q^n = 0$ dla $|q| < 1$; przy 3^n i 2^n dziel przez potęgę o największej podstawie.
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$; $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Granica jednostronna $\frac{c}{0^\pm}$ ($c \neq 0$): wynik $\pm\infty$ zależnie od znaków licznika i mianownika.
- Funkcja jest ciągła w x_0 , gdy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Σ Najważniejsze wzory

$$\lim \frac{a_k n^k}{b_k n^k} = \frac{a_k}{b_k}$$

$$\sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{c}{0^+} = +\infty \quad (c > 0)$$

Algorytm krok po kroku

1. Podstaw — jeśli wychodzi liczba, to koniec.
2. Symbol $\frac{\infty}{\infty}$: podziel licznik i mianownik przez najwyższą potęgę. $\infty - \infty$ z pierwiastkiem: sprzężenie.
3. Symbol $\frac{0}{0}$: rozłóż licznik i mianownik, skróć wspólny czynnik.
4. $\frac{c}{0}$: ustal znak mianownika dla $x \rightarrow a^\pm$ i podaj $\pm\infty$.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times \sqrt{n^2 + 4n} - n \rightarrow \infty - \infty = 0$	$\checkmark$ sprzężenie: $\rightarrow 2$	$\infty - \infty$ to symbol nieoznaczony
$\times \frac{3}{0^-} = +\infty$	$\checkmark -\infty$	znak mianownika
$\times \binom{n+1}{2} \approx n$	$\checkmark \frac{(n+1)n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$	rozpisz symbol
$\times \lim \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{1}$	$\checkmark \frac{1}{3}$	$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 2 z matury 2024

Oblicz granicę $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{(x - 3)^2}$.

ROZWIĄZANIE

- $\frac{x^2 - 9}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)^2} = \frac{x + 3}{x - 3}$ dla $x \neq 3$.
- Dla $x \rightarrow 3^+$: licznik $\rightarrow 6 > 0$, mianownik $\rightarrow 0^+$.
- Granica jest równa $+\infty$.

Odpowiedź: $+\infty$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — skrócenie do $\frac{x+3}{x-3}$,
- 2 pkt — wynik $+\infty$ z uzasadnieniem znaku.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 1	2 pkt	granica ciągu z $\binom{n+2}{n-1}$ w liczniku
2025	—	0 pkt	brak
2024	zad. 2	2 pkt	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 8}{(x - 2)^2}$ — granica jednostronna niewłaściwa
2023	—	0 pkt	brak
2022	zad. 5	2 pkt	granica ciągu z parametrem p równa 4
2021	zad. 5	2 pkt	$\lim \frac{(3n+2)^2 - (1-2n)^2}{(2n-1)^2}$
2020	zad. 2	1 pkt	granica $\frac{3n^2 + 7n - 5}{11 - 5n + 5n^2}$

Trening: zadania **PR07.1–PR07.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR08 Kombinatoryka rozszerzona

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

3/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,6 pkt (0–5)

FORMY ZADAŃ

otwarte 3 pkt — zliczanie liczb/ustawień z warunkami (czasem jako etap prawdopodobieństwa)

 **Sygnal:** Kolejność? powtórzenia? → wzór. Zero z przodu i sąsiedztwo — odejmij lub sklej.

Co musisz umieć

- rozróżniać permutacje, wariacje (z powtórzeniami i bez) oraz kombinacje,
- stosować $\binom{n}{k}$ do wyboru zbiorów i permutacje z powtórzeniami $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots}$,
- uwzględniać zero na początku liczby (odejmowanie przypadków „złych”),
- stosować „sklejanie” elementów, które mają stać obok siebie, i metodę dopełnienia.

Jak rozpoznać zadanie

- „wybieramy k osób” (kolejność nieistotna) → $\binom{n}{k}$,
- „ustawiamy”, „tworzymy kody/liczby” → permutacje/wariacje,
- „co najmniej...” → suma przypadków albo całość minus dopełnienie.

Teoria w pigułce

- Permutacje n elementów: $n!$. Wariacje bez powtórzeń: $\frac{n!}{(n-k)!}$. Z powtórzeniami: n^k . Kombinacje: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Permutacje z powtórzeniami (np. litery w słowie): $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots}$.
- Elementy „obok siebie”: sklej je w jeden blok $((n-1)!$ ustawień bloku i reszty) i pomnóż przez liczbę ustawień wewnątrz bloku.
- Liczby z cyfrą 0: policz wszystkie ustawienia i odejmij te z zerem na początku.
- „Nie obok siebie”: najpierw ustaw pozostałe elementy, potem wstawiaj w luki: $\binom{\text{luki}}{k}$.

Σ Najważniejsze wzory

$$n!$$

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n^k$$

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$$

Algorytm krok po kroku

- Ustal, czy liczy się kolejność i czy elementy mogą się powtarzać.
- Rozbij na etapy (wybór zbioru cyfr → ustawienie) i/lub rozłączne przypadki.
- Uwzględnij ograniczenia (zero z przodu, sąsiedztwo) — często przez odejmowanie.
- Pomnóż/dodaj; skontroluj na małym przykładzie.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X wybór delegacji: $10 \cdot 9 \cdot 8$	✓ $\binom{10}{3} = 120$	kolejność nie ma znaczenia
X zero na początku liczby wliczone	✓ odejmij układy z zerem z przodu	liczba nie zaczyna się od 0
X „obok siebie”: $5!$	✓ $2 \cdot 5!$	dwa ustawienia wewnątrz bloku
X „co najmniej 2 kobiety” jako $\binom{7}{2} \binom{10}{2}$	✓ rozbij na przypadki 2, 3, 4	podwójne liczenie

🔑 Przykład wzorcowy typ zadania 6 z matury 2024

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra tysięcy jest większa od cyfry setek, cyfra setek — większa od cyfry dziesiątek, a cyfra dziesiątek — większa od cyfry jedności.

ROZWIĄZANIE

- Cyfrы muszą być różne i ustawione malejąco — każdy **zbiór** czterech różnych cyfr wyznacza dokładnie jedną taką liczbę.
- Zero nigdy nie trafi na początek (jest najmniejsze), więc wystarczy wybrać zbiór **4** cyfr spośród **10**.
- $\binom{10}{4} = 210$.

Odpowiedź: 210

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zauważenie, że liczba jest wyznaczona przez zbiór cyfr,
- 2 pkt — uzasadnienie, że zero nie stoi na początku,
- 3 pkt — wynik **210**.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 2	3 pkt	ustawienia ośmiu liczb w ciąg — zliczanie zdarzeń sprzyjających
2025	—	0 pkt	brak
2024	zad. 6	3 pkt	liczby o niepowtarzających się cyfrach: dokładnie 3 nieparzyste i 2 parzyste
2023	—	0 pkt	brak
2022	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2021	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2020	zad. 4, 13	5 pkt	współczynnik w $(x\sqrt{2} + y\sqrt{3})^4$; siedmiocyfrowe liczby z trzema 1 i dwiema 2 (4 pkt)

Trening: zadania **PR08.1–PR08.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR09**Prawdopodobieństwo: klasyczne, warunkowe, Bernoulli**

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,6 pkt (1–4)

FORMY ZADAŃ

otwarte 3 pkt — schemat Bernoulliego, prawdopodobieństwo warunkowe, klasyczne z kombinatoryką

 **Sygnal:** Nazwij model: klasyczny / Bernoulli / warunkowy / drzewo. Zapisz wzór z liczbami, potem licz. **Co musisz umieć**

- stosować klasyczną definicję z kombinatoryką ($|\Omega|$ przez permutacje, kombinacje),
- obliczać prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (także zliczając: $\frac{|A \cap B|}{|B|}$),
- stosować schemat Bernoulliego i zdarzenie przeciwne dla „co najmniej jeden”,
- stosować wzór na prawdopodobieństwo całkowite i drzewo.

 Jak rozpoznać zadanie

- „ n niezależnych prób, w każdej sukces z prawdopodobieństwem p ” → Bernoulli,
- „pod warunkiem, że...” → warunkowe; zawęż przestrzeń do B ,
- „losujemy urnę, potem kulę” → drzewo / prawdopodobieństwo całkowite.

