

MATURA Z FIZYKI · POZIOM ROZSZERZONY

KLUCZE

Klucze rozpoznawcze i algorytmy punktowe

System rozpoznawania typów zadań: teoria w pigułce, wzory, algorytm, pułapki, przykład wzorcowy i ślad w prawdziwych arkuszach CKE.

25

kluczy

250

zadań treningowych

100%

z rozwiązaniami

Analiza: majowe arkusze CKE 2022–2026 (5 arkuszy, Formuła 2023), fizyka — poziom rozszerzony. Zadania treningowe są autorskie i odwzorowują typy umiejętności — nie są kopiami zadań CKE.

Spis treści

Jak korzystać z opracowania

- FZ01** Kinematyka i wykresy ruchu
- FZ02** Rzuty i spadek swobodny
- FZ03** Zasady dynamiki, tarcie i równia
- FZ04** Opory ruchu, prędkość graniczna i hydrostatyka
- FZ05** Praca, moc i zasada zachowania energii
- FZ06** Pęd, popęd i zderzenia
- FZ07** Ruch po okręgu i siła dośrodkowa
- FZ08** Bryła sztywna: moment siły, toczenie, energia obrotowa
- FZ09** Równowaga ciał i środek masy
- FZ10** Grawitacja, satelity i prawa Keplera
- FZ11** Drgania harmoniczne
- FZ12** Fale mechaniczne, interferencja i fale stojące
- FZ13** Dźwięk: natężenie i efekt Dopplera
- FZ14** Gaz doskonały i przemiany gazowe
- FZ15** Pierwsza zasada termodynamiki, ciepło i cykle
- FZ16** Elektrostatyka: prawo Coulomba i natężenie pola
- FZ17** Potencjał, napięcie, praca pola i kondensatory
- FZ18** Prąd stały: obwody, opór i moc
- FZ19** Pole magnetyczne: siła Lorentza i elektrodynamiczna
- FZ20** Indukcja elektromagnetyczna i prąd przemienny
- FZ21** Optyka geometryczna: załamanie i soczewki
- FZ22** Optyka falowa: interferencja, dyfrakcja, polaryzacja
- FZ23** Szczególna teoria względności
- FZ24** Fizyka kwantowa i atomowa
- FZ25** Fizyka jądrowa: rozpad, energia wiązania, prawo rozpadu

Ściąga — wszystkie klucze

Źródła i metodologia

Jak korzystać z opracowania

Każde zadanie maturalne należy do jednego z **25 kluczy** — powtarzalnych typów umiejętności. Zanim zaczniesz liczyć, **nazwij klucz**: to uruchamia gotowy schemat i chroni przed typowymi błędami.

1. Rozpoznaj

sekcja „Jak rozpoznać” — sygnały w treści i na rysunku.

2. Przypomnij

„Teoria w pigułce” i „Wzory” — tylko to, co naprawdę potrzebne.

3. Zastosuj

„Algorytm” — kolejne kroki, które prowadzą do punktów.

4. Sprawdź

„Pułapki” — porównaj swój zapis z typowymi błędami.

Legenda

Priorytet	A+ najwyższy zwrot z nauki · A bardzo ważny · B ważny po opanowaniu filarów
Częstotliwość	w ilu z analizowanych arkuszy (majowe arkusze CKE 2022–2026 (5 arkuszy, Formuła 2023), fizyka — poziom rozszerzony) pojawiło się zadanie z danego klucza.
Punkty w arkuszu	ile punktów faktycznie przypadało na klucz w tych arkuszach (tabela „Ślad” w każdym kluczu). Arkusz z fizyki ma 60 pkt. Zadania występują w wiązkach po 2–4 podpunkty wokół jednej informacji wstępnej; większość jest otwarta.
Poziom zadań	★★★ rozpoznanie schematu · ★★ standard maturalny · ★★★★★ zadanie wymagające

