

MATURA Z MATEMATYKI · MATURA PODSTAWOWA

KLUCZE

Klucze rozpoznawcze i algorytmy punktowe

System rozpoznawania typów zadań: teoria w pigułce, wzory, algorytm, pułapki, przykład wzorcowy i ślad w prawdziwych arkuszach CKE.

25

kluczy

250

zadań treningowych

100%

z rozwiązaniami

Analiza: majowe arkusze CKE 2020–2026 (7 arkuszy: Formuła 2015 i Formuła 2023), poziom podstawowy. Zadania treningowe są autorskie i odwzorowują typy umiejętności — nie są kopiami zadań CKE.

Spis treści

Jak korzystać z opracowania

- PP01 Potęgi i pierwiastki
- PP02 Logarytmy
- PP03 Wartość bezwzględna i przedziały
- PP04 Wzory skróconego mnożenia
- PP05 Dowody algebraiczne i podzielność
- PP06 Równania liniowe, iloczynowe i wymierne
- PP07 Wielomiany i rozkład na czynniki
- PP08 Nierówności liniowe i kwadratowe
- PP09 Układy równań i zadania tekstowe
- PP10 Procenty i procent składany
- PP11 Odczytywanie własności funkcji i funkcje kawałkami
- PP12 Funkcja liniowa i proste
- PP13 Funkcja kwadratowa
- PP14 Ciąg arytmetyczny
- PP15 Ciąg geometryczny
- PP16 Trygonometria podstawowa
- PP17 Trójkąty: Pitagoras, pola, sinus i cosinus
- PP18 Podobieństwo, twierdzenie Talesa i dwusieczna
- PP19 Okrąg i kąty
- PP20 Geometria analityczna
- PP21 Stereometria
- PP22 Kombinatoryka
- PP23 Prawdopodobieństwo
- PP24 Statystyka: średnia, mediana, dominanta
- PP25 Optymalizacja i modelowanie funkcją kwadratową

Ściąga — wszystkie klucze

Źródła i metodologia

Jak korzystać z opracowania

Każde zadanie maturalne należy do jednego z **25 kluczy** — powtarzalnych typów umiejętności. Zanim zaczniesz liczyć, **nazwij klucz**: to uruchamia gotowy schemat i chroni przed typowymi błędami.

1. Rozpoznaj

sekcja „Jak rozpoznać” — sygnały w treści i na rysunku.

2. Przypomnij

„Teoria w pigułce” i „Wzory” — tylko to, co naprawdę potrzebne.

3. Zastosuj

„Algorytm” — kolejne kroki, które prowadzą do punktów.

4. Sprawdź

„Pułapki” — porównaj swój zapis z typowymi błędami.

Legenda

Priorytet	A+ najwyższy zwrot z nauki · A bardzo ważny · B ważny po opanowaniu filarów
Częstotliwość	w ilu z analizowanych arkuszy (majowe arkusze CKE 2020–2026 (7 arkuszy: Formuła 2015 i Formuła 2023), poziom podstawowy) pojawiło się zadanie z danego klucza.
Punkty w arkuszu	ile punktów faktycznie przypadało na klucz w tych arkuszach (tabela „Ślad” w każdym kluczu). Od 2025 r. arkusz podstawowy ma 50 pkt (1 pkt = 2% wyniku); w 2023–2024 miał 46 pkt, a w Formule 2015 (2020–2022) — 50 pkt.
Poziom zadań	★★★ rozpoznanie schematu · ★★ standard maturalny · ★★ zadanie wymagające

Plan nauki według priorytetów

A+ — najwyższy zwrot z nauki

PP11 Odczytywanie własności funkcji i funkcje kawałkami

PP12 Funkcja liniowa i proste

PP13 Funkcja kwadratowa

PP21 Stereometria

PP25 Optymalizacja i modelowanie funkcją kwadratową

A — bardzo ważny

PP01 Potęgi i pierwiastki

PP02 Logarytmy

PP04 Wzory skróconego mnożenia

PP05 Dowody algebraiczne i podzielność

PP06 Równania liniowe, iloczynowe i wymierne

PP08 Nierówności liniowe i kwadratowe

PP09 Układy równań i zadania tekstowe

PP10 Procenty i procent składany

PP14 Ciąg arytmetyczny

PP15 Ciąg geometryczny

PP16 Trygonometria podstawowa

PP17 Trójkąty: Pitagoras, pola, sinus i cosinus

PP18 Podobieństwo, twierdzenie Talesa i dwusieczna

PP19 Okrąg i kąty

PP20 Geometria analityczna

PP22 Kombinatoryka

PP23 Prawdopodobieństwo

PP24 Statystyka: średnia, mediana, dominanta

B — ważny po opanowaniu filarów

PP03 Wartość bezwzględna i przedziały

PP07 Wielomiany i rozkład na czynniki



Jak trenować klucz

1. Przeczytaj klucz i przykład wzorcowy — zasłoń rozwiązanie i spróbuj sam.
2. Rozwiąż zadania ★★ bez zaglądania do wzorów.
3. Zadania ★★ rozwiązuje na czas: zamknięte ok. 2–3 min, otwarte 2 pkt ok. 5 min.
4. Zadania ★★★ i otwarte sprawdzaj z rozwiązaniem i **schematem punktowania** — ucz się pisać tak, by egzaminator widział każdy krok.
5. Klucz uznaj za opanowany, gdy rozwiążesz 9/10 zadań i potrafisz nazwać metodę przed liczeniem.

PP01 Potęgi i pierwiastki

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,6 pkt (1–3)

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD, prawda/fałsz; czasem jako krok w dowodzie

 **Sygnal:** Różne podstawy → sprowadź do liczby pierwszej. Suma potęg → wyłącz najmniejszą.

Co musisz umieć

- wykonywać działania na potęgach o wykładniku całkowitym i wymiernym,
- zamieniać pierwiastki na potęgi: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (dla $a \geq 0$),
- wyłączać czynnik spod pierwiastka i usuwać niewymierność z mianownika,
- porównywać liczby zapisane za pomocą potęg i pierwiastków,
- rozstrzygać podzielność iloczynu potęg (rozkład na czynniki pierwsze).

Jak rozpoznać zadanie

- polecenie „Liczba ... jest równa” z potęgami lub pierwiastkami — prawie zawsze zadanie nr 1–3,
- różne podstawy, które są potęgami tej samej liczby: 2, 4, 8, 16; 3, 9, 27; 5, 25, 125;
 $0,2 = 5^{-1}$,
- suma potęg tej samej podstawy w liczniku** (np. $5^{12} + 5^{13} + 5^{14}$) → wyłącz najmniejszą potęgę,
- pierwiastek z pierwiastka ($\sqrt{5\sqrt{5}}$) lub iloczyn pierwiastków różnych stopni,
- pytanie o podzielność liczby typu $4^{12} \cdot 5^{24}$ (zadanie P/F).

Teoria w pigułce

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ — wykładnik ujemny daje **odwrotność**, a nie liczbę ujemną.
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ dla $a \geq 0$; w szczególności $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.
- Pierwiastek **nieparzystego** stopnia istnieje także z liczby ujemnej: $\sqrt[3]{-8} = -2$. Pierwiastek parzystego stopnia — tylko z liczby nieujemnej.
- $\sqrt{a^2} = |a|$, np. $\sqrt{(-3)^2} = 3$.
- Liczba jest podzielna przez d , gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze są **wszystkie** czynniki d w co najmniej takich samych potęgach.

Σ Najważniejsze wzory

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

🔧 Algorytm krok po kroku

1. Rozpisz każdą podstawę na czynniki pierwsze ($8 = 2^3$, $\frac{1}{27} = 3^{-3}$, $0,04 = 5^{-2}$).
2. Zamień pierwiastki na potęgi o wykładniku ułamkowym.
3. Wykonuj działania wyłącznie na wykładnikach (mnożenie → dodawanie wykładników).
4. Widzisz **sumę** potęg? Wyłącz przed nawias najmniejszą potęgę — dodawać wykładników nie wolno.
5. Zapisz wynik w postaci z odpowiedzi; odpowiedzi ABCD różnią się często tylko wykładnikiem — sprawdź go dwa razy.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times 2^3 + 2^3 = 2^6$	$\checkmark 2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^4$	dodawanie potęg $\neq$ mnożenie
$\times \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = -2$	$\checkmark \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$	wykładnik ujemny daje odwrotność
$\times \sqrt{9+16} = 3+4 = 7$	$\checkmark \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$	pierwiastek sumy $\neq$ suma pierwiastków
$\times \sqrt{(-3)^2} = -3$	$\checkmark \sqrt{(-3)^2} = -3 = 3$	$\sqrt{a^2} = a $
$\times \frac{5^{12} + 5^{13}}{5^{12}} = 5^{13}$	$\checkmark \frac{5^{12}(1+5)}{5^{12}} = 6$	najpierw wyłącz wspólny czynnik

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 2 z matury 2025

Liczba $\frac{3^{20} + 3^{21} + 3^{22}}{3^{20}}$ jest równa

A. 3^{43}

B. 13

C. 3^3

D. 3^{63}

ROZWIĄZANIE

1. W liczniku jest **suma** potęg tej samej podstawy — wyłączamy najmniejszą potęgę:

$$3^{20} + 3^{21} + 3^{22} = 3^{20}(1 + 3 + 3^2) = 3^{20} \cdot 13.$$

2. Skracamy przez 3^{20} : $\frac{3^{20} \cdot 13}{3^{20}} = 13.$

Odpowiedź: **B**

Dlaczego nie pozostałe? A — ktoś dodał wykładniki licznika ($20 + 21 + 22 = 63$) i odjął 20; D — samo dodanie wykładników; C — „skrócenie” każdej potęgi osobno.

Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 1, 3, 5	3 pkt	$\sqrt{\frac{25}{8}} \cdot \sqrt{2} + 2^{-1}$; $\sqrt{5\sqrt{5}}$; podzielność $4^{12} \cdot 5^{24}$ (P/F)
2025	zad. 1, 2	2 pkt	$(\sqrt{32} - \sqrt{2})^2$; $\frac{5^{12} + 5^{13} + 5^{14}}{5^{12}}$
2024	zad. 2	1 pkt	$\left(\frac{1}{16}\right)^8 \cdot 8^{16}$
2023	zad. 2	1 pkt	$\sqrt[3]{-\frac{27}{16}} \cdot \sqrt[3]{2}$
2022	zad. 1, 5	2 pkt	$(2\sqrt{8} - 3\sqrt{2})^2$; $3^{2+\frac{1}{4}}$
2021	zad. 1	1 pkt	$100^5 \cdot (0,1)^{-6}$
2020	zad. 2	1 pkt	$\frac{2^{50} \cdot 3^{40}}{36^{10}}$

Trening: zadania **PP01.1–PP01.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP02 Logarytmy

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

1 pkt

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD (niemal zawsze zadanie 3–4)

 **Sygnal:** Współczynnik → do wykładnika, suma → iloczyn, różnica → iloraz; na końcu argument jako potęgą podstawy.

Co musisz umieć

- stosować definicję logarytmu:
 $\log_a b = c \iff a^c = b$,
- obliczać logarytm liczby, która jest potęgą podstawy — także gdy podstawa jest pierwiastkiem lub ułamkiem,
- stosować wzory na logarytm iloczynu, ilorazu i potęgi,
- wprowadzać współczynnik do wykładnika:
 $k \log_a x = \log_a x^k$.

Jak rozpoznać zadanie

- „Liczba $\log_{\dots}$ jest równa” — suma lub różnica logarytmów o **tej samej** podstawie,
- współczynnik przed logarytmem ($2 \log_3 2$) — trzeba go „wciągnąć” do potęgi,
- nietypowa podstawa: $\sqrt{3}$, 8 , $\frac{1}{2}$ — zapisz podstawę i argument jako potęgi tej samej liczby.

Teoria w pigułce

- $\log_a b$ to wykładnik, do którego trzeba podnieść a , żeby otrzymać b . Warunki: $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $a^{\log_a b} = b$. Logarytm dziesiętny: $\log b = \log_{10} b$.
- Gdy $a = p^m$ i $b = p^n$, to $\log_a b = \frac{n}{m}$, np. $\log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}$.

Σ Najważniejsze wzory

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^k = k \log_a x$$

$$\log_a a^p = p$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Algorytm krok po kroku

1. Sprawdź, czy wszystkie logarytmy mają tę samą podstawę.
2. Współczynniki przenieś do wykładnika: $2 \log_3 2 = \log_3 4$.
3. Połącz w jeden logarytm: suma → iloczyn argumentów, różnica → iloraz.
4. Zapisz argument (i ewentualnie podstawę) jako potęgę tej samej liczby i odczytaj wykładnik.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹLE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times \log_3 108 - 2 \log_3 2 = \log_3 104$	$\checkmark \log_3 108 - \log_3 4 = \log_3 27 = 3$	najpierw współczynnik do potęgi, różnica $\rightarrow$ iloraz
$\times \log(x + y) = \log x + \log y$	$\checkmark \log(xy) = \log x + \log y$	suma logarytmów = logarytm iloczynu
$\times \log_9 3 = 3$	$\checkmark \log_9 3 = \frac{1}{2}$, bo $9^{\frac{1}{2}} = 3$	logarytm to wykładnik
$\times 2 \log_5 3 = \log_5 6$	$\checkmark 2 \log_5 3 = \log_5 9$	współczynnik $\rightarrow$ wykładnik, nie mnożnik argumentu
$\times \log_4 2 - \log_4 32 = \log_4(-30)$	$\checkmark \log_4 \frac{2}{32} = \log_4 \frac{1}{16} = -2$	różnica logarytmów $\neq$ logarytm różnicy

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 3 z matury 2025

Liczba $\log_5 150 - 2 \log_5 \sqrt{6}$ jest równa

A. 2

B. $\log_5 138$

C. 25

D. $\log_5 144$

ROZWIĄZANIE

- Współczynnik do wykładnika: $2 \log_5 \sqrt{6} = \log_5 (\sqrt{6})^2 = \log_5 6$.
- Różnica logarytmów $\rightarrow$ logarytm ilorazu: $\log_5 150 - \log_5 6 = \log_5 \frac{150}{6} = \log_5 25$.
- $25 = 5^2$, więc $\log_5 25 = 2$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — odjęte argumenty ($150 - 12$); D — odjęte 6 jako liczba; C — podany argument zamiast wykładnika.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 4	1 pkt	$\log_8 4 - \log_8 32$
2025	zad. 3	1 pkt	$\log_3 108 - 2 \log_3 2$
2024	zad. 4	1 pkt	$\log_{\sqrt{3}} 9$
2023	zad. 4	1 pkt	$\log_9 27 + \log_9 3$
2022	zad. 3	1 pkt	$4 \log_4 2 + 2 \log_4 8$
2021	zad. 4	1 pkt	$2 \log \sqrt{10} + \log 10^3$
2020	zad. 3	1 pkt	$\log_5 \sqrt{125}$

Trening: zadania **PP02.1–PP02.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnal:** Moduł = odległość. „Mniejsze” → przedział wokół środka, „większe” → dwa ramiona.

Co musisz umieć

- interpretować $|x - a|$ jako odległość liczby x od liczby a na osi,
- rozwiązywać nierówności $|x - a| < r$, $|x - a| > r$ (także nieostre) i równania $|x - a| = r$,
- przechodzić od rysunku na osi do nierówności z modułem i odwrotnie,
- wyznaczać sumę i część wspólną przedziałów.

Jak rozpoznać zadanie

- rysunek osi liczbowej z zaznaczonym zbiorem i cztery nierówności z modułem do wyboru,
- sformułowania „odległość liczby x od 3 jest mniejsza niż...”,
- przedział symetryczny wokół pewnej liczby, np. $[-3, 7]$ (środek 2).