 Teoria w pigułce

- Bernoulli: $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- Warunkowe: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; przy równych szansach $= \frac{|A \cap B|}{|B|}$.
- Całkowite: $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$ — sumujemy gałęzie drzewa.
- „Co najmniej jeden sukces w n próbach”: $1 - (1-p)^n$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Σ Najważniejsze wzory

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A) = \sum P(A|B_i)P(B_i)$$

$$1 - (1-p)^n$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

 Algorytm krok po kroku

1. Rozpoznaj model: klasyczny, Bernoulli, warunkowy, drzewo.
2. Klasyczny: $|\Omega|$ i $|A|$ kombinatorycznie. Bernoulli: n, k, p . Warunkowy: najpierw B , potem $A \cap B$.
3. Zapisz wzór z podstawionymi liczbami (to zwykle 1–2 pkt).
4. Oblicz i sprawdź, czy wynik jest w $[0, 1]$.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
✗ Bernoulli bez $\binom{n}{k}$	✓ $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	sukcesy mogą być w różnych próbach
✗ $P(A B) = \frac{P(A)}{P(B)}$	✓ $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	iloczyn zdarzeń w liczniku
✗ „co najmniej 3 z 4”: tylko $k = 3$	✓ $k = 3$ i $k = 4$	co najmniej = suma
✗ drzewo: dodawanie w gałęzi	✓ w gałęzi mnożymy, gałęzie dodajemy	reguła drzewa

🔥 Przykład wzorcowy typ zadań 2 (2023) i 3 (2024)

Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana żarówka jest wadliwa, jest równe **0,1**. Kupujemy **5** żarówek (wadliwość niezależna). Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród nich będzie co najwyżej jedna wadliwa. Wynik podaj z dokładnością do **0,001**.

ROZWIĄZANIE

- Schemat Bernoulliego: $n = 5$, sukces = żarówka wadliwa, $p = 0,1$.
- $P(S_5 \leq 1) = \binom{5}{0} \cdot 0,9^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,1 \cdot 0,9^4 = 0,59049 + 0,32805$.
- $= 0,91854 \approx 0,919$.

Odpowiedź: $\approx 0,919$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — rozpoznanie schematu Bernoulliego z $n = 5$, $p = 0,1$,
- 2 pkt — zapis sumy dla $k = 0$ i $k = 1$,
- 3 pkt — wynik $\approx 0,919$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 2	3 pkt	losowanie bez zwracania ośmiu liczb ustawionych w ciąg
2025	zad. 4	3 pkt	czterokrotny rzut kostką — prawdopodobieństwo warunkowe
2024	zad. 3	3 pkt	opakowania śmietany — schemat Bernoulliego
2023	zad. 2	3 pkt	pięć partii szachów — schemat Bernoulliego
2022	zad. 4	1 pkt	moneta i dwie urny — prawdopodobieństwo całkowite
2021	zad. 9	4 pkt	prawdopodobieństwo warunkowe: podzielna przez 15, gdy podzielna przez 18
2020	zad. 3	1 pkt	kostka i dwie urny — prawdopodobieństwo całkowite

Trening: zadania **PR09.1–PR09.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR10 Tożsamości trygonometryczne

PRIORYTET
B

CZĘSTOTLIWOŚĆ
5/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU
śr. 2,0 pkt (0–4)

FORMY ZADAŃ
narzędzie w równaniach (PR11) i dowodach (PR12, PR20); czasem „wykaż tożsamość”

 **Sygnal:** Rozpisz kąty podwojone, sumy zamień na iloczyny, wszystko przez $\sin$ i $\cos$.

Co musisz umieć

- stosować wzory na $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ i funkcje kąta podwojonego,
- stosować wzory na sumę i różnicę sinusów/cosinusów (tablice CKE),
- wykazywać tożsamości z uwzględnieniem dziedziny,
- wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych kątów 15° , 75° , 105° .

Jak rozpoznać zadanie

- „Wykaż, że dla każdego kąta α ...” z $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$,
- iloczyn $\sin a \cos b$ lub suma $\sin a + \sin b$ w równaniu,
- dane $\sin \alpha$ i $\cos \beta$, szukane $\sin(\alpha + \beta)$.

Teoria w pigułce

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$.
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$; odwrotnie: $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.
- Z $\tan \alpha$: $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$, $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.
- Tożsamość dowodzimy, przekształcając jedną stronę do drugiej (lub obie do wspólnej postaci); podaj założenia (mianowniki $\neq 0$).

Σ Najważniejsze wzory

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Algorytm krok po kroku

1. Sprowadź do jednego kąta (rozpisz 2α , 3α) albo zamień sumy na iloczyny.
2. Wyrażaj wszystko przez $\sin$ i $\cos$; stosuj jedynkę trygonometryczną.
3. Przy ułamkach — skracaj wspólne czynniki (po zapisaniu założeń).
4. Przy wartościach: ustal znaki funkcji z ćwiartki kąta.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
✗ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$	✓ $2 \sin \alpha \cos \alpha$	funkcja nie jest liniowa
✗ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$	✓ wzór na sinus sumy	nie rozdzielamy
✗ $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha$	✓ $1 - 2 \sin^2 \alpha$	współczynnik 2
✗ znak $\cos \alpha$ w III ćwiartce dodatni	✓ ujemny	ustal ćwiartkę

🔥 Przykład wzorcowy narzędzie z zadań 6 (2023), 8 (2024), 7 (2026)

Wykaż, że dla każdego kąta α takiego, że $\cos \alpha \neq 0$ i $\cos 2\alpha \neq -1$, prawdziwa jest równość

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

ROZWIĄZANIE

- $1 + \cos 2\alpha = 1 + 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cos^2 \alpha.$
- $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \blacksquare$

Odpowiedź: dowód

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zastosowanie $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$,
- 2 pkt — rozpisanie $\sin 2\alpha$ i skrócenie,
- 3 pkt — pełne uzasadnienie.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 7	4 pkt	$\sin 6x - 2 \sin 2x = 0$ — wzór na $\sin 3\alpha$ lub sumę sinusów
2025	—	0 pkt	pośrednio (zad. 9: $\sin 2x$)
2024	zad. 8	4 pkt	dowód w trójkącie z $\beta = 2\alpha$ — $\sin 2\alpha$ i tw. sinusów
2023	zad. 6	3 pkt	$2 \sin 4x \cos 6x = \sin 10x - \sin 2x$ — iloczyn na sumę
2022	zad. 3	1 pkt	$\sin(\beta - \frac{1}{3}\pi)$ przy $\cos \beta = -\frac{1}{3}$
2021	zad. 1, 2	2 pkt	$\cos^2 165^\circ - \sin^2 165^\circ$; wskazanie wzoru funkcji z wykresu
2020	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza

Trening: zadania **PR10.1–PR10.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 4,3 pkt (3–5)

FORMY ZADAŃ

otwarte 3–5 pkt — równanie w przedziale lub w $\mathbb{R}$

 **Sygnal:** Wyłącz, nie dziel. Jednorodne $\rightarrow \operatorname{tg} x$. Sinus: dwie serie. Na końcu przedział.

Co musisz umieć

- rozwiązywać równania elementarne $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ (rozwiązania ogólne i w przedziale),
- sprowadzać równanie do jednej funkcji (jedynek, $\cos 2x$) i podstawiać $t = \sin x$,
- rozkładać na czynniki (wyłączanie, sumy na iloczyny) i rozwiązywać równania jednorodne,
- wypisywać rozwiązania z przedziału (podstawianie kolejnych k).

Jak rozpoznać zadanie

- $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ i $\sin x \cos x$ w każdym wyrazie $\rightarrow$ równanie jednorodne (dziel przez $\cos^2 x$ po sprawdzeniu $\cos x = 0$),
- $\sin 2x$ i $\cos x \rightarrow$ wyłącz $\cos x$,
- iloczyn $\sin a \cos b$ lub różnica sinusów $\rightarrow$ wzory z tablic.

Teoria w pigułce

- $\sin x = a$: $x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = \pi - x_0 + 2k\pi$. $\cos x = a$: $x = \pm x_0 + 2k\pi$. $\operatorname{tg} x = a$: $x = x_0 + k\pi$.
- $\sin x = 0 \iff x = k\pi$; $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- Równanie jednorodne $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$: sprawdź $\cos x = 0$, potem podziel przez $\cos^2 x \rightarrow$ równanie kwadratowe z $\operatorname{tg} x$.
- Nie dziel przez wyrażenie, które może być zerem (np. $\cos x$) — wyłącz je przed nawias.
- Rozwiązania w przedziale: dla każdej serii podstawiaj $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ i wybieraj mieszczące się.

