

MATURA Z FIZYKI · POZIOM ROZSZERZONY

ROZWIĄZANIA

Pełne rozwiązania krok po kroku

Pełne rozwiązania krok po kroku wszystkich zadań treningowych: rozpoznanie metody, obliczenia, odpowiedź, typowe błędy i schemat punktowania.

25

kluczy

250

zadań treningowych

100%

z rozwiązaniami

Analiza: majowe arkusze CKE 2022–2026 (5 arkuszy, Formuła 2023), fizyka — poziom rozszerzony. Zadania treningowe są autorskie i odwzorowują typy umiejętności — nie są kopiami zadań CKE.

Spis treści

- FZ01** Kinematyka i wykresy ruchu
- FZ02** Rzuty i spadek swobodny
- FZ03** Zasady dynamiki, tarcie i równia
- FZ04** Opory ruchu, prędkość graniczna i hydrostatyka
- FZ05** Praca, moc i zasada zachowania energii
- FZ06** Pęd, popęd i zderzenia
- FZ07** Ruch po okręgu i siła dośrodkowa
- FZ08** Bryła sztywna: moment siły, toczenie, energia obrotowa
- FZ09** Równowaga ciał i środek masy
- FZ10** Grawitacja, satelity i prawa Keplera
- FZ11** Drgania harmoniczne
- FZ12** Fale mechaniczne, interferencja i fale stojące
- FZ13** Dźwięk: natężenie i efekt Dopplera
- FZ14** Gaz doskonały i przemiany gazowe
- FZ15** Pierwsza zasada termodynamiki, ciepło i cykle
- FZ16** Elektrostatyka: prawo Coulomba i natężenie pola
- FZ17** Potencjał, napięcie, praca pola i kondensatory
- FZ18** Prąd stały: obwody, opór i moc
- FZ19** Pole magnetyczne: siła Lorentza i elektrodynamiczna
- FZ20** Indukcja elektromagnetyczna i prąd przemienny
- FZ21** Optyka geometryczna: załamanie i soczewki
- FZ22** Optyka falowa: interferencja, dyfrakcja, polaryzacja
- FZ23** Szczególna teoria względności
- FZ24** Fizyka kwantowa i atomowa
- FZ25** Fizyka jądrowa: rozpady, energia wiązania, prawo rozpadu

FZ01 Kinematyka i wykresy ruchu

🔑 Dwa ciała → dwa równania ruchu; „największa odległość” = równe prędkości.

FZ01.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Ciało rusza z prędkością $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i porusza się ze stałym przyspieszeniem $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz drogę przebytą w ciągu pierwszych 4 s.

ROZWIĄZANIE

$$1. s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 16.$$

$$2. s = 8 + 24 = 32 \text{ m.}$$

Odpowiedź: $s = 32 \text{ m}$

FZ01.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Samochód hamuje ze stałym opóźnieniem z prędkości $108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i zatrzymuje się po przebyciu 90 m. Oblicz wartość opóźnienia.

ROZWIĄZANIE

$$1. v_0 = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$2. 0 - v_0^2 = -2as \Rightarrow a = \frac{v_0^2}{2s} = \frac{900}{180} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Odpowiedź: $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

FZ01.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Ciało przez pierwsze 4 s rozpędza się jednostajnie od 0 do $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a następnie przez 6 s jedzie ze stałą prędkością $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Droga przebyta w ciągu tych 10 s jest równa:

A. 120 m

B. 108 m

C. 96 m

D. 72 m

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{Pierwszy etap (pole trójkąta): } \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 24 \text{ m.}$$

$$2. \text{Drugi etap (pole prostokąta): } 12 \cdot 6 = 72 \text{ m.}$$

$$3. \text{Razem } s = 96 \text{ m.}$$

Odpowiedź: **C**

Dlaczego nie pozostałe? Droga to pole pod wykresem $v(t)$ — trójkąt plus prostokąt.

FZ01.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Na wykresie zależności prędkości od czasu pewnego ciała odcinek od 0 do 5 s jest nachylony w górę (od 0 do $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$), a od 5 s do 9 s — w dół (od $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do 0). Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Wartość przyspieszenia w pierwszym etapie wynosi $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.	P	F
2.	Wartość przyspieszenia w drugim etapie jest mniejsza niż w pierwszym.	P	F
3.	Łączna droga przebyta przez ciało wynosi 45 m.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Przyspieszenie w I etapie: $\frac{10}{5} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ — prawda.
2. W II etapie $|a| = \frac{10}{4} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, czyli **większe** co do wartości — fałsz.
3. Droga = $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 = 25 + 20 = 45 \text{ m}$ — prawda.

Odpowiedź: PFP

FZ01.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Ciało porusza się po prostej: przez 6 s jedzie ze stałą prędkością $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w prawo, a potem przez 4 s ze stałą prędkością $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w lewo. Oblicz drogę i wartość przemieszczenia ciała.

ROZWIĄZANIE

1. Droga: $s = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 30 + 20 = 50 \text{ m}$ (sumujemy bez znaku).
2. Przemieszczenie: $\Delta x = +30 - 20 = +10 \text{ m}$, więc $|\Delta x| = 10 \text{ m}$.

Odpowiedź: $s = 50 \text{ m}$, $|\Delta x| = 10 \text{ m}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie drogi 50 m,
- 2 pkt — obliczenie przemieszczenia 10 m.

FZ01.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Dwa pociągi jadą po równoległych torach w tę samą stronę: pierwszy z prędkością $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, drugi z prędkością $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Długość pierwszego pociągu to 150 m. Oblicz czas, w jakim pierwszy pociąg wyprzedzi (minie) stojącego przy torze obserwatora oraz czas, w jakim wyprzedzi cały drugi pociąg o długości 250 m.

ROZWIĄZANIE

1. Obserwator: $t_1 = \frac{150}{30} = 5 \text{ s}$.
2. Wyprzedzanie: w układzie drugiego pociągu pierwszy jedzie z $v_{wzgl} = 30 - 20 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
3. Musi przebyć $150 + 250 = 400 \text{ m}$, więc $t_2 = \frac{400}{10} = 40 \text{ s}$.

Odpowiedź: 5 s oraz 40 s

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie $t_1 = 5 \text{ s}$,
- 2 pkt — prędkość względna $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i droga 400 m,
- 3 pkt — wynik $t_2 = 40 \text{ s}$.

Winda rusza z przyspieszeniem $1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ przez 3 s, potem jedzie ze stałą prędkością przez 8 s i wreszcie hamuje jednostajnie, zatrzymując się po 2 s. Oblicz całkowitą drogę przebytą przez windę.

ROZWIĄZANIE

1. Po rozpędzaniu $v = 1,2 \cdot 3 = 3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $s_1 = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 9 = 5,4 \text{ m}$.
2. Jazda jednostajna: $s_2 = 3,6 \cdot 8 = 28,8 \text{ m}$.
3. Hamowanie: $s_3 = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 2 = 3,6 \text{ m}$.
4. $s = 5,4 + 28,8 + 3,6 = 37,8 \text{ m}$.

Odpowiedź: $s = 37,8 \text{ m}$

Wskazówka: Na hamowaniu droga to pole trójkąta — połowa iloczynu prędkości i czasu.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie prędkości maksymalnej $3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
- 2 pkt — obliczenie dróg na wszystkich trzech etapach,
- 3 pkt — suma **37,8 m**.

Z punktu **A** wyrusza rowerzysta ze stałą prędkością $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. W tej samej chwili z punktu **B**, odległego o 600 m, wyrusza mu naprzeciw biegacz z prędkością $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz, po jakim czasie i w jakiej odległości od **A** się spotkają.

ROZWIĄZANIE

1. Zbliżają się z prędkością względną $6 + 4 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
2. $t = \frac{600}{10} = 60 \text{ s}$.
3. $x_A = 6 \cdot 60 = 360 \text{ m}$.

Odpowiedź: po 60 s, w odległości 360 m od **A**

Schemat punktowania:

- 1 pkt — prędkość zbliżania $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (lub równanie $6t + 4t = 600$),
- 2 pkt — czas 60 s,
- 3 pkt — odległość 360 m od **A**.

Motocykl rusza z miejsca ze stałym przyśpieszeniem $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ w chwili, gdy mija go rower jadący ze stałą prędkością $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz największą odległość, o jaką rower wyprzedzi motocykl, oraz prędkość motocykla w chwili dogonienia roweru.

ROZWIĄZANIE

1. $x_r = 8t$, $x_m = t^2$, odległość $d(t) = 8t - t^2$.
2. Największa, gdy $v_m = v_r$: $2t = 8 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$, $d_{\max} = 32 - 16 = 16 \text{ m}$.
3. Dogonienie: $8t = t^2 \Rightarrow t = 8 \text{ s}$, wtedy $v_m = 2 \cdot 8 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: $d_{\max} = 16 \text{ m}$; $v = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równania ruchu obu pojazdów,
- 2 pkt — warunek równości prędkości i $t = 4 \text{ s}$,
- 3 pkt — $d_{\max} = 16 \text{ m}$,
- 4 pkt — $v = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w chwili dogonienia.

Ciało porusza się prostoliniowo z przyśpieszeniem $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, startując ze spoczynku. Wykaż, że drogi przebyte w kolejnych sekundach ruchu mają się do siebie jak $1 : 3 : 5 : 7$, i oblicz drogę przebytą w czwartej sekundzie ruchu.

ROZWIĄZANIE

1. $s(t) = \frac{1}{2}at^2$, więc droga w n -tej sekundzie: $\Delta s_n = \frac{1}{2}a(n^2 - (n-1)^2) = \frac{1}{2}a(2n-1)$.
2. Zatem $\Delta s_n \propto (2n-1)$, czyli $1 : 3 : 5 : 7 : \dots$ ■
3. Dla $n = 4$: $\Delta s_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14 \text{ m}$.

Odpowiedź: $s_4 = 14 \text{ m}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie $\Delta s_n = s(n) - s(n-1)$,
- 2 pkt — przekształcenie do $\frac{1}{2}a(2n-1)$,
- 3 pkt — uzasadnienie proporcji $1 : 3 : 5 : 7$,
- 4 pkt — obliczenie $\Delta s_4 = 14 \text{ m}$.

FZ02

🔑 Rozdziel pion i poziom; wierzchołek toru to $v_y = 0$, a nie $a = 0$.

FZ02.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★☆☆

0–2 pkt

Ciało upuszczono swobodnie z wysokości **45 m**. Przyjmij $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz czas spadania.

ROZWIĄZANIE

$$1. h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{90}{10}} = 3 \text{ s.}$$

Odpowiedź: $t = 3 \text{ s}$

FZ02.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0-2 pkt

Kulkę wyrzucono pionowo w górę z prędkością $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Na jaką maksymalną wysokość się wzniesie?

ROZWIĄZANIE

$$1. \ h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{400}{20} = 20 \text{ m.}$$

Odpowiedź: $h = 20 \text{ m}$

FZ02.3 ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Z tej samej wysokości jednocześnie upuszczono kulkę **A** i rzucono poziomo kulkę **B** (opory pomijamy). Wtedy:

- A.** kulka **A** spadnie wcześniej
- B.** obie spadną jednocześnie
- C.** kulka **B** spadnie wcześniej
- D.** zależy to od masy kulek

ROZWIĄZANIE

1. Ruch pionowy obu kulek jest identyczny: $y = \frac{1}{2}gt^2$.
2. Czas spadania jest więc taki sam; różni je tylko zasięg poziomy.

Odpowiedź: B

Dlaczego nie pozostałe? Składowa pozioma prędkości nie wpływa na ruch w pionie.

FZ02.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Ciało rzucono poziomo z prędkością v_0 z wysokości h (opory pomijamy). Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Torem ruchu ciała jest parabola.	P	F
2.	Wartość prędkości ciała jest w czasie lotu stała.	P	F
3.	Przyspieszenie ciała jest przez cały lot stałe i skierowane pionowo w dół.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Tor jest parabolą — prawda.
2. Wartość prędkości rośnie, bo przybiera składowej pionowej: $v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$ — fałsz (prędkość nie jest stała).
3. Przyspieszenie jest stałe i równe g — prawda.

Odpowiedź: PFP

FZ02.5 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Z wysokości $h = 20$ m rzucono poziomo kamień z prędkością $v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz zasięg rzutu oraz wartość prędkości kamienia tuż przed uderzeniem w ziemię.

ROZWIĄZANIE

1. $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{4} = 2$ s, więc $z = v_0 t = 30$ m.
2. $v_y = gt = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: $z = 30$ m; $v = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie czasu lotu 2 s,
- 2 pkt — zasięg 30 m,
- 3 pkt — prędkość uderzenia $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

FZ02.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Piłkę wyrzucono pionowo w górę z prędkością $v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ z wysokości $h_0 = 10$ m ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz czas, po którym piłka spadnie na ziemię.

ROZWIĄZANIE

1. $0 = 10 + 15t - 5t^2$, czyli $5t^2 - 15t - 10 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 2 = 0$.
2. $\Delta = 9 + 8 = 17$, $t = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \approx 3,56$ s (drugi pierwiastek ujemny — odrzucamy).

Odpowiedź: $t \approx 3,56$ s

Schemat punktowania:

- 1 pkt — poprawne równanie $h(t) = 0$,
- 2 pkt — rozwiązanie równania kwadratowego,
- 3 pkt — wybór dodatniego pierwiastka i wynik $\approx 3,6$ s.

Ciało wyrzucono pionowo w górę z prędkością v_0 . Wykaż, że czas wznoszenia jest równy czasowi spadania do poziomu wyrzutu, a prędkość powrotu ma tę samą wartość co v_0 (opory pomijamy).

ROZWIĄZANIE

1. Wznoszenie: $v_y = v_0 - gt = 0 \Rightarrow t_w = \frac{v_0}{g}$, wysokość $\Delta h = \frac{v_0^2}{2g}$.
2. Spadanie z Δh bez prędkości początkowej: $t_s = \sqrt{\frac{2\Delta h}{g}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}} = \frac{v_0}{g} = t_w$. ■
3. Prędkość powrotu: $v = gt_s = v_0$ (zwrot przeciwny). Można też z ZZE: $\frac{1}{2}mv^2 = mg\Delta h$.

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wyznaczenie $t_w = \frac{v_0}{g}$ i Δh ,
- 2 pkt — obliczenie t_s i wykazanie równości,
- 3 pkt — uzasadnienie równości wartości prędkości.

Ciało rzucono ukośnie z prędkością $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pod kątem 30° do poziomu ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz maksymalną wysokość i zasięg rzutu.

ROZWIĄZANIE

1. $v_{0y} = 20 \sin 30^\circ = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_{0x} = 20 \cos 30^\circ \approx 17,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
2. $h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{100}{20} = 5 \text{ m}$.
3. $t_c = \frac{2v_{0y}}{g} = 2 \text{ s}$, $z = v_{0x}t_c \approx 34,6 \text{ m}$ (lub $z = \frac{v_0^2 \sin 60^\circ}{g}$).

Odpowiedź: $h_{\max} = 5 \text{ m}$; $z \approx 34,6 \text{ m}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozłożenie prędkości na składowe,
- 2 pkt — obliczenie $h_{\max} = 5 \text{ m}$,
- 3 pkt — obliczenie zasięgu $\approx 34,6 \text{ m}$.

FZ02.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Z balkonu na wysokości h_0 upuszczono swobodnie kamień, który spadał przez 2 s. Drugi kamień rzucono w dół z tej samej wysokości z prędkością $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz h_0 oraz czas spadania drugiego kamienia ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

ROZWIĄZANIE

1. $h_0 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20 \text{ m}$.
2. Drugi kamień: $20 = 5t + 5t^2 \Rightarrow t^2 + t - 4 = 0$.
3. $t = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \approx 1,56 \text{ s}$.

Odpowiedź: $h_0 = 20 \text{ m}$; $t \approx 1,56 \text{ s}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie $h_0 = 20 \text{ m}$,
- 2 pkt — równanie ruchu drugiego kamienia,
- 3 pkt — rozwiązanie i wybór dodatniego pierwiastka,
- 4 pkt — wynik $\approx 1,6 \text{ s}$.

FZ02.10 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Ze szczytu wieży o wysokości H wyrzucono pionowo w górę kulkę z prędkością $v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kulka uderzyła w ziemię z prędkością o wartości $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz wysokość wieży i całkowity czas lotu.

ROZWIĄZANIE

1. Z zasady zachowania energii: $\frac{1}{2}v_k^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + gH \Rightarrow H = \frac{v_k^2 - v_0^2}{2g} = \frac{900 - 100}{20} = 40 \text{ m}$.
2. Czas: $v_k = -30$ (w dół), $-30 = 10 - 10t \Rightarrow t = 4 \text{ s}$.
3. Sprawdzenie: $h(4) = 10 \cdot 4 - 5 \cdot 16 = -40$ — zgadza się z $H = 40 \text{ m}$.

Odpowiedź: $H = 40 \text{ m}$; $t = 4 \text{ s}$

Wskazówka: Energetycznie zadanie schodzi do dwóch linijek — warto zawsze sprawdzić tę drogę.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zastosowanie ZZE lub wzoru $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta h$,
- 2 pkt — obliczenie $H = 40 \text{ m}$,
- 3 pkt — równanie na prędkość końcową,
- 4 pkt — całkowity czas lotu 4 s.

FZ03 Zasady dynamiki, tarcie i równia

🔑 Każde ciało osobno, osie wzdłuż ruchu, tarcie zawsze przeciwnie do ruchu.

FZ03.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Na ciało o masie **4 kg** działają dwie siły poziome o wartościach **12 N** i **4 N**, skierowane przeciwnie. Oblicz wartość przyspieszenia ciała.

ROZWIĄZANIE

1. $F_w = 12 - 4 = 8 \text{ N}$.

2. $a = \frac{F_w}{m} = \frac{8}{4} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Odpowiedź: $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

FZ03.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Klocek o masie **5 kg** ciągnięty jest po poziomej podłodze ze stałą prędkością siłą poziomą **10 N**. Oblicz współczynnik tarcia kinetycznego ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

ROZWIĄZANIE

1. Stała prędkość $\Rightarrow F = T = \mu mg$.

2. $\mu = \frac{10}{5 \cdot 10} = 0,2$.

Odpowiedź: $\mu = 0,2$

FZ03.3 ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Ciało zsuwa się ruchem jednostajnym po równi nachylonej pod kątem α . Współczynnik tarcia jest wtedy równy:

A. $\text{tg } \alpha$

B. $\sin \alpha$

C. $\cos \alpha$

D. $\text{ctg } \alpha$

ROZWIĄZANIE

1. Ruch jednostajny: $mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha$.

2. Stąd $\mu = \text{tg } \alpha$.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? Masa i g się skracają — wynik zależy tylko od kąta.

Książka leży nieruchomo na stole. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Siła grawitacji działająca na książkę i siła nacisku książki na stół są przyłożone do tego samego ciała.	P	F
2.	Siła reakcji stołu równoważy siłę grawitacji działającą na książkę.	P	F
3.	Siła wypadkowa działająca na książkę jest równa zero.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Siła grawitacji działa na książkę, a siła nacisku książki — na stół: to siły działające na różne ciała, więc nie są parą z III zasady w tym sensie — fałsz.
2. Siła reakcji stołu równoważy siłę grawitacji działającą na książkę — prawda.
3. Wypadkowa sił działających na książkę jest zerowa (spoczynek) — prawda.

Odpowiedź: FPP

Winda o masie 600 kg rusza w górę z przyspieszeniem $1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz siłę naprężenia liny.

ROZWIĄZANIE

1. II zasada w pionie: $N - mg = ma$.
2. $N = m(g + a) = 600 \cdot 11,5 = 6900 \text{ N}$.

Odpowiedź: $N = 6900 \text{ N}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie $N - mg = ma$,
- 2 pkt — wynik 6900 N.

Ciało o masie 2 kg zsuwa się z równi o kącie nachylenia 30° przy współczynniku tarcia $\mu = 0,1$ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz wartość przyspieszenia ciała.

ROZWIĄZANIE

1. $ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$, więc $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$.
2. $a = 10(0,5 - 0,1 \cdot 0,866) \approx 10 \cdot 0,413 = 4,13 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Odpowiedź: $a \approx 4,13 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — rozłożenie siły grawitacji na składowe,
- 2 pkt — równanie z tarciem,
- 3 pkt — wynik $\approx 4,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ciało o masie m wciągane jest po równi o kącie α ze stałą prędkością siłą F równoległą do równi. Współczynnik tarcia wynosi μ . Wyznacz F w zależności od m , g , α i μ .

ROZWIĄZANIE

1. Stała prędkość $\Rightarrow$ wypadkowa = 0.
2. Wzdłuż równi: $F = mg \sin \alpha + T$, gdzie $T = \mu N$.
3. Prostopadle: $N = mg \cos \alpha$, więc $F = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$.

Odpowiedź: $F = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek równowagi sił wzdłuż równi,
- 2 pkt — wyznaczenie $N = mg \cos \alpha$,
- 3 pkt — poprawny wzór końcowy.

Dwa klocki o masach $m_1 = 1$ kg i $m_2 = 3$ kg leżą przy sobie na gładkiej poziomej powierzchni. Na klocek m_1 działa pozioma siła $F = 8$ N. Oblicz przyspieszenie układu oraz siłę, jaką klocek m_1 działa na klocek m_2 .

ROZWIĄZANIE

1. Cały układ: $a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{8}{4} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
2. Dla klocka m_2 : $F_{12} = m_2 a = 3 \cdot 2 = 6$ N.
3. Sprawdzenie dla m_1 : $8 - 6 = 1 \cdot 2 \checkmark$.

Odpowiedź: $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $F_{12} = 6$ N

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie przyspieszenia układu,
- 2 pkt — zapisanie II zasady dla klocka m_2 ,
- 3 pkt — wynik 6 N (z III zasadą dynamiki).

Klocek o masie $m_1 = 2$ kg na poziomym stole połączono nicią przez bloczek z ciężarkiem $m_2 = 3$ kg. Tarcie pomijamy, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz przyspieszenie układu i napięcie nici.

ROZWIĄZANIE

$$1. m_2 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{30}{5} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$2. N_n = m_1 a = 2 \cdot 6 = 12 \text{ N}.$$

$$3. \text{Kontrola: } m_2(g - a) = 3 \cdot 4 = 12 \text{ N } \checkmark.$$

Odpowiedź: $a = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $N_n = 12 \text{ N}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równania dla obu ciał,
- 2 pkt — $a = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,
- 3 pkt — $N_n = 12 \text{ N}$,
- 4 pkt — kontrola drugim równaniem.