Teoria w pigułce

- $|x| = x$ dla $x \geq 0$ oraz $|x| = -x$ dla $x < 0$; zawsze $|x| \geq 0$.
- $|x - a|$ = odległość x od a . Uwaga: $|x + 3| = |x - (-3)|$ — środkiem jest -3 .
- Przedział $[p, q]$ ma środek $\frac{p+q}{2}$ i „promień” $\frac{q-p}{2}$, więc $[p, q]: \left| x - \frac{p+q}{2} \right| \leq \frac{q-p}{2}$.
- $|x - a| < 0$ — brak rozwiązań; $|x - a| \geq 0$ — każda liczba rzeczywista.

Σ Najważniejsze wzory

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$$

$$|x - a| > r \iff x < a - r \text{ lub } x > a + r$$

$$|x - a| = r \iff x = a - r \text{ lub } x = a + r$$

$$|kx - m| < r \iff \left| x - \frac{m}{k} \right| < \frac{r}{k} \quad (k > 0)$$

Algorytm krok po kroku

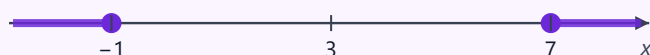
- Zapisz wyrażenie w postaci $|x - a|$ (wyciągnij współczynnik: $|2x - 6| = 2|x - 3|$).
- Znak „<” lub „≤” → jeden przedział wokół a ; „>” lub „≥” → dwa ramiona.
- Znak nieostry → końce domknięte (kółko zamalowane), ostry → otwarte.
- Z rysunku: policz środek i promień przedziału, potem dobierz nierówność.

Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRE	DLACZEGO
× $ x + 3 < 2$: środek 3	✓ środek -3 : $x \in (-5, -1)$	$ x + 3 = x - (-3) $
× $ x - 1 \geq 3 \Rightarrow x \in [-2, 4]$	✓ $x \leq -2$ lub $x \geq 4$	„większe” → dwa ramiona
× $ 2x - 6 < 4 \Rightarrow x - 3 < 4$	✓ $ x - 3 < 2$	promień też dzielimy przez 2
× $ x - 5 < 0 \Rightarrow x = 5$	✓ brak rozwiązań	moduł nigdy nie jest ujemny

 Przykład wzorcowy typ zadania 1 z matury 2023

Na osi liczbowej zaznaczono zbiór:



Zbiór ten jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

- A.** $|x - 3| \geq 4$ **B.** $|x + 3| \geq 4$ **C.** $|x - 4| \geq 3$ **D.** $|x - 3| \leq 4$

ROZWIĄZANIE

1. Zaznaczono dwa ramiona — to nierówność typu „ $\geq$ ” (końce zamalowane).
2. Środek „dziury” między -1 a 7 : $\frac{-1 + 7}{2} = 3$; odległość od środka do końca: $7 - 3 = 4$.
3. Liczby odległe od 3 o co najmniej 4 : $|x - 3| \geq 4$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — środek -3 ; C — zamienione środek i promień; D — opisuje przedział $[-1, 7]$, czyli „dziurę”.

 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2025	—	0 pkt	brak (zad. 6 — nierówność liniowa na osi, klucz PP08)
2024	zad. 1	1 pkt	zbiór rozwiązań $ x - 1 \geq 3$ na osi liczbowej
2023	zad. 1	1 pkt	zbiór $(-\infty, -2] \cup [5, \infty)$ z osi $\rightarrow$ nierówność z modułem
2022	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2021	zad. 3	1 pkt	liczby całkowite należące jednocześnie do $(-\infty, 5)$ i $[-1, +\infty)$
2020	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza

Trening: zadania **PP03.1–PP03.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP04 Wzory skróconego mnożenia

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

6/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 0,9 pkt (0–1)

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD; narzędzie w dowodach i usuwaniu niewymierności

 **Sygnal:** Widzisz $A^2 - B^2$ albo trójmian z „podwojonym iloczynem” → najpierw zwiń, potem licz.

Co musisz umieć

- rozвивać $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$ i związać wyrażenia do tych postaci,
- rozkładać różnicę kwadratów i sumę/różnicę sześciątów,
- upraszczać wyrażenia z pierwiastkami i usuwać niewymierność typu $\frac{c}{\sqrt{a} - b}$,
- rozpoznawać „pełny kwadrat” w trójmianie, np. $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.

Jak rozpoznać zadanie

- różnica kwadratów dwóch dwumianów, np. $(3x + 2)^2 - (2x - 3)^2$ — to motyw z trzech ostatnich matur,
- wartość trójmianu dla „dziwnego” x (np. $x = \sqrt{2} - 5$) — sygnal, że trójmian jest pełnym kwadratem,
- nawias z pierwiastkami podniesiony do kwadratu.

Teoria w pigułce

- $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ działa także dla całych nawiasów:
 $(3x + 2)^2 - (2x - 3)^2 = [(3x + 2) - (2x - 3)] \cdot [(3x + 2) + (2x - 3)]$.
- Pełny kwadrat: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x + 5)^2$ — rozpoznasz go po tym, że środkowy wyraz to podwojony iloczyn.
- Sprzężenie: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ — tak pozbywamy się pierwiastka z mianownika.

Σ Najważniejsze wzory

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Algorytm krok po kroku

- Najpierw rozpoznaj wzór — często szybciej jest **zwinąć** niż rozwijać.
- Różnica kwadratów nawiasów → $(A - B)(A + B)$ (mniej rachunków, mniej pomyłek ze znakami).
- Wartość wyrażenia dla konkretnego x : najpierw zwiń do kwadratu, potem podstaw.
- Kontrola: podstaw np. $x = 1$ do wyrażenia i do wybranej odpowiedzi — wyniki muszą być równe.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times (a-b)^2 = a^2 - b^2$	$\checkmark (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	zgubiony wyraz $2ab$
$\times (2x+3)^2 = 4x^2 + 9$	$\checkmark (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$	$2 \cdot 2x \cdot 3 = 12x$
$\times -(2x-3)^2 = -4x^2 - 12x - 9$	$\checkmark -(2x-3)^2 = -4x^2 + 12x - 9$	minus przed nawiasem zmienia wszystkie znaki
$\times (\sqrt{5}-1)^2 = 5-1=4$	$\checkmark (\sqrt{5}-1)^2 = 6-2\sqrt{5}$	to nie jest różnica kwadratów

🔧 Przykład wzorcowy typ zadania 4 z matury 2025

Dla każdej liczby rzeczywistej x wartość wyrażenia $(3x+1)^2 - (x-3)^2$ jest równa wartości wyrażenia

- A.** $8x^2 + 12x - 8$ **B.** $8x^2 - 8$ **C.** $8x^2 + 10$ **D.** $10x^2 + 12x + 10$

ROZWIĄZANIE

- Różnica kwadratów: $A = 3x + 1$, $B = x - 3$. $A - B = 2x + 4$, $A + B = 4x - 2$.
- $(2x + 4)(4x - 2) = 8x^2 - 4x + 16x - 8 = 8x^2 + 12x - 8$.
- Kontrola dla $x = 1$: $4^2 - (-2)^2 = 12$ oraz $8 + 12 - 8 = 12 \checkmark$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B/C — pominięte wyrazy środkowe $2ab$; D — dodane kwadraty zamiast odjęcia.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 6	1 pkt	$x^2 + 10x + 25$ dla $x = \sqrt{2} - 5$
2025	zad. 4 (+ zad. 1)	1 pkt	$(3x+2)^2 - (2x-3)^2$; $(\sqrt{32} - \sqrt{2})^2$
2024	zad. 5	1 pkt	$(2a+b)^2 - (2a-b)^2$
2023	zad. 5	1 pkt	$(2a-3)^2 - (2a+3)^2$
2022	zad. 2	1 pkt	wartość $\frac{x^2+y^2}{xy}$ przy warunku $2x = 3y$
2021	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2020	zad. 1	1 pkt	$x^2 - 6x + 9$ dla $x = \sqrt{3} + 3$

Trening: zadania **PP04.1–PP04.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnal:** Cel: $d \cdot (\text{liczba całkowita})$. Nieparzysta $\rightarrow 2k + 1$. Na końcu zdanie z wnioskiem.

Co musisz umieć

- zapisywać liczby: parzystą $2k$, nieparzystą $2k + 1$, kolejne n , $n + 1$, $n + 2$, z resztą r : $d \cdot m + r$,
- przekształcać wyrażenie do postaci $d \cdot (\text{liczba całkowita})$ lub $d \cdot m + r$,
- uzasadniać parzystość iloczynu kolejnych liczb ($n(n + 1)$) lub liczb różnej parzystości ($n(n + 3)$),
- zapisać pełne rozumowanie zakończone wnioskiem.

Jak rozpoznać zadanie

- „Wykaż, że dla każdej liczby (naturalnej/całkowitej/nieparzystej) n liczba ... jest podzielna przez ...”,
- „... przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2”,
- suma kwadratów kolejnych liczb, różnica kwadratów, wyrażenie z parametrem n .

Teoria w pigułce

- Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych $n(n + 1)$ jest zawsze **parzysty**; iloczyn trzech kolejnych — podzielny przez 6.
- n i $n + 3$ mają różną parzystość, więc $n(n + 3)$ jest parzysty.
- Liczba daje resztę r z dzielenia przez d , gdy $= d \cdot m + r$, gdzie m całkowite i $0 \leq r < d$.
- Sprawdzenie kilku przykładów **nie jest** dowodem — trzeba pokazać ogólnie, dla każdego n .

Σ Najważniejsze wzory

$$n = 2k \text{ (parzysta)}$$

$$n = 2k + 1 \text{ (nieparzysta)}$$

$$A = d \cdot m \Rightarrow d \mid A$$

$$A = d \cdot m + r \text{ (reszta } r)$$

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Algorytm krok po kroku

1. Zapisz cel: „trzeba pokazać, że $L = 14 \cdot (\text{liczba całkowita})$ ”.
2. Podstaw postać liczby ($n = 2k + 1$) albo wyłącz wspólny czynnik ($7n^2 + 21n = 7n(n + 3)$).
3. Uprość do postaci $d \cdot m$ (lub $d \cdot m + r$) i uzasadnij, że m jest całkowite.
4. Zakończ zdaniem: „Zatem liczba ... jest podzielna przez d ”.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X „Dla $n = 1, 2, 3$ działa, więc prawda”	✓ dowód ogólny dla dowolnego n	przykłady nie są dowodem
X $7n(n+3) \dots$ „więc podzielne przez 14”	✓ $n(n+3)$ parzyste $\Rightarrow 7n(n+3) = 14m$	brak uzasadnienia parzystości = 1 pkt
X $3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2$ bez komentarza	✓ $\dots = 3m + 2$, gdzie $m = n^2 + 2n + 1 \in \mathbb{Z}$	nazwij całkowitą liczbę m
X rachunek bez wniosku	✓ „Zatem liczba jest podzielna przez 8.”	zdanie końcowe jest częścią dowodu

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 7 z matury 2026

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $5n^2 + 15n$ jest podzielna przez 10.

ROZWIĄZANIE

- Wyłączamy wspólny czynnik: $5n^2 + 15n = 5n(n+3)$.
- Liczby n i $n+3$ różnią się o 3, więc mają różną parzystość — jedna z nich jest parzysta. Zatem $n(n+3) = 2m$ dla pewnej liczby całkowitej m .
- Stąd $5n^2 + 15n = 5 \cdot 2m = 10m$ — liczba jest podzielna przez 10. ■

Odpowiedź: dowód

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapis $5n(n+3)$ (albo rozpatrzenie przypadku n parzystego / nieparzystego),
- 2 pkt — pełne uzasadnienie, że $n(n+3)$ jest parzyste, i wniosek.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 7	2 pkt	$7n^2 + 21n$ podzielne przez 14 (n całkowite)
2025	zad. 5	2 pkt	$3n^2 + 2n + 7$ podzielne przez 4 (n nieparzyste)
2024	zad. 3	2 pkt	$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3
2023	zad. 3	2 pkt	$(2n+1)^2 - 1$ podzielne przez 8
2022	zad. 31	2 pkt	dowód nierówności z wyrażeniem $a^2 + b^2$
2021	zad. 30	2 pkt	$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ dla $0 < a < b$ i $c > 0$
2020	zad. 28	2 pkt	$a(a-2b) + 2b^2 > 0$ dla $a \neq b$

Trening: zadania PP05.1–PP05.10 (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP06 Równania liniowe, iloczynowe i wymierne

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,1 pkt (1–4)

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD („ma dokładnie...”, „jednym z rozwiązań jest...”)

 **Sygnal:** Iloczyn = 0 → każdy czynnik osobno. Ułamek → najpierw dziedzina!

Co musisz umieć

- rozwiązywać równania liniowe i proporcje,
- stosować zasadę: iloczyn równa się 0, gdy któryś czynnik jest równy 0,
- rozpoznawać czynniki bez pierwiastków (np. $x^2 + 25$),
- wyznaczać dziedzinę równania wymiernego i odrzucać rozwiązania spoza niej,
- skracać wyrażenia wymierne (tylko czynniki!).

Jak rozpoznać zadanie

- „Równanie ... ma w zbiorze liczb rzeczywistych dokładnie ...” — liczenie rozwiązań,
- iloczyn nawiasów równy zero; suma wszystkich rozwiązań z parametrem m ,
- ułamek z niewiadomą w mianowniku — obowiązkowo dziedzina.

Teoria w pigułce

- $a \cdot b = 0 \iff a = 0$ lub $b = 0$. Stała różna od zera (np. $\sqrt{3}$, 2) nie daje rozwiązań.
- $x^2 + c = 0$ przy $c > 0$ nie ma rozwiązań; $x^2 - c = 0$ daje $x = \pm\sqrt{c}$.
- $\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ i $B \neq 0$. Najpierw dziedzina, potem licznik.
- Skracać można tylko wspólne **czynniki** licznika i mianownika, nigdy składniki sumy.

Σ Najważniejsze wzory

$$ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$$

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \wedge B \neq 0$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC \quad (B, D \neq 0)$$

Algorytm krok po kroku

- Wyznacz dziedzinę (mianowniki $\neq 0$).
- Rozłóż na czynniki i przyrównaj każdy czynnik do zera.
- Odrzuć rozwiązania spoza dziedziny i te, które się powtarzają.
- Policz, ile jest różnych rozwiązań (lub ich sumę).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times \frac{x^2 - 9}{x + 3} = 0 \Rightarrow x = \pm 3$	$\checkmark x = 3$ (bo $x \neq -3$)	dziedzina odrzuca -3
$\times x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$	$\checkmark$ brak rozwiązań	kwadrat nie jest ujemny
$\times 2x(x - 5) = 3(x - 5) \Rightarrow 2x = 3$	$\checkmark (x - 5)(2x - 3) = 0: x = 5$ lub $x = \frac{3}{2}$	dzieląc przez $(x - 5)$ gubisz rozwiązanie
$\times \frac{x + 3}{x} = 3$ „skracam x ”	$\checkmark x + 3 = 3x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$	nie skracaj składników

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 8 z matury 2023

Równanie $\frac{(x - 2)(x + 3)}{(x + 3)(x - 5)} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych

- A. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 2$ B. ma dwa rozwiązania: $x = 2, x = -3$
 C. ma trzy rozwiązania D. nie ma rozwiązań

ROZWIĄZANIE

- Dziedzina: $x \neq -3$ i $x \neq 5$.
- Licznik: $(x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 2$ lub $x = -3$.
- $x = -3$ nie należy do dziedziny, zostaje tylko $x = 2$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — pominięta dziedzina; C — do rozwiązań „dopisane” zero mianownika $x = 5$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 8, 9	2 pkt	suma rozwiązań $3(x + 3)(x - m)(2x + 4) = 0$; $\frac{x + 2}{3x - 1} = \frac{2}{5}$
2025	zad. 7, 8	2 pkt	$2x(x + 3)(x^2 + 25) = 0$; skracanie wyrażenia wymiernego
2024	zad. 7	1 pkt	$\frac{x + 1}{(x + 2)(x - 3)} = 0$
2023	zad. 7, 8	2 pkt	$\sqrt{3}(x^2 - 2)(x + 3) = 0$; $\frac{(x + 1)(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)^2} = 0$
2022	zad. 8	1 pkt	iloczyn rozwiązań $2x(x^2 - 9)(x + 1) = 0$
2021	zad. 10, 32	3 pkt	wartość $\frac{x^2}{2x - 2}$; równanie $\frac{3x + 2}{3x - 2} = 4 - x$ (2 pkt)
2020	zad. 6, 10, 27	4 pkt	$x(x - 3)(x + 2) = 0$; $x(x - 2) = (x - 2)^2$; $(x^2 - 1)(x^2 - 2x) = 0$ (2 pkt)

Trening: zadania **PP06.1–PP06.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PRIORYTET

B

CZĘSTOTLIWOŚĆ

2/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,0 pkt (0–4)

FORMY ZADAŃ

otwarte za 3 pkt („Rozwiąż równanie”),
prawda/fałsz

 **Sygnal:** Cztery wyrazy stopnia 3 → grupuj „2 + 2”. Wspólny czynnik → wyłącz, nigdy nie dziel.

Co musisz umieć

- rozkładać wielomian na czynniki: wyłączanie przed nawias, grupowanie wyrazów, wzory skróconego mnożenia,
- rozwiązywać równania wielomianowe w postaci iloczynowej,
- obliczać wartość wielomianu i sprawdzać, czy liczba jest pierwiastkiem,
- rozpoznawać czynnik kwadratowy bez pierwiastków ($\Delta < 0$).