Σ Najważniejsze wzory

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

Algorytm krok po kroku

- Sprowadź do jednego argumentu (rozpisz $2x$) lub zastosuj wzór z tablic.
- Doprowadź do postaci iloczynu = 0 albo równania kwadratowego z $t = \sin x / \cos x / \operatorname{tg} x$.
- Rozwiąż równania elementarne (odrzuć $|t| > 1$ dla sinusa i cosinusa).
- Wypisz rozwiązania ogólne albo z danego przedziału.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times \sin 2x = \cos x \Rightarrow 2 \sin x = 1$ (dzielenie przez $\cos x$)	$\checkmark \cos x(2 \sin x - 1) = 0$	zgubione $\cos x = 0$
$\times \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$	$\checkmark$ także $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$	dwie serie dla sinusa
$\times \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$	$\checkmark x = \frac{\pi}{4} + k\pi$	okres tangensa π
$\times \cos x = -2 \rightarrow$ rozwiązanie	$\checkmark$ brak rozwiązań	$ \cos x \leq 1$

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 9 z matury 2025

Rozwiąż równanie $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$ w przedziale $[0, \pi]$.

ROZWIĄZANIE

- Wyłączamy $\cos x$: $\cos x (\cos x - \sqrt{3} \sin x) = 0$.
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ (w $[0, \pi]$).
- $\cos x = \sqrt{3} \sin x$; tu $\cos x \neq 0$, więc $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ (w $[0, \pi]$).
- Odpowiedź: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$.

Odpowiedź: $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right\}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — rozkład na czynniki,
- 2 pkt — rozwiązanie $\cos x = 0$,
- 3 pkt — $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
- 4 pkt — oba rozwiązania z przedziału.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 7	4 pkt	$\sin 6x - 2 \sin 2x = 0$
2025	zad. 9	5 pkt	$3 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin 2x - 3 \sin^2 x = 0$ w $[-\pi, \pi]$
2024	zad. 10	5 pkt	$\sin 4x - \sin 2x = 4 \cos^2 x - 3$ w $[0, 2\pi]$
2023	zad. 6	3 pkt	$4 \sin 4x \cos 6x = 2 \sin 10x + 1$
2022	zad. 11	4 pkt	$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ w $[0, \pi]$
2021	zad. 12	5 pkt	$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$ w $[0, \pi]$
2020	zad. 9	4 pkt	$3 \cos 2x + 10 \cos^2 x = 24 \sin x - 3$ w $[0, 2\pi]$

Trening: zadania **PR11.1–PR11.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR12 Planimetria z twierdzeniem sinusów i cosinusów

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

6/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 3,7 pkt (0–7)

FORMY ZADAŃ

otwarte 3–6 pkt — obliczanie długości, kątów, pól; dowody zależności

 **Sygnal:** Bok–kąt–bok → cosinusów; kąt naprzeciw boku + R → sinusów. Sinus kąta daje dwa kąty.

Co musisz umieć

- stosować twierdzenie cosinusów (także do wyznaczania kąta) i twierdzenie sinusów ($2R$),
- obliczać pola: $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$, $\frac{abc}{4R}$, pr (Heron — gdy wygodny),
- rozpoznawać przypadki niejednoznaczne (dwa trójkąty, $\sin \gamma$ dla γ ostrego i rozwartego),
- wyznaczać długość środkowej, dwusiecznej (metodą pól), przekątnych równoległoboku.

Jak rozpoznać zadanie

- dwa boki i kąt → tw. cosinusów; bok i dwa kąty → tw. sinusów,
- „okrąg opisany” → $2R = \frac{a}{\sin \alpha}$; „okrąg wpisany” → $r = \frac{P}{p}$,
- „pole trójkąta jest równe ... oblicz trzeci bok” → dwa przypadki kąta.

Teoria w pigułce

- Tw. cosinusów: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, więc $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
- Tw. sinusów: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.
- $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{abc}{4R} = pr$, gdzie p — połowa obwodu.
- $\sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ daje $\gamma = 60^\circ$ lub 120° — rozważ oba przypadki.
- Przekątne równoległoboku: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$; środkowa: $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

Σ Najważniejsze wzory

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

$$P = \frac{abc}{4R} = pr$$

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Algorytm krok po kroku

1. Rysunek z oznaczeniami; zaznacz dane i szukane.
2. Wybierz trójkąt, w którym są trzy dane (bok–kąt–bok, bok–bok–bok, bok–kąt–kąt).
3. Zastosuj tw. cosinusów/sinusów; przy równaniu kwadratowym sprawdź oba pierwiastki.
4. Pola i promienie licz na końcu z gotowych długości.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times \cos 120^\circ = \frac{1}{2}$	$\checkmark -\frac{1}{2}$	znak dla kąta rozwartego
$\times \frac{a}{\sin \alpha} = R$	$\checkmark = 2R$	średnica, nie promień
$\times$ z $\sin \gamma$ tylko kąt ostry	$\checkmark$ sprawdź też $180^\circ - \gamma$	dwa trójkąty
$\times$ z równania $c^2 - 8c + 15 = 0$ jedno c	$\checkmark c = 3$ lub $c = 5$	oba mogą być poprawne

🔥 Przykład wzorcowy typ zadań 8 (2023), 11 (2026)

W trójkącie ABC dane są $|AC| = 7$, $|BC| = 8$ oraz $|\angle ABC| = 60^\circ$. Oblicz długość boku AB i pole trójkąta. Rozważ wszystkie przypadki.

ROZWIĄZANIE

1. Tw. cosinusów dla boku AC (naprzeciw kąta B): $49 = c^2 + 64 - 2 \cdot 8c \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow c^2 - 8c + 15 = 0$.
2. $c = 3$ lub $c = 5$ — oba dodatnie, oba spełniają nierówność trójkąta.
3. $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot c \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}c$: $6\sqrt{3}$ lub $10\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $|AB| = 3$, $P = 6\sqrt{3}$ lub $|AB| = 5$, $P = 10\sqrt{3}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapis tw. cosinusów,
- 2 pkt — równanie $c^2 - 8c + 15 = 0$,
- 3 pkt — $c = 3$ lub $c = 5$,
- 4 pkt — oba pola.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 11	6 pkt	czworokąt wpisany i opisany, $ AB = 9$, $ AD = 10$, 60° — tw. cosinusów
2025	zad. 3, 7	7 pkt	trójkąt równoboczny i stosunek pól; trapez ze środkami ramion
2024	zad. 8	4 pkt	trójkąt z $\beta = 2\alpha$ — wykaż zależność boków (tw. sinusów)
2023	zad. 8	4 pkt	czworokąt opisany na okręgu, kąty przekątnej 60° — tw. sinusów
2022	zad. 8	3 pkt	trapez i okręgi opisane na trójkątach — dowód (tw. sinusów)
2021	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2020	zad. 5	2 pkt	cosinus najmniejszego kąta trójkąta z proporcji boków

Trening: zadania **PR12.1–PR12.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR13 Okręgi i czworokąty wpisane/opisane

PRIORYTET
A

CZĘSTOTLIWOŚĆ
4/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU
śr. 2,4 pkt (0–6)

FORMY ZADAŃ
otwarte 4–6 pkt — czworokąt wpisany i/lub opisany, trójkąt z okręgami

 **Sygnal:** Wpisany: kąty do 180° . Opisany: sumy boków. Przekątna + tw. cosinusów w dwóch trójkątach.

Co musisz umieć

- stosować warunki: wpisany $\Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ$;
opisany $\Leftrightarrow a + c = b + d$,
- obliczać $R = \frac{abc}{4P}$ i $r = \frac{P}{p}$; w trójkącie prostokątnym $r = \frac{a+b-c}{2}$, $R = \frac{c}{2}$,
- wykorzystywać równe odcinki stycznych i kąt prosty między promieniem a styczną,
- rozwiązywać czworokąt wpisany przez przekątną (dwa trójkąty, tw. cosinusów).

Jak rozpoznać zadanie

- „w czworokąt wpisano okrąg” $\rightarrow$ sumy przeciwległych boków,
- „na czworokącie opisano okrąg” $\rightarrow$ przeciwległe kąty dopełniają się do 180° ,
- trapez opisany na okręgu $\rightarrow h = 2r$, suma podstaw = suma ramion.

Teoria w pigułce

- Czworokąt wpisany w okrąg: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$. Trapez wpisany jest równoramienny.
- Czworokąt opisany na okręgu: $a + c = b + d$. W trapezie opisanym wysokość $h = 2r$.
- Odcinki stycznych z jednego punktu są równe; w trójkącie: od wierzchołka A do punktu styczności $p - a$.
- $R = \frac{abc}{4P}$, $r = \frac{P}{p}$. Deltoid zawsze ma okrąg wpisany.