Na wykresie zależności prędkości od czasu ciała o masie 12 kg odcinek od 30 s do 40 s odpowiada jednostajnemu zmniejszaniu prędkości z $18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz wartość siły wypadkowej działającej na ciało w chwili $t = 35$ s i podaj jej zwrot względem prędkości.

ROZWIĄZANIE

$$1. a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6 - 18}{10} = -1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$2. |F_w| = m|a| = 12 \cdot 1,2 = 14,4 \text{ N}.$$

3. Znak minus oznacza zwrot przeciwny do prędkości (ruch opóźniony).

Odpowiedź: $F_w = 14,4 \text{ N}$, zwrot przeciwny do prędkości

Wskazówka: CKE często pyta dodatkowo o zwrot — brak odpowiedzi to utrata punktu.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — odczyt i obliczenie przyspieszenia z wykresu,
- 2 pkt — zastosowanie II zasady dynamiki,
- 3 pkt — wartość $14,4 \text{ N}$,
- 4 pkt — poprawnie określony zwrot siły.

FZ04

🔑 „Prędkość przestaje rosnąć” → wypadkowa zero; pamiętaj o wyporze.

FZ04.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA

0-2 pkt

Oblicz ciśnienie hydrostatyczne na głębokości **20 m** w wodzie ($\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

ROZWIĄZANIE

$$1. \quad p = \rho q h = 1000 \cdot 10 \cdot 20 = 200\,000 \text{ Pa} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Odpowiedź: $p = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

FZ04.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA

0–2 pkt

Ciało o objętości $0,002 \text{ m}^3$ zanurzone całkowicie w wodzie. Oblicz wartość siły wyporu ($\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

ROZWIAZANIE

$$1. F_w = \rho g V = 1000 \cdot 10 \cdot 0,002 = 20 \text{ N.}$$

Odpowiedź: $F_w = 20 \text{ N}$

FZ04.3 ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Spadochroniarz opada ze stałą prędkością. Wtedy wartość siły oporu powietrza:

- A.** jest równa zero
- B.** jest równa sile grawitacji
- C.** jest większa od siły grawitacji
- D.** rośnie jednostajnie

ROZWIĄZANIE

1. Ruch jednostajny $\Rightarrow$ wypadkowa sił jest zerowa.
2. Siła oporu równoważy siłę grawitacji, więc jest jej równa co do wartości.

Odpowiedź: B

Dlaczego nie pozostałe? Stała prędkość oznacza brak przyśpieszenia, a więc zerową siłę wypadkową.

FZ04.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Kulka opada w cieczy: zaczyna od spoczynku, a jej prędkość dąży do wartości granicznej. Siła oporu ma postać $F_o = ARv$. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Wartość siły oporu rośnie w miarę wzrostu prędkości kulki.	P	F
2.	Wartość przyspieszenia kulki rośnie w czasie ruchu.	P	F
3.	Po osiągnięciu prędkości granicznej siła wypadkowa działająca na kulkę jest równa zero.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Wartość siły oporu rośnie wraz z prędkością — prawda.
2. Przyspieszenie kulki rośnie — fałsz, maleje do zera.
3. Przy prędkości granicznej suma sił jest zerowa — prawda.

Odpowiedź: PFP

FZ04.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Siła oporu dana jest wzorem $F_o = ARv$, gdzie R — promień (w metrach), v — prędkość. Wyraż jednostkę współczynnika A za pomocą podstawowych jednostek układu SI.

ROZWIĄZANIE

$$1. [A] = \frac{[F]}{[R][v]} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

$$2. [A] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}.$$

Odpowiedź: $\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie $[A] = \frac{[F]}{[R][v]}$ i rozpisanie niutona,
- 2 pkt — uproszczenie do $\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$.

FZ04.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Ciało o masie 80 kg spada w powietrzu; siła oporu ma postać $F_o = bv^2$, gdzie $b = 0,32 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz prędkość graniczną spadania.

ROZWIĄZANIE

$$1. mg = bv_{max}^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{mg}{b}}.$$

$$2. v_{max} = \sqrt{\frac{800}{0,32}} = \sqrt{2500} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odpowiedź: $v_{max} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek $mg = bv^2$,
- 2 pkt — przekształcenie wzoru,
- 3 pkt — wynik $50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Drewniany klocek o gęstości $600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ pływa w wodzie ($\rho_w = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$). Oblicz, jaka część objętości klocka jest zanurzona.

ROZWIĄZANIE

1. Pływanie: $mg = F_w \Rightarrow \rho_k V g = \rho_w V_z g$.

2. $\frac{V_z}{V} = \frac{\rho_k}{\rho_w} = \frac{600}{1000} = 0,6$, czyli 60%.

Odpowiedź: 60%

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek pływania $mg = F_w$,
- 2 pkt — zapisanie ilorazu gęstości,
- 3 pkt — wynik 60%.

Kulka o gęstości $\rho_k = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ i promieniu $R = 2$ mm opada w oleju o gęstości $\rho_c = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Siła oporu wynosi $F_o = ARv$, gdzie $A = 0,12 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz prędkość graniczną kulki.

ROZWIĄZANIE

1. $v_{max} = \frac{4\pi R^2 g (\rho_k - \rho_c)}{3A}$ (wyprowadzenie jak w przykładzie).

2. $v_{max} = \frac{4\pi \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10 \cdot 1800}{3 \cdot 0,12}$.

3. $v_{max} = \frac{4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 18000}{0,36} \approx 2,51 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: $v_{max} \approx 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek równowagi trzech sił,
- 2 pkt — podstawienie $V = \frac{4}{3}\pi R^3$,
- 3 pkt — poprawny wynik liczbowy z jednostką.

FZ04.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Ciało o masie 2 kg i objętości $0,001 \text{ m}^3$ zanurzono całkowicie w wodzie i puszczono swobodnie ($\rho_w = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, opór pomijamy). Oblicz wartość i zwrot przyspieszenia ciała.

ROZWIĄZANIE

1. $F_g = mg = 20 \text{ N}$, $F_w = \rho_w g V = 10 \text{ N}$.
2. $F_{wyp} = 20 - 10 = 10 \text{ N}$ w dół.
3. $a = \frac{10}{2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ — ciało tonie.

Odpowiedź: $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, zwrot w dół

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie siły wyporu,
- 2 pkt — siła wypadkowa,
- 3 pkt — wartość przyspieszenia,
- 4 pkt — określenie zwrotu (w dół).

FZ04.10 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Kropla deszczu o promieniu R i gęstości ρ_w spada w powietrzu o gęstości ρ_p . Siła oporu ma postać $F_o = k\rho_p S v^2$, gdzie $S = \pi R^2$. Wyprowadź wzór na prędkość ruchu jednostajnego kropli w zależności od R , ρ_p , ρ_w , g i k (wypór powietrza pomijamy, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$).

ROZWIĄZANIE

1. Ruch jednostajny: $mg = k\rho_p S v^2$.
2. $m = \rho_w V = \rho_w \frac{4}{3}\pi R^3$, $S = \pi R^2$.
3. $\rho_w \frac{4}{3}\pi R^3 g = k\rho_p \pi R^2 v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{4R\rho_w g}{3k\rho_p}$.
4. $v = \sqrt{\frac{4R\rho_w g}{3k\rho_p}}$.

Odpowiedź: $v = \sqrt{\frac{4R\rho_w g}{3k\rho_p}}$

Wskazówka: Sprawdź wynik jakościowo: większa kropla spada szybciej — i rzeczywiście $v \propto \sqrt{R}$.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek ruchu jednostajnego,
- 2 pkt — podstawienie masy i pola przekroju,
- 3 pkt — przekształcenie i skrócenie πR^2 ,
- 4 pkt — poprawny wzór końcowy.

FZ05 Praca, moc i zasada zachowania energii

🔑 Dwa stany bez pytania o czas → energia; tarcie = strata energii mechanicznej.

FZ05.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz pracę, jaką wykonuje siła $F = 50$ N ciągnąca skrzynię na drodze 8 m pod kątem 60° do kierunku ruchu.

ROZWIĄZANIE

$$1. W = Fs \cos \alpha = 50 \cdot 8 \cdot 0,5 = 200 \text{ J.}$$

Odpowiedź: $W = 200 \text{ J}$

FZ05.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Ciało o masie 2 kg porusza się z prędkością $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz jego energię kinetyczną.

ROZWIĄZANIE

$$1. E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 36 = 36 \text{ J.}$$

Odpowiedź: $E_k = 36 \text{ J}$

FZ05.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Ciało spada swobodnie z wysokości h . Na wysokości $\frac{h}{2}$ stosunek energii kinetycznej do potencjalnej (liczonej względem ziemi) jest równy:

A. 1 : 2**B.** 1 : 1**C.** 2 : 1**D.** 1 : 4**ROZWIĄZANIE**

$$1. \text{ Na wysokości } \frac{h}{2}: E_p = mg\frac{h}{2}, \text{ a } E_k = mgh - mg\frac{h}{2} = mg\frac{h}{2}.$$

$$2. \text{ Zatem } E_k : E_p = 1 : 1.$$

Odpowiedź: **B**

Dlaczego nie pozostałe? Połowa energii potencjalnej zamieniła się na kinetyczną.

FZ05.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Kłosek ślizga się po poziomej powierzchni z tarcie i stopniowo zwalnia. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Praca siły tarcia jest ujemna.	P	F
2.	Energia mechaniczna klocka jest zachowana.	P	F
3.	Siła reakcji podłoża nie wykonuje pracy nad klockiem.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. 1. Praca siły tarcia jest ujemna — prawda.

2. 2. Energia mechaniczna układu jest zachowana — fałsz, maleje (przechodzi w wewnętrzną).

3. 3. Siła nacisku podłoża nie wykonuje pracy — prawda (jest prostopadła do przemieszczenia).

Odpowiedź: **PFP**

FZ05.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Dźwig podnosi ładunek o masie **500 kg** na wysokość **12 m** w czasie **20 s** ze stałą prędkością ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz pracę i moc dźwigu.

ROZWIĄZANIE

$$1. W = mgh = 500 \cdot 10 \cdot 12 = 60\,000 \text{ J.}$$

$$2. P = \frac{W}{t} = \frac{60\,000}{20} = 3000 \text{ W} = 3 \text{ kW.}$$

Odpowiedź: $W = 60 \text{ kJ}$; $P = 3 \text{ kW}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie pracy **60 kJ**,
- 2 pkt — obliczenie mocy **3 kW**.

FZ05.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Samochód o masie **1200 kg** jedzie ze stałą prędkością $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, pokonując opory o wartości **600 N**. Oblicz moc silnika oraz jego sprawność, jeżeli silnik pobiera moc **30 kW**.

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{Stała prędkość} \Rightarrow \text{siła napędowa równa oporom: } F = 600 \text{ N.}$$

$$2. P = Fv = 600 \cdot 20 = 12\,000 \text{ W} = 12 \text{ kW.}$$

$$3. \eta = \frac{12}{30} = 0,4 = 40\%.$$

Odpowiedź: $P = 12 \text{ kW}$; $\eta = 40\%$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zauważenie, że $F = F_{\text{oporu}}$,
- 2 pkt — moc **12 kW**,
- 3 pkt — sprawność **40%**.

FZ05.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Kulka o masie **0,2 kg** zsuwa się bez tarcia z wysokości **1,8 m** po torze zakończonym pętlą. Oblicz prędkość kulki na dole toru ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{ZZE: } mgh = \frac{1}{2}mv^2 \text{ (masa się skraca).}$$

$$2. v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,8} = \sqrt{36} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odpowiedź: $v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie ZZE,
- 2 pkt — przekształcenie do $v = \sqrt{2gh}$,
- 3 pkt — wynik $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

FZ05.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ściśnięto o 10 cm i wyrzeczono nią poziomo kulkę o masie 50 g. Oblicz prędkość kulki (tarcie pomijamy).

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv^2.$$

$$2. v = x \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,1 \sqrt{\frac{400}{0,05}} = 0,1 \cdot \sqrt{8000}.$$

$$3. v \approx 0,1 \cdot 89,4 = 8,94 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odpowiedź: $v \approx 8,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — bilans energii sprężystości i kinetycznej,
- 2 pkt — przekształcenie wzoru,
- 3 pkt — wynik $\approx 8,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

FZ05.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Klocek o masie 1 kg wyrzeczono w górę po równi o kącie 30° z prędkością $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Współczynnik tarcia wynosi $\mu = 0,2$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz drogę, jaką klocek przebędzie wzdłuż równi do zatrzymania.

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{ Bilans: } \frac{1}{2} mv^2 = mgs \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha \cdot s.$$

$$2. \frac{1}{2} v^2 = gs(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

$$3. 32 = 10s(0,5 + 0,2 \cdot 0,866) = 10s \cdot 0,6732, \text{ więc } s \approx 4,75 \text{ m}.$$

Odpowiedź: $s \approx 4,8 \text{ m}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — poprawny bilans energii z pracą tarcia,
- 2 pkt — wyrażenie na drogę,
- 3 pkt — podstawienie wartości,
- 4 pkt — wynik $\approx 4,8 \text{ m}$.

Ciało o masie m zsuwa się swobodnie (bez tarcia) z wysokości h po dowolnie ukształtowanej gładkiej zjeżdżalni. Wykaż, że prędkość na dole nie zależy od kształtu zjeżdżalni ani od masy ciała, i oblicz tę prędkość dla $h = 5 \text{ m}$ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

ROZWIĄZANIE

1. Siła reakcji podłoża jest zawsze prostopadła do przemieszczenia, więc nie wykonuje pracy.
2. Pozostaje tylko siła grawitacji: $mgh = \frac{1}{2}mv^2$; masa się skraca.
3. $v = \sqrt{2gh}$ — zależy wyłącznie od h . ■
4. Dla $h = 5 \text{ m}$: $v = \sqrt{100} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: $v = \sqrt{2gh} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Wskazówka: To klasyczny „dowód energetyczny” — CKE wymaga wyraźnego zdania o pracy siły reakcji.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zauważenie, że siła nacisku nie wykonuje pracy,
- 2 pkt — zapisanie ZZE,
- 3 pkt — wykazanie niezależności od masy i kształtu,
- 4 pkt — obliczenie $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

FZ06 Pęd, popęd i zderzenia

🔑 Pęd przed = pęd po; przy równych pędach energia jest odwrotnie proporcjonalna do masy.

FZ06.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz pęd ciała o masie **3** kg poruszającego się z prędkością $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

ROZWIĄZANIE

$$1. p = mv = 3 \cdot 4 = 12 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}.$$

Odpowiedź: $p = 12 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

FZ06.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Na spoczywające ciało o masie **2** kg działa przez **0,5** s stała siła **20** N. Oblicz prędkość ciała po tym czasie.

ROZWIĄZANIE

$$1. F\Delta t = \Delta p = mv \Rightarrow v = \frac{20 \cdot 0,5}{2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odpowiedź: $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

FZ06.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Wózek o masie **2** kg jadący z prędkością $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ zderza się z nieruchomym wózkiem o masie **4** kg i oba jadą dalej razem. Ich wspólna prędkość wynosi:

A. $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **B.** $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **C.** $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **D.** $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **ROZWIĄZANIE**

$$1. \text{ZZP: } 2 \cdot 6 = (2 + 4)u.$$

$$2. u = \frac{12}{6} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? Zderzenie doskonale niesprężyste — wspólna prędkość z ZZP.

FZ06.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Dwa ciała zderzają się doskonale niesprężysto na gładkim, poziomym stole. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Całkowity pęd układu przed i po zderzeniu jest taki sam.	P	F
2.	Energia kinetyczna układu przed i po zderzeniu jest taka sama.	P	F
3.	Całkowita energia układu jest zachowana.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. 1. Pęd układu jest zachowany — prawda (układ izolowany poziomo).

2. 2. Energia kinetyczna układu jest zachowana — fałsz, część przechodzi w wewnętrzną.

3. 3. Energia całkowita układu jest zachowana — prawda (zasada zachowania energii).

Odpowiedź: **PFP**

FZ06.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Człowiek o masie **60** kg stojący w nieruchomej łodzi o masie **140** kg wyskakuje z niej poziomo z prędkością **$3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$** . Oblicz prędkość łodzi po wyskoku (opór wody pomijamy).

ROZWIĄZANIE

1. ZPP: $0 = 60 \cdot 3 + 140 \cdot v$.
2. $v = -\frac{180}{140} \approx -1,29 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ — zwrot przeciwny do skoku.

Odpowiedź: $v \approx 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ w przeciwną stronę

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie ZPP dla układu człowiek–łódź,
- 2 pkt — wynik $\approx 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ z określeniem zwrotu.

FZ06.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wózek o masie **2** kg jadący z prędkością **$6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$** zderza się niesprężysto z nieruchomym wózkiem o masie **4** kg. Oblicz, jaka część energii kinetycznej została rozproszona.

ROZWIĄZANIE

1. $u = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (z ZPP).
2. $E_{k,pocz} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 36 = 36 \text{ J}$, $E_{k,konc} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 \text{ J}$.
3. Strata = **24** J, czyli $\frac{24}{36} = \frac{2}{3} \approx 67\%$.

Odpowiedź: $\frac{2}{3} \approx 67\%$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie wspólnej prędkości,
- 2 pkt — obliczenie obu energii kinetycznych,
- 3 pkt — wynik $\approx 67\%$.

FZ06.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Pocisk o masie **10** g opuszcza lufę karabinu o masie **4** kg z prędkością **$600 \frac{\text{m}}{\text{s}}$** . Oblicz prędkość odrzutu karabinu oraz stosunek energii kinetycznej pocisku do energii karabinu.

ROZWIĄZANIE

1. ZPP: $0,01 \cdot 600 = 4v \Rightarrow v = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
2. Pędy są równe co do wartości, więc $\frac{E_{poc}}{E_{kar}} = \frac{m_{kar}}{m_{poc}} = \frac{4}{0,01} = 400$.

Odpowiedź: $v = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\frac{E_p}{E_k} = 400$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — ZPP i prędkość odrzutu,
- 2 pkt — wykorzystanie $E_k = \frac{p^2}{2m}$,
- 3 pkt — stosunek **400**.

Kula o masie m poruszająca się z prędkością v zderza się centralnie i doskonale sprężysto z identyczną, spoczywającą kulą. Wykaż, że po zderzeniu pierwsza kula zatrzymuje się, a druga porusza się z prędkością v .

ROZWIĄZANIE

1. ZCP: $mv = mv_1 + mv_2 \Rightarrow v = v_1 + v_2$.
2. Energia: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2$.
3. Podstawiając $v_2 = v - v_1$: $v^2 = v_1^2 + v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \Rightarrow 2v_1(v_1 - v) = 0$.
4. Stąd $v_1 = 0$ (zderzenie zaszło) i $v_2 = v$. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie obu zasad zachowania,
- 2 pkt — podstawienie i sprowadzenie do równania na v_1 ,
- 3 pkt — wniosek $v_1 = 0$, $v_2 = v$ z odrzuceniem $v_1 = v$.

Piłka o masie $0,2$ kg uderza prostopadle w ścianę z prędkością $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i odbija się z prędkością $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Czas kontaktu ze ścianą wynosi $0,05$ s. Oblicz wartość średniej siły, jaką ściana działała na piłkę.

ROZWIĄZANIE

1. $\Delta p = m(v_2 - v_1)$, przy czym prędkości mają przeciwne zwroty: $\Delta p = 0,2 \cdot (12 + 15) = 5,4 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$.
2. $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{5,4}{0,05} = 108 \text{ N}$.

Odpowiedź: $F = 108 \text{ N}$ **Wskazówka:** Najczęstszy błąd: liczenie Δp jako różnicy wartości ($0,6$) zamiast sumy.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — uwzględnienie przeciwnych zwrotów prędkości,
- 2 pkt — obliczenie zmiany pędu $5,4$,
- 3 pkt — obliczenie siły,
- 4 pkt — poprawna jednostka i wynik 108 N .

Krążek o masie m poruszający się z prędkością v o składowych v_x i v_y uderza w spoczywający krążek o tej samej masie. Po zderzeniu pierwszy krążek porusza się z prędkością o składowych $(0; v_y)$. Wyznacz prędkość drugiego krążka po zderzeniu i sprawdź, czy zderzenie było sprężyste.

ROZWIĄZANIE

1. ZZP w osi x : $mv_x = 0 + mv_{2x} \Rightarrow v_{2x} = v_x$.
2. ZZP w osi y : $mv_y = mv_y + mv_{2y} \Rightarrow v_{2y} = 0$.
3. Energia przed: $\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$; po: $\frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_x^2$ — taka sama.
4. Zderzenie jest więc doskonale sprężyste.

Odpowiedź: $\vec{v}_2 = (v_x; 0)$; zderzenie było sprężyste

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie ZZP osobno dla obu składowych,
- 2 pkt — wyznaczenie $v_{2x} = v_x$,
- 3 pkt — wyznaczenie $v_{2y} = 0$,
- 4 pkt — porównanie energii i wniosek.

FZ07 Ruch po okręgu i siła dośrodkowa

🔑 Oś do środka okręgu; wypadkowa realnych sił $= \frac{mv^2}{r}$.

FZ07.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Ciało porusza się po okręgu o promieniu **2 m** z prędkością **$6 \frac{m}{s}$** . Oblicz przyspieszenie dośrodkowe.

ROZWIĄZANIE

$$1. a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{36}{2} = 18 \frac{m}{s^2}.$$

Odpowiedź: $a_d = 18 \frac{m}{s^2}$

FZ07.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Koło obraca się z częstotliwością **2 Hz**. Oblicz okres obrotu i prędkość kątową.

ROZWIĄZANIE

$$1. T = \frac{1}{f} = 0,5 \text{ s}.$$

$$2. \omega = 2\pi f = 4\pi \approx 12,57 \frac{1}{s}.$$

Odpowiedź: $T = 0,5 \text{ s}$; $\omega = 4\pi \frac{1}{s} \approx 12,6 \frac{1}{s}$

FZ07.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Samochód pokonuje poziomy zakręt o promieniu **50 m**. Współczynnik tarcia opon o jezdnię wynosi **0,8** ($g = 10 \frac{m}{s^2}$). Maksymalna bezpieczna prędkość to:

A. $10 \frac{m}{s}$

B. $15 \frac{m}{s}$

C. $20 \frac{m}{s}$

D. $40 \frac{m}{s}$

ROZWIĄZANIE

$$1. \mu mg = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\mu gr}.$$

$$2. v = \sqrt{0,8 \cdot 10 \cdot 50} = \sqrt{400} = 20 \frac{m}{s}.$$

Odpowiedź: **C**

Dlaczego nie pozostałe? Tarcie pełni rolę siły dośrodkowej — masa się skraca.