Plan nauki według priorytetów

A+ — najwyższy zwrot z nauki

FZ02 Rzuty i spadek swobodny

FZ03 Zasady dynamiki, tarcie i równia

FZ04 Opory ruchu, prędkość graniczna i hydrostatyka

FZ05 Praca, moc i zasada zachowania energii

FZ08 Bryła sztywna: moment siły, toczenie, energia obrotowa

FZ10 Grawitacja, satelity i prawa Keplera

FZ11 Drgania harmoniczne

FZ13 Dźwięk: natężenie i efekt Dopplera

FZ14 Gaz doskonały i przemiany gazowe

FZ15 Pierwsza zasada termodynamiki, ciepło i cykle

FZ16 Elektrostatyka: prawo Coulomba i natężenie pola

FZ18 Prąd stały: obwody, opór i moc

FZ19 Pole magnetyczne: siła Lorentza i elektrodynamiczna

FZ21 Optyka geometryczna: załamanie i soczewki

FZ23 Szczególna teoria względności

FZ25 Fizyka jądrowa: rozpady, energia wiązania, prawo rozpadu

A — bardzo ważny

FZ01 Kinematyka i wykresy ruchu

FZ06 Pęd, popęd i zderzenia

FZ07 Ruch po okręgu i siła dośrodkowa

FZ12 Fale mechaniczne, interferencja i fale stojące

FZ20 Indukcja elektromagnetyczna i prąd przemienny

FZ22 Optyka falowa: interferencja, dyfrakcja, polaryzacja

FZ24 Fizyka kwantowa i atomowa

B — ważny po opanowaniu filarów

FZ09 Równowaga ciał i środek masy

FZ17 Potencjał, napięcie, praca pola i kondensatory



Jak trenować klucz

1. Przeczytaj klucz i przykład wzorcowy — zasłoń rozwiązanie i spróbuj sam.
2. Rozwiąż zadania ★★ bez zaglądania do wzorów.
3. Zadania ★★ rozwiąż na czas: zamknięte ok. 2–3 min, otwarte 2 pkt ok. 5 min.
4. Zadania ★★★ i otwarte sprawdzaj z rozwiązaniem i **schematem punktowania** — ucz się pisać tak, by egzaminator widział każdy krok.
5. Klucz uznaj za opanowany, gdy rozwiążesz 9/10 zadań i potrafisz nazwać metodę przed liczeniem.

FZ01 Kinematyka i wykresy ruchu

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

2/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,6 pkt (0–4)

FORMY ZADAŃ

otwarte 2–4 pkt: odczyt z wykresu $v(t)$, pole pod wykresem, pościg i prędkość względna

 **Sygnal:** Dwa ciała → dwa równania ruchu; „największa odległość” = równe prędkości.

Co musisz umieć

- odczytywać z wykresu $v(t)$ prędkość, przyspieszenie (nachylenie) i drogę (pole pod wykresem),
- stosować wzory ruchu jednostajnie zmiennego, także dla dwóch ciał jednocześnie,
- obliczać prędkość względną i korzystać z układu związanego z jednym z ciał,
- rozróżniać drogę i przemieszczenie oraz opisywać ruch opóźniony (znak a).

Jak rozpoznać zadanie

- „na wykresie przedstawiono zależność $v(t)$ ” → droga = pole pod wykresem, a = nachylenie,
- „największa odległość między pojazdami” → warunek $v_1 = v_2$ (prędkość względna zeruje się),
- „po jakim czasie dogoni” → porównanie położen $x_1(t) = x_2(t)$,
- „względem drugiego ciała” → $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$.

Teoria w pigułce

- Ruch jednostajnie zmienny: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, $v(t) = v_0 + a t$, $v^2 - v_0^2 = 2 a \Delta x$.
- Na wykresie $v(t)$: **nachylenie** = przyspieszenie, **pole pod wykresem** = przemieszczenie (pole poniżej osi liczymy ze znakiem minus).
- Na wykresie $x(t)$ nachylenie stycznej to prędkość chwilowa; odcinek poziomy = spoczynek.
- Prędkość względna: $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$. W układzie ciała B ciało A porusza się z $\vec{v}_{AB}$ — to często skraca rachunki o połowę.
- Największa (lub najmniejsza) odległość dwóch ciał pojawia się w chwili, gdy ich prędkości są **równe**, bo wtedy prędkość względna jest zerowa.
- Droga $\neq$ przemieszczenie, gdy ciało zawraca: droga to suma pól **bez znaku**.

Σ Najważniejsze wzory

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$v^2 - v_0^2 = 2 a \Delta x$$

$$s = \text{pole pod } v(t)$$

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

$$v_{sr} = \frac{s}{t}$$

Algorytm krok po kroku

1. Wybierz oś i zwrot dodatni; zapisz dla **każdego** ciała x_0 , v_0 , a .
2. Wypisz $x_1(t)$, $x_2(t)$ oraz $v_1(t)$, $v_2(t)$.
3. Zapisz warunek z treści: spotkanie $x_1 = x_2$, największa odległość $v_1 = v_2$, zatrzymanie $v = 0$.
4. Rozwiąż równanie, odrzuć $t < 0$, podstaw t do odpowiedniego wzoru.
5. Sprawdź jednostki i rząd wielkości (czy wynik jest realny?).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times$ droga = $ \Delta x $ zawsze	$\checkmark$ przy zawracaniu droga $> \Delta x $	sumuj pola bez znaku
$\times$ d_{max} tam, gdzie $a = 0$	$\checkmark$ d_{max} tam, gdzie $v_1 = v_2$	to warunek na ekstremum odległości
$\times$ „opóźnienie $-5 \frac{m}{s^2}$ ”	$\checkmark$ wartość opóźnienia $5 \frac{m}{s^2}$	wartość jest dodatnia, znak zależy od osi
$\times$ $108 \frac{km}{h} = 108 \frac{m}{s}$	$\checkmark$ $30 \frac{m}{s}$	dziel przez 3,6

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 1 z matury 2023 (pościg policyjny)

W chwili $t_0 = 0$ obok stojącego motocykla przejeżdża samochód jadący ze stałą prędkością $v = 20 \frac{m}{s}$. W tej samej chwili motocykl rusza za samochodem ze stałym przyspieszeniem $a = 4 \frac{m}{s^2}$. Oblicz największą odległość między pojazdami oraz czas, po którym motocykl dogoni samochód.