Σ Najważniejsze wzory

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$a + c = b + d$$

$$R = \frac{abc}{4P}$$

$$r = \frac{P}{p}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \text{ (prostokątny)}$$

Algorytm krok po kroku

1. Zapisz warunek wpisania/opisania.
2. Poprowadź przekątną — powstaną dwa trójkąty z kątami α i $180^\circ - \alpha$.
3. Tw. cosinusów w obu trójkątach (ta sama przekątna!) $\rightarrow$ równanie.
4. Połącz z warunkiem na boki i rozwiąż; poła/promień na końcu.

Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X opisany: $\alpha + \gamma = 180^\circ$	✓ opisany: $a + c = b + d$	nie mylić warunków
X $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	✓ $= -\cos \alpha$	przeciwny kąt w czworokącie wpisanym
X $r = \frac{P}{\text{obwód}}$	✓ $r = \frac{P}{p}$, p — połowa obwodu	połowa!
X dwa rozwiązania bez sprawdzenia warunku	✓ sprawdź warunek z treści	np. $ AD > AB $

 Przykład wzorcowy umiejętność z zad. 8 (2023) i 11 (2026)

Trapez równoramienny o podstawach **8** i **2** jest opisany na okręgu. Oblicz promień tego okręgu oraz pole trapezu.

ROZWIĄZANIE

1. Warunek opisania: $8 + 2 = 2c \Rightarrow c = 5$ (ramię).
2. Rzut ramienia na dłuższą podstawę: $\frac{8-2}{2} = 3$, więc $h = \sqrt{25 - 9} = 4$.
3. $r = \frac{h}{2} = 2$, $P = \frac{8+2}{2} \cdot 4 = 20$.

Odpowiedź: $r = 2$, $P = 20$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — ramię $c = 5$ z warunku opisania,
- 2 pkt — wysokość $h = 4$,
- 3 pkt — $r = 2$ i $P = 20$.

 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 11	6 pkt	czworokąt wpisany w okrąg i opisany na okręgu: długości boków
2025	—	0 pkt	brak
2024	—	0 pkt	brak
2023	zad. 8	4 pkt	czworokąt opisany na okręgu ($ BC = 4$, $ CD = 5$) — tw. sinusów
2022	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2021	zad. 13	4 pkt	okrąg wpisany w trójkąt prostokątny — sinus większego kąta ostrego
2020	zad. 7	3 pkt	okrąg styczny do ramion trójkąta równoramiennego — dowód proporcji

Trening: zadania **PR13.1–PR13.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 3,9 pkt (0–8)

FORMY ZADAŃ

otwarte 3–5 pkt — współrzędne wierzchołków, odległość punktu od prostej, pola, metoda współrzędnych

 **Sygnal:** Brak współrzędnych? Wprowadź układ. Prostopadłość = iloczyn skalarny 0. Pole = $\frac{1}{2}|\text{wyznacznik}|$.

Co musisz umieć

- stosować równanie ogólne prostej, warunki równoległości i prostopadłości (także przez wektory),
- obliczać odległość punktu od prostej i pole trójkąta z wyznacznika wektorów,
- wyznaczać symetralną odcinka, punkt symetryczny względem prostej, punkty szczególne trójkąta,
- wprowadzać układ współrzędnych do zadań geometrycznych (kwadrat, prostokąt).

Jak rozpoznać zadanie

- „trójkąt równoramienny, $|CA| = |CB|$ ” → C na symetralnej AB ,
- „wysokość”, „odległość od prostej” → wzór $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,
- figura bez współrzędnych (kwadrat o boku a) i prostopadłość/stosunek pól → własny układ współrzędnych.

Teoria w pigułce

- Prosta $Ax + By + C = 0$; wektor normalny $[A, B]$. Odległość punktu: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- Wektory $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$: prostopadłe $\Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 = 0$; pole trójkąta = $\frac{1}{2}|u_1v_2 - u_2v_1|$.
- Symetralna odcinka AB : przez środek AB , prostopadła do AB — zbiór punktów równo odległych od A i B .
- Kąt między prostymi: $\text{tg } \varphi = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2} \right|$.
- Środek ciężkości $S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$; S , O (środek okręgu opisanego) i H (ortocentrum) są współliniowe.

Σ Najważniejsze wzory

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$P = \frac{1}{2}|u_1v_2 - u_2v_1|$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

$$\text{tg } \varphi = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2} \right|$$

Algorytm krok po kroku

1. Naszkicuj; jeśli brak współrzędnych — wybierz wygodny układ (wierzchołek w $(0, 0)$, boki na osiach).
2. Zapisz potrzebne proste (równania) i wektory.
3. Warunki (prostopadłość, równe odległości) zamień na równania; rozwiąż.
4. Długości, pola — ze wzorów; sprawdź wynik na szkicu.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$	$\checkmark$ wartość bezwzględna i pierwiastek	wzór na odległość
$\times$ pole bez $\frac{1}{2}$	$\checkmark \frac{1}{2} \det $	wyznacznik to pole równoległoboku
$\times$ prostopadła do $2x - y + 3 = 0$: $y = -2x + b$	$\checkmark y = -\frac{1}{2}x + b$	najpierw postać kierunkowa
$\times$ układ współrzędnych bez uzasadnienia	$\checkmark$ opisz, gdzie leżą wierzchołki	czytelność dla egzaminatora

🔗 Przykład wzorcowy typ zadania 4 z matury 2026

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku a . Punkt K jest środkiem boku AB , a punkt M leży na boku BC i odcinki DK i KM są prostopadłe. Oblicz stosunek pola trójkąta DKM do pola kwadratu.

ROZWIĄZANIE

- Układ: $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a, a)$, $D = (0, a)$; $K = (\frac{a}{2}, 0)$, $M = (a, m)$.
- $\overrightarrow{KD} = [-\frac{a}{2}, a]$, $\overrightarrow{KM} = [\frac{a}{2}, m]$; prostopadłość: $-\frac{a^2}{4} + am = 0 \Rightarrow m = \frac{a}{4}$.
- $P_{DKM} = \frac{1}{2} |(-\frac{a}{2}) \cdot \frac{a}{4} - a \cdot \frac{a}{2}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{5a^2}{8} = \frac{5a^2}{16}$.
- Stosunek: $\frac{5}{16}$.

Odpowiedź: $\frac{5}{16}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — wprowadzenie układu i współrzędnych K , M ,
- 2 pkt — warunek prostopadłości i $m = \frac{a}{4}$,
- 3 pkt — pole i stosunek $\frac{5}{16}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 4, 9	8 pkt	kwadrat: $DK \perp KM$ (metoda współrzędnych); trójkąt równoramienny z ramieniem na prostej
2025	—	0 pkt	tylko okręgi (klucz PR15)
2024	zad. 9	4 pkt	kwadrat i przekątna dzieląca trójkąt — stosunek pól
2023	zad. 5	3 pkt	trójkąt $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ z punktami na bokach
2022	zad. 14	6 pkt	trójkąt równoramienny: $A = (-3, 2)$, pole 15, bok na prostej $y = x - 1$
2021	zad. 14	6 pkt	pole trójkąta z wierzchołkiem na paraboli; warunek ostrokątności
2020	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza

Trening: zadania **PR14.1–PR14.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR15 Okrąg w układzie współrzędnych

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 3,6 pkt (0–6)

FORMY ZADAŃ

otwarte 5–6 pkt — okrąg i prosta, dwa okręgi, styczne, średnica z punktów przecięcia

 **Sygnal:** Postać kanoniczna → S, r . Styczność: $d = r$. Dwa okręgi: odejmij równania.

Co musisz umieć

- przechodzić między postaciami $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ i $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$,
- badać położenie prostej względem okręgu (odległość środka od prostej) i wyznaczać punkty wspólne,
- wyznaczać styczne (także przechodzące przez punkt zewnętrzny),
- badać wzajemne położenie dwóch okręgów i wyznaczać wspólną cięciwę (odejmowanie równań).

Jak rozpoznać zadanie

- „prosta jest styczna do okręgu” → $d(S, \text{prosta}) = r$,
- „okręgi przecinają się w punktach A i B ” → odejmij równania: prosta AB ,
- „środek okręgu leży na prostej...”, okrąg przechodzi przez A i B → symetralna AB .