Jak rozpoznać zadanie

- równanie stopnia 3 z czterema wyrazami, np. $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0 \rightarrow$ **grupowanie** „2 + 2”,
- wyrażenie z x w każdym wyrazie $\rightarrow$ wyłącz x przed nawias,
- zadanie P/F o rozkładzie lub pierwiastkach konkretnego wielomianu.

Teoria w pigułce

- Grupowanie działa, gdy pary wyrazów mają ten sam „nawias”:
 $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = x^2(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 3)$.
- Szybki test: stosunek dwóch pierwszych współczynników = stosunek dwóch ostatnich ($1 : (-2) = (-3) : 6$).
- Liczba a jest pierwiastkiem W , gdy $W(a) = 0$; wtedy $(x - a)$ jest czynnikiem W .
- Czynnik $x^2 + c$ z $c > 0$ nie ma pierwiastków; $x^2 - c$ daje $\pm\sqrt{c}$.

Σ Najważniejsze wzory

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = x^2(ax + b) + \dots \text{ (grupowanie)}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$W(a) = 0 \iff (x - a) \mid W(x)$$

Algorytm krok po kroku

- Przenieś wszystko na jedną stronę (prawa strona = 0).
- Wyłącz wspólny czynnik (np. x) — nie dziel przez niego!
- Pogrupuj wyrazy w pary i wyłącz wspólny nawias.
- Rozłóż dalej ($x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$) i przyrównaj każdy czynnik do zera.
- Zapisz wszystkie rozwiązania (także niewymierne, np. $\pm\sqrt{3}$).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹLE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times x^3 = 4x \Rightarrow x^2 = 4$	$\checkmark x(x^2 - 4) = 0: x \in \{-2, 0, 2\}$	dzielenie przez x gubi $x = 0$
$\times x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$	$\checkmark x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$	dwa rozwiązania
$\times \Delta$ dla $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$	$\checkmark$ grupowanie $\rightarrow (x - 2)(x^2 - 3)$	delta tylko dla trójmianu kwadratowego
$\times x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$	$\checkmark$ brak pierwiastków	$x^2 \geq 0$

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 9 z matur 2023–2024

Rozwiąż równanie $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$.

ROZWIĄZANIE

- Grupujemy: $x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0$.
- Wspólny nawias: $(x + 3)(x^2 - 4) = 0$, dalej $(x + 3)(x - 2)(x + 2) = 0$.
- Rozwiązania: $x = -3, x = 2, x = -2$.

Odpowiedź: $x \in \{-3, -2, 2\}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapis lewej strony w postaci iloczynu, np. $(x + 3)(x^2 - 4)$,
- 2 pkt — wyznaczenie pierwiastków jednego czynnika lub pełny rozkład z błędem,
- 3 pkt — wszystkie rozwiązania: $-3, -2, 2$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2025	—	0 pkt	tylko równanie iloczynowe (klucz PP06)
2024	zad. 8, 9	4 pkt	P/F o $W(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x; x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$
2023	zad. 9	3 pkt	$3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$
2022	—	0 pkt	wielomianów nie było w podstawie Formuły 2015
2021	—	0 pkt	wielomianów nie było w podstawie Formuły 2015
2020	—	0 pkt	wielomianów nie było w podstawie Formuły 2015

Trening: zadania **PP07.1–PP07.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP08 Nierówności liniowe i kwadratowe

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,4 pkt (1–3)

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD (liniowa, rysunek osi); otwarte 2 pkt (kwadratowa)

 **Sygnal:** Wszystko na lewo → miejsca zerowe → szkic paraboli → odczyt. Dzielisz przez minus → odwracasz znak.

Co musisz umieć

- rozwiązywać nierówności liniowe (także z ułamkami) i zaznaczać zbiór rozwiązań na osi,
- pamiętać o zmianie zwrotu nierówności przy mnożeniu/dzieleniu przez liczbę ujemną,
- rozwiązywać nierówności kwadratowe: miejsca zerowe → szkic paraboli → odczyt,
- odczytywać zbiór rozwiązań $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ z wykresu funkcji kwadratowej.

Jak rozpoznać zadanie

- „Rozwiąż nierówność” z x^2 — otwarte za 2 pkt, co roku w arkuszu,
- nierówność liniowa + cztery przedziały lub cztery rysunki osi do wyboru,
- wykres paraboli i pytanie o zbiór argumentów, dla których $f(x) \geq 0$.

Teoria w pigułce

- Mnożenie lub dzielenie nierówności przez liczbę **ujemną** odwraca znak: $-3x \leq 12 \Rightarrow x \geq -4$.
- Parabola o ramionach w górę ($a > 0$): wartości **ujemne** między miejscami zerowymi, dodatnie na zewnątrz.
- $\Delta < 0$ i $a > 0$: trójmian jest dodatni dla każdego x ; $\Delta < 0$ i $a < 0$: ujemny dla każdego x .
- Znak nieostry ($\leq$, $\geq$) → końce przedziału domknięte.

Σ Najważniejsze wzory

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Algorytm krok po kroku

- Przenieś wszystko na jedną stronę: $3x^2 + 4x \geq 6x + 8 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 \geq 0$.
- Wyznacz miejsca zerowe (delta lub rozkład na czynniki).
- Naszkiecuj parabolę: zaznacz miejsca zerowe i kierunek ramion.
- Odczytaj odpowiedź z rysunku i zapisz ją jako przedział lub sumę przedziałów.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times -2x > 6 \Rightarrow x > -3$	$\checkmark x < -3$	dzielenie przez ujemną odwraca znak
$\times x^2 - 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$	$\checkmark x(x - 4) \geq 0: x \leq 0 \text{ lub } x \geq 4$	nie dziel przez x
$\times$ odpowiedź: „ $x_1 = -2, x_2 = 3$ ”	$\checkmark x \in (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$	same miejsca zerowe = 1 pkt z 2
$\times x \in (-\infty, -2) \cap (3, \infty)$	$\checkmark x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$	dwa ramiona łączy suma, nie iloczyn

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 10 z matury 2026

Rozwiąż nierówność $2x^2 + 3x \geq 5x + 12$.

ROZWIĄZANIE

- Przenosimy na lewą stronę: $2x^2 - 2x - 12 \geq 0$, dzielimy przez $2 > 0$: $x^2 - x - 6 \geq 0$.
- Miejsca zerowe: $\Delta = 1 + 24 = 25$, $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$, $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$.
- Parabola ma ramiona w górę; wartości nieujemne na zewnątrz miejsc zerowych (z nimi).

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — wyznaczenie miejsc zerowych trójmianu -2 i 3 (lub postać iloczynowa),
- 2 pkt — poprawny zbiór rozwiązań: $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 10	2 pkt	$3x^2 + 4x \geq 6x + 8$
2025	zad. 6, 10	3 pkt	$3 - 2(1 - 2x) \geq 2x - 17$ (oś); $3(2x^2 + 1) < 11x$
2024	zad. 6, 14.1	2 pkt	nierówność liniowa z ułamkiem; $f(x) \geq 0$ z wykresu paraboli
2023	zad. 6	1 pkt	$-2(x + 3) \leq \frac{2 - x}{3}$
2022	zad. 7, 29	3 pkt	$\frac{2}{5} - \frac{x}{3} > \frac{x}{5}$; $3x^2 - 2x - 9 \geq 7$ (2 pkt)
2021	zad. 6, 29	3 pkt	$\frac{2-x}{2} - 2x \geq 1$; $x^2 - 5x \leq 14$ (2 pkt)
2020	zad. 5, 26	3 pkt	$3(1 - x) > 2(3x - 1) - 12x$; $2(x - 1)(x + 3) > x - 1$ (2 pkt)

Trening: zadania **PP08.1–PP08.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

6/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,6 pkt (0–3)

FORMY ZADAŃ

otwarte 2 pkt (zadanie tekstowe); ABCD — interpretacja geometryczna, wybór układu

 **Sygnal:** Dwie niewiadome + dwie informacje → układ. Na końcu sprawdzenie w treści.

Co musisz umieć

- rozwiązywać układy dwóch równań liniowych metodą podstawiania i przeciwnych współczynników,
- rozpoznawać układ oznaczony, nieoznaczony i sprzeczny oraz ich interpretację geometryczną,
- zapisywać treść zadania tekstowego w postaci układu równań (także z procentami),
- sprawdzać, czy wynik ma sens w treści zadania (liczby naturalne, dodatnie długości).

Jak rozpoznać zadanie

- dwie wielkości i dwie informacje o nich („łącznie...”, „o 5 więcej...”, „wpływy wyniosły...”),
- rysunek dwóch prostych i pytanie „tym układem jest...”,
- polecenie „wybierz układ równań, który opisuje...” — zadanie na samo modelowanie.

Teoria w pigułce

- Każde równanie $ax + by = c$ to prosta. Rozwiązanie układu = punkt wspólny prostych.
- Proste przecinające się → **jedno** rozwiązanie; równoległe różne → **brak** (układ sprzeczny); pokrywające się → **nieskończenie wiele**.
- Układ $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ nie ma jednego rozwiązania, gdy $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (współczynniki proporcjonalne).
- W zadaniu tekstowym zapisz, co oznacza każda niewiadoma (z jednostką), np. „ x — liczba biletów normalnych”.

Σ Najważniejsze wzory

$$p\% \text{ liczby } x: \frac{p}{100} \cdot x$$

$$\text{po obniżce o } p\%: \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$$

$$s = v \cdot t$$

$$\text{wpływy} = \text{cena} \cdot \text{liczba sztuk}$$

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \rightarrow \text{brak jednego rozwiązania}$$

Algorytm krok po kroku

- Oznacz niewiadome i zapisz, co oznaczają.
- Każde zdanie z liczbą zamień na równanie (zwykle są dokładnie dwa).
- Rozwiąż układ: podstawianie (gdy jedna niewiadoma jest „gotowa”) lub przeciwnie współczynniki.
- Sprawdź wynik w **treści** (nie tylko w równaniach) i odpowiedz pełnym zdaniem na pytanie.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X „o 6 więcej dziewcząt”: $y = x + 6$	✓ $x = y + 6$ (x — dziewczęta)	sprawdź na przykładzie, kto ma więcej
X 25% kosztów: $W - 25 = 4800$	✓ $0,75 W = 4800$	procent to część całości, nie liczba
X podanie x i y bez odpowiedzi	✓ „Sprzedano 180 biletów normalnych i 70 ulgowych.”	odpowiadaj na pytanie z treści
X układ $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = -1 \end{cases}$ „ma rozwiązanie”	✓ brak rozwiązań — proste równoległe	$3 \neq -1$

🔗 Przykład wzorcowy typ zadania 11 z matury 2026

Bilet normalny na koncert kosztował 30 zł, a ulgowy 20 zł. Sprzedano łącznie 250 biletów. Po opłaceniu kosztów, które stanowiły 25% wpływów ze sprzedaży biletów, organizatorowi zostało 5100 zł. Oblicz, ile sprzedano biletów ulgowych.

ROZWIĄZANIE

- Wpływy W : zostało 75% wpływów, więc $0,75 W = 5100 \Rightarrow W = 6800$ zł.
- n — liczba biletów normalnych, u — ulgowych: $\begin{cases} n + u = 250 \\ 30n + 20u = 6800 \end{cases}$
- Z pierwszego $n = 250 - u$: $30(250 - u) + 20u = 6800 \Rightarrow 7500 - 10u = 6800 \Rightarrow u = 70, n = 180$
- Sprawdzenie: $180 \cdot 30 + 70 \cdot 20 = 5400 + 1400 = 6800$ ✓. Sprzedano 70 biletów ulgowych.

Odpowiedź: 70 biletów ulgowych

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapisanie układu równań z uwzględnieniem 25% kosztów (lub obliczenie $W = 6800$ i jedno równanie),
- 2 pkt — poprawny wynik: 70 biletów ulgowych.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 11	2 pkt	bilety normalne i ulgowe, koszty 25% wpływów
2025	zad. 9	2 pkt	budżet 1 200 000 zł dla dwóch zespołów — układ z procentami
2024	zad. 10, 11	2 pkt	układ z procentami (sady); proste równoległe → układ sprzeczny
2023	zad. 10, 11	3 pkt	interpretacja geometryczna układu; wybór układów opisujących prostokąt
2022	zad. 6	1 pkt	układ $\begin{cases} 11x - 11y = 1 \\ 22x + 22y = -1 \end{cases}$
2021	zad. 8	1 pkt	interpretacja geometryczna układu równań
2020	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza

Trening: zadania **PP09.1–PP09.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP10 Procenty i procent składany

PRIORYTET
A

CZĘSTOTLIWOŚĆ
6/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU
śr. 1,0 pkt (0–2)

FORMY ZADAŃ
zamknięte ABCD (lokata, podwyżki/obniżki);
element zadań tekstowych

 **Sygnal:** Zmiana o $p\%$ = mnożnik $1 \pm \frac{p}{100}$. Kolejne zmiany mnożysz, wartość początkową odzyskujesz dzieleniem.

Co musisz umieć

- obliczać procent danej liczby i liczbę na podstawie jej procentu,
- opisywać podwyżkę i obniżkę mnożnikiem $1 \pm \frac{p}{100}$ i składać kolejne zmiany,
- odróżniać zmianę o $p\%$ od zmiany o p punktów procentowych,
- stosować procent składany
 $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Jak rozpoznać zadanie

- „lokata”, „kapitalizacja”, „odsetki dopisywane co rok” → procent składany,
- „cenę podwyższono, a potem obniżono” → iloczyn mnożników,
- „cena po obniżce wynosi... — jaka była cena przed obniżką?” → dzielenie przez mnożnik.