ROZWIĄZANIE

- Położenia: $x_s = 20t$, $x_m = \frac{1}{2} \cdot 4t^2 = 2t^2$; odległość $d(t) = 20t - 2t^2$.
- Odległość jest największa, gdy prędkości są równe: $20 = 4t \Rightarrow t = 5$ s.
- $d_{max} = 20 \cdot 5 - 2 \cdot 25 = 100 - 50 = 50$ m.
- Dogonienie: $20t = 2t^2 \Rightarrow t(2t - 20) = 0 \Rightarrow t = 10$ s (wtedy $v_m = 40 \frac{m}{s}$).

Odpowiedź: $d_{max} = 50$ m; motocykl dogoni samochód po 10 s

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapisanie obu równań ruchu $x_s(t)$ i $x_m(t)$,
- 2 pkt — warunek $v_s = v_m$ i obliczenie $t = 5$ s,
- 3 pkt — obliczenie $d_{max} = 50$ m,
- 4 pkt — wyznaczenie chwili dogonienia $t = 10$ s.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania (kinematyka wewnątrz zad. 1 — rzut pionowy)
2025	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	zad. 1	4 pkt	pościg: $v_{0p} = 20 \frac{m}{s}$, $a = 6 \frac{m}{s^2}$ — oblicz największą odległość
2022	zad. 1.1, 1.3	4 pkt	wykres $v(t)$ dwóch ciał: prędkość względna oraz odległość po 45 s

Trening: zadania **FZ01.1–FZ01.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

FZ02 Rzuty i spadek swobodny

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

2/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,2 pkt (0–6)

FORMY ZADAŃ

wiązka 3 zadań (P/F + 2 obliczeniowe) za łącznie 5–6 pkt; często wykres $h(t)$

 **Sygnal:** Rozdziel pion i poziom; wierzchołek toru to $v_y = 0$, a nie $a = 0$.

Co musisz umieć

- rozkładać rzut na dwa niezależne ruchy: jednostajny w poziomie i jednostajnie zmienny w pionie,
- obliczać czas wznoszenia, zasięg, maksymalną wysokość i prędkość uderzenia,
- odczytywać dane z wykresu $h(t)$ (wierzchołek paraboli, moment upadku),
- stosować zasadę zachowania energii jako szybszą alternatywę dla kinematyki.

Jak rozpoznać zadanie

- „wyrzucono pionowo w górę”, „upuszczono”, „rzucano poziomo ze stołu” → rzut,
- wykres $h(t)$ z wierzchołkiem → z wierzchołka odczytujemy czas wznoszenia $t_w = \frac{v_0}{g}$,
- „w tej samej chwili z tej samej wysokości” → porównanie ruchów w pionie.

Teoria w pigułce

- Rzut pionowy w górę z wysokości h_0 : $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, $v_y(t) = v_0 - gt$.
- Czas wznoszenia $t_w = \frac{v_0}{g}$, wzniesienie ponad punkt wyrzutu $\Delta h = \frac{v_0^2}{2g}$.
- Rzut poziomy: $x = v_0 t$, $y = \frac{1}{2}gt^2$ — czas lotu **nie zależy** od v_0 , tylko od wysokości: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.
- Zasięg rzutu poziomego: $z = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$; prędkość uderzenia $v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2}$.
- Rzut ukośny: $z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, tor jest parabolą.
- W całym rzucie (bez oporów) przyspieszenie jest stałe, równe g , skierowane w dół — także w najwyższym punkcie, gdzie $v_y = 0$.

Σ Najważniejsze wzory

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t_w = \frac{v_0}{g}$$

$$\Delta h = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$z = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Algorytm krok po kroku

- Rozdziel ruch: poziomo $v_x = \text{const}$, pionowo $a = g$ (zwrot w dół).
- Przyjmij oś i zwrot dodatni — konsekwentnie w całym zadaniu.
- Z danych (wykres, treść) odczytaj czas charakterystyczny: wierzchołek → t_w , upadek → t_k .
- Zapisz równanie na $h(t)$ lub $v(t)$ i podstaw warunek ($h = 0$, $v_y = 0$).
- Wynik sprawdź energetycznie: $\frac{1}{2}mv_k^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X w najwyższym punkcie $a = 0$	✓ $a = g$ cały czas	zeruje się tylko v_y
X czas lotu w rzucie poziomym zależy od v_0	✓ zależy tylko od h	ruchy są niezależne
X $v_k = v_0$ przy powrocie na tę samą wysokość	✓ wartość tak, ale zwrot przeciwny	to wektor
X $g = 10$ w zadaniu CKE	✓ karta wzorów podaje $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$	używaj wartości z treści