Ciało porusza się ruchem jednostajnym po okręgu. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Przyspieszenie ciała jest równe zero.	P	F
2.	Wartość prędkości ciała jest stała.	P	F
3.	Siła wypadkowa działająca na ciało jest skierowana do środka okręgu.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Przyspieszenie jest równe zero — fałsz, jest dośrodkowe.
2. Wartość prędkości jest stała — prawda.
3. Siła wypadkowa jest skierowana do środka okręgu — prawda.

Odpowiedź: FPP

Kulka o masie **0,5** kg na nici o długości **1** m zatacza okrąg w płaszczyźnie poziomej z prędkością **$4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$** . Oblicz siłę napięcia nici (nić traktuj jako poziomą).

ROZWIĄZANIE

$$1. F_n = \frac{mv^2}{r} = \frac{0,5 \cdot 16}{1} = 8 \text{ N.}$$

Odpowiedź: $F_n = 8 \text{ N}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie $F_n = \frac{mv^2}{r}$,
- 2 pkt — wynik 8 N.

Satelita okrąży Ziemię po orbicie kołowej o promieniu **r** z okresem **T** . Wyprowadź wzór na jego przyspieszenie dośrodkowe w zależności od **r** i **T** .

ROZWIĄZANIE

$$1. v = \frac{2\pi r}{T}.$$

$$2. a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Odpowiedź: $a_d = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wyrażenie prędkości przez r i T ,
- 2 pkt — podstawienie do wzoru na a_d ,
- 3 pkt — poprawny wzór.

Ciało o masie $0,4$ kg porusza się po okręgu w płaszczyźnie pionowej o promieniu $0,5$ m. W najwyższym punkcie ma prędkość $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz siłę napięcia nici w tym punkcie.

ROZWIĄZANIE

1. W najwyższym punkcie: $F_n + mg = \frac{mv^2}{r}$.
2. $F_n = 0,4 \left(\frac{16}{0,5} - 10 \right) = 0,4 \cdot 22 = 8,8 \text{ N}$.

Odpowiedź: $F_n = 8,8 \text{ N}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie z uwzględnieniem obu sił,
- 2 pkt — podstawienie wartości,
- 3 pkt — wynik $8,8 \text{ N}$.

Oblicz najmniejszą prędkość, z jaką kulka musi przechodzić przez najwyższy punkt pętli o promieniu $0,8$ m, aby nie oderwać się od toru ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Podaj, z jakiej minimalnej wysokości musi wystartować (bez tarcia).

ROZWIĄZANIE

1. Warunek graniczny: siła nacisku toru znika, więc $mg = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{gr} = \sqrt{8} \approx 2,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
2. ZZE: $mgh = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow h = 2r + \frac{r}{2} = 2,5r$.
3. $h = 2,5 \cdot 0,8 = 2 \text{ m}$.

Odpowiedź: $v_{\min} \approx 2,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $h = 2 \text{ m}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek $N = 0$ i wzór $v = \sqrt{gr}$,
- 2 pkt — obliczenie $v_{\min}$,
- 3 pkt — bilans energii i wynik $h = 2 \text{ m}$.

Ciało o masie m zawieszone na nici o długości l wychylono o kąt 60° od pionu i puszczono. Oblicz siłę napięcia nici w najniższym punkcie toru, wyrażając wynik przez m i g .

ROZWIĄZANIE

1. ZZE: $\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1 - \cos 60^\circ) = mg \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow v^2 = gl$.

2. Najniższy punkt: $F_n - mg = \frac{mv^2}{l} = mg$.

3. $F_n = 2mg$.

Odpowiedź: $F_n = 2mg$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wysokość podniesienia $l(1 - \cos \alpha)$,
- 2 pkt — obliczenie $v^2 = gl$ z ZZE,
- 3 pkt — równanie sił w najniższym punkcie,
- 4 pkt — wynik $2mg$.

Ciało porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu r z prędkością o wartości v . Wykaż, że wartość zmiany wektora prędkości po przebyciu ćwiartki okręgu jest równa $v\sqrt{2}$, i wyjaśnij, dlaczego wartość prędkości pozostaje stała.

ROZWIĄZANIE

1. Po ćwiartce okręgu wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ są prostopadłe i mają tę samą długość v .

2. $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych v :

$$|\Delta\vec{v}| = \sqrt{v^2 + v^2} = v\sqrt{2}. \blacksquare$$

3. Wartość prędkości nie zmienia się, bo siła (i przyspieszenie) są prostopadłe do prędkości — nie wykonują pracy.

Odpowiedź: $|\Delta\vec{v}| = v\sqrt{2}$

Wskazówka: CKE prosi zwykle o rysunek — bez narysowanego $\Delta\vec{v}$ punktu nie ma.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zauważenie prostopadłości wektorów,
- 2 pkt — poprawne odjęcie wektorów,
- 3 pkt — wynik $v\sqrt{2}$,
- 4 pkt — uzasadnienie stałości wartości prędkości.

FZ08 Bryła sztywna: moment siły, toczenie, energia obrotowa

🔑 Dwa równania (postęp + obrót) plus warunek $a = \varepsilon R$.

FZ08.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Na kole o promieniu **0,4 m** działa styczna siła **15 N**. Oblicz moment tej siły względem osi koła.

ROZWIĄZANIE

$$1. M = Fr = 15 \cdot 0,4 = 6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Odpowiedź: $M = 6 \text{ N} \cdot \text{m}$

FZ08.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Walec o momencie bezwładności $I = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ obraca się z prędkością kątową $\omega = 6 \frac{1}{8}$. Oblicz jego energię kinetyczną ruchu obrotowego.

ROZWIĄZANIE

$$1. E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 36 = 9 \text{ J}$$

Odpowiedź: $E = 9 \text{ J}$

FZ08.3 ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Jednorodny walec pełny toczy się bez poślizgu. Stosunek energii kinetycznej ruchu postępowego do całkowitej energii kinetycznej walca wynosi:

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

ROZWIĄZANIE

$$1. E_{\text{post}} = \frac{1}{2} m v^2, E_{\text{obr}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4} m v^2.$$

$$2. E_{\text{całk}} = \frac{3}{4} m v^2, \text{ więc } \frac{E_{\text{post}}}{E_{\text{całk}}} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: **C**

Dlaczego nie pozostałe? Dla walca pełnego energia dzieli się w stosunku **2 : 1**.

Jednorodny walec toczy się bez poślizgu po poziomym podłożu. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	W czasie jednego pełnego obrotu walec przebywa drogę równą $2\pi R$.	P	F
2.	Energia kinetyczna ruchu obrotowego walca jest większa od energii ruchu postępowego.	P	F
3.	Prędkość punktu styku walca z podłożem jest chwilowo równa zero.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. W czasie jednego obrotu walec przebywa drogę $2\pi R$ — prawda.
2. Energia ruchu obrotowego jest większa od energii ruchu postępowego — fałsz (jest dwa razy mniejsza).
3. Punkt styku walca z podłożem ma chwilowo zerową prędkość — prawda.

Odpowiedź: PFP

Koło zamachowe o momencie bezwładności $I = 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ rozpędzono od spoczynku do $\omega = 10 \frac{1}{\text{s}}$ w czasie 5 s. Oblicz moment siły napędzającej koło.

ROZWIĄZANIE

1. $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{10}{5} = 2 \frac{1}{\text{s}^2}$.
2. $M = I\varepsilon = 4 \cdot 2 = 8 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Odpowiedź: $M = 8 \text{ N} \cdot \text{m}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie przyspieszenia kąowego,
- 2 pkt — wynik $8 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Walec pełny ($I = \frac{1}{2}mR^2$) i obręcz ($I = mR^2$) staczają się bez poślizgu z tej samej wysokości. Wykaż, który z nich osiągnie większą prędkość u podnóża równi, i podaj stosunek tych prędkości.

ROZWIĄZANIE

1. ZZE: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)$.
2. Walec: $mgh = \frac{3}{4}mv_w^2 \Rightarrow v_w = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$.
3. Obręcz: $mgh = mv_o^2 \Rightarrow v_o = \sqrt{gh}$.
4. $\frac{v_w}{v_o} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15$ — szybszy jest walec (mniejsze I).

Odpowiedź: walec; $\frac{v_w}{v_o} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — bilans energii z energią obrotową,
- 2 pkt — obliczenie obu prędkości,
- 3 pkt — wniosek i stosunek prędkości.

Na walec o momencie bezwładności $I = \frac{1}{2}MR^2$ ($M = 4$ kg, $R = 0,2$ m) nawinięto nić, na której końcu wisi ciężarek o masie $m = 2$ kg. Oblicz przyspieszenie ciężarka ($g = 10 \frac{m}{s^2}$).

ROZWIĄZANIE

1. Ciężarek: $mg - N = ma$. Walec: $NR = I\epsilon = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow N = \frac{1}{2}Ma$.

2. $mg = ma + \frac{1}{2}Ma \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M} = \frac{20}{2 + 2} = 5 \frac{m}{s^2}$.

Odpowiedź: $a = 5 \frac{m}{s^2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie dla ciężarka,
- 2 pkt — równanie dla walca i warunek $a = \epsilon R$,
- 3 pkt — wynik $5 \frac{m}{s^2}$.

Jednorodny walec o masie $m = 10$ kg ciągnięty jest za oś poziomą siłą $F = 30$ N i toczy się bez poślizgu. Oblicz przyspieszenie środka masy walca oraz wartość siły tarcia statycznego.

ROZWIĄZANIE

1. $F - T = ma$ oraz $TR = \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}ma$.

2. $F = ma + \frac{1}{2}ma = \frac{3}{2}ma \Rightarrow a = \frac{2F}{3m} = \frac{60}{30} = 2 \frac{m}{s^2}$.

3. $T = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 = 10$ N.

Odpowiedź: $a = 2 \frac{m}{s^2}$; $T = 10$ N

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równania ruchu postępowego i obrotowego,
- 2 pkt — wyznaczenie $a = 2 \frac{m}{s^2}$,
- 3 pkt — obliczenie siły tarcia 10 N.

Walec częściowo wydrążony ma moment bezwładności $I = kmR^2$, gdzie $k > \frac{1}{2}$. Wyprowadź wzór na przyspieszenie liniowe środka masy tego walca staczającego się bez poślizgu z równi o kącie β w zależności od g , β i k .

ROZWIĄZANIE

- $mg \sin \beta - T = ma$; $TR = kmR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T = kma$.
- $mg \sin \beta = ma + kma = ma(1 + k)$.
- $a = \frac{g \sin \beta}{1 + k}$ — dla $k = \frac{1}{2}$ otrzymujemy znane $\frac{2}{3}g \sin \beta$.

Odpowiedź: $a = \frac{g \sin \beta}{1 + k}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie ruchu postępowego,
- 2 pkt — równanie ruchu obrotowego z warunkiem toczenia,
- 3 pkt — wyeliminowanie T ,
- 4 pkt — poprawny wzór i sprawdzenie przypadku $k = \frac{1}{2}$.

Łyżwiarka wiruje z prędkością kątową $\omega_1 = 3 \frac{1}{s}$, mając moment bezwładności $I_1 = 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Przyciąga ręce i jej moment bezwładności maleje do $I_2 = 1,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Oblicz nową prędkość kątową oraz stosunek energii kinetycznych, i wyjaśnij, skąd bierze się różnica energii.

ROZWIĄZANIE

- Zasada zachowania momentu pędu: $I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{4 \cdot 3}{1,6} = 7,5 \frac{1}{s}$.
- $E_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 18 \text{ J}$, $E_2 = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 56,25 = 45 \text{ J}$.
- $\frac{E_2}{E_1} = 2,5$; wzrost energii pochodzi z pracy mięśni łyżwiarki przyciągającej ręce.

Odpowiedź: $\omega_2 = 7,5 \frac{1}{s}$; $\frac{E_2}{E_1} = 2,5$

Wskazówka: Moment pędu jest zachowany, energia kinetyczna — nie; to nie jest sprzeczność.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zastosowanie zasady zachowania momentu pędu,
- 2 pkt — obliczenie ω_2 ,
- 3 pkt — obliczenie obu energii,
- 4 pkt — wyjaśnienie źródła dodatkowej energii.

FZ09 Równowaga ciał i środek masy

🔑 Dwa warunki: siły i momenty; oś obrotu wybierz tam, gdzie znika niewiadoma.

FZ09.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Na dźwigni w odległości **0,5 m** od osi działa siła **40 N**. W jakiej odległości od osi po drugiej stronie trzeba przyłożyć siłę **20 N**, aby dźwignia była w równowadze?

ROZWIĄZANIE

$$1. F_1 r_1 = F_2 r_2 \Rightarrow 40 \cdot 0,5 = 20 \cdot r.$$

$$2. r = 1 \text{ m.}$$

Odpowiedź: $r = 1 \text{ m}$

FZ09.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Dwa ciała o masach **2 kg** i **6 kg** leżą na osi x w punktach $x_1 = 0$ i $x_2 = 4 \text{ m}$. Oblicz położenie środka masy układu.

ROZWIĄZANIE

$$1. x_{sm} = \frac{2 \cdot 0 + 6 \cdot 4}{8} = \frac{24}{8} = 3 \text{ m.}$$

Odpowiedź: $x_{sm} = 3 \text{ m}$

FZ09.3 ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Jednorodny pręt zawieszono swobodnie na gwoździu przechodzącym przez otwór w jego końcu. W położeniu równowagi:

- | | |
|--|---|
| A. środek masy leży na pionie przez punkt zawieszenia | B. środek masy leży powyżej punktu zawieszenia |
| C. moment siły grawitacji jest największy | D. siła grawitacji jest równa zero |

ROZWIĄZANIE

1. Gdyby środek masy nie leżał na pionie przez punkt zawieszenia, siła grawitacji miałaby niezerowe ramię i obracałaby pręt.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? Równowaga wymaga zerowego momentu siły grawitacji.

Jednorodna belka spoczywa na dwóch podporach. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Suma wszystkich sił działających na belkę jest równa zero.	P	F
2.	Suma momentów sił względem dowolnie wybranego punktu jest równa zero.	P	F
3.	Siły nacisku na obie podpory są zawsze sobie równe.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Suma sił działających na belkę jest zerowa — prawda.
2. Suma momentów względem dowolnego punktu jest zerowa — prawda.
3. Siły nacisku na obie podpory są zawsze równe — fałsz, zależą od położenia obciążenia.

Odpowiedź: PPF

Jednorodna deska o masie **12 kg** i długości **3 m** spoczywa na dwóch podporach umieszczonych na jej końcach. W odległości **1 m** od lewego końca stoi ciężarek o masie **6 kg** ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz siły nacisku na obie podpory.

ROZWIĄZANIE

1. Momenty względem lewej podpory: $120 \cdot 1,5 + 60 \cdot 1 = N_P \cdot 3$.
2. $N_P = \frac{180 + 60}{3} = 80 \text{ N}$.
3. $N_L = 180 - 80 = 100 \text{ N}$.

Odpowiedź: $N_L = 100 \text{ N}$; $N_P = 80 \text{ N}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — poprawne równanie momentów,
- 2 pkt — obliczenie obu sił nacisku.

Kątomierz w kształcie jednorodnego półkola zawieszono swobodnie na szpilce w punkcie **A** na jego brzegu. Opisz, jak wyznaczyć konstrukcyjnie położenie środka masy **S** kątomierza, i uzasadnij tę konstrukcję.

ROZWIĄZANIE

1. Zawieszone swobodnie ciało jest w równowadze, więc moment siły grawitacji względem punktu zawieszenia musi być zerowy.
2. Jest tak tylko wtedy, gdy środek masy leży na pionie przechodzącym przez punkt zawieszenia — rysujemy ten pion.
3. Powtarzamy zawieszenie w innym punkcie **B** i rysujemy drugi pion; przecięcie obu prostych to środek masy **S**.

Odpowiedź: przecięcie dwóch pionów poprowadzonych z dwóch różnych punktów zawieszenia

Schemat punktowania:

- 1 pkt — stwierdzenie, że środek masy leży na pionie przez punkt zawieszenia,
- 2 pkt — uzasadnienie przez zerowy moment siły grawitacji i opis drugiego zawieszenia.

FZ09.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Drabina o masie **20** kg opiera się o gładką ścianę pod kątem **60°** do podłoża ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz wartość siły, jaką ściana działa na drabinę.

ROZWIĄZANIE

1. Momenty względem punktu styku z podłożem: $mg \cdot \frac{L}{2} \cos 60^\circ = F \cdot L \sin 60^\circ$.
2. $F = \frac{mg \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} = \frac{200 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,866}$.
3. $F \approx 57,7$ N.

Odpowiedź: $F \approx 57,7$ N

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wybór osi momentów i rozpisanie ramion,
- 2 pkt — poprawne równanie momentów,
- 3 pkt — wynik ≈ 58 N.

FZ09.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Trzy jednakowe kulki o masie **m** umieszczono w wierzchołkach trójkąta o współrzędnych **(0; 0)**, **(6; 0)** i **(0; 3)** (w metrach). Oblicz współrzędne środka masy układu.

ROZWIĄZANIE

1. $x_{sm} = \frac{0 + 6 + 0}{3} = 2$ m.
2. $y_{sm} = \frac{0 + 0 + 3}{3} = 1$ m.
3. Środek masy leży w punkcie **(2; 1)** — to środek ciężkości trójkąta.

Odpowiedź: $S = (2; 1)$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na środek masy układu punktów,
- 2 pkt — obliczenie x_{sm} ,
- 3 pkt — obliczenie y_{sm} .

FZ09.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Belka o masie **30 kg** i długości **4 m** jest podparta w punkcie odległym o **1 m** od lewego końca. Jaką masę należy położyć na lewym końcu belki, aby była ona w równowadze ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)?

ROZWIĄZANIE

1. Ciężar belki działa w jej środku, czyli **1 m** na prawo od podpory: $M_P = 300 \cdot 1 = 300 \text{ N} \cdot \text{m}$.
2. Ciężarek na lewym końcu ma ramię **1 m**: $M_L = mg \cdot 1$.
3. $10m = 300 \Rightarrow m = 30 \text{ kg}$.

Odpowiedź: $m = 30 \text{ kg}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — ustalenie ramion obu sił,
- 2 pkt — równanie momentów,
- 3 pkt — wynik **30 kg**,
- 4 pkt — sprawdzenie bilansu sił na podporze.

FZ09.10 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Jednorodny sześciąt o krawędzi **a** i masie **m** stoi na poziomym podłożu. Wykaż, że aby go przewrócić wokół dolnej krawędzi, środek masy trzeba podnieść o $\frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$, i oblicz najmniejszą pracę potrzebną do przewrócenia sześciąta o masie **2 kg** i krawędzi **0,4 m** ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

ROZWIĄZANIE

1. Początkowo środek masy jest na wysokości $\frac{a}{2}$.
2. W chwili przewracania sześciąt obraca się wokół krawędzi; środek masy przechodzi przez najwyższe położenie, gdy przekątna jest pionowa: $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
3. Zatem $\Delta h = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$. ■
4. $W = mg\Delta h = 2 \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot 0,4142 \approx 1,66 \text{ J}$.

Odpowiedź: $W \approx 1,66 \text{ J}$

Wskazówka: To zadanie o równowadze trwałej: praca równa się przyrostowi energii potencjalnej.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wyznaczenie początkowej wysokości środka masy,
- 2 pkt — wyznaczenie wysokości maksymalnej ($\frac{a\sqrt{2}}{2}$),
- 3 pkt — wykazanie wzoru na Δh ,
- 4 pkt — obliczenie pracy $\approx 1,7 \text{ J}$.

FZ10 Grawitacja, satelity i prawa Keplera

🔑 Elipsa → półosć wielka i $v_P r_P = v_A r_A$; koło → $\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r}$.

FZ10.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Planeta krąży wokół Słońca po orbicie o półosi wielkiej 4 au. Oblicz okres jej obiegu w latach ziemskich.

ROZWIĄZANIE

- III prawo Keplera w jednostkach au i lat: $T^2 = a^3 = 64$.
- $T = 8$ lat.

Odpowiedź: $T = 8$ lat

FZ10.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz, ile razy zmaleje siła grawitacji między dwoma ciałami, jeżeli odległość między nimi wzrośnie trzykrotnie.

ROZWIĄZANIE

- $F \propto \frac{1}{r^2}$, więc przy $r \rightarrow 3r$ siła maleje $3^2 = 9$ razy.

Odpowiedź: 9 razy

FZ10.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Satelita krąży wokół Ziemi po orbicie kołowej o promieniu r . Jeżeli promień orbity wzrośnie czterokrotnie, to okres obiegu satelity:

- A. wzrośnie 2 razy B. wzrośnie 4 razy
C. wzrośnie 8 razy D. wzrośnie 16 razy

ROZWIĄZANIE

- $T^2 \propto r^3$, więc $T \propto r^{3/2}$.
- Dla $r \rightarrow 4r$: $T \rightarrow 4^{3/2}T = 8T$.

Odpowiedź: C

Dlaczego nie pozostałe? III prawo Keplera: $T \propto r^{3/2}$.

FZ10.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Planetoida porusza się po orbicie eliptycznej wokół Słońca. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	W peryhelium wartość prędkości planetoidy jest największa.	P	F
2.	Wartość przyspieszenia planetoidy jest w czasie ruchu stała.	P	F
3.	Moment pędu planetoidy względem Słońca jest zachowany.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. W peryhelium prędkość jest największa — prawda.
2. Wartość przyspieszenia planetoidy jest stała — fałsz, $a = \frac{GM}{r^2}$ zmienia się.
3. Moment pędu planetoidy względem Słońca jest stały — prawda (II prawo Keplera).

Odpowiedź: PFP

FZ10.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Kometa ma peryhelium $r_P = 1$ au i aphelium $r_A = 9$ au. Oblicz okres obiegu komety wokół Słońca.

ROZWIĄZANIE

1. $a = \frac{r_P + r_A}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5$ au.
2. $T = \sqrt{a^3} = \sqrt{125} \approx 11,18$ roku.

Odpowiedź: $T \approx 11,2$ roku

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie pól wielkiej,
- 2 pkt — zastosowanie III prawa Keplera i wynik.