Teoria w pigułce

- Mnożnik zmiany: podwyżka o $p\%$ → $\cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, obniżka → $\cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$. Kolejne zmiany mnożymy.
- Podwyżka o 10% i obniżka o 10% **nie** znoszą się: $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$ → spadek o 1% .
- Punkty procentowe to różnica dwóch procentów: z 5% do 7% to wzrost o 2 p.p., czyli o 40% .
- Procent składany: odsetki doliczane są do kapitału, więc po n okresach $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Σ Najważniejsze wzory

$$\frac{p}{100} \cdot a$$

$$\frac{a}{b} \cdot 100\%$$

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$\text{zmiana względna: } \frac{\text{nowa} - \text{stara}}{\text{stara}} \cdot 100\%$$

Algorytm krok po kroku

1. Ustal wartość początkową (to ona jest **100%**).
2. Każdą zmianę zapisz jako mnożnik i pomnóż je przez siebie.
3. Szukasz wartości początkowej? Podziel wartość końcową przez iloczyn mnożników.
4. Wynik porównaj z danymi: po obniżce musi wyjść mniej, po podwyżce więcej.

Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRE	DLACZEGO
X cena po obniżce 20% to 96 → $96 \cdot 1,2$	✓ $96 : 0,8 = 120$	20% liczymy od ceny przed obniżką
X +10%, -10% → bez zmian	✓ $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$ → -1%	procenty od różnych podstaw
X z 5% na 7% → wzrost o 2%	✓ o 2 punkty procentowe, czyli o 40%	p.p. ≠ %
X lokata 2 lata po 4% : $K \cdot 1,08$	✓ $K \cdot 1,04^2 = K \cdot 1,0816$	odsetki od odsetek

 Przykład wzorcowy typ zadania 2 z matury 2026

Klient wpłacił do banku **8000 zł** na lokatę dwuletnią. Po każdym roku bank dolicza odsetki w wysokości **5%** od kwoty bieżącego kapitału (bez podatku). Po dwóch latach na lokacie będzie

- A. 8820 zł** **B. 8800 zł** **C. 8400 zł** **D. 8840 zł**

ROZWIĄZANIE

- Po roku: $8000 \cdot 1,05 = 8400$ zł.
- Po dwóch latach: $8400 \cdot 1,05 = 8820$ zł, czyli $8000 \cdot 1,05^2 = 8820$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — procent prosty (dwa razy po **400 zł**); C — tylko jeden rok.

 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 2	1 pkt	lokata dwuletnia 6% , procent składany
2025	zad. 9	2 pkt	wydatki zespołów jako procent przydzielonych kwot
2024	zad. 10	1 pkt	układ równań z procentami (5% i 10% drzew)
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	zad. 4	1 pkt	dwie obniżki po 10% — cena przed obniżkami
2021	zad. 2	1 pkt	liczba 78 stanowi 150% liczby c
2020	zad. 4	1 pkt	o ile procent podnieść cenę po obniżce o 20%

Trening: zadania **PP10.1–PP10.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnal:** Wykres → rzutuj na osie; kółko puste = wartości brak. Klamra → wynik musi leżeć w przedziale wzoru.

Co musisz umieć

- odczytywać z wykresu dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, wartości największą i najmniejszą,
- rozwiązywać graficznie $f(x) = a$, $f(x) > a$, $f(x) \leq a$,
- interpretować puste i pełne kółka na końcach odcinków,
- posługiwać się funkcją określoną kilkoma wzorami („klamrą”),
- przesuwać i odbijać wykres: $f(x - p) + q$, $-f(x)$, $f(-x)$.

Jak rozpoznać zadanie

- wykres złożony z odcinków albo wzór z klamrą $\{ \dots \}$ i kilka poleceń do niego — to zawsze kilka punktów,
- pytania „dziedziną jest...”, „zbiorem wartości jest...”, „funkcja jest malejąca w...”,
- polecenie przyporządkowania wykresów funkcji $f(x + 3)$, $f(-x)$ itp.

Teoria w pigułce

- **Dziedzina** — cień wykresu na osi Ox ; **zbiór wartości** — cień na osi Oy .
- Pełne kółko — punkt należy do wykresu; puste — nie należy (wartość może nie być osiągnięta!).
- Miejsca zerowe — punkty wspólne wykresu z osią Ox ; $f(x) > 0$ — część wykresu **nad** osią Ox .
- Funkcja „klamrowa”: najpierw sprawdź, do którego przedziału należy x , dopiero potem wybierz wzór.
- $y = f(x - p) + q$ — przesunięcie o p w prawo i q w górę; $y = -f(x)$ — symetria względem Ox ; $y = f(-x)$ — względem Oy .

Σ Najważniejsze wzory

$$g(x) = f(x - p) + q: \text{wektor } [p, q]$$

$$D_g = D_f \text{ przesunięta o } p$$

$$y = -f(x): (x, y) \rightarrow (x, -y)$$

$$y = f(-x): (x, y) \rightarrow (-x, y)$$

Algorytm krok po kroku

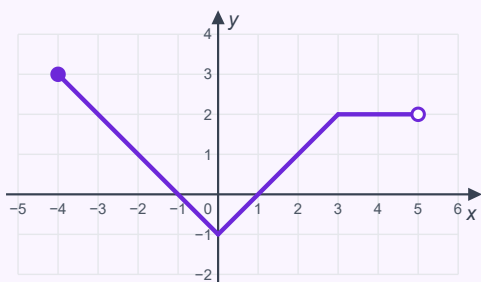
1. Opisz wykres: końce odcinków (kółka pełne/puste) i punkty przecięcia z osiami.
2. Dziedzina i zbiór wartości: rzutuj wykres na osie, uważaj na puste końce.
3. Równanie/nierówność: narysuj poziomą prostą $y = a$ i odczytaj x , dla których wykres jest na niej / nad nią / pod nią.
4. Przy wzorze klamrowym rozwiąż równanie w każdym przedziale osobno i sprawdź, czy wynik do niego należy.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X zbiór wartości $[-2, 3]$ „od najniższego do najwyższego”	✓ $[-2, 2) \cup \{3\}$	sprawdź, czy każda wartość jest osiągnięta
X $f(x - 2)$ — przesunięcie w lewo	✓ o 2 w prawo	w nawiasie znak „odwrotnie”
X $x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0$ „rozwiązanie”	✓ $0 \notin [-5, -1)$ — odrzucamy	wynik musi należeć do przedziału wzoru
X miejsca zerowe podane jako punkty $(4, 0)$	✓ miejsca zerowe to liczba 4	argument, nie punkt

🔥 Przykład wzorcowy typ zadań 12 z matur 2023 i 2026

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej na przedziale $[-4, 5]$.



Podaj: a) zbiór wartości funkcji f , b) miejsca zerowe, c) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq 0$.

ROZWIĄZANIE

- a) Najniższy punkt wykresu: $(0, -1)$, najwyższy: $(-4, 3)$ (kółko pełne). Wartości pośrednie są osiągnięte, więc $ZW = [-1, 3]$.
- b) Wykres przecina oś Ox w $x = -1$ (odcinek $y = -x - 1$) i w $x = 1$ (odcinek $y = x - 1$).
- c) Wykres leży na osi lub pod nią między miejscami zerowymi: $x \in [-1, 1]$.

Odpowiedź: a) $[-1, 3]$, b) -1 i 1 , c) $[-1, 1]$

Jak CKE przyznaje punkty:

- po 1 pkt za każdą poprawnie podaną odpowiedź a), b), c) — tak punktuje się wiązki „uzupełnij”.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 12.1, 12.2	4 pkt	funkcja f określona dwoma wzorami: równanie $f(x) = 3$, zbiór wartości, $f(x) > 1$
2025	zad. 11	4 pkt	funkcja trzema wzorami: wykres, wartości, liczba rozwiązań, $f(x) \geq 0$
2024	zad. 14.4	2 pkt	wykresy $g(x) = f(x + 3)$ i $h(x) = f(-x)$
2023	zad. 12.1–12.3	3 pkt	dziedzina, największa wartość, przedział monotoniczności z wykresu
2022	zad. 9, 10	2 pkt	odczyt $f(-3) \cdot f(0) \cdot f(4)$; wykres g zbudowanej z f
2021	zad. 7	1 pkt	$g(x) = f(x) - 2$ — przesunięcie wykresu
2020	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza

Trening: zadania **PP11.1–PP11.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP12 Funkcja liniowa i proste

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 7,3 pkt (2–23)

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD (2–3 zadania w arkuszu), P/F, czasem krótkie otwarte

 **Sygnal:** Równoległe: równe a . Prostopadłe: $a_1 a_2 = -1$. Przez punkt: podstaw i wylicz b .

Co musisz umieć

- odczytywać znaczenie współczynników a i b we wzorze $y = ax + b$ (także z wykresu),
- badać monotoniczność i miejsce zerowe (także z parametrem),
- wyznaczać równanie prostej przez dwa punkty oraz prostej równoległej/prostopadłej przez punkt,
- wyznaczać punkt przecięcia prostych i kąt nachylenia prostej ($a = \operatorname{tg} \alpha$).

Jak rozpoznać zadanie

- „funkcja liniowa $f(x) = (\dots m \dots)x + \dots$ jest rosnąca / nie ma miejsca zerowego” → warunek na a ,
- „proste są równoległe / prostopadłe, gdy $m = \dots$ ” → $a_1 = a_2$ lub $a_1 a_2 = -1$,
- rysunek prostej z zaznaczonymi punktami kratowymi.

Teoria w pigułce

- $f(x) = ax + b$: $a > 0$ — rosnąca, $a < 0$ — malejąca, $a = 0$ — stała. Wykres przecina Oy w $(0, b)$.
- Miejsce zerowe: $x_0 = -\frac{b}{a}$ (gdy $a \neq 0$). Funkcja stała $y = b$, $b \neq 0$, nie ma miejsca zerowego.
- $a = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α — kąt między prostą a dodatnią półosią Ox : $a > 0$ — kąt ostry, $a < 0$ — rozwarty.
- Proste $y = a_1 x + b_1$ i $y = a_2 x + b_2$: równoległe $\Leftrightarrow a_1 = a_2$; prostopadłe $\Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$.

Σ Najważniejsze wzory

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

$$a_1 = a_2 \text{ (równoległe)}$$

$$a_1 \cdot a_2 = -1 \text{ (prostopadłe)}$$

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Algorytm krok po kroku

1. Prosta przez punkt $P = (x_0, y_0)$: ustal a (z warunku równoległości/prostopadłości lub z dwóch punktów).
2. Podstaw P do $y = ax + b$ i wyznacz b .
3. Punkt przecięcia: przyrównaj wzory $a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2$, wyznacz x , potem y .
4. Kontrola: podstaw punkt do obu równań.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X prostopadła do $y = 2x$: $y = -2x + b$	✓ $y = -\frac{1}{2}x + b$	odwrotny i przeciwny
X $f(x) = (3 - m)x - 4$ bez miejsca zerowego $\rightarrow m = 4$	✓ $3 - m = 0 \Rightarrow m = 3$	funkcja stała $y = -4$
X a z dwóch punktów: $\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$	✓ $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	przyrost y przez przyrost x
X $y = -3x + 6$ przecina Oy w $(6, 0)$	✓ w $(0, 6)$	na osi Oy jest $x = 0$

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 23 z matur 2024–2025

Proste k i l są określone równaniami $k: y = (2m - 1)x + 4$ oraz $l: y = -\frac{1}{3}x - 2$. Proste k i l są prostopadłe, gdy

- A. $m = 2$ B. $m = -1$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = 0$

ROZWIĄZANIE

- Warunek prostopadłości: $(2m - 1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$.
- $2m - 1 = 3 \Rightarrow m = 2$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — ze znaku: $2m - 1 = -3$; C — warunek równoległości $2m - 1 = -\frac{1}{3}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 13.1, 13.2, 26	3 pkt	P/F i tangens kąta nachylenia z wykresu; prosta równoległa przez punkt
2025	zad. 13, 23	2 pkt	brak miejsca zerowego $f(x) = (3 - m)x - 4$; proste równoległe z parametrem
2024	zad. 12, 13, 23	3 pkt	monotoniczność z parametrem; wspólne miejsce zerowe; prostopadłość
2023	zad. 13, 23, 24	3 pkt	znaki a i b z wykresu; prostopadłość i punkt przecięcia; prosta równoległa
2022	zad. 11, 21, 22	3 pkt	miejsce zerowe; prosta przez początek układu; prostopadłość prostych
2021	zad. 9, 31	3 pkt	równoległość z parametrem; wzór f z warunków $f(0) = 2$, $f(4) - f(2) = 6$ (2 pkt)
2020	zad. 11, 13, 16, 18	4 pkt	znaki a i b z wykresu; równoległość z parametrem; punkt na wykresie; prosta przez dwa punkty

Trening: zadania **PP12.1–PP12.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP13 Funkcja kwadratowa

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 3,1 pkt (1–6)

FORMY ZADAŃ

wiązki zadań do jednej paraboli (ABCD, uzupełnij), otwarte 2–4 pkt (wzór funkcji)

 **Sygnal:** Wierzchołek → postać kanoniczna. Miejsca zerowe → iloczynowa. **a** z dodatkowego punktu.

Co musisz umieć

- przechodzić między postaciami: ogólną, kanoniczną i iloczynową,
- wyznaczać wierzchołek, oś symetrii, zbiór wartości i przedziały monotoniczności,
- wyznaczać wzór funkcji z danych (wierzchołek, miejsca zerowe, punkt wykresu),
- wykorzystywać symetrię paraboli: $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Jak rozpoznać zadanie

- rysunek paraboli z wierzchołkiem w punkcie kratowym i kilka poleceń do niego,
- „jednym z miejsc zerowych jest..., a osią symetrii...” → symetria,
- „wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej/kanonicznej” — otwarte 2–4 pkt.

Teoria w pigułce

- Postać kanoniczna $f(x) = a(x - p)^2 + q$ — wierzchołek $W = (p, q)$, oś symetrii $x = p$.
- Postać iloczynowa $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ — miejsca zerowe x_1, x_2 ; wtedy $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- $a > 0$: ramiona w górę, $ZW = [q, \infty)$, maleje na $(-\infty, p]$, rośnie na $[p, \infty)$; $a < 0$ — odwrotnie, $ZW = (-\infty, q]$.
- Punkty symetryczne względem osi $x = p$ mają równe wartości: $f(p - d) = f(p + d)$.

Σ Najważniejsze wzory

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$q = f(p) = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Algorytm krok po kroku

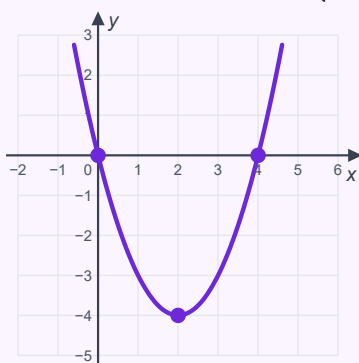
1. Zapisz dane w najwygodniejszej postaci: wierzchołek → kanoniczna, miejsca zerowe → iloczynowa.
2. Wyznacz **a**, podstawiając dodatkowy punkt wykresu.
3. Jeśli trzeba — wymnóż do postaci ogólnej $ax^2 + bx + c$.
4. Własności (ZW, monotoniczność) odczytuj z wierzchołka i znaku **a**.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times y = 2(x+3)^2 - 5: W = (3, -5)$	$\checkmark W = (-3, -5)$	$(x - p)$, więc $p = -3$
$\times ZW$ dla $a < 0: [q, \infty)$	$\checkmark (-\infty, q]$	ramiona w dół $\rightarrow$ wartość największa
$\times$ monotoniczność: „rośnie dla $y > q$ ”	$\checkmark$ rośnie na $[p, \infty)$ (dla $a > 0$)	przedziały argumentów, nie wartości
$\times f(x) = (x+1)(x-5), x_1 = 1$	$\checkmark x_1 = -1, x_2 = 5$	znak odwrotny do tego w nawiasie

🔥 Przykład wzorcowy typ zadań 12 i 14 z matur 2025–2026

Na rysunku przedstawiono fragment paraboli — wykresu funkcji kwadratowej f o wierzchołku $W = (2, -4)$, przechodzącej przez punkt $(0, 0)$.



Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej oraz podaj zbiór wartości i przedział, w którym f jest malejąca.