Teoria w pigułce

- $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ to okrąg o środku (a, b) , gdy $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$.
- Prosta i okrąg: $d < r$ — dwa punkty wspólne, $d = r$ — styczna, $d > r$ — rozłączne (d — odległość środka od prostej).
- Dwa okręgi: $|S_1 S_2| = r_1 + r_2$ — styczne zewnętrznie; $|r_1 - r_2| < |S_1 S_2| < r_1 + r_2$ — przecinają się; $|S_1 S_2| = |r_1 - r_2|$ — styczne wewnętrznie.
- Odjęcie równań dwóch przecinających się okręgów daje równanie prostej przez oba punkty wspólne.
- Styczna przez punkt zewnętrzny P : prosta $y - y_P = m(x - x_P)$ i warunek $d(S, l) = r$ (sprawdź też prostą pionową $x = x_P$).

Σ Najważniejsze wzory

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - c$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$|S_1 S_2| = r_1 + r_2 \text{ (styczne zewn.)}$$

Algorytm krok po kroku

- Doprowadź okrąg do postaci kanonicznej — odczytaj S i r .
- Prosta–okrąg: podstaw prostą do równania okręgu (punkty) lub policz $d(S, l)$ (położenie, styczność).
- Dwa okręgi: odejmij równania → prosta; wróć do jednego okręgu → punkty.
- Sprawdź otrzymane punkty w obu równaniach.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ $S = (-2, 3)$	$\checkmark S = (2, -3)$	$-2ax \Rightarrow a = 2$
$\times r = 25$	$\checkmark r^2 = 25, r = 5$	prawa strona to kwadrat promienia
$\times$ styczne tylko w postaci $y = mx + b$	$\checkmark$ sprawdź prostą $x = x_P$	pionowa styczna
$\times$ odejmowanie równań bez sprawdzenia	$\checkmark$ podstaw punkty do obu okręgów	kontrola rachunków

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 8 z matury 2025

Okręgi $\mathcal{O}_1: x^2 + y^2 = 25$ oraz $\mathcal{O}_2: (x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 25$ przecinają się w punktach A i B . Wyznacz współrzędne tych punktów i długość wspólnej cięciwy.

ROZWIĄZANIE

- Rozwijamy $\mathcal{O}_2: x^2 + y^2 - 14x - 2y + 25 = 0$. Odejmujemy od $\mathcal{O}_1$:
 $14x + 2y - 50 = 0 \Rightarrow y = 25 - 7x$.
- Podstawiamy do $\mathcal{O}_1: x^2 + (25 - 7x)^2 = 25 \Rightarrow 50x^2 - 350x + 600 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$.
- $x = 3, y = 4$ lub $x = 4, y = -3$. Kontrola w $\mathcal{O}_2: 16 + 9 = 25 \checkmark, 9 + 16 = 25 \checkmark$.
- $|AB| = \sqrt{1 + 49} = 5\sqrt{2}$.

Odpowiedź: $A = (3, 4), B = (4, -3), |AB| = 5\sqrt{2}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — równanie prostej AB (odjęcie równań),
- 2 pkt — równanie z jedną niewiadomą,
- 3 pkt — punkty A i B ,
- 4 pkt — długość cięciwy.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak (zad. 9 — proste, klucz PR14)
2025	zad. 8	5 pkt	dwa okręgi przecinające się w A i B — wspólna cięciwa, dalsze obliczenia
2024	zad. 11	5 pkt	środek okręgu na prostej $y = x + 1$, promień $\sqrt{5}$, styczne przez punkt A
2023	zad. 13	6 pkt	prosta przecina parabolę w A, B ; AB średnicą okręgu
2022	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2021	zad. 10	4 pkt	promień okręgu i punkt styczności prostej przez A, B
2020	zad. 12	5 pkt	prosta przecina okrąg; obraz okręgu w jednokładności

Trening: zadania **PR15.1–PR15.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR16 Stereometria rozszerzona

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 3,4 pkt (0–6)

FORMY ZADAŃ

otwarte 4–5 pkt — kąty dwuściennie, przekroje, ostrosłupy nieprawidłowe

 **Sygnal:** Ustal spodek wysokości. Kąt = kąt w nazwanym trójkącie. Kąt dwuścienny — wysokości z jednego punktu krawędzi.

Co musisz umieć

- wyznaczać kąt między prostą a płaszczyzną oraz kąt dwuścienny (między ścianami),
- wykorzystywać położenie spodka wysokości: środek okręgu opisanego (równe krawędzie boczne) lub wpisanego (równe kąty ścian),
- obliczać pola przekrojów graniastosłupów i ostrosłupów,
- stosować tw. cosinusów w trójkącie „przestrzennym”.

Jak rozpoznać zadanie

- „kąt między ścianami bocznymi” → wysokości obu ścian opuszczone na wspólną krawędź z jednego punktu,
- „wszystkie krawędzie boczne mają równą długość” → spodek w środku okręgu opisanego na podstawie,
- „płaszczyzna przechodząca przez...” → przekrój; zidentyfikuj figurę.

Teoria w pigułce

- Kąt dwuścienny: w obu ścianach prowadzimy prostopadłe do wspólnej krawędzi z tego samego punktu; kąt między nimi liczymy z tw. cosinusów.
- Ostrosłup prawidłowy trójkątny: spodek w środku trójkąta; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.
- Równe krawędzie boczne $\Leftrightarrow$ spodek wysokości to środek okręgu opisanego na podstawie; równe kąty nachylenia ścian $\Leftrightarrow$ środek okręgu wpisanego.
- Czworościan foremny: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Kąt między ścianami ostrosłupa, którego wszystkie krawędzie są równe: $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$.

Σ Najważniejsze wzory

$$V = \frac{1}{3}P_p H$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\cos \varphi = \frac{h_1^2 + h_2^2 - d^2}{2h_1 h_2}$$

$$V_{\text{czworościanu}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Algorytm krok po kroku

- Rysunek + oznaczenia; ustal spodek wysokości.
- Wskaż kąt jako kąt w konkretnym trójkącie (nazwij wierzchołki).
- Oblicz boki tego trójkąta (Pitagoras, pola, tw. cosinusów).
- Oblicz funkcję trygonometryczną kąta, potem objętość/pole.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X kąt ściany z krawędzią boczną	✓ wysokość ściany i jej rzut	dwa różne kąty
X kąt między ścianami — wysokości z różnych punktów krawędzi	✓ z tego samego punktu	definicja kąta dwuściennego
X spodek zawsze w środku podstawy	✓ tylko w ostrosłupie prawidłowym	sprawdź, gdzie jest wysokość
X $\cos \varphi < 0 \rightarrow$ „błąd”	✓ kąt między ścianami bywa rozwarty	znak cosinusa

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 10 z matury 2025

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest kwadrat $ABCD$ o boku 6 , a krawędź SA jest wysokością ostrosłupa i $|SA| = 6$. Oblicz cosinus kąta między ścianami SBC i SDC .

ROZWIĄZANIE

- $|SB| = |SD| = 6\sqrt{2}$, $|SC| = 6\sqrt{3}$. $BC \perp AB$ i $BC \perp SA$, więc $BC \perp SB$ — trójkąt SBC jest prostokątny.
- Wysokość z B na SC : $h = \frac{|SB| \cdot |BC|}{|SC|} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$; z symetrii taka sama z D , z tym samym spodem na SC .
- $|BD| = 6\sqrt{2}$: $\cos \varphi = \frac{24+24-72}{2 \cdot 24} = -\frac{1}{2}$, więc $\varphi = 120^\circ$.

Odpowiedź: $-\frac{1}{2}$ (kąt 120°)

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — długości SB , SD , SC ,
- 2 pkt — wskazanie kąta między ścianami,
- 3 pkt — wysokości $2\sqrt{6}$,
- 4 pkt — tw. cosinusów,
- 5 pkt — $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 8	4 pkt	ostrosłup prawidłowy trójkątny: długość okręgu opisanego na podstawie i cosinus kąta
2025	zad. 10	5 pkt	ostrosłup z krawędzią SA jako wysokością — cosinus kąta między ścianami
2024	—	0 pkt	stereometria w optymalizacji (klucz PR19)
2023	zad. 7	4 pkt	sześcian o krawędzi 6 i punkt S — kąt/przekrój
2022	zad. 13	5 pkt	graniastosłup prosty — kąt między przekątnymi ścian, $\sin \alpha = \frac{12}{13}$
2021	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2020	zad. 14	6 pkt	ostrosłup o podstawie trapezu, $\tan \alpha = \frac{9}{2}$ — objętość

Trening: zadania **PR16.1–PR16.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR17 Parametr, funkcja kwadratowa i wzory Viète'a

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 5,1 pkt (4–6)

FORMY ZADAŃ

otwarte 5–6 pkt — „wyznacz m , dla których równanie ma dwa różne rozwiązania spełniające...”