FZ10.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Prędkość komety z poprzedniego zadania w peryhelium wynosi $42 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Oblicz jej prędkość w aphelium.

ROZWIĄZANIE

1. II prawo Keplera: $v_P r_P = v_A r_A$.
2. $v_A = 42 \cdot \frac{1}{9} \approx 4,67 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: $v_A \approx 4,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie $v_P r_P = v_A r_A$,
- 2 pkt — podstawienie danych,
- 3 pkt — wynik $\approx 4,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

FZ10.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Oblicz pierwszą prędkość kosmiczną dla planety o masie $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg i promieniu $R = 6,4 \cdot 10^6$ m ($G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$).

ROZWIĄZANIE

$$1. v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6}}.$$

$$2. v_I = \sqrt{6,253 \cdot 10^7} \approx 7,91 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Odpowiedź: $v_I \approx 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie warunku ruchu po orbicie kołowej,
- 2 pkt — przekształcenie do wzoru na v_I ,
- 3 pkt — wynik liczbowy z jednostką.

FZ10.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Odległość między środkami Ziemi i Księżyca wynosi $d = 384\,400$ km, a masa Ziemi jest 81 razy większa od masy Księżyca. Oblicz odległość od środka Ziemi punktu, w którym wypadkowa siła grawitacji działająca na sondę jest równa zero.

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{GM_Z m}{x^2} = \frac{GM_K m}{(d-x)^2}, \text{ a } M_Z = 81M_K.$$

$$2. \frac{81}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{1}{d-x}.$$

$$3. 9d - 9x = x \Rightarrow x = \frac{9d}{10} = 0,9 \cdot 384\,400 \approx 345\,960 \text{ km}.$$

Odpowiedź: $x \approx 346\,000$ km

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie równości sił,
- 2 pkt — spierwiastkowanie obu stron,
- 3 pkt — wynik $x = 0,9d \approx 3,46 \cdot 10^5$ km.

Wyprowadź wzór na promień orbity satelity geostacjonarnego w zależności od G , M (masa Ziemi) i T , a następnie oblicz go dla $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $T = 24$ h ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$).

ROZWIĄZANIE

1. $G \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r = m \frac{4\pi^2}{T^2} r \Rightarrow r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$.
2. $T = 86\,400$ s: $r^3 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (8,64 \cdot 10^4)^2}{4\pi^2}$.
3. $r^3 \approx 7,57 \cdot 10^{22} \text{ m}^3 \Rightarrow r \approx 4,23 \cdot 10^7 \text{ m}$ (czyli ok. **36 000** km nad powierzchnią).

Odpowiedź: $r \approx 4,2 \cdot 10^7 \text{ m}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — przyrównanie siły grawitacji do dośrodkowej,
- 2 pkt — wyrażenie prędkości przez okres,
- 3 pkt — wzór $r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$,
- 4 pkt — wynik liczbowy.

Dwie sondy krążą wokół Słońca po orbitach kołowych o promieniach $r_A = 0,962$ au i $r_B = 1,043$ au. Okres obiegu sondy **A** wynosi **344** doby. Oblicz okres obiegu sondy **B** oraz iloraz $\frac{v_A}{v_B}$ ich prędkości liniowych.

ROZWIĄZANIE

1. III prawo Keplera: $\frac{T_B^2}{T_A^2} = \frac{r_B^3}{r_A^3} \Rightarrow T_B = T_A \left(\frac{r_B}{r_A} \right)^{3/2}$.
2. $T_B = 344 \cdot (1,0842)^{1,5} \approx 344 \cdot 1,1288 \approx 388$ dób.
3. Prędkość na orbicie kołowej: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, więc $\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} = \sqrt{1,0842} \approx 1,041$.

Odpowiedź: $T_B \approx 388$ dób; $\frac{v_A}{v_B} \approx 1,04$

Wskazówka: Blższa Słońcu sonda ma krótszy okres i większą prędkość — warto sprawdzić wynik jakościowo.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie III prawa Keplera dla obu sond,
- 2 pkt — obliczenie $T_B \approx 388$ dób,
- 3 pkt — wzór $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$,
- 4 pkt — obliczenie ilorazu prędkości.

FZ11 Drgania harmoniczne

🔑 Okres $\rightarrow k$; najniższe położenie $\rightarrow F_s = mg + kA$.

FZ11.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Cieżarek o masie **0,4 kg** drga na sprężynie o współczynniku sprężystości $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Oblicz okres drgań.

ROZWIĄZANIE

$$1. T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{0,004} = 2\pi \cdot 0,0632 \approx 0,397 \text{ s.}$$

Odpowiedź: $T \approx 0,4 \text{ s}$

FZ11.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0-2 pkt

Oblicz długość wahadła matematycznego o okresie **2 s** ($g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

ROZWIĄZANIE

$$1. T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9,81 \cdot 4}{39,48} \approx 0,994 \text{ m.}$$

Odpowiedź: $l \approx 0,99 \text{ m}$

FZ11.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0-1 pkt

Amplitudę drgań ciężarka na sprężynie zwiększono dwukrotnie. Wtedy:

- A.** okres wzrośnie **2** razy **B.** okres wzrośnie **4** razy
C. energia wzrośnie **2** razy **D.** energia wzrośnie **4** razy

ROZWIĄZANIE

- Okres nie zależy od amplitudy, więc się nie zmienia.
- Energia $E = \frac{1}{2}kA^2$ rośnie czterokrotnie.

Odpowiedź: **D**

Dlaczego nie pozostałe? Energia jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy.

Ciężarek drga na sprężynie w pionie. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	W skrajnym położeniu prędkość ciężarka jest największa.	P	F
2.	W położeniu równowagi siła wypadkowa działająca na ciężarek jest równa zero.	P	F
3.	W skrajnym położeniu wartość przyspieszenia ciężarka jest największa.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. W skrajnym położeniu prędkość jest największa — fałsz, jest zerowa.
2. W położeniu równowagi wypadkowa sił jest równa zero — prawda.
3. W skrajnym położeniu wartość przyspieszenia jest największa — prawda.

Odpowiedź: FPP

Ciało o masie **0,2** kg drga harmonicznie z amplitudą **5** cm i okresem **0,5** s. Oblicz maksymalną prędkość ciała.

ROZWIĄZANIE

- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \approx 12,57 \frac{1}{s}$.
- $v_{max} = \omega A = 12,57 \cdot 0,05 \approx 0,628 \frac{m}{s}$.

Odpowiedź: $v_{max} \approx 0,63 \frac{m}{s}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie ω ,
- 2 pkt — wynik $\approx 0,63 \frac{m}{s}$.

Sprężyna o współczynniku $k = 200 \frac{N}{m}$ jest rozciągnięta o **6** cm i puszczona z ciężarkiem o masie **0,5** kg (na gładkim poziomym stole). Oblicz maksymalną prędkość ciężarka.

ROZWIĄZANIE

- Bilans energii: $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$.
- $v_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 0,06\sqrt{400} = 0,06 \cdot 20 = 1,2 \frac{m}{s}$.

Odpowiedź: $v_{max} \approx 1,2 \frac{m}{s}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — bilans energii,
- 2 pkt — przekształcenie wzoru,
- 3 pkt — wynik $1,2 \frac{m}{s}$.

Ciężarek zawieszony na sprężynie wydłuża ją w spoczynku o $\Delta l = 8$ cm. Oblicz okres drgań tego ciężarka ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

ROZWIĄZANIE

1. W równowadze $mg = k\Delta l \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{\Delta l}{g}$.

2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 2\pi\sqrt{0,008} \approx 0,562$ s.

Odpowiedź: $T \approx 0,56$ s

Wskazówka: Masa i k osobno nie są potrzebne — wystarczy ich iloraz.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — związek $\frac{m}{k} = \frac{\Delta l}{g}$,
- 2 pkt — podstawienie do wzoru na okres,
- 3 pkt — wynik $\approx 0,56$ s.

Ciężarek o masie $0,25$ kg drga na sprężynie o $k = 40 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ z amplitudą 6 cm ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz wartość siły sprężystości w najwyższym i najniższym położeniu ciężarka.

ROZWIĄZANIE

1. $\Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{2,5}{40} = 0,0625$ m.

2. Najniżej: $F = k(\Delta l + A) = 40 \cdot 0,1225 = 4,9$ N.

3. Najwyżej: $F = k(\Delta l - A) = 40 \cdot 0,0025 = 0,1$ N (sprężyna wciąż rozciągnięta).

Odpowiedź: $F_{\text{górn}} = 0,1$ N; $F_{\text{dół}} = 4,9$ N

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie wydłużenia w równowadze,
- 2 pkt — siła w najniższym położeniu,
- 3 pkt — siła w najwyższym położeniu.

Wahadło matematyczne o długości 1 m wychylono o kąt 10° i puszczono. Oblicz okres drgań oraz maksymalną prędkość ciężarka ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

ROZWIĄZANIE

$$1. T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{0,1} \approx 1,987 \text{ s.}$$

$$2. \text{ Wysokość podniesienia: } h = l(1 - \cos 10^\circ) = 1 - 0,9848 = 0,0152 \text{ m.}$$

$$3. v_{\max} = \sqrt{2gh} = \sqrt{0,304} \approx 0,551 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odpowiedź: $T \approx 1,99 \text{ s}$; $v_{\max} \approx 0,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie okresu,
- 2 pkt — wyznaczenie wysokości podniesienia,
- 3 pkt — zastosowanie ZZE,
- 4 pkt — wynik $\approx 0,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Wykaż, że dla ciężarka drgającego na sprężynie stosunek maksymalnej wartości siły sprężystości do minimalnej (w drganiach pionowych o amplitudzie A) jest równy $\frac{\Delta l + A}{\Delta l - A}$, i oblicz ten stosunek dla $\Delta l = 10 \text{ cm}$ i $A = 4 \text{ cm}$.

ROZWIĄZANIE

1. Wydłużenie sprężyny zmienia się od $\Delta l - A$ (najwyżej) do $\Delta l + A$ (najniżej).

2. Siła sprężystości $F = k \cdot (\text{wydłużenie})$, więc stosunek wynosi $\frac{k(\Delta l + A)}{k(\Delta l - A)} = \frac{\Delta l + A}{\Delta l - A}$. ■

3. Dla danych: $\frac{0,14}{0,06} = \frac{7}{3} \approx 2,33$.

Odpowiedź: stosunek $= \frac{7}{3} \approx 2,33$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — ustalenie skrajnych wydłużeń sprężyny,
- 2 pkt — zapisanie sił i skrócenie k ,
- 3 pkt — wykazanie wzoru,
- 4 pkt — obliczenie wartości liczbowej.

FZ12 Fale mechaniczne, interferencja i fale stojące

🔑 Przy zmianie ośrodka stała jest f ; λ zmienia się tak jak v .

FZ12.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Fala o częstotliwości **500** Hz biegnie z prędkością **$340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$** . Oblicz jej długość.

ROZWIĄZANIE

$$1. \lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{500} = 0,68 \text{ m.}$$

Odpowiedź: $\lambda = 0,68 \text{ m}$

FZ12.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Fala dźwiękowa o długości **0,5** m w powietrzu ($v_p = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) przechodzi do wody, gdzie prędkość dźwięku wynosi **$1450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$** . Oblicz długość tej fali w wodzie.

ROZWIĄZANIE

$$1. f = \frac{340}{0,5} = 680 \text{ Hz i nie zmienia się.}$$

$$2. \lambda_w = \frac{1450}{680} \approx 2,13 \text{ m.}$$

Odpowiedź: $\lambda_w \approx 2,13 \text{ m}$

FZ12.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Struna o długości L zamocowana na obu końcach drga, tworząc falę stojącą o największej możliwej długości. Długość tej fali wynosi:

A. L

B. $2L$

C. $\frac{L}{2}$

D. $4L$

ROZWIĄZANIE

1. Na końcach są węzły; najprostszy mod to połowa fali na całej długości struny.

$$2. L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L.$$

Odpowiedź: **B**

Dlaczego nie pozostałe? Ton podstawowy: jedna strzałka w środku, węzły na końcach.

FZ12.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Fala przechodzi z ośrodka, w którym jej prędkość jest większa, do ośrodka, w którym jest mniejsza. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Częstotliwość fali maleje.	P	F
2.	Długość fali maleje.	P	F
3.	Kierunek rozchodzenia się fali odchyła się w stronę normalnej.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. 1. Częstotliwość maleje — fałsz, nie zmienia się.
2. 2. Długość fali maleje — prawda ($\lambda = \frac{v}{f}$).
3. 3. Fala załamuje się do normalnej — prawda.

Odpowiedź: FPP**FZ12.5** OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Dwa głośniki drgające zgodnie w fazie emitują fale o częstotliwości **850 Hz** ($v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Punkt **A** jest oddalony od nich o **10,5 m** i **11,5 m**. Ustal, czy w punkcie **A** nastąpi wzmocnienie, czy wygaszenie dźwięku.

ROZWIĄZANIE

1. $\lambda = \frac{340}{850} = 0,4 \text{ m}$.
2. $\Delta r = 11,5 - 10,5 = 1 \text{ m} = 2,5\lambda$.
3. Różnica dróg jest nieparzystą wielokrotnością $\frac{\lambda}{2}$, więc nastąpi **wygaszenie**.

Odpowiedź: wygaszenie ($\Delta r = 2,5\lambda$)**Wskazówka:** Nie zgaduj: policz $\Delta r/\lambda$ — liczba całkowita to wzmocnienie, połówkowa to wygaszenie.**Schemat punktowania:**

- 1 pkt — obliczenie $\lambda = 0,4 \text{ m}$,
- 2 pkt — obliczenie Δr i porównanie z λ ,
- 3 pkt — wniosek o wygaszeniu.

Struna o długości **0,6** m i masie **1,2** g jest napięta siłą **180** N. Oblicz częstotliwość tonu podstawowego struny.

ROZWIĄZANIE

$$1. \mu = \frac{m}{L} = \frac{0,0012}{0,6} = 0,002 \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

$$2. v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{180}{0,002}} = \sqrt{90\,000} = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$3. f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{300}{1,2} = 250 \text{ Hz}.$$

Odpowiedź: $f \approx 250 \text{ Hz}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie gęstości liniowej,
- 2 pkt — obliczenie prędkości fali,
- 3 pkt — częstotliwość **250** Hz.

Fala biegnąca w ośrodku o prędkości $v_1 = 1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ pada na granicę ośrodków pod kątem **30°** i przechodzi do ośrodka o prędkości $v_2 = 1000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz kąt załamania.

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \sin \beta = \frac{v_2}{v_1} \sin \alpha.$$

$$2. \sin \beta = \frac{1000}{1500} \cdot 0,5 = 0,3333.$$

$$3. \beta \approx 19,5^\circ.$$

Odpowiedź: $\beta \approx 19,5^\circ$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie prawa załamania dla fal,
- 2 pkt — obliczenie $\sin \beta$,
- 3 pkt — wynik $\approx 19,5^\circ$.

Dwie identyczne struny o długości swobodnej L_0 rozciągnięto: pierwszą do $L_1 = 1,01L_0$, drugą do $L_2 = 1,03L_0$. Siła napinająca jest proporcjonalna do wydłużenia. Oblicz iloraz $\frac{f_2}{f_1}$ częstotliwości tonów podstawowych (pomiń zmianę gęstości liniowej).

ROZWIĄZANIE

1. $F \propto \Delta L$: $\frac{F_2}{F_1} = \frac{0,03}{0,01} = 3$.
2. $f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, więc $\frac{f_2}{f_1} = \frac{L_1}{L_2} \sqrt{\frac{F_2}{F_1}}$.
3. $\frac{f_2}{f_1} = \frac{1,01}{1,03} \cdot \sqrt{3} \approx 0,9806 \cdot 1,732 \approx 1,698$.

Odpowiedź: $\frac{f_2}{f_1} \approx 1,70$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wykorzystanie proporcjonalności siły do wydłużenia,
- 2 pkt — wzór na częstotliwość tonu podstawowego,
- 3 pkt — uwzględnienie różnych długości strun,
- 4 pkt — wynik $\approx 1,7$.

Fala o długości $\lambda_1 = 1,5$ cm przechodzi z ośrodka $\mathcal{O}_1$ do ośrodka $\mathcal{O}_2$, w którym prędkość jest dwa razy mniejsza. Oblicz długość fali w drugim ośrodku i uzasadnij, dlaczego częstotliwość się nie zmienia.

ROZWIĄZANIE

1. Częstotliwość jest narzucona przez źródło: każda „porcja” drgań, która dobiega do granicy, przechodzi dalej — liczba drgań na sekundę musi być taka sama po obu stronach.
2. Skoro $v = \lambda f$ i $f = \text{const}$, to $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2}$.
3. $\lambda_2 = 0,75$ cm.

Odpowiedź: $\lambda_2 = 0,75$ cm

Schemat punktowania:

- 1 pkt — stwierdzenie stałości częstotliwości,
- 2 pkt — uzasadnienie (ciągłość drgań na granicy),
- 3 pkt — obliczenie $\lambda_2 = 0,75$ cm.

W rurze otwartej z obu stron o długości **0,85** m powstaje fala stojąca. Oblicz częstotliwość tonu podstawowego i pierwszego tonu wyższego ($v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$).

ROZWIĄZANIE

1. W rurze otwartej na obu końcach są strzałki, więc $L = n \frac{\lambda}{2}$, czyli $f_n = \frac{nv}{2L}$.

2. $f_1 = \frac{340}{1,7} = 200 \text{ Hz}$.

3. $f_2 = 2f_1 = 400 \text{ Hz}$.

Odpowiedź: $f_1 = 200 \text{ Hz}$; $f_2 = 400 \text{ Hz}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek na falę stojącą w rurze otwartej,
- 2 pkt — wzór $f_n = \frac{nv}{2L}$,
- 3 pkt — $f_1 = 200 \text{ Hz}$,
- 4 pkt — $f_2 = 400 \text{ Hz}$.

FZ13 Dźwięk: natężenie i efekt Dopplera

🔑 Zbliżanie → krótsza fala, wyższy dźwięk; iloraz λ skraca f_0 .

FZ13.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Głośnik emituje fale kuliste o mocy 40 mW. Oblicz natężenie dźwięku w odległości 10 m od głośnika.

ROZWIĄZANIE

$$1. I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{0,04}{4\pi \cdot 100} \approx 3,18 \cdot 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Odpowiedź: $I \approx 3,2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

FZ13.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

W jakiej odległości od źródła natężenie fali kulistej jest 9 razy mniejsze niż w odległości 2 m?

ROZWIĄZANIE

1. $I \propto \frac{1}{r^2}$, więc 9-krotny spadek natężenia oznacza 3-krotny wzrost odległości.

$$2. r = 3 \cdot 2 = 6 \text{ m}.$$

Odpowiedź: $r = 6 \text{ m}$

FZ13.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Źródło dźwięku zbliża się do nieruchomego obserwatora. Obserwator słyszy dźwięk o częstotliwości:

- A. większej niż emitowana
- B. mniejszej niż emitowana
- C. równej emitowanej
- D. zależnej od natężenia dźwięku

ROZWIĄZANIE

1. Fale „zagęszczają się” przed źródłem: λ maleje, więc $f = \frac{v}{\lambda}$ rośnie.

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? To podstawowy przypadek efektu Dopplera.

FZ13.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Ambulans z włączoną syreną o częstotliwości f_0 porusza się po prostej drodze. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Obserwator, od którego ambulans się oddala, słyszy dźwięk o częstotliwości mniejszej od f_0 .	P	F
2.	Gdy oddalający się ambulans hamuje, obserwator słyszy dźwięk o malejącej częstotliwości.	P	F
3.	Gdy oddalający się ambulans przyspiesza, obserwator słyszy dźwięk o malejącej częstotliwości.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Obserwator, od którego ambulans się oddala, słyszy dźwięk o $f < f_0$ — prawda.
2. Gdy oddalający się ambulans hamuje, obserwator słyszy dźwięk o malejącej częstotliwości — fałsz: przy mniejszej prędkości oddalania częstotliwość rośnie (zbliża się do f_0).
3. Gdy oddalający się ambulans przyspiesza, słyszana częstotliwość maleje — prawda.

Odpowiedź: PFP

FZ13.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Nieruchome źródło emituje dźwięk o częstotliwości 600 Hz. Obserwator zbliża się do źródła z prędkością $34 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ($v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Oblicz częstotliwość odbieraną przez obserwatora.

ROZWIĄZANIE

1. $f = f_0 \frac{v + v_{obs}}{v} = 600 \cdot \frac{374}{340}$.
2. $f = 600 \cdot 1,1 = 660 \text{ Hz}$.

Odpowiedź: $f = 660 \text{ Hz}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — poprawny wzór dla ruchomego obserwatora,
- 2 pkt — wynik 660 Hz.

FZ13.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Źródło emitujące dźwięk o częstotliwości 500 Hz zbliża się do nieruchomego obserwatora z prędkością $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ($v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Oblicz częstotliwość odbieraną przez obserwatora i długość fali docierającej do niego.

ROZWIĄZANIE

1. $f = f_0 \frac{v}{v - u} = 500 \cdot \frac{340}{320} = 531,25 \text{ Hz}$.
2. $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{531,25} = 0,64 \text{ m}$ (albo $\lambda = \frac{v - u}{f_0} = \frac{320}{500}$).

Odpowiedź: $f \approx 531 \text{ Hz}$; $\lambda = 0,64 \text{ m}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór dla ruchomego źródła,
- 2 pkt — częstotliwość $\approx 531 \text{ Hz}$,
- 3 pkt — długość fali 0,64 m.

Poziom natężenia dźwięku w odległości 1 m od źródła wynosi 80 dB. Oblicz natężenie dźwięku w tym punkcie oraz poziom natężenia w odległości 10 m ($I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$).

ROZWIĄZANIE

1. $80 = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^8 \Rightarrow I = 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.
2. Dziesięciokrotny wzrost odległości to stukrotny spadek natężenia: $I_{10} = 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.
3. $L = 10 \log \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ dB}$.

Odpowiedź: $I = 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$; $L = 60 \text{ dB}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — przekształcenie wzoru na poziom natężenia,
- 2 pkt — obliczenie $I = 10^{-4}$,
- 3 pkt — uwzględnienie spadku $\propto \frac{1}{r^2}$ i wynik 60 dB.