ROZWIĄZANIE

- Postać kanoniczna: $f(x) = a(x-2)^2 - 4$.
- Punkt $(0, 0)$: $0 = a \cdot 4 - 4 \Rightarrow a = 1$.
- $f(x) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4 = x^2 - 4x$.
- $a > 0$: $ZW = [-4, \infty)$, f maleje na $(-\infty, 2]$.

Odpowiedź: $f(x) = x^2 - 4x$, $ZW = [-4, \infty)$, maleje na $(-\infty, 2]$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — postać kanoniczna z wyznaczonym $a = 1$,
- 1 pkt — postać ogólna $x^2 - 4x$,
- 1 pkt — zbiór wartości, 1 pkt — przedział monotoniczności.

Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 14	4 pkt	wzór f z wierzchołka i miejsca zerowego funkcji $g(x) = f(x + 1)$
2025	zad. 12.1–12.3	4 pkt	wzór z wykresu paraboli, oś symetrii, miejsca zerowe $g = f - 3$
2024	zad. 14.1–14.3	3 pkt	$f(x) \geq 0$ z wykresu, wzór funkcji, równość z osi symetrii
2023	zad. 14	1 pkt	drugie miejsce zerowe z osi symetrii
2022	zad. 12, 35	6 pkt	postać kanoniczna z wierzchołka; wzór f z warunku stycznej $y = 6$ (5 pkt)
2021	zad. 12	1 pkt	przedział monotoniczności $f(x) = -2(x + 1)(x - 3)$
2020	zad. 7, 8, 9	3 pkt	wiązka trzech zadań do paraboli $f(x) = a(x - 1)(x - 3)$

Trening: zadania **PP13.1–PP13.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP14 Ciąg arytmetyczny

PRIORYTET
A

CZĘSTOTLIWOŚĆ
7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU
śr. 2,7 pkt (1–4)

FORMY ZADAŃ
ABCD (wyraz ciągu), P/F, otwarte 2–3 pkt (raty, parametr)

Sygnal: Wszystko przez a_1 i r . Trzy kolejne wyrazy: $2b = a + c$. Malejący $\rightarrow r < 0$.

Co musisz umieć

- obliczać wyrazy ciągu z wzoru ogólnego i rekurencyjnego,
- stosować wzór $a_n = a_1 + (n - 1)r$ i wzory na sumę S_n ,
- korzystać z warunku $2b = a + c$ dla trzech kolejnych wyrazów,
- rozwiązywać zadania tekstowe (raty, oszczędności, rzędy krzeseł).

Jak rozpoznać zadanie

- „każdy kolejny ... o **30 zł** mniejszy / większy” $\rightarrow$ ciąg arytmetyczny,
- „trzywyrazowy ciąg $(\dots, \dots, \dots)$ jest arytmetyczny” $\rightarrow 2b = a + c$,
- dane dwa wyrazy (np. a_3 i a_7) $\rightarrow$ układ lub $a_7 - a_3 = 4r$.

Teoria w pigułce

- Ciąg arytmetyczny: $a_{n+1} = a_n + r$. Różnica $r > 0$ — rosnący, $r < 0$ — malejący, $r = 0$ — stały.
- Różnica dwóch wyrazów: $a_m - a_k = (m - k) \cdot r$, np. $a_7 - a_3 = 4r$.
- Środkowy wyraz jest średnią sąsiednich: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.
- Ciąg o wzorze $a_n = pn + q$ jest arytmetyczny o różnicy $r = p$.

Σ Najważniejsze wzory

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

$$2b = a + c$$

Algorytm krok po kroku

1. Zapisz dane za pomocą a_1 i r (np. $a_5 = a_1 + 4r$).
2. Rozwiąż układ lub skorzystaj z $a_m - a_k = (m - k)r$.
3. Przy sumie wybierz wzór: znasz $a_n \rightarrow \frac{a_1 + a_n}{2}n$; znasz $r \rightarrow \frac{2a_1 + (n-1)r}{2}n$.
4. Przy parametrze: $2b = a + c$, potem sprawdź dodatkowy warunek (rosnący/malejący).

Najczęstsze pułapki

ŹŁE

DOBRE

DLACZEGO

✗ $a_{10} = a_1 + 10r$

✓ $a_{10} = a_1 + 9r$

od a_1 do a_{10} jest **9** kroków

✗ $a_3 = 7, a_7 = 19 \rightarrow r = 12$

✓ $4r = 12 \Rightarrow r = 3$

dzielimy przez liczbę kroków

✗ raty malejące o **20**: $r = 20$

✓ $r = -20$

malejące $\rightarrow$ różnica ujemna

✗ dwie wartości **m** w odpowiedzi

✓ sprawdź warunek „rosnący/malejący”

często jedna odpada

 Przykład wzorcowy typ zadania 17 z matury 2024

Ciąg arytmetyczny (a_n) spełnia warunki $a_4 = 11$ oraz $S_{10} = 155$. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

ROZWIĄZANIE

1. $a_4 = a_1 + 3r = 11$.

2. $S_{10} = \frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = 5(2a_1 + 9r) = 155 \Rightarrow 2a_1 + 9r = 31$.

3. Z pierwszego: $a_1 = 11 - 3r$, więc $22 - 6r + 9r = 31 \Rightarrow 3r = 9 \Rightarrow r = 3, a_1 = 2$.

4. Sprawdzenie: $a_4 = 2 + 9 = 11 \checkmark, S_{10} = \frac{2+29}{2} \cdot 10 = 155 \checkmark$.

Odpowiedź: $a_1 = 2, r = 3$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapisanie układu równań z niewiadomymi a_1 i r ,
- 2 pkt — obliczenie $a_1 = 2$ i $r = 3$.

 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 16	1 pkt	$a_1 = 1, a_5 = 17 \rightarrow a_9$
2025	zad. 14.1, 15	4 pkt	ciąg rekurencyjny; m dla ciągu arytmetycznego malejącego (3 pkt)
2024	zad. 15, 17	3 pkt	P/F o ciągu $a_n = (-1)^n(n-5)$; różnica z a_3 i S_{15}
2023	zad. 15, 17	3 pkt	wyraz ciągu z wzoru ogólnego; raty malejące o 30 zł
2022	zad. 13, 14, 30	4 pkt	$a_n = \frac{2n^2-30n}{n}$; różnica z a_5 i a_{10} ; suma stu wyrazów (2 pkt)
2021	zad. 14, 15	2 pkt	niedodatnie wyrazy $b_n = 3n^2 - 25n$; warunek $a_3 + a_5 = 58$
2020	zad. 14, 15	2 pkt	$a_n = 2n^2$; $a_5 - a_4$; suma wyrazów ciągu arytmetycznego

Trening: zadania **PP14.1–PP14.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP15 Ciąg geometryczny

PRIORYTET
A

CZĘSTOTLIWOŚĆ
7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU
śr. 1,9 pkt (1–4)

FORMY ZADAŃ
ABCD / odpowiedź krótka (1 pkt), otwarte 3 pkt
(ciąg geometryczny z wyrazów innego ciągu)

Sygnal: $a_n = a_1 q^{n-1}$; trzy kolejne: $b^2 = ac$; iloczyny wyrazów — licz sumę indeksów.

Co musisz umieć

- wyznaczać iloraz i dowolny wyraz ciągu geometrycznego,
- stosować warunek $b^2 = ac$ dla trzech kolejnych wyrazów,
- obliczać sumę n początkowych wyrazów,
- wykorzystywać własność $a_k \cdot a_l = a_m \cdot a_n$ dla $k + l = m + n$.

Jak rozpoznać zadanie

- „każdy kolejny ... razy większy”, „zmniejsza się o połowę” → ciąg geometryczny,
- „trzywyrazowy ciąg ... jest geometryczny” → $b^2 = ac$,
- iloczyn wyrazów, np. $a_3 \cdot a_6$ → suma indeksów.

Teoria w pigułce

- Ciąg geometryczny: $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Dla $a_1 > 0$: $q > 1$ — rosnący, $0 < q < 1$ — malejący, $q < 0$ — naprzemienny (niemonotoniczny).
- Trzy kolejne wyrazy a, b, c : $b^2 = a \cdot c$. Dla dodatnich: $b = \sqrt{ac}$ (średnia geometryczna).
- $a_n \cdot a_m = a_1^2 q^{n+m-2}$ — zależy tylko od sumy indeksów, więc $a_3 a_6 = a_2 a_7 = a_4 a_5$.
- Gdy $a_n = pn + q$ (arytmetyczny), a wybrane wyrazy mają tworzyć geometryczny, najpierw policz wyrazy, potem iloraz.

Σ Najważniejsze wzory

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

$$b^2 = ac$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Algorytm krok po kroku

- Oblicz iloraz: $q = \frac{a_2}{a_1}$ albo z $a_m = a_k \cdot q^{m-k}$.
- Dowolny wyraz: $a_n = a_1 q^{n-1}$.
- Trzy wyrazy z niewiadomą: $b^2 = ac$, rozwiąż, sprawdź czy wyrazy są niezerowe.
- Suma: wzór S_n (dla $q = 1$: $S_n = n \cdot a_1$).

Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRE	DLACZEGO
× (4, x, 9) geometryczny: $x = 6,5$	✓ $x^2 = 36$	średnia arytmetyczna to warunek ciągu arytmetycznego
× $a_4 = a_1 q^4$	✓ $a_4 = a_1 q^3$	wykładnik $n - 1$
× $q^3 = 8 \Rightarrow q = \frac{8}{3}$	✓ $q = 2$	pierwiastek, nie dzielenie
× $b^2 = ac \Rightarrow b = \sqrt{ac}$ zawsze	✓ $b = \pm \sqrt{ac}$	znak zależy od treści

 Przykład wzorcowy typ zadania 15 z matury 2026

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3n + 1$ dla $n \geq 1$. Trzywyrazowy ciąg (a_1, a_5, a_k) jest geometryczny. Oblicz k .

ROZWIĄZANIE

1. Obliczamy wyrazy: $a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$, $a_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$.
2. Warunek ciągu geometrycznego: $a_5^2 = a_1 \cdot a_k \Rightarrow 256 = 4a_k \Rightarrow a_k = 64$ (iloraz $q = 4$).
3. $a_k = 3k + 1 = 64 \Rightarrow k = 21$ — liczba naturalna $\checkmark$.
4. Sprawdzenie: $(4, 16, 64)$ — każdy wyraz 4 razy większy od poprzedniego.

Odpowiedź: $k = 21$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie a_1 i a_5 (lub zapis $a_5^2 = a_1 a_k$),
- 2 pkt — obliczenie $a_k = 64$,
- 3 pkt — $k = 21$.

 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 15, 17	4 pkt	(a_1, a_9, a_k) geometryczny dla $a_n = 3n + 5$ (3 pkt); $a_3 a_6 = 18 \Rightarrow a_2 a_7$
2025	zad. 16	1 pkt	$a_1 = 27, a_2 = 9 \rightarrow a_4$
2024	zad. 16	1 pkt	$(12, 6, 2m - 1)$ — monotoniczność i m
2023	zad. 16	1 pkt	$(27, 9, a - 1) \rightarrow a$
2022	zad. 15	1 pkt	iloraz ciągu z warunku $9a_5 = 4a_3$
2021	zad. 13	1 pkt	ciąg $(15, 3x, \frac{5}{3})$ geometryczny
2020	zad. 33	4 pkt	warunek $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$ — wyznaczenie ilorazu (4 pkt)

Trening: zadania **PP15.1–PP15.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP16 Trygonometria podstawowa

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,4 pkt (1–3)

FORMY ZADAŃ

ABCD (wartości, tożsamości), otwarte 2 pkt (sin i cos z tangensa)

 **Sygnal:** Jedyńka + tangens = iloraz. Kąt rozwarty → cosinus i tangens ujemne.

Co musisz umieć

- obliczać sinus, cosinus i tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym,
- znać wartości dla 30° , 45° , 60° (są w tablicach CKE),
- stosować $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$,
- wyznaczać funkcje kąta rozwartego ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) i kąta w układzie współrzędnych.

Jak rozpoznać zadanie

- „kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \dots$ — oblicz $\cos \alpha$ ” → jedynka trygonometryczna,
- wyrażenie typu $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha$ → wyłącz wspólny czynnik,
- ułamek z $\sin$ i $\cos$ równy liczbie → podziel przez $\cos \alpha$, dostaniesz $\operatorname{tg} \alpha$.

Teoria w pigułce

- W trójkącie prostokątnym: $\sin \alpha = \frac{\text{przyprostokątna naprzeciw}}{\text{przeciwprostokątna}}$, $\cos \alpha = \frac{\text{przyległa}}{\text{przeciwprostokątna}}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{naprzeciw}}{\text{przyległa}}$.
- Kąt rozwarty: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ — sinus dodatni, cosinus i tangens ujemne.
- Kąt w układzie: punkt $P = (x, y)$ na ramieniu końcowym, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$: $\sin \alpha = \frac{y}{r}$, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$,
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$.
- Z $\operatorname{tg} \alpha$ do $\sin$ i $\cos$: $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$, podstaw do jedynki.

Σ Najważniejsze wzory

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Algorytm krok po kroku

1. Ustal ćwiartkę: kąt ostry — wszystko dodatnie; rozwarty — tylko sinus dodatni.
2. Znając jedną funkcję, drugą wyznacz z jedynki trygonometrycznej.
3. Tangens = sinus / cosinus.
4. Wyrażenia upraszczaj: wyłącz wspólny czynnik, zastosuj $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times \alpha$ rozwarty, $\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$	$\checkmark \cos \alpha = -\frac{4}{5}$	cosinus rozwartego jest ujemny
$\times \sin^2 \alpha = \sin \alpha^2$	$\checkmark \sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$	kwadrat wartości funkcji
$\times \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$\checkmark \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	sinus w liczniku
$\times P = (-4, 3): \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$	$\checkmark \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{3}{4}$	y przez x

🔧 Przykład wzorcowy typ zadania 23 z matury 2026

Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\frac{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{\cos \alpha} = 7$. Tangens kąta α jest równy

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. 5 D. $\frac{7}{2}$

ROZWIĄZANIE

- Rozbijamy ułamek: $\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{3 \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{tg} \alpha + 3$.
- $2 \operatorname{tg} \alpha + 3 = 7 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? C — pominięte dzielenie przez 2; D — pominięty wyraz 3.

📅 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 18, 23	2 pkt	sinus w trójkącie prostokątnym; $\operatorname{tg} \alpha$ z równania z sin i cos
2025	zad. 17, 18.1, 18.2	3 pkt	$\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha = 2 \sin \alpha \rightarrow \cos$; kąty w trójkącie ze środkową
2024	zad. 18, 19	3 pkt	sin i cos kąta rozwartego z $\operatorname{tg} \alpha = -3$ (2 pkt); $\sin^3 20^\circ + \cos^2 20^\circ \sin 20^\circ$
2023	zad. 18, 19	2 pkt	tangens z punktu $(-3, 1)$; $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$
2022	zad. 16, 32	3 pkt	$\cos 12^\circ \sin 78^\circ + \sin 12^\circ \cos 78^\circ$; $\sin^2 \alpha$ przy $\operatorname{tg} \alpha = 2$ (2 pkt)
2021	zad. 16	1 pkt	uproszczenie $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$
2020	zad. 19, 31	3 pkt	$2 \cos \alpha - \sin \beta$ w trójkącie prostokątnym; $\operatorname{tg} \alpha$ z równania (2 pkt)

Trening: zadania **PP16.1–PP16.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP17 Trójkąty: Pitagoras, pola, sinus i cosinus

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,1 pkt (1–4)

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD i odpowiedź krótka; otwarte 2 pkt

 **Sygnal:** Dwa boki + kąt między nimi $\rightarrow \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ i tw. cosinusów. Równoboczny $\rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Co musisz umieć

- stosować twierdzenie Pitagorasa i rozpoznawać trójki pitagorejskie (3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17),
- obliczać pole trójkąta wzorem $\frac{1}{2}ah$ i $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$ oraz pola równoległoboku i rombu,
- stosować twierdzenie cosinusów i sinusów,
- znać zależności w trójkącie równobocznym i trójkątach $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ oraz $45^\circ-45^\circ-90^\circ$.