 **Sygnal:** $a \neq 0 \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow$ warunek przez Viète'a $\rightarrow$ część wspólna.

Co musisz umieć

- zapisywać warunki: $a \neq 0$, $\Delta > 0$ (dwa różne), $\Delta \geq 0$ (istnieją),
- stosować wzory Viète'a i wyrażać sumy potęg przez $x_1 + x_2$ i x_1x_2 ,
- badać znaki pierwiastków (oba dodatnie, różnych znaków, tego samego znaku),
- rozwiązywać nierówności z parametrem (także wymierne) i wyznaczać część wspólną wszystkich warunków.

Jak rozpoznać zadanie

- „dwa różne rozwiązania rzeczywiste spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 \dots$ ” $\rightarrow \Delta > 0$ + Viète,
- „tego samego znaku” $\rightarrow x_1x_2 > 0$; „dodatnie” $\rightarrow$ dodatkowo $x_1 + x_2 > 0$,
- współczynnik przy x^2 zależny od $m \rightarrow$ osobno $a \neq 0$ (i ewentualnie przypadek $a = 0$).

Teoria w pigułce

- Viète: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.
- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$; $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.
- Oba pierwiastki dodatnie: $\Delta > 0$, $x_1x_2 > 0$, $x_1 + x_2 > 0$. Różnych znaków: $x_1x_2 < 0$ (wtedy $\Delta > 0$ automatycznie).
- Liczba k leży między pierwiastkami $\Leftrightarrow a \cdot f(k) < 0$.
- Odpowiedź = część wspólna **wszystkich** warunków (zapisz ją na osi).

Σ Najważniejsze wzory

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$a \cdot f(k) < 0$$

Algorytm krok po kroku

1. Warunek $a \neq 0$ (jeśli a zależy od m).
2. Warunek $\Delta > 0$ — rozwiąż nierówność z m .
3. Warunek z treści: zamień na $x_1 + x_2$ i x_1x_2 , podstaw Viète'a, rozwiąż.
4. Część wspólna wszystkich warunków — odpowiedź.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
✗ pominięty warunek $\Delta > 0$	✓ zawsze na początku	rozwiązanie z warunku może nie istnieć
✗ $m = 2$ spełnia warunek z treści → odpowiedź	✓ sprawdź $\Delta(2) > 0$	dla $\Delta = 0$ jest jeden pierwiastek
✗ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$	✓ $-2x_1x_2$	wzór skróconego mnożenia
✗ mnożenie nierówności przez $m - 1$	✓ przenieś i sprowadź do wspólnego mianownika	nieznany znak

🔥 Przykład wzorcowy typ zadań 11–12 z matur 2023–2026

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 43$.

ROZWIĄZANIE

- $\Delta = 9m^2 - 4(2m^2 + 1) = m^2 - 4 > 0 \iff m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.
- $x_1^2 + x_2^2 = (3m)^2 - 2(2m^2 + 1) = 5m^2 - 2$.
- $5m^2 - 2 = 43 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$.
- Oba spełniają $|m| > 2$. Odpowiedź: $m = -3$ lub $m = 3$.

Odpowiedź: $m = -3$ lub $m = 3$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — warunek $\Delta > 0$ i jego rozwiązanie,
- 2 pkt — wyrażenie $x_1^2 + x_2^2$ przez Viète'a,
- 3 pkt — równanie $5m^2 - 2 = 43$,
- 4 pkt — $m = \pm 3$,
- 5 pkt — sprawdzenie warunku $\Delta > 0$ i odpowiedź.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 10	5 pkt	$f(x) = m^2x^2 - 2mx - m + 1$ — dwa różne miejsca zerowe z warunkiem
2025	zad. 11	6 pkt	$(2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$ — dwa miejsca zerowe tego samego znaku z warunkiem
2024	zad. 12	6 pkt	$x^2 - (3m + 1)x + 2m^2 + m + 1 = 0$ — warunek na pierwiastki
2023	zad. 11	5 pkt	$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$ — warunek na pierwiastki
2022	zad. 12	5 pkt	$x^2 - (m + 1)x + m = 0$ — warunek na pierwiastki
2021	zad. 11	5 pkt	trójmian $4x^2 - 2(m + 1)x + m$ — warunek na miejsca zerowe
2020	zad. 11	4 pkt	$2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ — wzory Viète'a

Trening: zadania **PR17.1–PR17.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR18 Pochodna, monotoniczność i ekstrema

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

3/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,6 pkt (0–7)

FORMY ZADAŃ

otwarte 3 pkt (styczna), 4 pkt (najmniejsza wartość, monotoniczność); narzędzie w PR19

 **Sygnal:** Pochodna → rozkład → znak → monotoniczność i ekstrema. Styczna: $f'(x_0)$ i punkt.

Co musisz umieć

- obliczać pochodne wielomianów, iloczynu i ilorazu,
- wyznaczać równanie stycznej
 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (także gdy dany jest $f(x_0)$, a nie x_0),
- wyznaczać przedziały monotoniczności i ekstrema z badania znaku f' ,
- znajdować wartość najmniejszą i największą na przedziale (ekstrema + końce).

Jak rozpoznać zadanie

- „styczna do wykresu w punkcie...”, „styczna równoległa do prostej...” → $f'(x_0)$,
- „wyznacz przedziały monotoniczności / ekstrema” → znak pochodnej,
- „najmniejsza wartość funkcji na przedziale” → porównanie wartości.

Teoria w pigułce

- $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(fg)' = f'g + fg'$; $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Styczna w x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; współczynnik kierunkowy stycznej = $f'(x_0)$.
- $f' > 0$ na przedziale $\Rightarrow f$ rośnie; $f' < 0 \Rightarrow f$ maleje.
- Ekstremum w x_0 : $f'(x_0) = 0$ i f' zmienia znak (sam warunek $f' = 0$ nie wystarcza).
- Wartości skrajne na $[a, b]$: porównaj f w punktach krytycznych z $[a, b]$ i na końcach.

Σ Najważniejsze wzory

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = 0 + \text{zmiana znaku}$$

Algorytm krok po kroku

1. Dziedzina funkcji (i pochodnej).
2. Oblicz $f'(x)$ i uprość (rozłóż licznik na czynniki).
3. Miejsca zerowe f' + tabela/szkic znaku.
4. Wnioski: monotoniczność, ekstrema, wartości — z jednostkami i dziedziną.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$	✓ wzór na pochodną ilorazu	
$\times$ monotoniczność „na sumie” $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$	✓ osobno na każdym przedziale	funkcja rosnąca na sumie $\neq$
$\times$ wartość największa = maksimum lokalne	✓ porównaj też końce przedziału	ekstremum $\neq$ wartość skrajna
$\times$ styczna: $y = f'(x_0)x + f(x_0)$	✓ $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	przesunięcie o x_0

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 12.2 z matury 2023

Wyznacz przedziały monotoniczności oraz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

ROZWIĄZANIE

- $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$; $x^2 + x + 1 > 0$ dla każdego x .
- $f' < 0$ dla $x < 1$, $f' > 0$ dla $x > 1$: maleje na $(-\infty, 1]$, rośnie na $[1, \infty)$.
- Minimum (globalne) w $x = 1$: $f(1) = 1 - 4 + 5 = 2$.

Odpowiedź: maleje na $(-\infty, 1]$, rośnie na $[1, \infty)$; $f_{\min} = f(1) = 2$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — pochodna,
- 2 pkt — rozkład i znak pochodnej,
- 3 pkt — przedziały monotoniczności,
- 4 pkt — najmniejsza wartość 2.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	pochodna w zadaniu optymalizacyjnym (PR19)
2025	—	0 pkt	pochodna w zadaniu optymalizacyjnym (PR19)
2024	zad. 4	3 pkt	styczna do $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$ w punkcie o odciętej 2
2023	zad. 3, 12.2	7 pkt	styczna do funkcji wymiernej w $P = (x_0, 3)$; najmniejsza wartość $x^4 + x^2 - 6x$
2022	zad. 2	1 pkt	pochodna $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ dla $x = \frac{1}{2}$
2021	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2020	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza

Trening: zadania **PR18.1–PR18.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PR19 Optymalizacja z pochodną

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 6,3 pkt (4–7)

FORMY ZADAŃ

wiązka 6–7 pkt: „wykaż, że $P(x) = \dots$ ” (2–3 pkt) + „wyznacz wartość najmniejszą/największą” (4 pkt)

 **Sygnal:** Model + dziedzina → pochodna → znak → ekstremum globalne → pełna odpowiedź.

Co musisz umieć

- budować model: wybór zmiennej, zależności z geometrii/treści, funkcja jednej zmiennej,
- wyznaczać dziedzinę modelu (z treści: długości dodatnie, ograniczenia typu $x \leq 10$),
- badać pochodną i uzasadniać, że ekstremum lokalne jest globalnym na dziedzinie,
- podawać odpowiedź na pytanie (wymiary i wartość).