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 1 z matury 2026 (wykres $h(t)$)

Z wysokości h_0 wyrzucono pionowo w górę kulę z prędkością v_0 . Kulka osiągnęła największą wysokość po $t_w = 0,8$ s, a na podłoże spadła po $t_k = 1,8$ s od wyrzucenia. Przyjmij $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$. Oblicz v_0 oraz h_0 .

ROZWIĄZANIE

1. W najwyższym punkcie $v_y = 0$: $v_0 = gt_w = 9,81 \cdot 0,8 \approx 7,85 \frac{m}{s}$.
2. Upadek: $0 = h_0 + v_0 t_k - \frac{1}{2} g t_k^2$, więc $h_0 = \frac{1}{2} g t_k^2 - v_0 t_k$.
3. $h_0 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 3,24 - 7,85 \cdot 1,8 \approx 15,89 - 14,13 \approx 1,76$ m.

Odpowiedź: $v_0 \approx 7,85 \frac{m}{s}$; $h_0 \approx 1,77$ m

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zauważenie, że w wierzchołku $v_y = 0$, i zapis $v_0 = gt_w$,
- 2 pkt — obliczenie v_0 ,
- 3 pkt — zapisanie warunku upadku $h(t_k) = 0$,
- 4 pkt — obliczenie h_0 .

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 1.1–1.3	6 pkt	rzut pionowy w górę z wysokości h_0 ; z wykresu $h(t)$ oblicz v_0 i h_0
2025	zad. 1.1–1.2	5 pkt	rzut poziomy i rzut pionowy w górę — porównanie czasów i prędkości
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **FZ02.1–FZ02.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

1/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 0,8 pkt (0–4)

FORMY ZADAŃ

 rysowanie sił (2 pkt), wyznaczanie siły wypadkowej z wykresu $v(t)$, układ ciał na równi

 **Sygnal:** Każde ciało osobno, osie wzdłuż ruchu, tarcie zawsze przeciwnie do ruchu.

Co musisz umieć

- rysować **komplet** sił działających na ciało i wskazywać pary sił z III zasady dynamiki,
- zapisywać II zasadę dynamiki osobno dla każdego ciała układu i rzutować na osie,
- rozkładać siłę ciężkości na równi ($mg \sin \alpha$, $mg \cos \alpha$),
- rozdzielić tarcie statyczne (do $T_{max} = \mu N$) i kinetyczne ($T = \mu N$).

Jak rozpoznać zadanie

- „narysuj siły działające na...” → rysunek z zaczepieniem w środku masy, bez sił „od siebie samego”,
- „jaką siłą działa A na B” → III zasada: równa co do wartości, przeciwnie zwrócona,
- układ połączony nicią → jedno wspólne a , osobne równania dla każdego ciała,
- „ciało zsuwa się ze stałą prędkością” → siła wypadkowa = 0, czyli $\mu = \tan \alpha$.

Teoria w pigułce

- II zasada: $\vec{F}_w = m\vec{a}$ — **wypadkowa** sił. Rzutujemy na osie i rozwiązujemy układ.
- III zasada: siły akcji i reakcji działają na **różne** ciała, więc nigdy się nie równoważą.
- Ciężar ciała działa na podłoże/wieszak, a siła grawitacji — na ciało; to różne siły (częsty błąd).
- Równia: składowa zsuwająca $mg \sin \alpha$, składowa dociskająca $N = mg \cos \alpha$, tarcie $T = \mu mg \cos \alpha$.
- Tarcie statyczne dopasowuje się do siły zewnętrznej aż do $T_{max} = \mu_s N$; dopiero potem ciało rusza.
- W układzie ciał połączonych nicią: nić nierozciągliwa $\Rightarrow$ jednakowe $|a|$; nić bez masy przez błądek bez masy $\Rightarrow$ jednakowe naprężenie.

Σ Najważniejsze wzory

$$\vec{F}_w = m\vec{a}$$

$$T = \mu N$$

$$N = mg \cos \alpha$$

$$F_{zsuw} = mg \sin \alpha$$

$$a = \frac{m_2 g - \mu m_1 g}{m_1 + m_2}$$

Algorytm krok po kroku

- Narysuj osobny rysunek sił dla **każdego** ciała (diagram sił).
- Wybierz osie: dla równi — wzdłuż i prostopadle do niej.
- Zapisz $\sum F_x = ma$, $\sum F_y = 0$ dla każdego ciała.
- Rozwiąż układ względem a i sił naprężenia/reakcji.
- Sprawdź przypadki brzegowe ($\mu = 0$, $\alpha = 0$) — czy wzór daje sensowny wynik?