Dwa głośniki emitują zgodnie w fazie falę o częstotliwości 850 Hz ($v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Oblicz najmniejszą niezerową różnicę dróg, dla której w danym punkcie nastąpi wzmocnienie, oraz taką, dla której nastąpi wygaszenie.

ROZWIĄZANIE

1. $\lambda = \frac{340}{850} = 0,4 \text{ m}$.
2. Wzmocnienie: $\Delta r = k\lambda$, najmniejsze niezerowe $\Delta r = 0,4 \text{ m}$.
3. Wygaszenie: $\Delta r = (k + \frac{1}{2})\lambda$, najmniejsze $\Delta r = 0,2 \text{ m}$.

Odpowiedź: wzmocnienie: 0,4 m; wygaszenie: 0,2 m

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie długości fali,
- 2 pkt — warunek wzmocnienia i wynik,
- 3 pkt — warunek wygaszenia i wynik.

Samochód jadący z prędkością u mija nieruchomego obserwatora, emitując dźwięk o częstotliwości $f_0 = 400$ Hz. Obserwator słyszy najpierw 440 Hz, a po minięciu — f_2 . Oblicz u oraz f_2 ($v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$).

ROZWIĄZANIE

1. Zbliżanie: $440 = 400 \cdot \frac{340}{340 - u} \Rightarrow 340 - u = \frac{400 \cdot 340}{440} \approx 309,1$.

2. $u \approx 30,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3. Oddalanie: $f_2 = 400 \cdot \frac{340}{340 + 30,9} \approx 400 \cdot 0,9167 \approx 366,7$ Hz.

Odpowiedź: $u \approx 30,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $f_2 \approx 366,7$ Hz

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór Dopplera dla zbliżającego się źródła,
- 2 pkt — obliczenie u ,
- 3 pkt — wzór dla oddalającego się źródła,
- 4 pkt — obliczenie f_2 .

Sonda oddala się od Ziemi i wysyła falę elektromagnetyczną o częstotliwości $f_0 = 3,00$ GHz. Na Ziemi odebrano falę o częstotliwości mniejszej o 75 kHz. Oblicz prędkość sondy względem Ziemi ($c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; dla $v \ll c$ przyjmij $\frac{\Delta f}{f_0} \approx \frac{v}{c}$).

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{7,5 \cdot 10^4}{3,00 \cdot 10^9} = 2,5 \cdot 10^{-5}$.

2. $v = c \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} = 3 \cdot 10^8 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} = 7,5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3. Sonda oddala się z prędkością $7,5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ (częstotliwość zmalała — przesunięcie ku czerwieni).

Odpowiedź: $v = 7,5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Wskazówka: Dla fal EM prędkość fali nie zależy od ruchu źródła — zmienia się tylko odbierana częstotliwość.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie związku $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{v}{c}$,
- 2 pkt — obliczenie ilorazu częstotliwości,
- 3 pkt — obliczenie prędkości,
- 4 pkt — interpretacja (oddalanie, przesunięcie ku czerwieni).

FZ14 Gaz doskonały i przemiany gazowe

🔑 Kelwiny, $\frac{pV}{T} = \text{const}$, praca = pole pod $p(V)$.

FZ14.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Gaz o objętości 2 m^3 pod ciśnieniem 10^5 Pa sprężono izotermicznie do objętości $0,5 \text{ m}^3$. Oblicz ciśnienie końcowe.

ROZWIĄZANIE

$$1. p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow p_2 = \frac{10^5 \cdot 2}{0,5} = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

Odpowiedź: $p = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

FZ14.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Gaz w zamkniętym naczyniu o stałej objętości ogrzano od 27°C do 327°C . Ile razy wzrosło jego ciśnienie?

ROZWIĄZANIE

$$1. T_1 = 300 \text{ K}, T_2 = 600 \text{ K.}$$

$$2. \text{Izochora: } \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2.$$

Odpowiedź: 2 razy

FZ14.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Ustalona masa gazu doskonałego przechodzi przemianę, w której ciśnienie jest wprost proporcjonalne do objętości. Wtedy temperatura bezwzględna gazu jest proporcjonalna do:

A. V

B. $\sqrt{V}$

C. V^2

D. $\frac{1}{V}$

ROZWIĄZANIE

$$1. T \propto pV, \text{ a skoro } p \propto V, \text{ to } T \propto V \cdot V = V^2.$$

Odpowiedź: C

Dlaczego nie pozostałe? Podstaw $p = cV$ do równania stanu.

FZ14.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Rozważamy ustaloną masę gazu doskonałego. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	W przemianie izochorycznej ciśnienie gazu jest wprost proporcjonalne do temperatury bezwzględnej.	P	F
2.	W przemianie izobarycznej objętość gazu jest wprost proporcjonalna do średniej energii kinetycznej cząsteczek.	P	F
3.	W przemianie izotermicznej średnia energia kinetyczna cząsteczek rośnie.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. W przemianie izochorycznej ciśnienie jest wprost proporcjonalne do temperatury bezwzględnej — prawda.
2. W przemianie izobarycznej objętość jest wprost proporcjonalna do średniej energii kinetycznej cząsteczek — prawda ($V \propto T$, $\overline{E_k} \propto T$).
3. W przemianie izotermicznej średnia energia kinetyczna cząsteczek rośnie — fałsz, jest stała.

Odpowiedź: PPF

FZ14.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

W naczyniu o objętości $0,02 \text{ m}^3$ znajduje się $0,5$ mola gazu doskonałego w temperaturze 300 K . Oblicz ciśnienie gazu ($R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$).

ROZWIĄZANIE

$$1. p = \frac{nRT}{V} = \frac{0,5 \cdot 8,31 \cdot 300}{0,02}.$$
$$2. p = \frac{1246,5}{0,02} \approx 6,23 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

Odpowiedź: $p \approx 6,2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — przekształcenie równania Clapeyrona,
- 2 pkt — wynik z jednostką.

Gaz doskonały rozpręża się izobarycznie pod ciśnieniem $2 \cdot 10^5$ Pa od objętości 1 m^3 do 3 m^3 . Oblicz pracę wykonaną przez gaz oraz stosunek temperatur końcowej do początkowej.

ROZWIĄZANIE

1. $W = p\Delta V = 2 \cdot 10^5 \cdot 2 = 4 \cdot 10^5 \text{ J}$.

2. Izobara: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = 3$.

Odpowiedź: $W = 4 \cdot 10^5 \text{ J}$; $\frac{T_2}{T_1} = 3$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na pracę w izobarze,
- 2 pkt — wynik $4 \cdot 10^5 \text{ J}$,
- 3 pkt — stosunek temperatur.

Gaz przechodzi ze stanu ($p_1 = 10^5 \text{ Pa}$; $V_1 = 2 \text{ m}^3$; $T_1 = 300 \text{ K}$) do stanu ($p_2 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $V_2 = 3 \text{ m}^3$). Oblicz temperaturę końcową.

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$.

2. $T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 300 \cdot \frac{4,5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5} = 675 \text{ K}$.

Odpowiedź: $T_2 = 675 \text{ K}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie równania stanu,
- 2 pkt — podstawienie danych,
- 3 pkt — wynik 675 K .

Gaz doskonały przechodzi cykl: izochoryczne ogrzanie od (p_1, V_1) do $3p_1$, izobaryczne rozprężenie do $3V_1$, a następnie powrót do stanu początkowego. Oblicz pracę wykonaną przez gaz w całym cyklu w jednostkach $p_1 V_1$ (przyjmij powrót po odcinku prostym na wykresie $p(V)$).

ROZWIĄZANIE

1. Izochora: $W_1 = 0$.
2. Izobara: $W_2 = 3p_1 \cdot (3V_1 - V_1) = 6p_1 V_1$.
3. Powrót po odcinku od $(3V_1; 3p_1)$ do $(V_1; p_1)$: $W_3 = -\frac{3p_1 + p_1}{2} \cdot 2V_1 = -4p_1 V_1$.
4. $W = 0 + 6p_1 V_1 - 4p_1 V_1 = 2p_1 V_1$ (pole wewnątrz cyklu).

Odpowiedź: $W = 2p_1 V_1$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zerowa praca w izochorze,
- 2 pkt — praca w izobarze,
- 3 pkt — praca ujemna przy powrocie,
- 4 pkt — wynik $2p_1 V_1$.

Oblicz średnią energię kinetyczną cząsteczki gazu doskonałego w temperaturze 27°C oraz stosunek średnich prędkości kwadratowych cząsteczek helu ($M = 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$) i tlenu ($M = 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$) w tej samej temperaturze ($k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$).

ROZWIĄZANIE

1. $\overline{E_k} = \frac{3}{2} kT = 1,5 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 6,21 \cdot 10^{-21} \text{ J}$.
2. Ta sama energia: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$.
3. $\frac{v_{He}}{v_{O_2}} = \sqrt{\frac{32}{4}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

Odpowiedź: $\overline{E_k} \approx 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ J}$; $\frac{v_{He}}{v_{O_2}} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór $\overline{E_k} = \frac{3}{2} kT$,
- 2 pkt — wynik liczbowy,
- 3 pkt — równość energii dla obu gazów,
- 4 pkt — stosunek prędkości $\approx 2,8$.

Gaz doskonały przechodzi przemianę, w której $p \propto V$, od stanu A o objętości V_1 do stanu B o objętości $2V_1$. Wykaż, że temperatura wzrasta czterokrotnie, i oblicz stosunek średnich prędkości kwadratowych cząsteczek w obu stanach.

ROZWIĄZANIE

$$1. p = cV, \text{ więc } T = \frac{pV}{nR} = \frac{cV^2}{nR} \propto V^2.$$

$$2. \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{2V_1}{V_1} \right)^2 = 4. \blacksquare$$

$$3. \overline{E_k} \propto T, \text{ a } \overline{E_k} \propto v^2, \text{ więc } \frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{T_B}{T_A}} = 2.$$

$$\text{Odpowiedź: } \frac{T_B}{T_A} = 4; \frac{v_B}{v_A} = 2$$

Wskazówka: Ta sama sytuacja co w maturze 2026 — odcinek prostej przez początek układu.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — podstawienie $p = cV$ do równania stanu,
- 2 pkt — wykazanie $T \propto V^2$,
- 3 pkt — wniosek o czterokrotnym wzroście,
- 4 pkt — stosunek prędkości **2**.

FZ15 Pierwsza zasada termodynamiki, ciepło i cykle

🔑 $Q = \Delta U + W_{\text{gazu}}$; $\Delta U = \frac{3}{2} \Delta(pV)$ dla gazu jednoatomowego.

FZ15.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Gaz pobrał **500 J** ciepła i wykonał pracę **200 J**. Oblicz zmianę jego energii wewnętrznej.

ROZWIĄZANIE

1. $\Delta U = Q - W_{\text{gazu}} = 500 - 200 = 300 \text{ J}$.

Odpowiedź: $\Delta U = 300 \text{ J}$

FZ15.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz zmianę energii wewnętrznej **2** moli gazu jednoatomowego ogrzanego o **50 K** ($R = 8,31$).

ROZWIĄZANIE

1. $\Delta U = \frac{3}{2} n R \Delta T = 1,5 \cdot 2 \cdot 8,31 \cdot 50 = 1246,5 \text{ J}$.

Odpowiedź: $\Delta U \approx 1246,5 \text{ J}$

FZ15.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

W przemianie izotermicznej gazu doskonałego:

A. $Q = 0$

B. $Q = W_{\text{gazu}}$

C. $\Delta U = Q$

D. $W_{\text{gazu}} = 0$

ROZWIĄZANIE

1. Temperatura jest stała, więc $\Delta U = 0$.

2. Z I zasady: całe pobrane ciepło zamienia się w pracę gazu.

Odpowiedź: **B**

Dlaczego nie pozostałe? Energia wewnętrzna zależy tylko od temperatury.

FZ15.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Gaz doskonały jednoatomowy ogrzewany jest raz izochorycznie, raz izobarycznie — za każdym razem o taki sam przyrost temperatury. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Zmiana energii wewnętrznej gazu jest w obu przemianach taka sama.	P	F
2.	W przemianie izobarycznej gaz pobiera więcej ciepła niż w izochorycznej.	P	F
3.	W przemianie izochorycznej gaz wykonuje dodatnią pracę.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. 1. Zmiana energii wewnętrznej jest w obu przypadkach taka sama — prawda (ΔU zależy tylko od ΔT).

2. 2. W przemianie izobarycznej gaz pobiera więcej ciepła — prawda (dochodzi praca).

3. 3. W przemianie izochorycznej gaz wykonuje pracę — fałsz, $W = 0$.

Odpowiedź: **PPF**

FZ15.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Dwa mole gazu jednoatomowego ogrzano izobarycznie o **100 K** ($R = 8,31$). Oblicz ciepło pobrane przez gaz oraz pracę, którą wykonał.

ROZWIĄZANIE

$$1. Q = nC_p\Delta T = 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot 100 = 4155 \text{ J.}$$

$$2. W_{\text{gazu}} = nR\Delta T = 2 \cdot 8,31 \cdot 100 = 1662 \text{ J.}$$

Odpowiedź: $Q \approx 4155 \text{ J}$; $W \approx 1662 \text{ J}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór $C_p = \frac{5}{2}R$ i obliczenie ciepła,
- 2 pkt — obliczenie pracy $nR\Delta T$.

FZ15.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Silnik cieplny pobiera w każdym cyklu **800 J** ciepła i oddaje **600 J**. Oblicz pracę wykonaną w jednym cyklu i sprawność silnika.

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{ W cyklu } \Delta U = 0, \text{ więc } W = Q_{\text{pob}} - Q_{\text{odd}} = 800 - 600 = 200 \text{ J.}$$

$$2. \eta = \frac{200}{800} = 0,25 = 25\%.$$

Odpowiedź: $W = 200 \text{ J}$; $\eta = 25\%$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wykorzystanie $\Delta U = 0$ w cyklu,
- 2 pkt — praca **200 J**,
- 3 pkt — sprawność **25%**.

FZ15.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Silnik Carnota pracuje między zbiornikami o temperaturach **600 K** i **300 K**. Oblicz jego maksymalną sprawność oraz pracę, jaką wykona, pobierając **1200 J** ciepła.

ROZWIĄZANIE

$$1. \eta_C = 1 - \frac{T_{ch}}{T_g} = 1 - \frac{300}{600} = 0,5.$$

$$2. W = \eta Q_{\text{pob}} = 0,5 \cdot 1200 = 600 \text{ J.}$$

Odpowiedź: $\eta = 50\%$; $W = 600 \text{ J}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na sprawność Carnota,
- 2 pkt — $\eta = 50\%$,
- 3 pkt — praca **600 J**.

Gaz jednoatomowy przechodzi izochorycznie ze stanu $(p_1; V_1)$ do $3p_1$, a następnie izobarycznie do $3V_1$. Wyprowadź wzór na całkowite ciepło pobrane przez gaz w obu przemianach, wyrażone przez p_1 i V_1 .

ROZWIĄZANIE

1. Izochora: $W = 0$, $\Delta U_1 = \frac{3}{2}(3p_1V_1 - p_1V_1) = 3p_1V_1$, więc $Q_1 = 3p_1V_1$.
2. Izobara: $W_{\text{gazu}} = 3p_1(3V_1 - V_1) = 6p_1V_1$; $\Delta U_2 = \frac{3}{2}(9p_1V_1 - 3p_1V_1) = 9p_1V_1$.
3. $Q_2 = 9p_1V_1 + 6p_1V_1 = 15p_1V_1$.
4. $Q = Q_1 + Q_2 = 3p_1V_1 + 15p_1V_1 = 18p_1V_1$.

Odpowiedź: $Q = 18p_1V_1$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — ciepło w izochorze,
- 2 pkt — praca w izobarze,
- 3 pkt — zmiana energii wewnętrznej w izobarze,
- 4 pkt — suma $18p_1V_1$.

Gaz jednoatomowy w cyklu pobiera ciepło tylko w jednej przemianie: izobarycznym rozprężaniu od V_1 do $2V_1$ pod ciśnieniem p_1 . Oblicz to ciepło w jednostkach p_1V_1 oraz podaj, jaka jego część zamieniła się w pracę gazu.

ROZWIĄZANIE

1. $W_{\text{gazu}} = p_1(2V_1 - V_1) = p_1V_1$.
2. $\Delta U = \frac{3}{2}(2p_1V_1 - p_1V_1) = 1,5p_1V_1$.
3. $Q = 1,5p_1V_1 + p_1V_1 = 2,5p_1V_1$; udział pracy: $\frac{1}{2,5} = 0,4 = 40\%$.

Odpowiedź: $Q = 2,5p_1V_1$; na pracę idzie 40%

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie pracy,
- 2 pkt — obliczenie ΔU ,
- 3 pkt — ciepło $2,5p_1V_1$,
- 4 pkt — udział pracy 40%.

Gaz jednoatomowy przechodzi cykl: izotermiczne sprężanie w temperaturze T_1 , izochoryczne ogrzanie i izobaryczne rozprężanie. Wykaż, że w całym cyklu zmiana energii wewnętrznej jest zerowa, i wyjaśnij, co z tego wynika dla ciepła i pracy w cyklu.

ROZWIĄZANIE

1. Energia wewnętrzna gazu doskonałego zależy tylko od temperatury: $U = \frac{3}{2}nRT$.
2. Po zamkniętym cyklu gaz wraca do stanu początkowego, więc ma tę samą temperaturę — zatem $\Delta U = 0$. ■
3. Z I zasady dla całego cyklu: $0 = Q_{\text{netto}} + W$, czyli ciepło netto pobrane przez gaz równa się pracy, którą gaz wykonał.
4. Praca ta jest polem powierzchni zamkniętej przez cykl na wykresie $p(V)$.

Odpowiedź: $\Delta U_{\text{cyklu}} = 0$, więc $Q_{\text{netto}} = W_{\text{netto}}$

Wskazówka: To jedno z najczęściej sprawdzanych rozumowań w termodynamice.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — stwierdzenie, że U zależy tylko od T ,
- 2 pkt — powrót do stanu początkowego i wniosek $\Delta U = 0$,
- 3 pkt — zastosowanie I zasady do cyklu,
- 4 pkt — interpretacja: praca = pole wewnątrz cyklu.

FZ16 Elektrostatyka: prawo Coulomba i natężenie pola

🔑 Wektorowo, nie skalarnie; ładunek po przekątnej daje pole 2 razy słabsze.

FZ16.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz siłę oddziaływania dwóch ładunków $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ i $Q_2 = 3 \mu\text{C}$ odległych o 30 cm ($k = 9 \cdot 10^9$).

ROZWIĄZANIE

$$1. F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{0,09}.$$

$$2. F = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-12}}{0,09} = 0,6 \text{ N}.$$

Odpowiedź: $F = 0,6 \text{ N}$

FZ16.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz natężenie pola elektrycznego w odległości 20 cm od ładunku punkowego $Q = 4 \mu\text{C}$ ($k = 9 \cdot 10^9$).

ROZWIĄZANIE

$$1. E = k \frac{Q}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{0,04} = 9 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Odpowiedź: $E = 9 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$

FZ16.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Odległość między dwoma ładunkami punktowymi zmniejszono trzykrotnie, a wartość jednego z nich podwojono. Siła oddziaływania:

A. wzrosła 6 razy

B. wzrosła 9 razy

C. wzrosła 12 razy

D. wzrosła 18 razy

ROZWIĄZANIE

$$1. F \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

2. Zmiana: $2 \cdot 3^2 = 18$ razy większa.

Odpowiedź: **D**

Dlaczego nie pozostałe? Zmiany mnożą się: ładunek liniowo, odległość kwadratowo.

W czterech wierzchołkach kwadratu umieszczono jednakowe ładunki dodatnie $+Q$. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Natężenie pola elektrycznego w środku kwadratu jest równe zero.	P	F
2.	Potencjał pola elektrycznego w środku kwadratu jest równy zero.	P	F
3.	Na ładunek dodatni umieszczony w środku kwadratu działa zerowa siła wypadkowa.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Natężenie pola w środku kwadratu jest zerowe — prawda (symetria).
2. Potencjał w środku kwadratu jest zerowy — fałsz, potencjały się dodają skalarnie i są dodatnie.
3. Siła działająca na ładunek dodatni umieszczony w środku jest zerowa — prawda.

Odpowiedź: PFP

Dwa jednakowe ładunki $+Q$ umieszczono w odległości $2a$ od siebie. Oblicz natężenie pola w punkcie leżącym dokładnie w połowie odcinka łączącego ładunki i uzasadnij wynik.

ROZWIĄZANIE

1. Wektory natężenia od obu ładunków mają w tym punkcie tę samą wartość $\frac{kQ}{a^2}$.
2. Zwroty są przeciwne (każdy „od” swojego ładunku), więc wektory się znoszą.
3. $\mathbf{E} = 0$.

Odpowiedź: $\mathbf{E} = 0$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie wartości obu natężeń,
- 2 pkt — wniosek o przeciwnych zwrotach i wynik $\mathbf{E} = 0$.

W dwóch przeciwległych wierzchołkach kwadratu o boku a umieszczono ładunki $+Q$ i $-Q$. Wyznacz wartość natężenia pola w środku kwadratu.

ROZWIĄZANIE

1. Odległość od środka do wierzchołka: $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, więc $r^2 = \frac{a^2}{2}$.

2. Każdy ładunek daje $E_1 = \frac{kQ}{a^2/2} = \frac{2kQ}{a^2}$.

3. Wektory mają ten sam kierunek i zwrot (od $+Q$ do $-Q$), więc się dodają: $E = \frac{4kQ}{a^2}$.

Odpowiedź: $E = \frac{4kQ}{a^2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie odległości od środka,
- 2 pkt — wartość natężenia od jednego ładunku,
- 3 pkt — zauważenie zgodnych zwrotów i wynik $\frac{4kQ}{a^2}$.

Dwa ładunki $Q_1 = +9 \mu\text{C}$ i $Q_2 = +1 \mu\text{C}$ znajdują się w odległości 40 cm. Oblicz, w jakiej odległości od Q_1 natężenie pola wypadkowego jest równe zero.

ROZWIĄZANIE

1. Punkt leży między ładunkami: $\frac{kQ_1}{x^2} = \frac{kQ_2}{(0,4 - x)^2}$.

2. $\frac{9}{x^2} = \frac{1}{(0,4 - x)^2} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{1}{0,4 - x}$.

3. $1,2 - 3x = x \Rightarrow x = 0,3 \text{ m} = 30 \text{ cm}$.