Jak rozpoznać zadanie

- dwa boki i kąt **między nimi** $\rightarrow$ pole $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$ albo trzeci bok z tw. cosinusów,
- bok i kąt naprzeciw oraz okrąg opisany $\rightarrow$ tw. sinusów $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$,
- trójkąt równoboczny wpisany w okrąg / opisany na okręgu $\rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Teoria w pigułce

- Pitagoras: $a^2 + b^2 = c^2$ (c — przeciwprostokątna). Odwrotnie: jeśli $a^2 + b^2 = c^2$, trójkąt jest prostokątny.
- Pole: $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$; dla kąta rozwartego $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$.
- Równoległobok: $P = ab \sin \alpha$; romb: $P = a^2 \sin \alpha = \frac{e \cdot f}{2}$.
- Tw. cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (dla $\gamma = 90^\circ$ to Pitagoras). Tw. sinusów: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.
- Trójkąt równoboczny: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, R = \frac{2}{3}h, r = \frac{1}{3}h$.

Σ Najważniejsze wzory

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Algorytm krok po kroku

1. Zrób szkic i zaznacz dane: boki, kąty, co jest przeciwprostokątną.
2. Wybierz narzędzie: kąt prosty $\rightarrow$ Pitagoras/trigonometria; dwa boki i kąt między nimi $\rightarrow$ pole z sinusem lub tw. cosinusów.
3. Podstaw wartości funkcji z tablic (uważaj na kąty rozwarte).
4. Sprawdź sens: najdłuższy bok naprzeciw największego kąta.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times \cos 120^\circ = \frac{1}{2}$	$\checkmark \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$	kąt rozwarty — cosinus ujemny
$\times$ pole rombu a^2	$\checkmark a^2 \sin \alpha$	romb to nie kwadrat
$\times P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ z kątem nie między a i b	$\checkmark$ kąt musi leżeć między bokami	sprawdź na szkicu
$\times R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\checkmark R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$ to promień wpisanego

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 21 z matury 2025

W trójkącie ABC dane są $|AB| = 8$, $|BC| = 5$ oraz $|\angle ABC| = 60^\circ$. Oblicz długość boku AC oraz pole trójkąta ABC .

ROZWIĄZANIE

1. Tw. cosinusów: $|AC|^2 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 89 - 40 = 49$, więc $|AC| = 7$.

2. Pole: $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Odpowiedź: $|AC| = 7$, $P = 10\sqrt{3}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — długość $|AC| = 7$,
- 1 pkt — pole $10\sqrt{3}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 22, 24.1	2 pkt	bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg; pole trójkąta
2025	zad. 21	1 pkt	trójkąt z danymi $ AB = 11$, $ BC = 12$, $ \angle ABC = 60^\circ$
2024	zad. 21	1 pkt	pole równoległoboku o bokach 3 i 4 z kątem 120°
2023	zad. 20	1 pkt	iloczyn przekątnych rombu z kątem 150°
2022	zad. 18, 19, 20	3 pkt	romb z kątem 60° ; pole trójkąta równobocznego z wysokości; pole równoległoboku z kątem 120°
2021	zad. 18, 19, 20, 22	4 pkt	pole z tg α ; obwód z pola; wysokość dzieląca bok; kąty równoległoboku
2020	zad. 22, 29	3 pkt	pola części prostokąta; trójkąt równoboczny z punktem na wysokości (2 pkt)

Trening: zadania **PP17.1–PP17.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP18 Podobieństwo, twierdzenie Talesa i dwusieczna

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

6/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,7 pkt (0–3)

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD, odpowiedź krótka; dowód geometryczny 2 pkt

 **Sygnal:** Równe kąty → podobieństwo → proporcja. Pola przez k^2 , objętości przez k^3 .

Co musisz umieć

- rozpoznawać trójkąty podobne (cechy: bbb, bkb, kkk) i zapisywać proporcję odpowiadających boków,
- stosować skalę: obwody $\cdot k$, pola $\cdot k^2$, objętości $\cdot k^3$,
- stosować twierdzenie Talesa (także w układzie „motylka”),
- stosować twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie.

Jak rozpoznać zadanie

- proste równoległe przecinające ramiona kąta lub dwie przecinające się proste → Tales,
- „trójkąty są podobne”, „w skali” → proporcje, pola przez k^2 ,
- dwusieczna kąta przecinająca przeciwległy bok
 $\rightarrow \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.

Teoria w pigułce

- Trójkąty podobne w skali k : boki $\cdot k$, obwody $\cdot k$, pola $\cdot k^2$ (bryły: objętości $\cdot k^3$).
- Tales: proste równoległe wyznaczają na ramionach kąta odcinki proporcjonalne: $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$.
- „Motylek”: gdy $AD \parallel BC$ i odcinki AC , BD przecinają się w O , to $\triangle AOD \sim \triangle COB$, więc $\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OD|}{|OB|}$.
- Dwusieczna kąta C dzieli bok AB w stosunku sąsiednich boków: $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$.
- W trójkącie prostokątnym wysokość na przeciwprostokątną dzieli ją na odcinki p , q : $h^2 = p \cdot q$.

Σ Najważniejsze wzory

$$\frac{P_2}{P_1} = k^2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3$$

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$h^2 = p \cdot q$$

Algorytm krok po kroku

- Zaznacz na szkicu równe kąty (wierzchołkowe, naprzemianległe, wspólne) — z nich wynika podobieństwo.
- Wypisz pary odpowiadających wierzchołków w tej samej kolejności ($A \rightarrow B$, $B \rightarrow D$, $C \rightarrow A$).
- Ułóż proporcję odpowiadających boków i wylicz niewiadomą.
- Pola i objętości: najpierw skala k z boków, potem k^2 lub k^3 .

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X skala 3 → pole 3 razy większe	✓ pole 9 razy większe	pola rosną jak k^2
X proporcja „na krzyż” z nieodpowiadających boków	✓ boki naprzeciw równych kątów	wypisz pary wierzchołków
X dwusieczna dzieli bok na połowy	✓ w stosunku $ AC : BC $	na połowy dzieli środkowa
X $V_2 : V_1 = 8 \Rightarrow$ pola 8	✓ $k = 2 \Rightarrow$ pola 4	najpierw $k = \sqrt[3]{8}$

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 21 z matury 2026

W trójkącie ABC dane są $|AC| = a$ i $|BC| = b$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D . Wykaż, że stosunek pola trójkąta ADC do pola trójkąta DBC jest równy $\frac{a}{b}$.

ROZWIĄZANIE

- Niech $\gamma = |\angle ACB|$. Dwusieczna dzieli ten kąt na dwa kąty o mierze $\frac{\gamma}{2}$.
- $P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |CD| \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$ oraz $P_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot |CD| \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$.
- Dzieląc: $\frac{P_{ADC}}{P_{DBC}} = \frac{a}{b}$. ■
- (Inny sposób: trójkąty mają wspólną wysokość z wierzchołka C , więc stosunek pól $= \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{a}{b}$ z twierdzenia o dwusiecznej.)

Odpowiedź: dowód

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapisanie pól obu trójkątów wzorem z sinusem kąta $\frac{\gamma}{2}$ (lub zauważenie wspólnej wysokości),
- 2 pkt — pełne uzasadnienie równości stosunku pól i $\frac{a}{b}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 20, 21	3 pkt	twierdzenie Talesa (proste równoległe, odcinki OA, OB, OC); dowód o stosunku pól przy dwusiecznej
2025	zad. 20	1 pkt	trójkąty podobne ABC i BDA w trójkącie równoramiennym
2024	zad. 20, 26	2 pkt	twierdzenie o dwusiecznej; skala podobieństwa brył z objętości
2023	zad. 22	2 pkt	pole trójkąta podobnego do trójkąta 5–12–13
2022	zad. 33	2 pkt	dwusieczna w trójkącie równoramiennym — trójkąty podobne
2021	zad. 33	2 pkt	prosta równoległa do boku — pola trójkątów podobnych
2020	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza

Trening: zadania **PP18.1–PP18.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP19 Okrąg i kąty

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,3 pkt (1–3)

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD z rysunkiem (kąty wpisane i środkowe)

 **Sygnal:** Wpisany = połowa środkowego. Dwa promienie → trójkąt równoramienny. Średnica → 90° .

Co musisz umieć

- stosować zależność między kątem wpisanym i środkowym opartymi na tym samym łuku,
- wykorzystywać trójkąt równoramienny AOB ($|OA| = |OB| = r$),
- stosować kąt wpisany oparty na półokręgu (90°) i własność stycznej,
- korzystać z warunków czworokąta wpisanego i opisanego oraz liczyć długość łuku i pole wycinka.

Jak rozpoznać zadanie

- rysunek okręgu ze środkiem O i trójkątem, pytanie o kąt „ostry ABO ” → kąt środkowy + trójkąt równoramienny,
- średnica w treści → kąt prosty,
- czworokąt „wpisany w okrąg” / „opisany na okręgu”.

Teoria w pigułce

- Kąt wpisany jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku; kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.
- Kąt wpisany oparty na półokręgu (na średnicy) jest prosty.
- Trójkąt AOB (O — środek) jest równoramienny: kąty przy podstawie AB mają miarę $\frac{180^\circ - |\angle AOB|}{2}$.
- Styczna jest prostopadła do promienia w punkcie styczności.
- Czworokąt wpisany w okrąg: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$. Czworokąt opisany na okręgu: $a + c = b + d$.

Σ Najważniejsze wzory

$$\alpha_{\text{wpis}} = \frac{1}{2} \alpha_{\text{środ}}$$

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$P_{\text{wycinka}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \text{ (wpisany)}$$

$$a + c = b + d \text{ (opisany)}$$

Algorytm krok po kroku

1. Zaznacz środek O i narysuj promień do punktów z treści.
2. Ustal, na którym łuku oparty jest dany kąt wpisany — kąt środkowy na tym łuku jest dwa razy większy.
3. W trójkątach z dwoma promieniami wykorzystaj równe kąty przy podstawie.
4. Sprawdź, czy pytają o kąt ostry/rozwarty (czasem trzeba wziąć $360^\circ - \alpha$ lub $180^\circ - \alpha$).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X kąt wpisany = kąt środkowy	✓ wpisany = połowa środkowego	na tym samym łuku
X $ \angle AOB = 80^\circ \Rightarrow \angle OAB = 80^\circ$	✓ $ \angle OAB = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$	trójkąt równoramienny
X czworokąt wpisany: $\alpha = \gamma$	✓ $\alpha + \gamma = 180^\circ$	przeciwległe dopełniają się
X łuk dla 120° : $\frac{120}{360} \pi r^2$	✓ $\frac{120}{360} \cdot 2\pi r$	łuk — obwód, wycinek — pole

🔥 Przykład wzorcowy typ zadań 19–22 z matur 2023–2026

Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku O . Kąt ACB ma miarę 65° (punkt C leży na dłuższym łuku AB). Miara kąta ostrego OAB jest równa

- A. 25° B. 65° C. 50° D. $32,5^\circ$

ROZWIĄZANIE

- Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co $\angle ACB$: $|\angle AOB| = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ$.
- Trójkąt AOB jest równoramienny ($|OA| = |OB|$): $|\angle OAB| = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? B — przepisany kąt wpisany; C — $180^\circ - 130^\circ$ bez dzielenia; D — połowa kąta wpisanego.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 19	1 pkt	cztery punkty na okręgu, kąty CDA i $COB \rightarrow$ kąt BOA
2025	zad. 19	1 pkt	kąt $BCA = 50^\circ \rightarrow$ kąt ostry ABO
2024	zad. 22	1 pkt	trójkąt wpisany, kąt $ACB = 42^\circ \rightarrow$ kąt BAS
2023	zad. 21	1 pkt	kąt $ACO = 70^\circ \rightarrow$ kąt ostry ABC
2022	zad. 17	1 pkt	kąt między cięciwą a średnicą okręgu
2021	zad. 17, 21, 24	3 pkt	styczna i kąt środkowy 80° ; czworokąt wpisany; pola figur z kół
2020	zad. 17	1 pkt	kąt wpisany przy kącie środkowym 118°

Trening: zadania **PP19.1–PP19.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP20 Geometria analityczna

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

6/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,7 pkt (0–6)

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD, P/F; otwarte 2 pkt
(równoległobok, trójkąt)

 **Sygnal:** Przekątne równoległoboku → wspólny środek. Okrąg: znak w nawiasie odwrotny, prawa strona to r^2 .

Co musisz umieć

- obliczać odległość punktów i współrzędne środka odcinka,
- wyznaczać brakujący wierzchołek równoległoboku i koniec odcinka z danego środka,
- odczytywać środek i promień okręgu z równania i zapisywać równanie okręgu,
- wyznaczać punkty symetryczne względem osi i początku układu.

Jak rozpoznać zadanie

- współrzędne wierzchołków i pytanie o długość/pole → wzór na odległość,
- „punkt przecięcia przekątnych” → środek odcinka (przekątne równoległoboku dzielą się na połowy),
- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \rightarrow$ okrąg.

Teoria w pigułce

- Odległość: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Środek: $S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Znając A i środek S : $B = 2S - A$, czyli $x_B = 2x_S - x_A$, $y_B = 2y_S - y_A$.
- Równoległobok $ABCD$: przekątne mają wspólny środek, więc $A + C = B + D$ (współzrędnymi).
- Okrąg o środku (a, b) i promieniu r : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym to środek przeciwprostokątnej.
- Symetria względem Ox : $(x, y) \rightarrow (x, -y)$; względem Oy : $(x, y) \rightarrow (-x, y)$; względem O : $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$.

Σ Najważniejsze wzory

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$D = A + C - B$$

Algorytm krok po kroku

1. Naszkicuj punkty w układzie — to od razu pokazuje kolejność wierzchołków i sens wyniku.
2. Brakujący punkt: skorzystaj ze środka odcinka (lub z $A + C = B + D$).
3. Długość: wzór na odległość; promień okręgu = odległość środka od punktu okręgu.
4. Sprawdź, czy punkt leży na okręgu: podstaw współrzędne do równania.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ $S = (2, -3)$	$\checkmark S = (-2, 3)$	znak odwrotny do tego w nawiasie
$\times r = 16$	$\checkmark r = 4$	prawa strona to r^2
$\times$ środek odcinka: $\frac{x_B - x_A}{2}$	$\checkmark \frac{x_A + x_B}{2}$	średnia, nie połowa różnicy
$\times D = A + B - C$ w równoległoboku $ABCD$	$\checkmark D = A + C - B$	przekątne AC i BD

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 24 z matury 2024

W równoległoboku $ABCD$ dane są $A = (-2, 1)$, $B = (6, -1)$, a przekątne przecinają się w punkcie $P = (3, 3)$. Oblicz długość boku BC .

ROZWIĄZANIE

1. Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy, więc P jest środkiem przekątnej AC .

2. $C = 2P - A = (6 - (-2), 6 - 1) = (8, 5)$.