Jak rozpoznać zadanie

- „rozważamy wszystkie ..., dla których ...” + „największa/najmniejsza” → optymalizacja,
- część „Wykaż, że $V(h) = \dots$ ” — to punkty za model; nawet bez niej rozwiązuj drugą część z podanym wzorem!
- funkcja wymierna lub wielomian stopnia 3 na przedziale — pochodna.

Teoria w pigułce

- Schemat: zmienna → druga wielkość z warunku → $f(x)$ + dziedzina → $f'(x)$ → znak → ekstremum → odpowiedź.
- Jeśli na dziedzinie (przedział) f' zmienia znak z $-$ na $+$ tylko raz, to minimum lokalne jest wartością najmniejszą.
- Przy przedziale domkniętym z jednej strony porównaj wartość w ekstremum z wartością na końcu.
- Pochodną funkcji wymiernej upraszczaj do postaci „iloczyn / kwadrat” — znak zależy tylko od licznika.

Σ Najważniejsze wzory

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$V_{\text{stożka}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$P = \frac{1}{2}ah$$

$$f'(x_0) = 0 \text{ i zmiana znaku}$$

Algorytm krok po kroku

1. Oznacz zmienną (z jednostką) i zapisz zależności z treści (Pitagoras, podobieństwo, pole, objętość).
2. Wyraż badaną wielkość jako funkcję jednej zmiennej, podaj dziedzinę.
3. Pochodna, miejsca zerowe w dziedzinie, znak pochodnej (monotoniczność).
4. Uzasadnij globalność ekstremum, oblicz wartość i odpowiedz na pytanie.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X brak dziedziny	✓ np. $h \in (5, \infty)$	punkt w schemacie CKE
X $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ „to maksimum”	✓ zbadaj znak pochodnej	może być minimum lub brak ekstremum
X podanie tylko x	✓ wymiary i wartość (np. objętość)	czytaj pytanie
X rezygnacja z 12.2 bez 12.1	✓ wzór jest podany — rozwiążuj!	części są niezależne punktowo

🔗 Przykład wzorcowy typ zadania 12 z matury 2025

Rozważamy wszystkie stożki, w których odległość środka podstawy od tworzącej jest równa **3**. Wyznacz wysokość stożka o najmniejszej objętości i oblicz tę objętość.

ROZWIĄZANIE

1. W przekroju osiowym: trójkąt prostokątny o przyprostokątnych r, h ; wysokość na przeciwprostokątną l równa **3**: $\frac{rh}{l} = 3 \Rightarrow r^2 h^2 = 9(r^2 + h^2) \Rightarrow r^2 = \frac{9h^2}{h^2 - 9}, h > 3$.
2. $V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{9h^3}{h^2 - 9}, h \in (3, \infty)$.
3. $V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot 9 \cdot \frac{3h^2(h^2 - 9) - 2h^4}{(h^2 - 9)^2} = 3\pi \cdot \frac{h^2(h^2 - 27)}{(h^2 - 9)^2}$.
4. $V' < 0$ dla $h \in (3, 3\sqrt{3})$, $V' > 0$ dla $h > 3\sqrt{3}$ — minimum w $h = 3\sqrt{3}$.
5. $V(3\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{9 \cdot 81\sqrt{3}}{18} = \frac{27\sqrt{3}}{2}\pi$.

Odpowiedź: $h = 3\sqrt{3}$, $V_{\min} = \frac{27\sqrt{3}}{2}\pi$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1–2 pkt — wyprowadzenie $r^2 = \frac{9h^2}{h^2 - 9}$ i wzoru $V(h)$ z dziedziną,
- 3 pkt — pochodna,
- 4 pkt — miejsce zerowe $h = 3\sqrt{3}$,
- 5 pkt — uzasadnienie minimum,
- 6 pkt — objętość.

📅 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 12.1, 12.2	7 pkt	kwietnik w kształcie trójkąta, $P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$ na $(4, 10]$
2025	zad. 12.1, 12.2	6 pkt	stożki z odległością środka podstawy od tworzącej 5 — najmniejsza objętość
2024	zad. 13.1, 13.2	6 pkt	graniastostupy prawidłowe trójkątne o objętości 3456 — najmniejsze pole
2023	zad. 12.2	4 pkt	najmniejsza wartość funkcji $x^4 + x^2 - 6x$ dla $x > 0$
2022	zad. 15	7 pkt	trójkąty równoramienne o obwodzie 18 — największe pole
2021	zad. 15	7 pkt	zbiornik o pojemności 144 m³ — najniższy koszt
2020	zad. 15	7 pkt	ekran smartfona o polu 60 cm² — najmniejsza powierzchnia z obramowaniem

Trening: zadania **PR19.1–PR19.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,3 pkt (0–4)

FORMY ZADAŃ

otwarte 3–4 pkt — „Wykaż, że...” w geometrii lub nietypowe obliczenie wymagające pomysłu

 **Sygnal:** Rysunek + założenia. Most: kąty, podobieństwo, wspólna wysokość, tw. sinusów lub współrzędne.

Co musisz umieć

- prowadzić dowód: założenia → kolejne wnioski z uzasadnieniem → teza,
- stosować przystawanie, podobieństwo, kąty w okręgu i stosunki pól (wspólna wysokość),
- stosować tw. sinusów/cosinusów i wzory trygonometryczne w dowodach,
- wprowadzać układ współrzędnych lub wektory, gdy geometria syntetyczna jest trudna.

Jak rozpoznać zadanie

- „Wykaż, że...” z figurą bez liczb,
- zależność między kątami ($\beta = 2\alpha$) → tw. sinusów + wzory na $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$,
- stosunki pól → wspólna wysokość lub $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

Teoria w pigułce

- Trójkąty o wspólnej wysokości: stosunek pól = stosunek podstaw.
- Środkowa dzieli trójkąt na dwa o równych polach; odcinek łączący środki boków: $\parallel$ do trzeciego i równy jego połowie.
- W trójkącie prostokątnym środek przeciwprostokątnej jest środkiem okręgu opisanego.
- Kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty; kąty przy jednym ramieniu trapezu sumują się do 180° .
- Metoda współrzędnych: umieść figurę wygodnie (wierzchołek w $(0, 0)$, bok na osi Ox).

Σ Najważniejsze wzory

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_1}{a_2} \text{ (wspólna } h)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Algorytm krok po kroku

1. Duży rysunek z oznaczeniami; zapisz założenia i tezę.
2. Szukaj „mostu”: równe kąty, trójkąty podobne, wspólna wysokość, tw. sinusów.
3. Każdy krok z uzasadnieniem („bo kąty wierzchołkowe”, „z tw. o dwusiecznej”).
4. Zakończ tezę i znakiem ■.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X „z rysunku widać”	✓ uzasadnienie twierdzeniem	rysunek nie jest dowodem
X założenie tezy w dowodzie	✓ wniosku od założeń	błędne koło
X dowód dla szczególnego przypadku (np. równoboczny)	✓ ogólny przypadek	brak ogólności
X kąty „równe, bo tak wyglądają”	✓ nazwij twierdzenie	każdy krok uzasadniony

🔗 Przykład wzorcowy typ zadania 8 z matury 2024

W trójkącie ABC kąt ABC jest dwa razy większy od kąta BAC . Oznaczmy $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Wykaż, że $b^2 = a(a + c)$.