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X siła akcji i reakcji się równoważą	✓ działają na różne ciała	nie mogą się równoważyć
X $N = mg$ na równi	✓ $N = mg \cos \alpha$	podłoże dociska prostopadle
X tarcie zawsze $= \mu N$	✓ statyczne $\leq \mu_s N$	dopasowuje się do siły zewnętrznej
X siła „ruchu” działająca na ciało	✓ nie ma takiej siły	ruch jednostajny nie wymaga siły

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania z dynamiki układu ciał (por. matura 2023 zad. 3)

Klocek o masie $m_1 = 3$ kg leży na poziomym stole i jest połączony nierozciągliwą nicią przerzuconą przez nieważki bloczek z ciężarkiem o masie $m_2 = 2$ kg. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o stół wynosi $\mu = 0,2$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz przyspieszenie układu i siłę naprężenia nici.

ROZWIĄZANIE

1. Klocek: $N_n - \mu m_1 g = m_1 a$. Ciężarek: $m_2 g - N_n = m_2 a$.
2. Dodając stronami: $m_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2) a$.
3. $a = \frac{20 - 0,2 \cdot 30}{5} = \frac{14}{5} = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
4. $N_n = m_2 (g - a) = 2(10 - 2,8) = 14,4$ N.

Odpowiedź: $a = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $N_n = 14,4$ N

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — poprawne równania II zasady dynamiki dla obu ciał,
- 2 pkt — uwzględnienie tarcia $\mu m_1 g$,
- 3 pkt — obliczenie $a = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,
- 4 pkt — obliczenie naprężenia $14,4$ N.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	zasady dynamiki jako narzędzie w zad. 2 i 3 (ruch po okręgu, bloczek)
2025	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	zad. 1.2, 2	4 pkt	siła wypadkowa z wykresu $v(t)$; rysunek sił — III zasada dynamiki (książka i zeszyt)

Trening: zadania **FZ03.1–FZ03.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

FZ04 Opory ruchu, prędkość graniczna i hydrostatyka

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

2/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 3,2 pkt (0–8)

FORMY ZADAŃ

wiązka 3–4 zadań za 8 pkt: rysunek sił, analiza wymiarowa jednostek, wyprowadzenie v_{max}

 **Sygnal:** „Prędkość przestaje rosnąć” → wypadkowa zero; pamiętaj o wyporze.

Co musisz umieć

- zapisywać warunek prędkości granicznej: suma sił = 0, gdy $a = 0$,
- uwzględniać siłę wyporu $F_w = \rho_c g V$ obok grawitacji i oporu,
- wyznaczać jednostkę współczynnika z analizy wymiarowej,
- porównywać długości wektorów sił na rysunku (opór $\propto v$ albo $\propto v^2$).

Jak rozpoznać zadanie

- „prędkość przestaje rosnąć / ruch staje się jednostajny” → $F_{wyp} = 0$,
- „wyraż jednostkę współczynnika w jednostkach podstawowych SI” → analiza wymiarowa,
- „kulka opada w cieczy” → trzy siły: grawitacji, wyporu i oporu,
- „narysuj siły parcia na fragmenty powierzchni” → ciśnienie rośnie z głębokością.

Teoria w pigułce

- Prędkość graniczna: gdy $F_{opor}(v)$ zrówna się z siłą wypadkową pozostałych sił, przyspieszenie maleje do zera, a prędkość przestaje rosnąć.
- Opór liniowy: $F_o = Av$ (małe prędkości, ciecze lepkie); opór kwadratowy: $F_o = k\rho S v^2$ (powietrze, większe prędkości).
- Siła wyporu: $F_w = \rho_{cieczy} g V_{zanurzonej\ części}$ — zależy od gęstości **ośrodka**, nie ciała.
- Ciśnienie hydrostatyczne $p = \rho g h$ rośnie z głębokością, dlatego parcie na dolną powierzchnię jest większe niż na górną — stąd bierze się wypór.
- Analiza wymiarowa: z $[F] = N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$ wyznaczamy jednostkę współczynnika, dzieląc obustronnie.
- Objętość kuli $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, pole przekroju $S = \pi R^2$ — CKE podaje te wzory we wskazówce.