3. $|BC| = \sqrt{(8-6)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Odpowiedź: $|BC| = 2\sqrt{10}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — wyznaczenie współrzędnych $C = (8, 5)$,
- 2 pkt — długość $|BC| = 2\sqrt{10}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 24.2, 25	2 pkt	środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym; P/F o okręgu
2025	zad. 22, 24	2 pkt	przekątna kwadratu z A i środka S ; równanie okręgu przez $(0, 0)$
2024	zad. 24	2 pkt	równoległobok: A , B i punkt przecięcia przekątnych $\rightarrow$ bok BC
2023	—	0 pkt	tylko proste (klucz PP12)
2022	zad. 23, 24	2 pkt	środek odcinka; przekątna kwadratu z dwóch wierzchołków
2021	zad. 25, 35	6 pkt	wierzchołki kwadratu z punktu przecięcia przekątnych; trójkąt równoramienny z C na osi Oy (5 pkt)
2020	zad. 20, 32	5 pkt	symetria względem początku układu; kwadrat z przekątną na danej prostej (4 pkt)

Trening: zadania **PP20.1–PP20.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP21 Stereometria

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

6/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 6,3 pkt (0–26)

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD (1–2 zadania) i otwarte 2–4 pkt (objętość, pole, kąt nachylenia)

 **Sygnal:** Znajdź trójkąt prostokątny w bryle. Ostrosłup i stożek: $\frac{1}{3}$. Rozwarcie stożka dziel na pół.

Co musisz umieć

- obliczać objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli,
- wskazywać kąt nachylenia krawędzi bocznej / ściany bocznej / przekątnej do płaszczyzny podstawy,
- wyznaczać długości w trójkątach prostokątnych „wewnątrz” bryły (Pitagoras + trygonometria),
- stosować przekątne: sześcianu $a\sqrt{3}$, prostopadłościanu $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Jak rozpoznać zadanie

- „ostrosłup prawidłowy czworokątny”, „krawędź boczna nachylona pod kątem” → trójkąt: wysokość – połowa przekątnej podstawy – krawędź boczna,
- „wysokość ściany bocznej nachylona pod kątem” → trójkąt: wysokość – połowa krawędzi podstawy – wysokość ściany,
- stożek: „tworząca”, „kąt rozwarcia” → trójkąt: H , r , l z kątem $\frac{\text{rozwarcie}}{2}$.

Teoria w pigułce

- Graniastosłup: $V = P_p \cdot H$; ostrosłup: $V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$. $P_c = 2P_p + P_b$ (graniastosłup), $P_c = P_p + P_b$ (ostrosłup).
- Ostrosłup prawidłowy: spodek wysokości to środek podstawy (w kwadracie — przecięcie przekątnych, odległy o $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ od wierzchołka i o $\frac{a}{2}$ od boku).
- Kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy: między krawędzią a jej rzutem; ściany bocznej: między wysokością ściany a odcinkiem od spodka wysokości do środka krawędzi podstawy.
- Walec: $V = \pi r^2 H$, $P_b = 2\pi r H$. Stożek: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$, $P_b = \pi r l$, $l^2 = r^2 + H^2$. Kula: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, $P = 4\pi r^2$.

Σ Najważniejsze wzory

$$V = \frac{1}{3} P_p H$$

$$d = a\sqrt{3} \text{ (sześcian)}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$V_{\text{stożka}} = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$

$$V_{\text{kuli}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$l^2 = r^2 + H^2$$

Algorytm krok po kroku

1. Narysuj bryłę i wyróżnij **trójkąt prostokątny**, w którym leży szukany kąt lub długość.
2. Ustal, które boki tego trójkąta znasz (połowa przekątnej? połowa krawędzi? tworząca?).
3. Oblicz brakujące długości: funkcje trygonometryczne kąta / Pitagoras.
4. Podstaw do wzoru na objętość lub pole; sprawdź jednostki i czy nie zapomniałeś o $\frac{1}{3}$.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹLE	DOBRCZE	DLACZEGO
X ostrosłup: $V = P_p \cdot H$	✓ $V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$	jedna trzecia!
X kąt ściany bocznej: z połową przekątnej	✓ z połową krawędzi $\frac{a}{2}$	różne trójkąty dla krawędzi i ściany
X kąt rozwarcia 120° w trójkącie H, r, l	✓ w trójkącie jest 60° (połowa)	kąt rozwarcia to kąt przy wierzchołku osiowego przekroju
X P_b stożka = $\pi r H$	✓ $P_b = \pi r l$	tworząca, nie wysokość

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 25 z matury 2025

Tworząca stożka ma długość **12**, a kąt rozwarcia tego stożka ma miarę **60°** . Oblicz objętość tego stożka.

ROZWIĄZANIE

1. W przekroju osiowym kąt między wysokością a tworzącą jest połową kąta rozwarcia: 30° .
2. $r = l \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$, $H = l \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.
3. $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 36 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3} \pi$.

Odpowiedź: $V = 72\sqrt{3} \pi$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — wyznaczenie promienia $r = 6$ (lub wysokości),
- 2 pkt — wyznaczenie obu wielkości $r = 6$, $H = 6\sqrt{3}$,
- 3 pkt — objętość $72\sqrt{3} \pi$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 27, 28	3 pkt	ostrosłup prawidłowy czworokątny z kątem 30° (2 pkt); stosunek objętości stożka i walca
2025	zad. 25, 26	4 pkt	objętość stożka z kątem rozwarcia 120° (3 pkt); przekątna sześcianu z objętości
2024	zad. 25.1, 25.2	2 pkt	graniastosłup prawidłowy sześciokątny: ściana boczna, kąt przekątnej
2023	zad. 25, 26, 27	6 pkt	kąt przekątnej graniastosłupa; ostrosłup (4 pkt); wierzchołki i krawędzie
2022	zad. 25, 26	2 pkt	graniastosłup o podstawie rombu; ostrosłup wycięty z sześcianu
2021	—	0 pkt	brak zadania z tego klucza
2020	zad. 24, 25, 34	7 pkt	pole sześcianu z przekątną; dwa stożki; ostrosłup prawidłowy czworokątny (5 pkt)

Trening: zadania **PP21.1–PP21.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP22 Kombinatoryka

PRIORYTET
A

CZĘSTOTLIWOŚĆ
7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU
śr. 1,1 pkt (1–2)

FORMY ZADAŃ
zamknięte ABCD — liczby o zadanych cyfrach,
kody

Sygnal: Kratki na pozycje, zacznij od najbardziej ograniczonej. Kolidują warunki → przypadki i dodawanie.

Co musisz umieć

- stosować regułę mnożenia (kolejne wybory) i regułę dodawania (rozłączne przypadki),
- liczyć liczby o zadanych cyfrach: ograniczenie „pierwsza cyfra $\neq 0$ ”, parzystość, różne cyfry,
- liczyć ustawienia (permutacje $n!$) i wybory z powtórzeniami (n^k),
- zliczać pary nieuporządkowane: $\frac{n(n-1)}{2}$.

Jak rozpoznać zadanie

- „ile jest liczb ... cyfrowych, w których...” — to zawsze reguła mnożenia po pozycjach,
- „kod”, „PIN”, „tablica rejestracyjna” → wybory z powtórzeniami lub bez,
- „każdy z każdym” → pary nieuporządkowane.

Teoria w pigułce

- Reguła mnożenia: jeśli wybór składa się z etapów o $n_1, n_2, \dots$ możliwościach, to wszystkich wyborów jest $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots$
- Reguła dodawania: przypadki rozłączne (np. „kończy się na 0” / „kończy się na 5”) liczymy osobno i dodajemy.
- Zaczynaj od pozycji z **największym ograniczeniem** (pierwsza cyfra, ostatnia cyfra przy parzystości).
- Ustawienie n różnych elementów w rzędzie: $n!$. Ciągi długości k z n elementów z powtórzeniami: n^k .

Σ Najważniejsze wzory

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

$$n^k \text{ (z powtórzeniami)}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ (pary)}$$

Algorytm krok po kroku

1. Narysuj „kratki” na kolejne cyfry/pozycje.
2. Wpisz liczbę możliwości do kratek, zaczynając od najbardziej ograniczonej.
3. Gdy ograniczenia się „gryzą” (np. zero na końcu), rozbij na przypadki i dodaj.
4. Pomnóż; kontrola na małym przykładzie lub wypisaniem.

Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRE	DLACZEGO
X trzycyfrowe: $10 \cdot 10 \cdot 10$	✓ $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$	pierwsza cyfra nie może być zerem
X różne cyfry, parzyste: $9 \cdot 9 \cdot 5$	✓ rozbij: koniec 0 / koniec 2, 4, 6, 8	zero „zabiera” różne pozycje
X uściski 5 osób: $5 \cdot 4 = 20$	✓ $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$	para AB = para BA
X z powtórzeniami: $4 \cdot 3 \cdot 2$	✓ 4^3	czytaj, czy cyfry mogą się powtarzać

 Przykład wzorcowy typ zadania 29 z matury 2026

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych parzystych, w których zapisie występują tylko cyfry **1, 2, 3, 4, 5** (cyfry mogą się powtarzać), jest

A. 50

B. 60

C. 125

D. 24

ROZWIĄZANIE

1. Cyfra jedności: **2** lub **4** — **2** możliwości.
2. Cyfra setek i dziesiątek: dowolna z **5**.
3. $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$.

Odpowiedź: A

Dlaczego nie pozostałe? B — bez powtórzeń i bez warunku parzystości ($5 \cdot 4 \cdot 3$); C — wszystkie liczby (5^3); D — parzyste, ale bez powtórzeń cyfr ($4 \cdot 3 \cdot 2$).

 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 29	1 pkt	trzycyfrowe nieparzyste z cyfr 0–6
2025	zad. 27	1 pkt	trzycyfrowe nieparzyste z dokładnie jednym zerem
2024	zad. 27	1 pkt	kody z cyfr 1, 3, 6, 8 bez powtórzeń
2023	zad. 28	1 pkt	pięciocyfrowe z cyfr 0, 5, 7
2022	zad. 27	1 pkt	czterocyfrowe nieparzyste podzielne przez 5
2021	zad. 23, 27	2 pkt	liczba przekątnych <i>n</i> -kąta; trzycyfrowe > 700 bez powtórzeń cyfr
2020	zad. 21	1 pkt	dwucyfrowe z cyfr 1, 3, 5, 7, 9 bez powtórzeń

Trening: zadania **PP22.1–PP22.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP23 Prawdopodobieństwo

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,0 pkt (1–3)

FORMY ZADAŃ

otwarte 2 pkt (losowanie ze zwracaniem, tworzenie liczb), zamknięte ABCD (kostki)

 **Sygnal:** Najpierw $|\Omega|$, potem $|A|$. „Co najmniej jeden” → przeciwne. Pary są uporządkowane.

Co musisz umieć

- opisywać przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω i liczyć $|\Omega|$ (ze zwracaniem n^2 , bez zwracania $n(n-1)$),
- zliczać zdarzenia sprzyjające tabelką lub regułą mnożenia,
- stosować klasyczną definicję $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ i zdarzenie przeciwne,
- zapisywać rozwiązanie tak, by egzaminator widział $|\Omega|$ i $|A|$.

Jak rozpoznać zadanie

- „losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy”, „rzucamy dwa razy kostką” → pary uporządkowane, tabela,
- „co najmniej jeden” → zdarzenie przeciwne,
- warunek na sumę/iloczyn/podzielność → podziel liczby na klasy (parzyste/nieparzyste, reszty).

Teoria w pigułce

- $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, gdy wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne. $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Zdarzenie przeciwne: $P(A') = 1 - P(A)$ — idealne dla „co najmniej jeden”.
- Dwa rzuty kostką: $|\Omega| = 36$ — narysuj tabelę 6×6 i zaznacz pola sprzyjające.
- Suma parzysta $\Leftrightarrow$ obie liczby tej samej parzystości; iloczyn parzysty $\Leftrightarrow$ co najmniej jedna parzysta.

Σ Najważniejsze wzory

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$|\Omega| = n^2 \text{ (ze zwracaniem)}$$

$$|\Omega| = n(n-1) \text{ (bez zwracania)}$$

Algorytm krok po kroku

- Opisz Ω i policz $|\Omega|$ (zapisz to w rozwiązaniu — to zwykle 1 pkt).
- Wypisz lub policz zdarzenia sprzyjające (tabela, przypadki, reguła mnożenia).
- Podziel $|A|$ przez $|\Omega|$ i skróć ułamek.
- Kontrola: czy wynik mieści się w $[0, 1]$ i ma sens (np. $P < \frac{1}{2}$ dla rzadkiego zdarzenia).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X dwa rzuty: $ \Omega = 12$	✓ $ \Omega = 36$	pary uporządkowane
X suma 7: 3 pary	✓ 6 par: $(1, 6), (6, 1), \dots$	$(1, 6) \neq (6, 1)$
X bez zwracania: $ \Omega = n^2$	✓ $n(n-1)$	druga losowana liczba jest inna
X tylko wynik $\frac{25}{49}$	✓ zapis $ \Omega = 49, A = 25$	bez obliczeń tylko 0–1 pkt

🔗 Przykład wzorcowy typ zadania 30 z matury 2024

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwa razy po jednej liczbie. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb jest parzysta.

ROZWIĄZANIE

1. $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$.
2. Suma parzysta $\Leftrightarrow$ obie liczby nieparzyste ($4 \cdot 4 = 16$ par) lub obie parzyste ($3 \cdot 3 = 9$ par).
3. $|A| = 16 + 9 = 25, P(A) = \frac{25}{49}$.

Odpowiedź: $\frac{25}{49}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie $|\Omega| = 49$ i $|A| = 25$ (albo poprawne wypisanie zdarzeń sprzyjających),
- 2 pkt — wynik $\frac{25}{49}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 30	2 pkt	liczba dwucyfrowa z cyfr zbiorów X i Y
2025	zad. 28	1 pkt	dwukrotny rzut kostką, suma oczek 11
2024	zad. 30	2 pkt	losowanie ze zwracaniem z $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, suma parzysta
2023	zad. 30	2 pkt	losowanie ze zwracaniem z ośmiu liczb, iloczyn podzielny przez ...
2022	zad. 34	2 pkt	losowanie ze zwracaniem ze zbioru $\{1, \dots, 9\}$
2021	zad. 26, 34	3 pkt	przekątna sześcianu z losowanych wierzchołków; suma oczek w dwóch rzutach (2 pkt)
2020	zad. 30	2 pkt	dwa rzuty kostką — prawdopodobieństwo zdarzenia

Trening: zadania **PP23.1–PP23.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP24 Statystyka: średnia, mediana, dominanta

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

7/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,7 pkt (1–3)

FORMY ZADAŃ

zamknięte ABCD, P/F, otwarte 2 pkt (dane z diagramu)

 **Sygnal:** Suma = $n \cdot \bar{x}$. Mediana: posortuj, licz pozycje. Dominanta to wartość.

Co musisz umieć

- obliczać średnią arytmetyczną i ważoną, medianę i dominantę (także z tabeli/diagramu),
- wyznaczać brakującą daną ze znanej średniej,
- przewidywać zmianę średniej po przekształceniu danych ($2a$, $a + 1$, dodanie liczby),
- obliczać odchylenie standardowe prostego zestawu danych.

Jak rozpoznać zadanie

- diagram słupkowy „ocena — liczba uczniów” → dane z powtórzeniami, mediana z pozycji,
- „średnia ... jest równa ...; oblicz x ” → równanie z sumą,
- „średnia liczb $2a, 2b, \dots$ ” → własności średniej.

Teoria w pigułce

- Średnia: $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ — zatem suma danych = $n \cdot \bar{x}$.
- Mediana: uporządkuj dane; n nieparzyste — środkowa wartość, n parzyste — średnia dwóch środkowych (pozycje $\frac{n}{2}$ i $\frac{n}{2} + 1$).
- Dominanta: wartość występująca najczęściej (może być kilka).
- Pomnożenie wszystkich danych przez k mnoży średnią przez k ; dodanie c do wszystkich danych zwiększa średnią o c .
- Odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$.