Odpowiedź: $x = 30 \text{ cm}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zapisanie równości natężeń,
- 2 pkt — spierwiastkowanie obu stron,
- 3 pkt — wynik 30 cm od Q_1 .

W trzech wierzchołkach kwadratu o boku a umieszczono ładunki ujemne: $-2q$ (lewy dolny), $-q$ (prawy dolny), $-2q$ (prawy górny). Wyznacz wartość natężenia pola w środku kwadratu S .

ROZWIĄZANIE

1. Odległość każdego ładunku od środka: $r^2 = \frac{a^2}{2}$, więc $E = \frac{2k|Q|}{a^2}$.
2. Pola od dwóch ładunków $-2q$ (leżących na przekątnej po obu stronach środka) mają równe wartości $\frac{4kq}{a^2}$ i przeciwne zwroty — znoszą się.
3. Zostaje pole od $-q$: $E_S = \frac{2kq}{a^2}$, zwrócone do tego ładunku.

Odpowiedź: $E_S = \frac{2kq}{a^2}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie odległości i natężeń od poszczególnych ładunków,
- 2 pkt — zauważenie, że pola od ładunków $-2q$ się znoszą,
- 3 pkt — wynik $\frac{2kq}{a^2}$,
- 4 pkt — podanie kierunku i zwrotu wektora.

Kulka o masie 2 g i ładunku $5\text{ }\mu\text{C}$ wisi na nici w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu poziomym $E = 3000\text{ }\frac{\text{N}}{\text{C}}$ ($g = 10\text{ }\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz kąt odchylenia nici od pionu.

ROZWIĄZANIE

1. $F_E = qE = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 3000 = 0,015\text{ N}$; $F_g = mg = 0,02\text{ N}$.
2. $\text{tg } \alpha = \frac{F_E}{F_g} = \frac{0,015}{0,02} = 0,75$.
3. $\alpha \approx 36,9^\circ$.

Odpowiedź: $\alpha \approx 37^\circ$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie siły elektrycznej,
- 2 pkt — warunek równowagi i $\text{tg } \alpha$,
- 3 pkt — wynik $\approx 37^\circ$,
- 4 pkt — poprawne jednostki i rysunek sił.

Wykaż, że jeżeli w dwóch sąsiednich wierzchołkach kwadratu o boku a umieścimy ładunki $+Q$ i $-Q$, to wartość natężenia pola w środku kwadratu wynosi $\frac{2\sqrt{2}kQ}{a^2}$.

ROZWIĄZANIE

1. Odległość od środka do każdego z wierzchołków: $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, więc $E_1 = E_2 = \frac{2kQ}{a^2}$.
2. Wektor od $+Q$ jest skierowany od tego ładunku, wektor od $-Q$ — do niego; oba tworzą kąt 90° (bo wierzchołki są sąsiednie).
3. $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = E_1\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}kQ}{a^2}$. ■

Odpowiedź: dowód

Wskazówka: Kąt między wektorami wynika z geometrii — narysuj je, zanim zaczniesz liczyć.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie odległości i wartości E_1 , E_2 ,
- 2 pkt — ustalenie kąta między wektorami,
- 3 pkt — dodanie wektorowe,
- 4 pkt — poprawny wynik końcowy.

FZ17 Potencjał, napięcie, praca pola i kondensatory

🔑 $qU = \Delta E_k$; przy v bliskim c licz energię relatywistycznie.

FZ17.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz pracę wykonaną przez pole elektryczne przy przeniesieniu ładunku **2 mC** przez różnicę potencjałów **500 V**.

ROZWIĄZANIE

$$1. W = qU = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 500 = 1 \text{ J.}$$

Odpowiedź: $W = 1 \text{ J}$

FZ17.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Między okładkami kondensatora odległymi o **2 mm** panuje napięcie **60 V**. Oblicz natężenie pola między okładkami.

ROZWIĄZANIE

$$1. E = \frac{U}{d} = \frac{60}{0,002} = 3 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Odpowiedź: $E = 3 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

FZ17.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Kondensator o pojemności **20 μF** naładowano do napięcia **100 V**. Zgromadzona w nim energia wynosi:

A. 0,02 J

B. 0,1 J

C. 0,2 J

D. 2 J

ROZWIĄZANIE

$$1. E = \frac{1}{2} CU^2 = 0,5 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4.$$

$$2. E = 0,1 \text{ J.}$$

Odpowiedź: **B**

Dlaczego nie pozostałe? Energia rośnie z kwadratem napięcia.

FZ17.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Naładowany kondensator odłączono od źródła, a następnie rozsunięto jego okładki. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Ładunek zgromadzony na okładkach nie zmienia się.	P	F
2.	Pojemność kondensatora rośnie.	P	F
3.	Napięcie między okładkami rośnie.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Ładunek na okładkach nie zmienia się — prawda (kondensator jest odłączony).
2. 2. Pojemność kondensatora rośnie — fałsz, $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ maleje przy większym d .
3. 3. Napięcie między okładkami rośnie — prawda ($U = \frac{Q}{C}$).

Odpowiedź: PFP**FZ17.5** OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Proton rozpędzono z spoczynku napięciem 2000 V ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg). Oblicz prędkość protonu (nierelatywistycznie).

ROZWIĄZANIE

$$1. eU = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$
$$2. v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2000}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = \sqrt{3,832 \cdot 10^{11}} \approx 6,19 \cdot 10^5 \frac{m}{s}.$$

Odpowiedź: $v \approx 6,2 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$ **Schemat punktowania:**

- 1 pkt — bilans energii $eU = \frac{1}{2}mv^2$,
- 2 pkt — wynik z jednostką.

FZ17.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Dwa kondensatory o pojemnościach 4 μF i 12 μF połączono szeregowo i podłączono do napięcia 60 V. Oblicz pojemność zastępczą i ładunek zgromadzony na każdym kondensatorze.

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{1}{C} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 3 \mu\text{F}.$$
$$2. \text{Przy połączeniu szeregowym ładunek jest wspólny: } Q = CU = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 60 = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ C} = 180 \mu\text{C}.$$

Odpowiedź: $C = 3 \mu\text{F}$; $Q = 180 \mu\text{C}$ **Schemat punktowania:**

- 1 pkt — wzór na pojemność zastępczą,
- 2 pkt — $C = 3 \mu\text{F}$,
- 3 pkt — ładunek 180 μC (ten sam na obu).

Kondensator płaski ma okładki o powierzchni $0,02 \text{ m}^2$ odległe o 1 mm ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$). Oblicz jego pojemność oraz energię zgromadzoną przy napięciu 200 V .

ROZWIĄZANIE

$$1. C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,02}{10^{-3}} = 1,77 \cdot 10^{-10} \text{ F.}$$

$$2. E = \frac{1}{2} CU^2 = 0,5 \cdot 1,77 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^4 \approx 3,54 \cdot 10^{-6} \text{ J.}$$

Odpowiedź: $C \approx 177 \text{ pF}$; $E \approx 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na pojemność kondensatora płaskiego,
- 2 pkt — obliczenie C ,
- 3 pkt — obliczenie energii.

Elektron wpada równolegle do okładek kondensatora o długości 4 cm z prędkością $2 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Natężenie pola między okładkami wynosi $10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ($e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$). Oblicz odchylenie toru elektronu przy wylocie z kondensatora.

ROZWIĄZANIE

$$1. a = \frac{eE}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4}{9,1 \cdot 10^{-31}} \approx 1,758 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$2. t = \frac{0,04}{2 \cdot 10^7} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s.}$$

$$3. y = \frac{1}{2} at^2 = 0,5 \cdot 1,758 \cdot 10^{15} \cdot 4 \cdot 10^{-18} \approx 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 3,5 \text{ mm.}$$

Odpowiedź: $y \approx 3,5 \text{ mm}$

Wskazówka: To rzut poziomy w polu elektrycznym — ruch jednostajny wzdłuż okładek i jednostajnie zmienny w poprzek.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie przyspieszenia,
- 2 pkt — czas przelotu,
- 3 pkt — zastosowanie wzoru na rzut poziomy,
- 4 pkt — wynik $\approx 3,5 \text{ mm}$.

Oblicz potencjał w punkcie odległym o 30 cm od ładunku $Q_1 = +6 \mu\text{C}$ i o 60 cm od ładunku $Q_2 = -12 \mu\text{C}$ ($k = 9 \cdot 10^9$).

ROZWIĄZANIE

- $V_1 = k \frac{Q_1}{r_1} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{0,3} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ V}.$
- $V_2 = k \frac{Q_2}{r_2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-12 \cdot 10^{-6})}{0,6} = -1,8 \cdot 10^5 \text{ V}.$
- Potencjały dodają się skalarnie: $V = V_1 + V_2 = 0$.

Odpowiedź: $V = 0$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na potencjał ładunku punkowego,
- 2 pkt — obliczenie obu potencjałów ze znakami,
- 3 pkt — dodanie skalarne,
- 4 pkt — wynik $V = 0$ z komentarzem, że natężenie nie jest zerowe.

Kondensator o pojemności C naładowany do napięcia U odłączono od źródła i połączono równolegle z identycznym, nienaładowanym kondensatorem. Wykaż, że energia zgromadzona w układzie zmalała dwukrotnie, i wyjaśnij, gdzie się podziła.

ROZWIĄZANIE

- Ładunek jest zachowany: $Q = CU$ rozkłada się na dwa kondensatory o łącznej pojemności $2C$.
- Nowe napięcie: $U_2 = \frac{Q}{2C} = \frac{U}{2}$.
- $E_1 = \frac{1}{2}CU^2$, $E_2 = \frac{1}{2}(2C)\left(\frac{U}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}CU^2 = \frac{1}{2}E_1$. ■
- Brakująca energia wydzielona się jako ciepło w przewodach (i w postaci promieniowania) podczas przepływu ładunku.

Odpowiedź: $E_2 = \frac{1}{2}E_1$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zauważenie zachowania ładunku,
- 2 pkt — obliczenie nowego napięcia,
- 3 pkt — porównanie energii,
- 4 pkt — wyjaśnienie, gdzie zniknęła energia.

FZ18 Prąd stały: obwody, opór i moc

 Najpierw opór zastępczy, potem prąd główny, dopiero na końcu gałęzie.

FZ18.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz opór zastępczy dwóch oporników $6\ \Omega$ i $3\ \Omega$ połączonych równolegle.

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{1}{R} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2\ \Omega.$$

Odpowiedź: $R = 2\ \Omega$

FZ18.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Przez opornik $20\ \Omega$ płynie prąd $0,5\ \text{A}$. Oblicz moc wydzielaną na oporniku.

ROZWIĄZANIE

$$1. P = I^2 R = 0,25 \cdot 20 = 5\ \text{W}.$$

Odpowiedź: $P = 5\ \text{W}$

FZ18.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Do źródła o stałym napięciu podłączono dwa jednakowe oporniki — raz szeregowo, raz równolegle. Moc pobierana w połączeniu równoległym jest większa od mocy w połączeniu szeregowym:

- A. 2 razy B. 3 razy C. 4 razy D. tyle samo

ROZWIĄZANIE

1. Szeregowo $R_s = 2R$, równolegle $R_r = \frac{R}{2}$ — stosunek oporów wynosi 4.

2. $P = \frac{U^2}{R}$, więc moc jest 4 razy większa.

Odpowiedź: **C**

Dlaczego nie pozostałe? Opór zmienia się czterokrotnie, a moc jest odwrotnie proporcjonalna do oporu.

FZ18.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

W obwodzie opornik R_1 połączono szeregowo z równoległym połączeniem R_2 i R_3 . Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Natężenie prądu płynącego przez R_1 jest równe sumie natężeń prądów przez R_2 i R_3 .	P	F
2.	Napięcie na R_1 jest równe napięciu na R_2 .	P	F
3.	Napięcia na R_2 i R_3 są sobie równe.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Prąd przez R_1 jest równy sumie prądów przez R_2 i R_3 — prawda (I prawo Kirchhoffa).
2. Napięcie na R_1 jest równe napięciu na R_2 — fałsz, R_1 jest w innej gałęzi.
3. Napięcia na R_2 i R_3 są równe — prawda (połączenie równoległe).

Odpowiedź: PFP

FZ18.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Ogniwo o SEM $\varepsilon = 12 \text{ V}$ i oporze wewnętrznym $r = 0,5 \Omega$ zasila opornik $R = 5,5 \Omega$. Oblicz natężenie prądu i napięcie na zaciskach ogniwa.

ROZWIĄZANIE

1. $I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$.
2. $U = \varepsilon - Ir = 12 - 1 = 11 \text{ V}$.

Odpowiedź: $I = 2 \text{ A}$; $U = 11 \text{ V}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie obwodu i obliczenie prądu,
- 2 pkt — napięcie na zaciskach.

FZ18.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Drut wolframowy o średnicy $30 \mu\text{m}$ ma w temperaturze 300 K opór 63Ω . Opór właściwy wolframu wynosi $\rho = 5,6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Oblicz długość drutu.

ROZWIĄZANIE

1. $S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (3 \cdot 10^{-5})^2}{4} \approx 7,069 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$.
2. $l = \frac{RS}{\rho} = \frac{63 \cdot 7,069 \cdot 10^{-10}}{5,6 \cdot 10^{-8}} \approx 0,795 \text{ m}$.

Odpowiedź: $l \approx 0,8 \text{ m}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie pola przekroju ze średnicy,
- 2 pkt — przekształcenie wzoru na opór,
- 3 pkt — wynik $\approx 0,8 \text{ m}$.

FZ18.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Trzy oporniki $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 12 \Omega$ połączono: R_1 szeregowo z równoległym połączeniem R_2 i R_3 . Do obwodu przyłożono napięcie 16 V . Oblicz prąd płynący przez każdy opornik.

ROZWIĄZANIE

$$1. R_{23} = \frac{6 \cdot 12}{18} = 4 \Omega, R_z = 8 \Omega.$$

$$2. I_1 = \frac{16}{8} = 2 \text{ A}.$$

$$3. U_{23} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ V, więc } I_2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1,33 \text{ A, } I_3 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \approx 0,67 \text{ A}.$$

Odpowiedź: $I_1 = 2 \text{ A}$; $I_2 = \frac{4}{3} \text{ A}$; $I_3 = \frac{2}{3} \text{ A}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — opór zastępczy,
- 2 pkt — prąd główny,
- 3 pkt — prądy w gałęziach (suma zgodna z I_1).

FZ18.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

W obwodzie z poprzedniego zadania przerwano gałąź z opornikiem R_3 . Oblicz nowe natężenie prądu głównego oraz iloraz $\frac{I_2}{I_1}$ wskazań amperomierza po i przed przerwaniem.

ROZWIĄZANIE

$$1. \text{ Po przerwaniu: } R_z = R_1 + R_2 = 10 \Omega.$$

$$2. I = \frac{16}{10} = 1,6 \text{ A}.$$

$$3. \frac{1,6}{2} = 0,8 \text{ — prąd zmalał, bo opór zastępczy wzrósł.}$$

Odpowiedź: $I = 1,6 \text{ A}$; iloraz = $0,8$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — nowy opór zastępczy,
- 2 pkt — nowy prąd,
- 3 pkt — iloraz $0,8$,
- 4 pkt — uzasadnienie kierunku zmiany.

Grzałka o mocy **2000 W** podgrzewa **2** litry wody od **20°C** do **100°C** ($c_w = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$). Oblicz czas grzania przy sprawności **80%**.

ROZWIĄZANIE

1. $Q = mc\Delta T = 2 \cdot 4200 \cdot 80 = 672\,000 \text{ J}$.
2. Moc użyteczna: $P_u = 0,8 \cdot 2000 = 1600 \text{ W}$.
3. $t = \frac{672000}{1600} = 420 \text{ s} = 7 \text{ min}$.

Odpowiedź: $t = 420 \text{ s} = 7 \text{ min}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie ciepła potrzebnego do ogrzania wody,
- 2 pkt — uwzględnienie sprawności,
- 3 pkt — obliczenie czasu,
- 4 pkt — zamiana na minuty.

Dwie żarówki o mocach nominalnych **40 W** i **100 W** (obie na **230 V**) połączono szeregowo i podłączono do napięcia **230 V**. Wykaż, że jaśniej świeci żarówka o mniejszej mocy nominalnej.

ROZWIĄZANIE

1. Opory: $R_{40} = \frac{230^2}{40} \approx 1322 \, \Omega$, $R_{100} = \frac{230^2}{100} \approx 529 \, \Omega$.
2. W połączeniu szeregowym prąd jest wspólny, a moc $P = I^2 R$.
3. Zatem większą moc wydziela większy opór, czyli żarówka **40 W**. ■
4. Liczbowo: $I = \frac{230}{1851} \approx 0,124 \text{ A}$, $P_{40} \approx 20,4 \text{ W}$, $P_{100} \approx 8,2 \text{ W}$.

Odpowiedź: jaśniej świeci żarówka **40 W**

Wskazówka: Nominalna moc dotyczy pracy przy **230 V** — w innym obwodzie wszystko się zmienia.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie oporów obu żarówek,
- 2 pkt — zauważenie wspólnego prądu,
- 3 pkt — zastosowanie $P = I^2 R$,
- 4 pkt — wniosek z uzasadnieniem.

FZ19 Pole magnetyczne: siła Lorentza i elektrodynamiczna

🔑 $qvB = \frac{mv^2}{r}$; w okresie prędkość się skraca.

FZ19.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz siłę działającą na elektron poruszający się prostopadle do pola magnetycznego o indukcji **0,2 T** z prędkością $10^6 \frac{m}{s}$ ($e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$).

ROZWIĄZANIE

$$1. F = evB = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \cdot 0,2 = 3,2 \cdot 10^{-14} N.$$

Odpowiedź: $F = 3,2 \cdot 10^{-14} N$

FZ19.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Przewodnik o długości **0,5 m**, przez który płynie prąd **4 A**, umieszczono prostopadle do pola o indukcji **0,3 T**. Oblicz siłę elektrodynamiczną.

ROZWIĄZANIE

$$1. F = BIl = 0,3 \cdot 4 \cdot 0,5 = 0,6 N.$$

Odpowiedź: $F = 0,6 N$

FZ19.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

W odległości r_1 od prostoliniowego przewodnika indukcja pola wynosi B_1 . W odległości $r_2 = 4r_1$ indukcja wynosi:

A. $\frac{B_1}{2}$

B. $\frac{B_1}{4}$

C. $\frac{B_1}{8}$

D. $\frac{B_1}{16}$

ROZWIĄZANIE

$$1. B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ więc } B \propto \frac{1}{r}.$$

$$2. B_2 = \frac{B_1}{4}.$$

Odpowiedź: **B**

Dlaczego nie pozostałe? To pole przewodnika, a nie ładunku punktowego — maleje jak $\frac{1}{r}$.

FZ19.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Naładowana cząstka porusza się po okręgu w jednorodnym polu magnetycznym. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Siła Lorentza wykonuje pracę nad cząstką.	P	F
2.	Wartość prędkości cząstki jest stała.	P	F
3.	Okres obiegu cząstki nie zależy od wartości jej prędkości.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Siła Lorentza wykonuje pracę — fałsz, jest prostopadła do prędkości.
2. Wartość prędkości cząstki jest stała — prawda.
3. Okres obiegu nie zależy od prędkości cząstki — prawda.

Odpowiedź: FPP

FZ19.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Proton o prędkości $2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ wpada prostopadle do pola magnetycznego o indukcji $0,5 \text{ T}$ ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$). Oblicz promień toru.

ROZWIĄZANIE

$$1. r = \frac{mv}{eB} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5}.$$

$$2. r = \frac{3,34 \cdot 10^{-21}}{8 \cdot 10^{-20}} \approx 0,0418 \text{ m} \approx 4,2 \text{ cm}.$$

Odpowiedź: $r \approx 4,2 \text{ cm}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na promień toru,
- 2 pkt — wynik z jednostką.

FZ19.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Wykaż, że wartość prędkości cząstki naładowanej poruszającej się w jednorodnym polu magnetycznym jest stała, powołując się na własności siły Lorentza.

ROZWIĄZANIE

1. Siła Lorentza jest w każdej chwili prostopadła do wektora prędkości.
2. Praca siły prostopadłej do przemieszczenia jest zerowa: $W = F s \cos 90^\circ = 0$.
3. Z twierdzenia o pracy i energii kinetycznej: $\Delta E_k = W = 0$, więc $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ jest stała.
4. Skoro masa się nie zmienia, wartość prędkości też jest stała. ■

Odpowiedź: dowód

Schemat punktowania:

- 1 pkt — stwierdzenie prostopadłości siły do prędkości,
- 2 pkt — wniosek o zerowej pracy,
- 3 pkt — powołanie się na twierdzenie o pracy i energii kinetycznej.

FZ19.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Elektron przyspieszony napięciem **1000 V** wpada prostopadłe do pola magnetycznego o indukcji **2 mT** ($m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C). Oblicz promień jego toru.

ROZWIĄZANIE

$$1. eU = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1000}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \approx 1,875 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$2. r = \frac{mv}{eB} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,875 \cdot 10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \approx 0,0534 \text{ m}.$$

Odpowiedź: $r \approx 5,3 \text{ cm}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie prędkości z napięcia przyspieszającego,
- 2 pkt — wzór na promień,
- 3 pkt — wynik $\approx 5,3 \text{ cm}$.

FZ19.8 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Proton porusza się po dwóch kolejnych półokręgach o promieniach $r_1 = 10 \text{ cm}$ i $r_2 = 20 \text{ cm}$, z tą samą prędkością. Oblicz stosunek indukcji pól magnetycznych $\frac{B_1}{B_2}$ na tych półokręgach.

ROZWIĄZANIE

$$1. r = \frac{mv}{qB}, \text{ więc przy tej samej prędkości } B \propto \frac{1}{r}.$$

$$2. \frac{B_1}{B_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{20}{10} = 2.$$

Odpowiedź: $\frac{B_1}{B_2} = 2$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na promień toru,
- 2 pkt — zauważenie odwrotnej proporcjonalności,
- 3 pkt — wynik **2**.

FZ19.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Przez dwa równoległe przewody oddległe o **10 cm** płyną prądy **5 A** i **8 A** w tę samą stronę ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$). Oblicz siłę działającą na **1 m** długości jednego z przewodników i podaj, czy jest to przyciąganie, czy odpychanie.

ROZWIĄZANIE

1. Pole od pierwszego przewodnika: $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi \cdot 0,1} = 10^{-5} \text{ T}$.
2. $F = BI_2 l = 10^{-5} \cdot 8 \cdot 1 = 8 \cdot 10^{-5} \text{ N}$.
3. Prądy o zgodnych zwrotach — przewody się przyciągają.