ROZWIĄZANIE

- Niech $|\angle A| = \alpha$, $|\angle B| = 2\alpha$, $|\angle C| = 180^\circ - 3\alpha$. Tw. sinusów: $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin 2\alpha$, $c = 2R \sin 3\alpha$.
- $a + c = 2R(\sin \alpha + \sin 3\alpha) = 2R \cdot 2 \sin 2\alpha \cos \alpha$.
- $a(a + c) = 4R^2 \sin \alpha \cdot 2 \sin 2\alpha \cos \alpha = 4R^2 \sin 2\alpha \cdot (2 \sin \alpha \cos \alpha) = 4R^2 \sin^2 2\alpha = b^2$. ■

Odpowiedź: dowód

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapis boków przez R i sinusy kątów,
- 2 pkt — przekształcenie $\sin \alpha + \sin 3\alpha$,
- 3 pkt — doprowadzenie do $4R^2 \sin^2 2\alpha$,
- 4 pkt — pełny wniosek.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 4	3 pkt	kwadrat, środki boków, prostopadłość $DK \perp KM$
2025	zad. 3	3 pkt	trójkąt równoboczny: stosunek pól $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \rightarrow$ kąt DAC
2024	zad. 8	4 pkt	trójkąt z $ \angle ABC = 2 \angle BAC $ — wykaż zależność boków
2023	zad. 5	3 pkt	trójkąt prostokątny z kątem 60° , punkty K, L na bokach
2022	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2021	zad. 8	3 pkt	trójkąt równoboczny z punktami na bokach — dowód
2020	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza

Trening: zadania **PR20.1–PR20.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

Ściąga — wszystkie klucze na jednej stronie

Sygnał rozpoznawczy i 3–4 najważniejsze wzory każdego klucza. Przejrzyj ją rano przed maturą.

PR01	Funkcja wykładnicza i logarytmiczna Dziedzina → wspólna podstawa lub podstawienie → porównanie (podstawa < 1 odwraca znak).	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $a^{\log_a b} = b$ $N(t) = N_0 \cdot k^t$ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
PR02	Dowody algebraiczne i nierówności Wszystko na jedną stronę → rozkład z $(a-b)^2 \rightarrow$ znak każdego czynnika → wniosek.	$(a-b)^2 \geq 0$ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ($x > 0$) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
PR03	Wartość bezwzględna — równania i nierówności Miejsca zerowe pod modułami → przedziały → rozwiązanie n przedział → suma.	$\sqrt{a^2} = a $ $ f < a \iff -a < f < a$ $ f = g \iff f = \pm g$ $ x-a $ — odległość od a
PR04	Wielomiany i nierówności wymierne Pierwiastek z dzielników wyrazu wolnego → Horner → węzyk. Ułamki: wspólny mianownik, nie mnożyć!	$W(x) = (x-a)Q(x) + W(a)$ $R(x) = ax + b$ przy dzielniku stopnia 2 $\frac{f}{g} \geq 0 \iff fg \geq 0, g \neq 0$ pierwiastki: $\pm \frac{p}{q}$
PR05	Ciągi arytmetyczne i geometryczne — zadania łączone Wszystko przez a_1 i r (lub środkowy wyraz) → $b^2 = ac$ / $2b = a + c \rightarrow$ równanie → odrzuć sprzeczne.	$a_n = a_1 + (n-1)r$ $a_n = a_1 q^{n-1}$ $2b = a + c$ $b^2 = ac$
PR06	Szereg geometryczny nieskończony Najpierw $ q < 1$. Suma $\frac{a_1}{1-q}$. Rozważ q dodatnie i ujemne.	$S = \frac{a_1}{1-q}, q < 1$ $0, (a) = \frac{a}{9}, 0, (ab) = \frac{ab}{99}$ pola: iloraz k^2
PR07	Granice ciągów i funkcji $\frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ najwyższa potęga; $\frac{0}{0} \rightarrow$ skrócić; $\frac{c}{0} \rightarrow$ znak mianownika.	$\lim \frac{a_k n^k}{b_k n^k} = \frac{a_k}{b_k}$ $\sqrt{A} - B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} + B}$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\frac{c}{0+} = +\infty$ ($c > 0$)
PR08	Kombinatoryka rozszerzona Kolejność? powtórzenia? → wzór. Zero z przodu i sąsiedztwo — odejmij lub sklej.	$n! \frac{n!}{(n-k)!}$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n^k
PR09	Prawdopodobieństwo: klasyczne, warunkowe, Bernoulli Nazwij model: klasyczny / Bernoulli / warunkowy / drzewo. Zapisz wzór z liczbami, potem licz.	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(A) = \sum P(A B_i)P(B_i)$ $1 - (1-p)^n$
PR10	Tożsamości trygonometryczne Rozpisz kąty podwojone, sumy zamień na iloczyny, wszystko przez sin i cos.	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$
PR11	Równania trygonometryczne Wyłącz, nie dziel. Jednorodne → $\operatorname{tg} x$. Sinus: dwie serie. Na końcu przedział.	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ $2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$
PR12	Planimetria z twierdzeniem sinusów i cosinusów Bok-kąt-bok → cosinusów; kąt naprzeciw boku + $R \rightarrow$ sinusów. Sinus kąta daje dwa kąty.	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ $P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ $P = \frac{abc}{4R} = pr$
PR13	Okręgi i czworokąty wpisane/opisane Wpisane: kąty do 180° . Opisane: sumy boków. Przekątna + tw. cosinusów w dwóch trójkątach.	$\alpha + \gamma = 180^\circ$ $a + c = b + d$ $R = \frac{abc}{4P}$ $r = \frac{P}{p}$
PR14	Geometria analityczna: proste, punkty, pola Brak współrzędnych? Wprowadź układ. Prostopadłość = iloczyn skalarny 0. Pole = $\frac{1}{2} \text{wyznacznik} $.	$d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $P = \frac{1}{2} u_1 v_2 - u_2 v_1 $ $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$ $\operatorname{tg} \varphi = \left \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} \right $

PR15	Okrąg w układzie współrzędnych Postać kanoniczna → S, r . Styczność: $d = r$. Dwa okręgi: odejmij równania.	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad r^2 = a^2 + b^2 - c$ $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad S_1 S_2 = r_1 + r_2 \text{ (styczne zewn.)}$
PR16	Stereometria rozszerzona Ustal spodek wysokości. Kąt = kąt w nazwanym trójkącie. Kąt dwuścienny — wysokości z jednego punktu krawędzi.	$V = \frac{1}{3} P_p H \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad \cos \varphi = \frac{h_1^2 + h_2^2 - d^2}{2h_1 h_2}$ $V_{\text{czworoscianu}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$
PR17	Parametr, funkcja kwadratowa i wzory Viète'a $a \neq 0 \rightarrow \Delta > 0 \rightarrow$ warunek przez Viète'a → część wspólna.	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$ $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$
PR18	Pochodna, monotoniczność i ekstrema Pochodna → rozkład → znak → monotoniczność i ekstrema. Styczna: $f'(x_0)$ i punkt.	$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad f'(x) = 0 + \text{zmiana znaku}$
PR19	Optymalizacja z pochodną Model + dziedzina → pochodna → znak → ekstremum globalne → pełna odpowiedź.	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad V_{\text{stożka}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad P = \frac{1}{2} ah$ $f'(x_0) = 0 \text{ i zmiana znaku}$
PR20	Dowód geometryczny i zadania mieszane Rysunek + założenia. Most: kąty, podobieństwo, wspólna wysokość, tw. sinusów lub współrzędne.	$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_1}{a_2} \text{ (wspólna } h) \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

Źródła i metodologia

Analiza dotyczy powtarzalnych **umiejętności i schematów**, a nie przewidywania treści konkretnych zadań. Częstotliwość i punkty policzono na podstawie **siedmiu** prawdziwych arkuszy majowych CKE z lat **2020–2026**, rozpisanych zadanie po zadaniu w serwisie matematix.pl. Arkusze 2020–2022 pochodzą z Formuły 2015 — uwzględniamy z nich tylko te zadania, których umiejętności nadal obowiązują w Formule 2023 (pominięte zostały m.in. ułamki okresowe i funkcja wykładnicza na poziomie podstawowym). Od matury 2025 wymagania egzaminacyjne opierają się na zmienionej (odchudzonej) podstawie programowej, dlatego arkusze 2025–2026 mają w analizie największą wagę.

Zadania treningowe są **autorskie** — odwzorowują typy umiejętności z arkuszy, ale nie są kopiami zadań CKE. Wszystkie odpowiedzi zostały zweryfikowane rachunkowo.

- CKE — Egzamin maturalny w Formule 2023 i w Formule 2015: arkusze, zasady oceniania, „Wybrane wzory matematyczne”,
- matematix.pl — arkusze maturalne z matematyki z rozwiązaniami (poziom podstawowy i rozszerzony, lata 2020–2026),
- matematix.pl/poradnik-maturalny — interaktywna wersja tego opracowania: zadania z zapisem postępów.