Σ Najważniejsze wzory

$$F_o = Av$$

$$F_o = k\rho S v^2$$

$$F_w = \rho g V$$

$$p = \rho g h$$

$$V_{kuli} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$mg = F_w + F_o \Rightarrow v_{max}$$

Algorytm krok po kroku

1. Wypisz wszystkie siły: grawitacji, wyporu, oporu (i ewentualnie napędu).
2. Dla prędkości granicznej przyrównaj wypadkową do zera.
3. Masę zamień na ρV , jeżeli dane są gęstości.
4. Wyznacz v_{max} — sprawdź, czy wzór ma sens (np. $v_{max} > 0$ wymaga $\rho_k > \rho_c$).
5. Jednostkę współczynnika sprawdź, podstawiając jednostki do wzoru na siłę.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹLE	DOBRCZE	DLACZEGO
✗ $F_w = \rho_{ciała}gV$	✓ $F_w = \rho_{osrodka}gV$	gęstość ośrodka!
✗ przy v_{max} siła oporu = 0	✓ siła wypadkowa = 0	opór jest wtedy największy
✗ opór $\propto v$ i $\propto v^2$ dają ten sam wzór	✓ inne potęgi v	czytaj wzór z treści
✗ pomijanie wyporu w cieczy	✓ w cieczy wypór jest istotny	w powietrzu zwykle pomijalny

🔧 Przykład wzorcowy typ zadania 4.3 z matury 2022

Kulka o promieniu R i gęstości ρ_k opada w cieczy o gęstości ρ_c . Siła oporu ma wartość $F_o = ARv$. Wyprowadź wzór na prędkość graniczną v_{max} kulki w zależności od R , ρ_k , ρ_c , g i A . Objętość kuli $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

ROZWIĄZANIE

1. Przy prędkości granicznej: $F_g = F_w + F_o$, czyli $\rho_k Vg = \rho_c Vg + ARv_{max}$.

2. $(\rho_k - \rho_c)Vg = ARv_{max}$, gdzie $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$$3. v_{max} = \frac{(\rho_k - \rho_c)g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{AR} = \frac{4\pi R^2 g(\rho_k - \rho_c)}{3A}.$$

Odpowiedź: $v_{max} = \frac{4\pi R^2 g(\rho_k - \rho_c)}{3A}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapisanie warunku $F_g = F_w + F_o$ dla ruchu jednostajnego,
- 2 pkt — wyrażenie masy przez gęstość i objętość,
- 3 pkt — poprawne przekształcenie do wzoru na v_{max} .

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2025	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2024	zad. 1.1–1.3	8 pkt	kropla wody w powietrzu: $F_o = k\rho_p S v^2$, rysunek sił, wyprowadzenie v_E
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	zad. 4.1–4.4	8 pkt	kulka w cieczy: $F_o = ARv$, jednostka A w SI, wzór na v_{max} , siły parcia

Trening: zadania **FZ04.1–FZ04.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnal:** Dwa stany bez pytania o czas → energia; tarcie = strata energii mechanicznej.

Co musisz umieć

- obliczać pracę siły stałej ($W = F s \cos \alpha$) i pracę jako pole pod wykresem $F(s)$,
- stosować twierdzenie o pracy i energii kinetycznej $W = \Delta E_k$,
- układać bilans energii z uwzględnieniem pracy sił oporu i tarcia,
- obliczać moc chwilową $P = Fv$ i sprawność $\eta = \frac{W_{uz}}{W_{wl}}$.

Jak rozpoznać zadanie

- w zadaniu są **dwa stany** (początek i koniec), a nie pytanie o czas → zasada zachowania energii,
- „najmniejsza prędkość, przy której...”, „na jaką wysokość się wzniesie” → bilans energii,
- „jaką pracę wykonała siła oporu” → $W_{op} = \Delta E_{mech}$ (ujemna),
- „moc silnika przy stałej prędkości” → $P = Fv$, gdzie F równoważy opory.

Teoria w pigułce

- Praca siły stałej: $W = F s \cos \alpha$; siła prostopadła do przemieszczenia nie wykonuje pracy (np. dośrodkowa, normalna).
- Twierdzenie o pracy i energii: $W_{wypadkowa} = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_k^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$.
- Zasada zachowania energii mechanicznej (bez tarcia): $E_k + E_p = \text{const.}$
- Z tarciem: $\Delta E_{mech} = W_{tarcia} = -\mu mg \cdot s$ (energia przechodzi w wewnętrzną).
- Moc: $P = \frac{W}{t}$, a dla stałej prędkości $P = Fv$. Sprawność $\eta = \frac{P_{uz}}{P_{wl}} \cdot 100\%$.
- Energia sprężystości: $E_s = \frac{1}{2}kx^2$ — zawsze dodatnia, liczona od położenia równowagi.