Odpowiedź: $F = 8 \cdot 10^{-5} \text{ N}$; przyciąganie

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie indukcji pola od pierwszego przewodnika,
- 2 pkt — zastosowanie wzoru na siłę elektrodynamiczną,
- 3 pkt — wynik liczbowy,
- 4 pkt — określenie charakteru oddziaływania.

FZ19.10 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Wykaż, że okres obiegu naładowanej cząstki w jednorodnym polu magnetycznym nie zależy od jej prędkości, i wyjaśnij, dlaczego ta własność umożliwia działanie cyklotronu.

ROZWIĄZANIE

1. $qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$.
2. $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v} \cdot \frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$ — prędkość się skraca. ■
3. Dzięki temu cząstka wraca do szczeliny przyspieszającej zawsze po tym samym czasie, więc napięcie zmienne o stałej częstotliwości może ją rozpędzać w każdym półobiegu.

Odpowiedź: $T = \frac{2\pi m}{qB}$

Wskazówka: Ta niezależność przestaje obowiązywać przy prędkościach relatywistycznych — stąd synchrotron.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — przyrównanie sił i wyznaczenie promienia,
- 2 pkt — wyprowadzenie wzoru na okres,
- 3 pkt — jawne wskazanie, że v się skraca,
- 4 pkt — wyjaśnienie działania cyklotronu.

FZ20 Indukcja elektromagnetyczna i prąd przemienny

🔑 Moc średnia z wartości skutecznych: $P = \frac{U_0^2}{2R}$.

FZ20.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Strumień magnetyczny przez ramkę zmalał z **0,8 Wb** do **0,2 Wb** w czasie **0,3 s**. Oblicz wartość SEM indukcji.

ROZWIĄZANIE

$$1. |\varepsilon| = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} = \frac{0,6}{0,3} = 2 \text{ V.}$$

Odpowiedź: $\varepsilon = 2 \text{ V}$

FZ20.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Napięcie w sieci ma wartość skuteczną **230 V**. Oblicz amplitudę tego napięcia.

ROZWIĄZANIE

$$1. U_0 = U_{sk}\sqrt{2} = 230 \cdot 1,414 \approx 325 \text{ V.}$$

Odpowiedź: $U_0 \approx 325 \text{ V}$

FZ20.3 ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Transformator ma **1000** zwojów w uzwojeniu pierwotnym i **50** w wtórnym. Przy napięciu **230 V** na wejściu napięcie wyjściowe wynosi:

A. 11,5 V

B. 23 V

C. 4600 V

D. 230 V

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow U_2 = 230 \cdot \frac{50}{1000}.$$

$$2. U_2 = 11,5 \text{ V.}$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? To transformator obniżający napięcie.

FZ20.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Magnes zbliża się biegunem północnym do nieruchomej, zamkniętej pętli przewodzącej. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	W pętli płynie prąd indukcyjny.	P	F
2.	Prąd indukcyjny płynie w takim kierunku, że pętla odpycha zbliżający się magnes.	P	F
3.	Po zatrzymaniu magnesu przed pętlą prąd indukcyjny nadal płynie.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. W pętli płynie prąd indukcyjny — prawda, strumień się zmienia.
2. Prąd płynie tak, by odpychać magnes — prawda (reguła Lenza).
3. Po zatrzymaniu magnesu prąd nadal płynie — fałsz, brak zmiany strumienia.

Odpowiedź: PPF

FZ20.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Ramka o powierzchni $0,02 \text{ m}^2$ znajduje się w polu o indukcji $0,5 \text{ T}$ prostopadłym do jej płaszczyzny. Ramkę obrócono o 90° w czasie $0,1 \text{ s}$. Oblicz średnią SEM indukcji.

ROZWIĄZANIE

1. $\Phi_1 = BS = 0,5 \cdot 0,02 = 0,01 \text{ Wb}$, $\Phi_2 = 0$ (płaszczyzna równoległa do $\vec{B}$).
2. $|\epsilon| = \frac{0,01}{0,1} = 0,1 \text{ V}$.

Odpowiedź: $\epsilon = 0,1 \text{ V}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie zmiany strumienia,
- 2 pkt — wynik $0,1 \text{ V}$.

FZ20.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Napięcie w obwodzie prądu przemiennego ma postać $U(t) = 20 \text{ V} \cdot \sin\left(314 \frac{1}{s} \cdot t\right)$, a opór obwodu wynosi 50Ω . Oblicz częstotliwość prądu i średnią moc wydzielaną na oporniku.

ROZWIĄZANIE

1. $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{6,283} \approx 50 \text{ Hz}$.
2. $P = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{400}{100} = 4 \text{ W}$.

Odpowiedź: $f \approx 50 \text{ Hz}$; $P = 4 \text{ W}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie częstotliwości,
- 2 pkt — wzór na moc średnią,
- 3 pkt — wynik 4 W .

Pręt o długości $0,4$ m przesuwa się z prędkością $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ prostopadle do pola o indukcji $0,25$ T, zwierając obwód o oporze 2Ω . Oblicz SEM indukcji, natężenie prądu i moc wydzielaną w obwodzie.

ROZWIĄZANIE

$$1. \varepsilon = Blv = 0,25 \cdot 0,4 \cdot 3 = 0,3 \text{ V.}$$

$$2. I = \frac{0,3}{2} = 0,15 \text{ A.}$$

$$3. P = \varepsilon I = 0,3 \cdot 0,15 = 0,045 \text{ W.}$$

Odpowiedź: $\varepsilon = 0,3 \text{ V}$; $I = 0,15 \text{ A}$; $P = 0,045 \text{ W}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór $\varepsilon = Blv$,
- 2 pkt — natężenie prądu,
- 3 pkt — moc.

Transformator obniża napięcie z 230 V do 12 V. Uzwojenie pierwotne ma 1150 zwojów, a sprawność transformatora wynosi 100% . Oblicz liczbę zwojów uzwojenia wtórnego oraz prąd w uzwojeniu pierwotnym, gdy w obwodzie wtórnym płynie prąd 2 A.

ROZWIĄZANIE

$$1. n_2 = n_1 \frac{U_2}{U_1} = 1150 \cdot \frac{12}{230} = 60.$$

$$2. \text{Moc się nie zmienia: } U_1 I_1 = U_2 I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{12 \cdot 2}{230} \approx 0,104 \text{ A.}$$

Odpowiedź: $n_2 = 60$; $I_1 \approx 0,104 \text{ A}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie transformatora,
- 2 pkt — $n_2 = 60$,
- 3 pkt — bilans mocy,
- 4 pkt — $I_1 \approx 0,10 \text{ A}$.

FZ20.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Ramka o **200** zwojach i powierzchni **$0,01 \text{ m}^2$** obraca się w polu o indukcji **$0,4 \text{ T}$** z częstotliwością **50 Hz** . Oblicz amplitudę SEM indukowanej w ramce.

ROZWIĄZANIE

1. $\varepsilon_0 = NBS\omega$, gdzie $\omega = 2\pi f = 314 \frac{1}{s}$.
2. $\varepsilon_0 = 200 \cdot 0,4 \cdot 0,01 \cdot 314 \approx 251 \text{ V}$.

Odpowiedź: $\varepsilon_0 \approx 251 \text{ V}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na amplitudę SEM,
- 2 pkt — obliczenie ω ,
- 3 pkt — podstawienie danych,
- 4 pkt — wynik $\approx 251 \text{ V}$.

FZ20.10 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Wykaż, że reguła Lenza jest konsekwencją zasady zachowania energii, rozważając magnes zbliżany do zamkniętej pętli przewodzącej.

ROZWIĄZANIE

1. Załóżmy przeciwnie: prąd indukcyjny płynie tak, że pętla **przyciąga** zbliżający się magnes.
2. Wtedy magnes byłby przyspieszany, co zwiększałoby zmianę strumienia i prąd — a ten przyspieszałby magnes jeszcze bardziej.
3. Układ samoczynnie zwiększałby swoją energię kinetyczną i elektryczną bez dostarczania energii z zewnątrz — sprzeczność z zasadą zachowania energii.
4. Zatem prąd musi płynąć tak, by przeciwdziałać zmianie: pętla odpycha zbliżający się magnes, a energia elektryczna pochodzi z pracy wykonanej przeciw tej sile. ■

Odpowiedź: dowód

Wskazówka: CKE lubi to rozumowanie — kluczowe jest zdanie o źródle energii prądu indukcyjnego.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — przyjęcie założenia przeciwnego,
- 2 pkt — wskazanie samowzmacniającego się procesu,
- 3 pkt — wskazanie sprzeczności z zasadą zachowania energii,
- 4 pkt — wniosek i wskazanie źródła energii prądu indukcyjnego.

FZ21 Optyka geometryczna: załamanie i soczewki

🔑 Kąty od normalnej; w soczewce $x + y = d$ i $y = px$.

FZ21.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz prędkość światła w szkle o współczynniku załamania $n = 1,5$ ($c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$).

ROZWIĄZANIE

$$1. v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odpowiedź: $v = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

FZ21.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz kąt graniczny dla granicy szkło ($n = 1,5$) – powietrze ($n = 1$).

ROZWIĄZANIE

$$1. \sin \alpha_{gr} = \frac{1}{1,5} = 0,667 \Rightarrow \alpha_{gr} \approx 41,8^\circ.$$

Odpowiedź: $\alpha_{gr} \approx 41,8^\circ$

FZ21.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Przedmiot umieszczono w odległości **30** cm od soczewki skupiającej o ogniskowej **10** cm. Obraz powstanie w odległości:

A. 15 cm

B. 20 cm

C. 30 cm

D. 7,5 cm

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{1}{y} = \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{3-1}{30} = \frac{2}{30}.$$

$$2. y = 15 \text{ cm}.$$

Odpowiedź: **A**

Dlaczego nie pozostałe? Równanie soczewki z $x = 30$ cm i $f = 10$ cm.

Promień światła przechodzi z powietrza do wody. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Kąt załamania jest mniejszy od kąta padania.	P	F
2.	Częstotliwość światła maleje.	P	F
3.	Długość fali świetlnej maleje.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Kąt załamania jest mniejszy od kąta padania — prawda (woda jest gęstsza optycznie).
2. Częstotliwość światła maleje — fałsz, nie zmienia się.
3. Długość fali świetlnej maleje — prawda ($\lambda = \frac{v}{f}$, a v maleje).

Odpowiedź: PFP

Promień pada z powietrza na szkło pod kątem 60° i załamuje się pod kątem 35° . Oblicz współczynnik załamania szkła i prędkość światła w tym szkłe.

ROZWIĄZANIE

$$1. n = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 35^\circ} = \frac{0,866}{0,574} \approx 1,51.$$

$$2. v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,51} \approx 1,99 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Odpowiedź: $n \approx 1,51$; $v \approx 1,99 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zastosowanie prawa Snella,
- 2 pkt — obliczenie n i prędkości.

Przedmiot o wysokości 2 cm umieszczono 15 cm przed soczewką skupiającą o ogniskowej 10 cm. Oblicz położenie, powiększenie i wysokość obrazu.

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{1}{y} = \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{3-2}{30} = \frac{1}{30} \Rightarrow y = 30 \text{ cm.}$$

$$2. p = \frac{y}{x} = \frac{30}{15} = 2.$$

$$3. h' = 2 \cdot 2 = 4 \text{ cm (obraz rzeczywisty, odwrócony).}$$

Odpowiedź: $y = 30 \text{ cm}$; $p = 2$; $h' = 4 \text{ cm}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie soczewki,
- 2 pkt — $y = 30 \text{ cm}$,
- 3 pkt — powiększenie i wysokość obrazu.

Dioda umieszczona tuż pod powierzchnią szklanej kuli ($n = 1,50$) świeci we wszystkich kierunkach do jej wnętrza. Oblicz kąt graniczny dla granicy szkło–powietrze oraz wyjaśnij, dlaczego światło wychodzi tylko przez fragment powierzchni kuli.

ROZWIĄZANIE

1. $\sin \alpha_{gr} = \frac{n_{pow}}{n_{sz}} = \frac{1}{1,5} \Rightarrow \alpha_{gr} \approx 41,8^\circ$.

2. Promienie padające na powierzchnię kuli pod kątem większym od granicznego ulegają całkowitemu wewnętrznemu odbiciu i wracają do wnętrza.

3. Dlatego na zewnątrz wychodzą tylko promienie trafiające w ograniczony obszar (łuk) powierzchni.

Odpowiedź: $\alpha_{gr} \approx 41,8^\circ$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na kąt graniczny,
- 2 pkt — obliczenie $\approx 41,8^\circ$,
- 3 pkt — wyjaśnienie z całkowitym wewnętrznym odbiciem.

Kulę szklaną z poprzedniego zadania zanurzano w wodzie ($n_w = 1,33$). Ustal, czy kąt graniczny wzrośnie, czy zmaleje, i czy pole powierzchni, przez którą wychodzi światło, się zwiększy, czy zmniejszy. Odpowiedź uzasadnij rachunkiem.

ROZWIĄZANIE

1. W wodzie: $\sin \alpha_{gr} = \frac{1,33}{1,50} = 0,8867 \Rightarrow \alpha_{gr} \approx 62,5^\circ$.

2. Kąt graniczny wzrósł (z $41,8^\circ$), bo różnica współczynników jest mniejsza.

3. Więcej promieni spełnia warunek wyjścia, więc pole powierzchni, przez którą wychodzi światło, się zwiększy.

Odpowiedź: kąt graniczny wzrośnie do $\approx 62,5^\circ$, pole się zwiększy

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie nowego kąta granicznego,
- 2 pkt — porównanie z poprzednim wynikiem,
- 3 pkt — wniosek o zwiększeniu pola powierzchni.

Dwie soczewki skupiające o ogniskowych $f_1 = 15$ cm i $f_2 = 40$ cm ustawiono tak, że mają wspólne ognisko. Na pierwszą pada wiązka równoległa do osi o szerokości $d_1 = 2,25$ mm. Oblicz szerokość wiązki wychodzącej z drugiej soczewki.

ROZWIĄZANIE

1. Wiązka równoległa skupia się w ognisku pierwszej soczewki, a następnie rozbiega się do drugiej i wychodzi znów równoległa.
2. Z podobieństwa trójkątów: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{f_2}{f_1}$.
3. $d_2 = 2,25 \cdot \frac{40}{15} = 6$ mm.

Odpowiedź: $d_2 = 6$ mm

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zauważenie, że wiązka wychodzi równoległa,
- 2 pkt — wykorzystanie podobieństwa trójkątów,
- 3 pkt — zapisanie proporcji $\frac{d_2}{d_1} = \frac{f_2}{f_1}$,
- 4 pkt — wynik 6 mm.

Wykaż, że dla ustalonej odległości d przedmiotu od ekranu istnieją dwa położenia soczewki skupiającej dające ostry obraz (gdy $d > 4f$), i podaj związek między powiększeniami w tych położeniach.

ROZWIĄZANIE

1. Z $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}$ otrzymujemy $x^2 - dx + fd = 0$.
2. $\Delta = d^2 - 4fd = d(d - 4f) > 0$ dla $d > 4f$, więc są dwa różne rozwiązania x_1, x_2 .
3. Z wzorów Viète'a $x_1 + x_2 = d$, zatem $x_2 = d - x_1 = y_1$ — położenia są „zamienione”.
4. Stąd $p_1 = \frac{y_1}{x_1}$ oraz $p_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{p_1}$, czyli $p_1 p_2 = 1$. ■

Odpowiedź: $p_1 p_2 = 1$

Wskazówka: To metoda Bessela wyznaczania ogniskowej — w 2022 r. CKE pytała dokładnie o drugie położenie.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — sprowadzenie do równania kwadratowego,
- 2 pkt — warunek $\Delta > 0$ i $d > 4f$,
- 3 pkt — zauważenie symetrii $x \leftrightarrow y$,
- 4 pkt — wykazanie $p_1 p_2 = 1$.

FZ22 Optyka falowa: interferencja, dyfrakcja, polaryzacja

🔑 Najpierw połowa, potem $\cos^2$; amplituda to pierwiastek z natężenia.

FZ22.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Światło niespolaryzowane o natężeniu I przechodzi przez polaryzator. Podaj natężenie światła po polaryzatorze.

ROZWIĄZANIE

1. Polaryzator przepuszcza średnio połowę natężenia światła niespolaryzowanego: $I_1 = \frac{1}{2}I$.

Odpowiedź: $I_1 = \frac{1}{2}I$

FZ22.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Siatka dyfrakcyjna ma 500 rys na milimetr. Oblicz jej stałą.

ROZWIĄZANIE

$$1. d = \frac{10^{-3} \text{ m}}{500} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

Odpowiedź: $d = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

FZ22.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Dwa polaryzatory ustawiono pod kątem 60° . Światło spolaryzowane o natężeniu I_1 pada na drugi z nich. Natężenie po przejściu wynosi:

A. $0,87I_1$

B. $0,5I_1$

C. $0,25I_1$

D. 0

ROZWIĄZANIE

$$1. I_2 = I_1 \cos^2 60^\circ = I_1 \cdot 0,25.$$

Odpowiedź: C

Dlaczego nie pozostałe? Prawo Malusa z $\cos 60^\circ = 0,5$.

FZ22.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Rozważamy zjawiska falowe światła. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Zjawisko polaryzacji dowodzi poprzeczności fal świetlnych.	P	F
2.	Interferencja i dyfrakcja świadczą o falowej naturze światła.	P	F
3.	Falę dźwiękową rozchodzącą się w powietrzu można spolaryzować.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. 1. Polaryzacja dowodzi, że światło jest falą poprzeczną — prawda.

2. 2. Interferencja i dyfrakcja są dowodami falowej natury światła — prawda.

3. 3. Fale dźwiękowe w powietrzu można spolaryzować — fałsz, są podłużne.

Odpowiedź: PPF

FZ22.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

W doświadczeniu Younga szczeliny są odległe o **0,2 mm**, a ekran znajduje się **2 m** od nich. Odległość sąsiednich jasnych prążków wynosi **6 mm**. Oblicz długość fali światła.

ROZWIĄZANIE

$$1. x = \frac{\lambda L}{d} \Rightarrow \lambda = \frac{x d}{L}.$$

$$2. \lambda = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}.$$

Odpowiedź: $\lambda = 600 \text{ nm}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — przekształcenie wzoru,
- 2 pkt — wynik **600 nm**.

FZ22.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Na siatkę dyfrakcyjną o stałej **2 μm** pada prostopadle światło o długości **500 nm**. Oblicz kąt ugięcia w pierwszym rzędzie oraz liczbę widocznych rzędów.

ROZWIĄZANIE

$$1. \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{d} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-6}} = 0,25 \Rightarrow \theta_1 \approx 14,48^\circ.$$

$$2. \text{Warunek } \sin \theta \leq 1 \text{ daje } k \leq \frac{d}{\lambda} = 4.$$

$$3. \text{Widoczne są rzędy } k = 1, 2, 3 \text{ oraz } k = 4 \text{ (dla } k = 4 \text{ dokładnie } \sin \theta = 1 \text{ — teoretycznie na granicy)}.$$

Odpowiedź: $\theta_1 \approx 14,5^\circ$; 4 rzędy po każdej stronie

Schemat punktowania:

- 1 pkt — równanie siatki dyfrakcyjnej,
- 2 pkt — kąt $\approx 14,5^\circ$,
- 3 pkt — ustalenie liczby rzędów z warunku $\sin \theta \leq 1$.

FZ22.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Światło niespolaryzowane o natężeniu **I_0** przechodzi przez dwa polaryzatory o osiach pod kątem **30°** . Oblicz natężenie światła po drugim polaryzatorze.

ROZWIĄZANIE

$$1. I_1 = \frac{1}{2} I_0.$$

$$2. I_2 = I_1 \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} I_0 \cdot 0,75 = 0,375 I_0.$$

Odpowiedź: $I_2 = 0,375 I_0$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — natężenie po pierwszym polaryzatorze,
- 2 pkt — prawo Malusa,
- 3 pkt — wynik **$0,375 I_0$** .

Trzy polaryzatory ustawiono kolejno: drugi pod kątem 45° do pierwszego, trzeci pod kątem 90° do pierwszego. Na układ pada światło niespolaryzowane o natężeniu I_0 . Oblicz natężenie po trzecim polaryzatorze i wyjaśnij, dlaczego usunięcie środkowego polaryzatora wygasza światło.

ROZWIĄZANIE

1. $I_1 = \frac{1}{2} I_0$; $I_2 = I_1 \cos^2 45^\circ = \frac{1}{4} I_0$.
2. Trzeci jest pod kątem 45° do drugiego: $I_3 = I_2 \cos^2 45^\circ = \frac{1}{8} I_0 = 0,125 I_0$.
3. Bez środkowego polaryzatora kąt między pierwszym a trzecim wynosi 90° , a $\cos^2 90^\circ = 0$ — światło zostaje całkowicie wygaszone.

Odpowiedź: $I_3 = 0,125 I_0$

Wskazówka: Ten „paradoks trzech polaryzatorów” to klasyczne pytanie o zrozumienie prawa Malusa.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — natężenie po pierwszym polaryzatorze,
- 2 pkt — dwukrotne zastosowanie prawa Malusa,
- 3 pkt — wynik $0,125 I_0$,
- 4 pkt — wyjaśnienie roli środkowego polaryzatora.

W doświadczeniu Younga użyto światła o długości 600 nm, a szczeliny odległe są o $0,25$ mm. Oblicz odległość między środkiem ekranu a trzecim jasnym prążkiem, jeżeli ekran jest oddalony o $1,5$ m.

ROZWIĄZANIE

1. $x_k = k \frac{\lambda L}{d}$.
2. $x_3 = 3 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-7} \cdot 1,5}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 3 \cdot 3,6 \cdot 10^{-3} = 1,08 \cdot 10^{-2}$ m.
3. $x_3 = 10,8$ mm.

Odpowiedź: $x_3 = 10,8$ mm

Schemat punktowania:

- 1 pkt — wzór na położenie prążka,
- 2 pkt — obliczenie odległości prążków,
- 3 pkt — uwzględnienie rzędu $k = 3$,
- 4 pkt — wynik $10,8$ mm.