Σ Najważniejsze wzory

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{w_1 + \dots + w_n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

mediana: pozycje $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2} + 1$

Algorytm krok po kroku

1. Z diagramu wypisz dane jako tabelę „wartość — liczebność” i policz n .
2. Średnia: suma (wartość · liczebność) przez n .
3. Mediana: licz narastająco liczebności, aż dojdiesz do pozycji środkowych.
4. Sprawdź: mediana i dominanta to wartości danych (nie liczebności!).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X mediana z nieuporządkowanych danych	✓ najpierw uporządkuj	środek listy posortowanej
X dominanta = największa liczebność (6)	✓ dominanta = wartość o największej liczebności	wartość, nie liczba osób
X średnia z diagramu: średnia wysokości słupków	✓ $\frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}$	ważymy liczebnościami
X $n = 20$: mediana to 10. wartość	✓ średnia 10. i 11. wartości	n parzyste

📌 Przykład wzorcowy typ zadań 29–30 z matur 2023–2025

Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu: ocena 1 — 2 uczniów, 2 — 4, 3 — 7, 4 — 5, 5 — 2. Oblicz średnią i medianę ocen.

ROZWIĄZANIE

1. $n = 2 + 4 + 7 + 5 + 2 = 20$. Suma ocen: $2 + 8 + 21 + 20 + 10 = 61$, więc $\bar{x} = \frac{61}{20} = 3,05$.
2. Mediana: pozycje 10 i 11. Narastająco: 1 → 2, 2 → 6, 3 → 13 — obie pozycje to ocena 3. Mediana = 3.
3. Odpowiedź: średnia 3,05, mediana 3.

Odpowiedź: średnia 3,05, mediana 3

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — poprawna średnia 3,05,
- 1 pkt — poprawna mediana 3.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 31, 32	2 pkt	P/F o średnich i medianach dwóch klas; średnia siedmiu liczb z dwóch grup
2025	zad. 29, 30	3 pkt	suma $x + y$ ze średniej; dane z diagramu (2 pkt)
2024	zad. 28, 29	2 pkt	średnia liczb a, a, b, b, c, c ; mediana z diagramu
2023	zad. 29	2 pkt	mediana i średnia cen z diagramu
2022	zad. 28	1 pkt	średnia zestawu $2x, 4, 6, 8, 11, 13$
2021	zad. 28	1 pkt	mediana ciągu niemalejącego z parametrem
2020	zad. 23	1 pkt	mediana zestawu $2, 3, a, 8$

Trening: zadania **PP24.1–PP24.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PP25 Optymalizacja i modelowanie funkcją kwadratową

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

4/7 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,9 pkt (0–4)

FORMY ZADAŃ

otwarte 4 pkt („wyznacz wymiary, dla których pole jest największe”) lub wiązka ABCD/P/F do modelu

 **Sygnal:** Zmienna → druga wielkość z warunku → $P(x)$ + dziedzina → wierzchołek → pełna odpowiedź.

Co musisz umieć

- budować model: jedna zmienna, druga wielkość wyrażona przez nią, funkcja celu,
- wyznaczać dziedzinę modelu (dodatnie długości, liczby naturalne),
- wyznaczać wartość największą/najmniejszą funkcji kwadratowej w wierzchołku ($p = -\frac{b}{2a}$),
- interpretować wynik w kontekście (wymiary, czas, dzień) i podawać pełną odpowiedź.

Jak rozpoznać zadanie

- „rozważamy wszystkie prostokąty/prostopadłościany..., wyznacz te, dla których pole jest największe”,
- gotowy wzór $h(t)$, $L(n)$, $Z(x)$ i pytania o maksimum, moment, dzień,
- stała suma długości (siatka, drut, krawędzie) — iloczyn do maksymalizacji.

Teoria w pigułce

- Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ z $a < 0$ osiąga **największą** wartość w $p = -\frac{b}{2a}$, równą $q = f(p)$; dla $a > 0$ — najmniejszą.
- Dziedzina modelu to zwykle przedział otwarty (np. $x \in (0, 20)$) — sprawdź, czy p do niej należy.
- Gdy zmienna jest naturalna (dzień n), a p nie jest całkowite — sprawdź najbliższe liczby całkowite.
- Przy stałej sumie $x + y = s$ iloczyn xy jest największy dla $x = y = \frac{s}{2}$ (np. kwadrat ma największe pole przy danym obwodzie).

Σ Najważniejsze wzory

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$q = f(p)$$

$$P(x) = x \cdot (\dots)$$

$$x \in (0, \dots) \text{ — dziedzina}$$

Algorytm krok po kroku

1. Oznacz zmienną x (z jednostką) i wyraż drugą wielkość przez x z warunku (np. długość siatki).
2. Zapisz funkcję celu $P(x)$ i jej dziedzinę.
3. Wyznacz $p = -\frac{b}{2a}$, sprawdź $p \in D$, oblicz drugą wielkość i wartość $P(p)$.
4. Odpowiedz na pytanie: wymiary i największe pole (z jednostkami).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X brak dziedziny funkcji $P(x)$	✓ $x \in (0, 20)$	CKE przyznaje za nią punkt
X podanie tylko $x = 10$	✓ $x = 10$ m, $y = 30$ m, $P = 300$ m ²	pytają o wymiary (oba)
X maksimum w q zamiast w p	✓ argument p , wartość q	kiedy vs ile
X $y = 60 - 2x$ przy trzech odcinkach x	✓ $y = 60 - 3x$	policz odcinki na rysunku

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 31 z matur 2024–2025

Rozważamy wszystkie prostokąty, których dwa boki leżą na osiach układu współrzędnych, jeden wierzchołek leży w punkcie $(0, 0)$, a przeciwny wierzchołek leży na prostej $y = -2x + 8$ (w pierwszej ćwiartce). Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu i oblicz to pole.

ROZWIĄZANIE

1. Wierzchołek $(x, -2x + 8)$, gdzie $x \in (0, 4)$ (obie współrzędne dodatnie).
2. $P(x) = x(-2x + 8) = -2x^2 + 8x$.
3. $p = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2 \in (0, 4)$; $a < 0$, więc to maksimum.
4. Wymiary: $x = 2$, $y = -4 + 8 = 4$; $P_{\max} = 8$.

Odpowiedź: 2×4 , $P_{\max} = 8$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapis pola jako funkcji jednej zmiennej $P(x) = x(-2x + 8)$,
- 1 pkt — dziedzina $x \in (0, 4)$,
- 1 pkt — $p = 2$ (wskazanie maksimum),
- 1 pkt — wymiary 2 i 4 oraz pole 8 .

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 33.1, 33.2	2 pkt	rzut piłeczką $h(t) = -4,9t^2 + 14,7t$: moment upadku i maksimum
2025	zad. 31	4 pkt	prostopadłościany o sumie krawędzi z wierzchołka — największe pole
2024	zad. 31	4 pkt	trzy wybiegi z 36 m siatki — największe pole
2023	zad. 31.1, 31.2	3 pkt	liczba klientów $L(n) = -n^2 + 22n + 279$: P/F i dzień maksimum
2022	—	0 pkt	brak zadania optymalizacyjnego w tym arkuszu
2021	—	0 pkt	brak zadania optymalizacyjnego w tym arkuszu
2020	—	0 pkt	brak zadania optymalizacyjnego w tym arkuszu

Trening: zadania **PP25.1–PP25.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

Ściąga — wszystkie klucze na jednej stronie

Sygnał rozpoznawczy i 3–4 najważniejsze wzory każdego klucza. Przejrzyj ją rano przed maturą.

PP01	Potęgi i pierwiastki Różne podstawy → sprowadź do liczby pierwszej. Suma potęg → wyłącz najmniejszą.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(ab)^n = a^n b^n$
PP02	Logarytmy Współczynnik → do wykładnika, suma → iloczyn, różnica → iloraz, na końcu argument jako potęgą podstawy.	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^k = k \log_a x$ $\log_a a^p = p$
PP03	Wartość bezwzględna i przedziały Moduł = odległość. „Mniejsze” → przedział wokół środka, „większe” → dwa ramiona.	$ x - a < r \iff a - r < x < a + r$ $ x - a > r \iff x < a - r \text{ lub } x > a + r$ $ x - a = r \iff x = a - r \text{ lub } x = a + r$ $ kx - m < r \iff x - \frac{m}{k} < \frac{r}{k} \ (k > 0)$
PP04	Wzory skróconego mnożenia Widzisz $A^2 - B^2$ albo trójmian z „podwojonym iloczynem” → najpierw zwiń, potem licz.	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
PP05	Dowody algebraiczne i podzielność Cel: $d \cdot (\text{liczba całkowita})$. Nieparzysta → $2k + 1$. Na końcu zdanie z wnioskiem.	$n = 2k$ (parzysta) $n = 2k + 1$ (nieparzysta) $A = d \cdot m \Rightarrow d \mid A$ $A = d \cdot m + r$ (reszta r)
PP06	Równania liniowe, iloczynowe i wymierne Iloczyn = 0 → każdy czynnik osobno. Ułamek → najpierw dziedzina!	$ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$ $\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \wedge B \neq 0$ $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC \ (B, D \neq 0)$
PP07	Wielomiany i rozkład na czynniki Cztery wyrazy stopnia 3 → grupuj „2 + 2”. Wspólny czynnik → wyłącz, nigdy nie dziel.	$ax^3 + bx^2 + cx + d = x^2(ax + b) + \dots$ (grupowanie) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ $W(a) = 0 \iff (x - a) \mid W(x)$
PP08	Nierówności liniowe i kwadratowe Wszystko na lewo → miejsca zerowe → szkic paraboli → odczyt. Dzieliś przez minus → odwracasz znak.	$\Delta = b^2 - 4ac$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
PP09	Układy równań i zadania tekstowe Dwie niewiadome + dwie informacje → układ. Na końcu sprawdzenie w treści.	$p\%$ liczby x : $\frac{p}{100} \cdot x$ po obniżce o $p\%$: $(1 - \frac{p}{100})x$ $s = v \cdot t$ wpływy = cena $\cdot$ liczba sztuk
PP10	Procenty i procent składany Zmiana o $p\%$ = mnożnik $1 \pm \frac{p}{100}$. Kolejne zmiany mnożysz, wartość początkową odzyskujesz dzieleniem.	$\frac{p}{100} \cdot a$ $\frac{a}{b} \cdot 100\%$ $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ zmiana względna: $\frac{\text{nowa} - \text{stara}}{\text{stara}} \cdot 100\%$
PP11	Odczytywanie własności funkcji i funkcje kawałkami Wykres → rzutuj na osie; kółko puste = wartości brak. Klamra → wynik musi leżeć w przedziale wzoru.	$g(x) = f(x - p) + q$ wektor $[p, q]$ $D_g = D_f$ przesunięta o p $y = -f(x)$: $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ $y = f(-x)$: $(x, y) \rightarrow (-x, y)$
PP12	Funkcja liniowa i proste Równoległe: równe a . Prostopadłe: $a_1 a_2 = -1$. Przez punkt: podstaw i wylicz b .	$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ $y - y_0 = a(x - x_0)$ $a_1 = a_2$ (równoległe) $a_1 \cdot a_2 = -1$ (prostopadłe)
PP13	Funkcja kwadratowa Wierzchołek → postać kanoniczna. Miejsca zerowe → iloczynowa. a z dodatkowego punktu.	$p = -\frac{b}{2a}$ $q = f(p) = -\frac{\Delta}{4a}$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
PP14	Ciąg arytmetyczny Wszystko przez a_1 i r . Trzy kolejne wyrazy: $2b = a + c$. Malejący → $r < 0$.	$a_n = a_1 + (n - 1)r$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$ $2b = a + c$

PP15	Ciąg geometryczny $a_n = a_1 q^{n-1}$; trzy kolejne: $b^2 = ac$; iloczyny wyrazów — liczyć sumę indeksów.	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ ($q \neq 1$) $b^2 = ac$ $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
PP16	Trygonometria podstawowa Jedynka + tangens = iloraz. Kąt rozwarty → cosinus i tangens ujemne.	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
PP17	Trójkąty: Pitagoras, pola, sinus i cosinus Dwa boki + kąt między nimi → $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$ i tw. cosinusów. Równoboczny → $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.	$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ $P_\Delta = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
PP18	Podobieństwo, twierdzenie Talesa i dwusieczna Równe kąty → podobieństwo → proporcja. Pola przez k^2 , objętości przez k^3 .	$\frac{P_2}{P_1} = k^2$ $\frac{V_2}{V_1} = k^3$ $\frac{ AD }{ DB } = \frac{ AC }{ BC }$ $h^2 = p \cdot q$
PP19	Okrąg i kąty Wpisany = połowa środkowego. Dwa promienie → trójkąt równoramienny. Średnica → 90° .	$\alpha_{\text{wpis}} = \frac{1}{2} \alpha_{\text{środk}} l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$ $P_{\text{wycinka}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$ $\alpha + \gamma = 180^\circ$ (wpisany)
PP20	Geometria analityczna Przekątne równoległoboku → wspólny środek. Okrąg: znak w nawiasie odwrotny, prawa strona to r^2 .	$ AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ $S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $D = A + C - B$
PP21	Stereometria Znajdź trójkąt prostokątny w bryle. Ostrosłup i stożek: $\frac{1}{3}$. Rozwarcie stożka dziel na pół.	$V = \frac{1}{3} P_p H$ $d = a\sqrt{3}$ (sześcián) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $V_{\text{stożka}} = \frac{1}{3} \pi r^2 H$
PP22	Kombinatoryka Kratki na pozycje, zacznij od najbardziej ograniczonej. Kolizja warunków → przypadki i dodawanie.	$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ n^k (z powtórzeniami) $\frac{n(n-1)}{2}$ (pary)
PP23	Prawdopodobieństwo Najpierw $ \Omega $, potem $ A $. „Co najmniej jeden” → przeciwne. Pary są uporządkowane.	$P(A) = \frac{ A }{ \Omega }$ $P(A') = 1 - P(A)$ $ \Omega = n^2$ (ze zwracaniem) $ \Omega = n(n-1)$ (bez zwracania)
PP24	Statystyka: średnia, mediana, dominanta Suma = $n \cdot \bar{x}$. Mediana: posortuj, liczyć pozycje. Dominanta to wartość.	$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ $\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + \dots + w_n x_n}{w_1 + \dots + w_n}$ $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ mediana: pozycje $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2} + 1$
PP25	Optymalizacja i modelowanie funkcją kwadratową Zmienna → druga wielkość z warunku → $P(x)$ + dziedzina → wierzchołek → pełna odpowiedź.	$p = -\frac{b}{2a}$ $q = f(p)$ $P(x) = x \cdot (\dots)$ $x \in (0, \dots)$ — dziedzina

Źródła i metodologia

Analiza dotyczy powtarzalnych **umiejętności i schematów**, a nie przewidywania treści konkretnych zadań. Częstotliwość i punkty policzono na podstawie **siedmiu** prawdziwych arkuszy majowych CKE z lat **2020–2026**, rozpisanych zadanie po zadaniu w serwisie matematix.pl. Arkusze 2020–2022 pochodzą z Formuły 2015 — uwzględniamy z nich tylko te zadania, których umiejętności nadal obowiązują w Formule 2023 (pominięte zostały m.in. ułamki okresowe i funkcja wykładnicza na poziomie podstawowym). Od matury 2025 wymagania egzaminacyjne opierają się na zmienionej (odchudzonej) podstawie programowej, dlatego arkusze 2025–2026 mają w analizie największą wagę.

Zadania treningowe są **autorskie** — odwzorowują typy umiejętności z arkuszy, ale nie są kopiami zadań CKE. Wszystkie odpowiedzi zostały zweryfikowane rachunkowo.

- CKE — Egzamin maturalny w Formule 2023 i w Formule 2015: arkusze, zasady oceniania, „Wybrane wzory matematyczne”,
- matematix.pl — arkusze maturalne z matematyki z rozwiązaniami (poziom podstawowy i rozszerzony, lata 2020–2026),
- matematix.pl/poradnik-maturalny — interaktywna wersja tego opracowania: zadania z zapisem postępów.