Σ Najważniejsze wzory

$$W = F s \cos \alpha$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_p = mgh$$

$$E_s = \frac{1}{2}kx^2$$

$$P = \frac{W}{t} = Fv$$

$$\eta = \frac{W_{uz}}{W_{wl}}$$

Algorytm krok po kroku

1. Zaznacz stan początkowy i końcowy oraz poziom zerowy energii potencjalnej.
2. Wypisz wszystkie formy energii w obu stanach.
3. Zapisz bilans: $E_{pocz} = E_{konc} + |W_{tarcia}|$ (lub $E_{pocz} = E_{konc}$, gdy brak strat).
4. Rozwiąż równanie — masa często się skraca.
5. Sprawdź sensowność: energia nie może być ujemna, $\eta \leq 100\%$.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X $W = Fs$ przy sile pod kątem	✓ $W = Fs \cos \alpha$	liczy się składowa wzdłuż drogi
X siła dośrodkowa wykonuje pracę	✓ $W = 0$	jest prostopadła do prędkości
X $E_p = mgh$ liczone od podłogi zamiast od wybranego poziomu	✓ poziom zerowy wybierasz sam	ale konsekwentnie
X pomijanie masy w ZZE, gdy się nie skraca	✓ sprawdź, czy naprawdę się skraca	w układach dwóch ciał nie

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania z bilansu energii z tarcie

Sanki o masie $m = 20$ kg zsuwają się ze zbocza o wysokości $h = 5$ m i długości $s = 20$ m, a następnie przejeżdżają jeszcze 10 m po poziomym torze. Współczynnik tarcia na całej trasie wynosi $\mu = 0,1$, kąt nachylenia zbocza $\alpha = 30^\circ$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Oblicz prędkość sanek u podnóża zbocza i sprawdź, czy zatrzymają się na odcinku poziomym.

ROZWIĄZANIE

1. Na zboczku: $mgh - \mu mg \cos \alpha \cdot s = \frac{1}{2}mv^2$.

2. $v^2 = 2g(h - \mu s \cos 30^\circ) = 2 \cdot 10(5 - 0,1 \cdot 20 \cdot 0,866) = 2 \cdot 10 \cdot 3,268 = 65,4$.

3. $v \approx 8,09 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4. Na poziomie: droga hamowania $s_h = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{65,4}{2} \approx 32,7 \text{ m} > 10 \text{ m}$ — sanki nie zatrzymają się.

Odpowiedź: $v \approx 8,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; nie zatrzymają się (droga hamowania $\approx 37 \text{ m}$)

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — bilans energii na zboczku z pracą tarcia,
- 2 pkt — obliczenie v u podnóża,
- 3 pkt — obliczenie drogi hamowania,
- 4 pkt — wniosek z porównania z 10 m.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 1.3	3 pkt	wysokość h_0 przy rzucie pionowym — z ZZE lub kinematyki (klucz wspólny z FZ02)
2025	zad. 2.2	4 pkt	przyśpieszenie walca na równi — z zasady zachowania energii (wspólny z FZ08)
2024	zad. 2.1	3 pkt	podział energii kinetycznej toczenia na postępową i obrotową (wspólny z FZ08)
2023	zad. 3.2	4 pkt	przyśpieszenie ciężarka w układzie z bloczkiem — ZZE (wspólny z FZ08)
2022	—	0 pkt	pośrednio przy wyprowadzeniu v_{max} (zad. 4.3)

Trening: zadania **FZ05.1–FZ05.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

FZ06 Pęd, popęd i zderzenia

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

2/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,0 pkt (0–3)

FORMY ZADAŃ

rysunek wektorów po zderzeniu (1–2 pkt),
obliczenie stosunku energii przy odrzucie (3 pkt)

 **Sygnal:** Pęd przed = pęd po; przy równych pędach energia jest odwrotnie proporcjonalna do masy.

Co musisz umieć

- stosować zasadę zachowania pędu dla układu izolowanego (także w dwóch wymiarach),
- rozróżniać zderzenie sprężyste (pęd i energia) od niesprężystego (tylko pęd),
- obliczać popęd siły $\vec{J} = \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$ i średnią siłę uderzenia,
- stosować ZZP do odrzutu, rozpadu jądra i wystrzału.

Jak rozpoznać zadanie

- „zderzenie”, „rozpad”, „odrzut”, „wystrzał” → zasada zachowania pędu,
- „doskonale niesprężyste”, „sklejają się” → wspólna prędkość po zderzeniu,
- „doskonale sprężyste” → dodatkowo zachowana energia kinetyczna,
- „średnia siła w czasie uderzenia” → $F_{\text{sr}} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$.

Teoria w pigułce

- Pęd: $\vec{p} = m\vec{v}$ — wektor. W układzie izolowanym $\sum \vec{p} = \text{const}$, także gdy działają siły wewnętrzne.
- Popęd: $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$; pole pod wykresem $F(t)$ to popęd.
- Zderzenie doskonale niesprężyste: $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$; część energii zamienia się w wewnętrzną.
- Zderzenie doskonale sprężyste równych mas: ciała **wymieniają się** prędkościami.
- Odrzut/rozpad na dwa ciała: $m_1v_1 = m_2v_2$, więc $\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{m_2}{m_1}$ — lżejszy fragment unosi **więcej** energii.
- W dwóch wymiarach ZZP zapisujemy osobno dla składowych x i y .