Wykaż, że jeżeli natężenie światła po polaryzatorze zmalało dwukrotnie, to amplituda natężenia pola elektrycznego zmalała $\sqrt{2}$ razy, i podaj kąt między osiami polaryzatorów, dla którego tak się dzieje (światło padające jest spolaryzowane).

ROZWIĄZANIE

1. $I \propto E^2$, więc $\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

2. Stąd $\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, czyli amplituda maleje $\sqrt{2}$ razy. ■

3. Z prawa Malusa: $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Odpowiedź: $\alpha = 45^\circ$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — związek $I \propto E^2$,
- 2 pkt — wyznaczenie stosunku amplitud,
- 3 pkt — zastosowanie prawa Malusa,
- 4 pkt — wynik $\alpha = 45^\circ$.

FZ23 Szczególna teoria względności

$$\text{🔑 } E = E_0 + E_k, \gamma = \frac{E}{E_0}, \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}.$$

FZ23.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz czynnik Lorentza dla cząstki poruszającej się z prędkością $v = 0,6c$.

ROZWIĄZANIE

$$1. \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,36}} = \frac{1}{0,8} = 1,25.$$

Odpowiedź: $\gamma = 1,25$

FZ23.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz energię spoczynkową elektronu o masie $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ($c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Wynik podaj w dżulach.

ROZWIĄZANIE

$$1. E_0 = mc^2 = 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} \approx 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}.$$

Odpowiedź: $E_0 \approx 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}$

FZ23.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Sonda oddalająca się od Ziemi z prędkością v wysyła falę elektromagnetyczną. Prędkość tej fali zmierzona na Ziemi jest równa:

A. $c - v$

B. c

C. $c + v$

D. zależy od kierunku obserwacji

ROZWIĄZANIE

1. Zgodnie z drugim postulatem STW prędkość światła w próżni nie zależy od ruchu źródła.

Odpowiedź: **B**

Dlaczego nie pozostałe? Zmienia się częstotliwość (efekt Dopplera), ale nie prędkość fali.

Rakieta porusza się względem Ziemi z prędkością bliską c . Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Obserwator na Ziemi stwierdzi, że zegar w rakiecie chodzi wolniej niż jego własny.	P	F
2.	Zmierzona z Ziemi długość rakiety jest mniejsza od jej długości spoczynkowej.	P	F
3.	Astronauta stwierdzi, że jego własny zegar chodzi wolniej.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Obserwator na Ziemi stwierdzi, że zegar w rakiecie chodzi wolniej — prawda.
2. Obserwator na Ziemi zmierzy mniejszą długość rakiety niż jej długość spoczynkowa — prawda.
3. Astronauta w rakiecie stwierdzi, że jego własny zegar chodzi wolniej — fałsz, jego zegar chodzi normalnie.

Odpowiedź: PPF

Cząstka porusza się z prędkością $v = \frac{1}{2}c$, a jej energia kinetyczna wynosi $E_k = 79,05$ keV. Oblicz energię spoczynkową tej cząstki.

ROZWIĄZANIE

1. $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,25}} = \frac{1}{\sqrt{0,75}} \approx 1,1547$.
2. $E_k = (\gamma - 1)E_0 \Rightarrow E_0 = \frac{79,05}{0,1547} \approx 511$ keV (to elektron).

Odpowiedź: $E_0 \approx 511$ keV

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie γ ,
- 2 pkt — wynik ≈ 511 keV.

Elektron rozpędzono do prędkości $v = 2,00 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ ($c = 3,00 \cdot 10^8$). Oblicz iloraz energii całkowitej do spoczynkowej oraz energię kinetyczną elektronu w keV ($E_0 = 511$ keV).

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{v}{c} = \frac{2}{3}$, więc $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{0,5556}} \approx 1,342$.
2. $\frac{E}{E_0} = \gamma \approx 1,34$.
3. $E_k = (\gamma - 1)E_0 = 0,342 \cdot 511 \approx 175$ keV.

Odpowiedź: $\frac{E}{E_0} \approx 1,34$; $E_k \approx 175$ keV

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie $\frac{v}{c}$ i γ ,
- 2 pkt — iloraz energii,
- 3 pkt — energia kinetyczna ≈ 175 keV.

Mion powstaje w górnych warstwach atmosfery i żyje średnio $2,2 \mu\text{s}$ w swoim układzie. Porusza się z prędkością $0,98c$. Oblicz, jak długo żyje w układzie związanym z Ziemią i jaką drogę przebywa.

ROZWIĄZANIE

1. $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,9604}} = \frac{1}{0,199} \approx 5,025$.
2. $\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 5,025 \cdot 2,2 \approx 11,1 \mu\text{s}$.
3. $s = v \Delta t = 0,98 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,11 \cdot 10^{-5} \approx 3,25 \cdot 10^3 \text{ m}$.

Odpowiedź: $\Delta t \approx 11,1 \mu\text{s}$; $s \approx 3,3 \text{ km}$

Wskazówka: To klasyczny eksperymentalny dowód dylatacji czasu.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie γ ,
- 2 pkt — dylatacja czasu,
- 3 pkt — droga $\approx 3,3 \text{ km}$.

Proton ma energię kinetyczną równą jego energii spoczynkowej ($E_0 = 938 \text{ MeV}$). Oblicz iloraz $\frac{v}{c}$ dla tego protonu.

ROZWIĄZANIE

1. $E = E_0 + E_k = 2E_0$, więc $\gamma = 2$.
2. $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$.

Odpowiedź: $\frac{v}{c} \approx 0,866$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zauważenie, że $\gamma = 2$,
- 2 pkt — wzór na $\frac{v}{c}$,
- 3 pkt — wynik $\approx 0,87$.

Rakieta o długości spoczynkowej **120 m** porusza się względem Ziemi z prędkością **$0,8c$** . Oblicz jej długość zmierzoną z Ziemi oraz czas, jaki według obserwatora na Ziemi zajmie jej przelot obok punktu pomiarowego.

ROZWIĄZANIE

$$1. \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,64}} = \frac{1}{0,6} \approx 1,667.$$

$$2. l = \frac{l_0}{\gamma} = \frac{120}{1,667} = 72 \text{ m}.$$

$$3. t = \frac{l}{v} = \frac{72}{0,8 \cdot 3 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 0,3 \mu\text{s}.$$

Odpowiedź: $l = 72 \text{ m}$; $t = 0,3 \mu\text{s}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie γ ,
- 2 pkt — skrócenie długości,
- 3 pkt — obliczenie czasu przelotu,
- 4 pkt — poprawne jednostki.

Wykaż, że dla cząstki o energii całkowitej E i energii spoczynkowej E_0 zachodzi $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$, i oblicz $\frac{v}{c}$ dla cząstki, której energia całkowita jest **5** razy większa od spoczynkowej.

ROZWIĄZANIE

$$1. E = \gamma E_0 \Rightarrow \gamma = \frac{E}{E_0}.$$

$$2. \text{Z definicji } \gamma: \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2. \blacksquare$$

$$3. \text{Dla } \frac{E}{E_0} = 5: \frac{v}{c} = \sqrt{1 - 0,04} = \sqrt{0,96} \approx 0,98.$$

Odpowiedź: $\frac{v}{c} \approx 0,98$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — związek $\gamma = \frac{E}{E_0}$,
- 2 pkt — przekształcenie definicji γ ,
- 3 pkt — wyprowadzenie wzoru,
- 4 pkt — obliczenie $\approx 0,98$.

FZ24 Fizyka kwantowa i atomowa

🔑 ΔE z poziomów Bohra, potem $\lambda = \frac{1240}{E[\text{eV}]}$ nm.

FZ24.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz energię fotonu o długości fali 620 nm (przyjmij $hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}$).

ROZWIĄZANIE

$$1. E = \frac{1240}{620} = 2 \text{ eV.}$$

Odpowiedź: $E = 2 \text{ eV}$

FZ24.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★★

0–2 pkt

Oblicz energię poziomu $n = 3$ w atomie wodoru.

ROZWIĄZANIE

$$1. E_3 = -\frac{13,6}{9} \approx -1,51 \text{ eV.}$$

Odpowiedź: $E_3 \approx -1,51 \text{ eV}$

FZ24.3 ZAMKNIĘTE ★★★

0–1 pkt

Foton emitowany przy przejściu $5 \rightarrow 3$ w atomie wodoru ma — w porównaniu z fotonem emitowanym przy przejściu $4 \rightarrow 3$ — energię i długość fali:

- A. mniejszą energię i mniejszą λ B. większą energię i mniejszą λ
C. większą energię i większą λ D. taką samą energię

ROZWIĄZANIE

$$1. E_{53} = -0,544 + 1,511 = 0,967 \text{ eV}; E_{43} = -0,85 + 1,511 = 0,661 \text{ eV.}$$

2. Energia $5 \rightarrow 3$ jest większa, więc długość fali jest mniejsza.

Odpowiedź: **B**

Dlaczego nie pozostałe? Poziomy zagęszczają się, ale $5 \rightarrow 3$ to większy skok niż $4 \rightarrow 3$.

FZ24.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Rozważamy zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne. Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Zwiększenie natężenia padającego światła zwiększa maksymalną energię kinetyczną elektronów.	P	F
2.	Poniżej pewnej częstotliwości progowej zjawisko fotoelektryczne nie zachodzi.	P	F
3.	Maksymalna energia kinetyczna elektronów rośnie liniowo wraz z częstotliwością światła.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Zwiększenie natężenia światła zwiększa energię kinetyczną elektronów — fałsz, zwiększa tylko ich liczbę.
2. Poniżej częstotliwości progowej zjawisko nie zachodzi — prawda.
3. Maksymalna energia kinetyczna elektronów rośnie liniowo z częstotliwością — prawda.

Odpowiedź: FPP

FZ24.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Praca wyjścia dla pewnego metalu wynosi **2,3 eV**. Oblicz maksymalną energię kinetyczną elektronów wybijanych światłem o długości fali **400 nm** ($hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$).

ROZWIĄZANIE

1. $E_f = \frac{1240}{400} = 3,1 \text{ eV}$.
2. $E_k = E_f - W = 3,1 - 2,3 = 0,8 \text{ eV}$.

Odpowiedź: $E_k = 0,8 \text{ eV}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie energii fotonu,
- 2 pkt — zastosowanie równania Einsteina.

FZ24.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Oblicz najdłuższą falę światła, która wywoła efekt fotoelektryczny dla metalu o pracy wyjścia **4,0 eV**.

ROZWIĄZANIE

1. Warunek progowy: $\frac{hc}{\lambda} = W$.
2. $\lambda = \frac{1240}{4,0} = 310 \text{ nm}$ (nadfiolet).

Odpowiedź: $\lambda = 310 \text{ nm}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — warunek progowy,
- 2 pkt — obliczenie λ ,
- 3 pkt — wskazanie zakresu (nadfiolet).

FZ24.7 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Oblicz długości fal emitowanych przy przejściach $3 \rightarrow 2$ i $4 \rightarrow 2$ w atomie wodoru i ustal, która linia jest bardziej czerwona.

ROZWIĄZANIE

$$1. E_{32} = -1,511 + 3,40 = 1,889 \text{ eV} \Rightarrow \lambda = \frac{1240}{1,889} \approx 656 \text{ nm.}$$

$$2. E_{42} = 2,55 \text{ eV} \Rightarrow \lambda \approx 486 \text{ nm.}$$

3. Dłuższa fala (**656 nm**) jest bardziej czerwona — to linia H_α .

Odpowiedź: $\lambda_{32} \approx 656 \text{ nm}$ (czerwona); $\lambda_{42} \approx 486 \text{ nm}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie obu energii,
- 2 pkt — obliczenie obu długości fal,
- 3 pkt — wskazanie linii czerwonej z uzasadnieniem.

FZ24.8 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Oblicz długość fali de Broglie'a elektronu rozpędzonego napięciem 100 V ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$, $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).

ROZWIĄZANIE

$$1. v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \approx 5,93 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$2. p = mv \approx 5,40 \cdot 10^{-24} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}.$$

$$3. \lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{5,40 \cdot 10^{-24}} \approx 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 0,12 \text{ nm.}$$

Odpowiedź: $\lambda \approx 0,12 \text{ nm}$

Wskazówka: To rząd wielkości odległości międzyatomowych — dlatego elektrony ulegają dyfrakcji na kryształach.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie prędkości elektronu,
- 2 pkt — obliczenie pędu,
- 3 pkt — zastosowanie wzoru de Broglie'a,
- 4 pkt — wynik $\approx 0,12 \text{ nm}$.

Oblicz energię jonizacji atomu wodoru ze stanu podstawowego oraz minimalną długość fali fotonu zdolnego zjonizować ten atom.

ROZWIĄZANIE

1. Jonizacja to przejście z $n = 1$ ($E_1 = -13,6$ eV) do $n = \infty$ ($E = 0$), więc potrzeba **13,6 eV**.

2. $\lambda = \frac{1240}{13,6} \approx 91,2$ nm — to daleki nadfiolet.

Odpowiedź: $E = 13,6$ eV; $\lambda \approx 91,2$ nm

Schemat punktowania:

- 1 pkt — interpretacja jonizacji jako przejścia do $E = 0$,
- 2 pkt — energia **13,6 eV**,
- 3 pkt — obliczenie λ ,
- 4 pkt — wskazanie zakresu widma.

W widmie emisyjnym mieszaniny wodoru i helu zaobserwowano linię o długości **434** nm. Sprawdź rachunkiem, czy może ona pochodzić od wodoru, i wskaż odpowiednie przejście.

ROZWIĄZANIE

1. $E = \frac{1240}{434} \approx 2,857$ eV.

2. Sprawdzamy serię Balmera: $E_{52} = -\frac{13,6}{25} + \frac{13,6}{4} = -0,544 + 3,400 = 2,856$ eV.

3. Wartości są zgodne, więc linia pochodzi od wodoru — przejście z $n = 5$ na $n = 2$.

Odpowiedź: tak — przejście $5 \rightarrow 2$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie energii fotonu z długości fali,
- 2 pkt — obliczenie energii przejść w serii Balmera,
- 3 pkt — porównanie i wskazanie przejścia **5 → 2**,
- 4 pkt — wniosek z uzasadnieniem rachunkowym.

FZ25 Fizyka jądrowa: rozpady, energia wiązania, prawo rozpadu

 Bilans A i Z ; z wykresu — ile razy spadła wielkość, potem $\log_2$.

FZ25.1 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Uzupełnij równanie rozpadu: ${}^{214}_{82}\text{Pb} \rightarrow ? + \beta^-$ (antyneutrino pomijamy). Podaj liczbę masową, atomową i symbol pierwiastka.

ROZWIĄZANIE

1. W rozpadzie β^- liczba masowa się nie zmienia, a liczba atomowa rośnie o 1.
2. $A = 214$, $Z = 83$ — to bizmut.

Odpowiedź: ${}^{214}_{83}\text{Bi}$ (bizmut)

FZ25.2 ODPOWIEDŹ KRÓTKA ★★

0–2 pkt

Po jakim czasie pozostanie 25% początkowej liczby jąder izotopu o czasie połowicznego rozpadu 8 dni?

ROZWIĄZANIE

1. $25\% = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, więc minęły dwa okresy połowicznego rozpadu.
2. $t = 2 \cdot 8 = 16$ dni.

Odpowiedź: $t = 16$ dni

FZ25.3 ZAMKNIĘTE ★★

0–1 pkt

Jądro ${}^{238}_{92}\text{U}$ ulega rozpadowi α . Powstaje jądro:

A. ${}^{238}_{90}\text{Th}$

B. ${}^{234}_{92}\text{U}$

C. ${}^{234}_{90}\text{Th}$

D. ${}^{236}_{91}\text{Pa}$

ROZWIĄZANIE

1. A maleje o 4, Z o 2.
2. Powstaje ${}^{234}_{90}\text{Th}$.

Odpowiedź: **C**

Dlaczego nie pozostałe? Cząstka α to jądro helu ${}^4_2\text{He}$.

FZ25.4 PRAWDA / FAŁSZ ★★★

0–1 pkt

Nieruchome jądro ulega rozpadowi α . Oceń prawdziwość stwierdzeń.

1.	Masa jądra przed rozpadem jest mniejsza od sumy mas produktów rozpadu.	P	F
2.	Produkty rozpadu uzyskują energię kinetyczną.	P	F
3.	Pędy obu produktów mają równe wartości i przeciwne zwroty.	P	F

ROZWIĄZANIE

1. Masa jądra przed rozpadem jest mniejsza od sumy mas produktów — fałsz, jest większa (różnica to energia).
2. Produkty rozpadu uzyskują energię kinetyczną — prawda.
3. Pędy produktów mają równe wartości i przeciwne zwroty — prawda.

Odpowiedź: FPP

FZ25.5 OTWARTE ★★★

0–2 pkt

Próbka zawiera $8 \cdot 10^{20}$ jąder promieniotwórczych o czasie połowicznego rozpadu 5 godzin. Oblicz, ile jąder pozostanie po 15 godzinach.

ROZWIĄZANIE

1. $\frac{t}{T} = \frac{15}{5} = 3$.
2. $N = 8 \cdot 10^{20} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10^{20}$.

Odpowiedź: $N = 10^{20}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — ustalenie liczby okresów połowicznego rozpadu,
- 2 pkt — wynik 10^{20} .

FZ25.6 OTWARTE ★★★

0–3 pkt

Moc cieplna próbki plutonu ^{238}Pu ($T_{1/2} = 87,7$ roku) wynosiła początkowo 100 W. Oblicz moc cieplną tej próbki po 50 latach.

ROZWIĄZANIE

1. Moc jest proporcjonalna do liczby rozpadów, czyli do liczby jąder.
2. $P = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50/87,7} = 100 \cdot 2^{-0,570}$.
3. $P \approx 100 \cdot 0,673 = 67,3$ W.

Odpowiedź: $P \approx 67,3$ W

Schemat punktowania:

- 1 pkt — zauważenie proporcjonalności mocy do liczby jąder,
- 2 pkt — zastosowanie prawa rozpadu,
- 3 pkt — wynik ≈ 67 W.

Jądro ${}_{94}^{238}\text{Pu}$ rozpada się na cząstkę α i jądro X , przy czym $\frac{m_X}{m_\alpha} \approx 58,5$. Zapisz równanie rozpadu i oblicz iloraz $\frac{E_{kin\ X}}{E_{kin\ \alpha}}$.

ROZWIĄZANIE

- ${}_{94}^{238}\text{Pu} \rightarrow {}_{92}^{234}\text{U} + {}_2^4\text{He}$.
- Jądro było nieruchome, więc pędy produktów są równe co do wartości.
- $E_k = \frac{p^2}{2m}$, zatem $\frac{E_{kin\ X}}{E_{kin\ \alpha}} = \frac{m_\alpha}{m_X} = \frac{1}{58,5} \approx 0,0171$.

Odpowiedź: ${}_{92}^{234}\text{U}$; $\frac{E_{kin\ X}}{E_{kin\ \alpha}} \approx 0,017$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — poprawne równanie rozpadu,
- 2 pkt — zasada zachowania pędu,
- 3 pkt — wynik $\approx 0,017$.

Detektor zliczył łączną liczbę cząstek emitowanych przez próbkę: po 40 min — 1275, a po długim czasie — 2000 (wszystkie jądra się rozpadły). Oblicz czas połowicznego rozpadu.

ROZWIĄZANIE

- Po 40 min rozpadło się 1275 z 2000 jąder, więc pozostało 725, czyli $\frac{725}{2000} = 0,3625$ początkowej liczby.
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{40/T} = 0,3625 \Rightarrow \frac{40}{T} = \log_2 \frac{1}{0,3625} \approx 1,464$.
- $T = \frac{40}{1,464} \approx 27,3$ min.

Odpowiedź: $T_{1/2} \approx 27$ min

Wskazówka: Detektor zlicza rozpad, a nie jądra pozostałe — najpierw odejmij od liczby całkowitej.

Schemat punktowania:

- 1 pkt — ustalenie liczby jąder pozostałych,
- 2 pkt — zastosowanie prawa rozpadu,
- 3 pkt — rozwiązanie równania,
- 4 pkt — wynik ≈ 27 min.

FZ25.9 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Masa jądra ${}^4_2\text{He}$ wynosi **4,00150** u, masa protonu **1,00728** u, neutronu **1,00866** u. Oblicz energię wiązania tego jądra oraz energię wiązania przypadającą na jeden nukleon ($1 \text{ u} \cdot c^2 = 931,5 \text{ MeV}$).

ROZWIĄZANIE

1. $\Delta m = 2 \cdot 1,00728 + 2 \cdot 1,00866 - 4,00150 = 0,03038 \text{ u}$.
2. $E = 0,03038 \cdot 931,5 \approx 28,30 \text{ MeV}$.
3. Na nukleon: $\frac{28,30}{4} \approx 7,07 \text{ MeV}$.

Odpowiedź: $E \approx 28,3 \text{ MeV}$; $\approx 7,1 \frac{\text{MeV}}{\text{nukleon}}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — obliczenie deficytu masy,
- 2 pkt — przeliczenie na MeV,
- 3 pkt — energia wiązania $\approx 28 \text{ MeV}$,
- 4 pkt — energia na nukleon $\approx 7 \text{ MeV}$.

FZ25.10 OTWARTE ★★★

0–4 pkt

Izotop ${}^{18}_9\text{F}$ ulega rozpadowi β^+ . Masy jąder: $m_F = 17,99600 \text{ u}$, $m_X = 17,99477 \text{ u}$, masa cząstki β to **0,00055** u. Zapisz równanie rozpadu i oblicz łączną energię kinetyczną produktów ($1 \text{ u} \cdot c^2 = 931,5 \text{ MeV}$, jądro fluoru spoczywało).

ROZWIĄZANIE

1. ${}^{18}_9\text{F} \rightarrow {}^{18}_8\text{O} + \beta^+ + \nu$ — liczba masowa bez zmian, Z maleje o 1.
2. $\Delta m = 17,99600 - (17,99477 + 0,00055) = 0,00068 \text{ u}$.
3. $E = 0,00068 \cdot 931,5 \approx 0,633 \text{ MeV}$.
4. Cała ta energia przechodzi w energię kinetyczną produktów (i neutrina).

Odpowiedź: ${}^{18}_8\text{O}$; $E \approx 0,63 \text{ MeV}$

Schemat punktowania:

- 1 pkt — poprawne równanie rozpadu β^+ ,
- 2 pkt — obliczenie deficytu masy,
- 3 pkt — przeliczenie na MeV,
- 4 pkt — wynik $\approx 0,63 \text{ MeV}$ z interpretacją.