Σ Najważniejsze wzory

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

$$\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{m_2}{m_1}$$

Algorytm krok po kroku

1. Wybierz układ (które ciała) i sprawdź, czy jest izolowany w interesującym kierunku.
2. Ustal zwrot dodatni i zapisz pędy przed i po (ze znakami).
3. Zapisz ZZP; przy zderzeniu sprężystym dołącz bilans energii.
4. Rozwiąż układ, sprawdź znak prędkości (zwrot).
5. Jeśli pytają o siłę — podziel zmianę pędu przez czas.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X pęd jako skalar	✓ pęd jest wektorem	w zderzeniach ukośnych rozkładaj na składowe
X energia zachowana w każdym zderzeniu	✓ tylko w sprężystym	w niesprężystym ubywa
X $E_k = \frac{p^2}{2m}$ mylone z pv	✓ $E_k = \frac{p^2}{2m}$	przydaje się przy równych pędach
X cięższy fragment unosi więcej energii	✓ lżejszy	$E_k \propto \frac{1}{m}$ przy równych pędach

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 12.2 z matury 2025 (rozpad α plutonu)

Nieruchome jądro rozpada się na dwa fragmenty o masach m_1 i m_2 , przy czym $\frac{m_2}{m_1} = 58,5$. Oblicz stosunek energii kinetycznych fragmentów $\frac{E_{k2}}{E_{k1}}$.

ROZWIĄZANIE

1. Przed rozpadem pęd był zerowy, więc $m_1 v_1 = m_2 v_2$, czyli $p_1 = p_2 = p$.

2. $E_k = \frac{p^2}{2m}$, zatem $\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{m_1}{m_2}$.

3. $\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{1}{58,5} \approx 0,0171$ — cięższy fragment unosi znikomą część energii.

Odpowiedź: $\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{1}{58,5} \approx 0,0171$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapisanie ZZP dla nieruchomego jądra ($p_1 = p_2$),
- 2 pkt — skorzystanie ze związku $E_k = \frac{p^2}{2m}$,
- 3 pkt — obliczenie stosunku $\approx 0,017$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2025	zad. 12.2	3 pkt	odrzut przy rozpadzie α : oblicz $\frac{E_{kin X}}{E_{kin \alpha}}$ przy $\frac{m_X}{m_\alpha} \approx 58,5$
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	zad. 2.1–2.2	2 pkt	zderzenie dwóch krążków: rozkład prędkości na składowe i wybór rysunku
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **FZ06.1–FZ06.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnal:** Oś do środka okręgu; wypadkowa realnych sił $= \frac{mv^2}{r}$.

Co musisz umieć

- obliczać przyspieszenie dośrodkowe $a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ i siłę dośrodkową,
- wskazywać, która **realna** siła pełni rolę dośrodkowej (napięcie, tarcie, grawitacja, reakcja),
- analizować ruch w płaszczyźnie pionowej (najwyższy i najniższy punkt),
- wyznaczać graficznie zmianę wektora prędkości $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Jak rozpoznać zadanie

- „po okręgu”, „na nici”, „w pętli”, „na zakręcie” → siła dośrodkowa,
- „minimalna prędkość na szczycie pętli” → w granicznym przypadku $N = 0$, czyli $mg = \frac{mv^2}{r}$,
- „jaka jest zmiana wektora prędkości” → różnica wektorów, a nie różnica wartości.

Teoria w pigułce

- $v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$, $a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ — przyspieszenie skierowane **do środka**.
- Siła dośrodkowa nie jest nową siłą: to wypadkowa sił realnych skierowana do środka okręgu.
- Najniższy punkt okręgu pionowego: $F_n - mg = \frac{mv^2}{r}$, więc $F_n = m \left(g + \frac{v^2}{r} \right)$.
- Najwyższy punkt: $F_n + mg = \frac{mv^2}{r}$, więc $F_n = m \left(\frac{v^2}{r} - g \right)$; nić jest napięta, gdy $v^2 \geq gr$.
- Na zakręcie poziomym rolę siły dośrodkowej pełni tarcie: $\mu mg \geq \frac{mv^2}{r}$.
- W ruchu jednostajnym po okręgu wartość prędkości jest stała, ale wektor się zmienia — dlatego przyspieszenie nie jest zerowe.

Σ Najważniejsze wzory

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

$$F_d = \frac{mv^2}{r}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$v_{min} = \sqrt{gr} \text{ (szczyt pętli)}$$

Algorytm krok po kroku

1. Zaznacz punkt toru i narysuj wszystkie realne siły.
2. Skieruj oś do środka okręgu i zapisz $\Sigma F_{do\ \acute{s}rodka} = \frac{mv^2}{r}$.
3. Podstaw dane; przy „minimalnej prędkości” przyjmij, że siła reakcji/napięcia znika.
4. Jeśli trzeba, dołóż zasadę zachowania energii między punktami toru.
5. Sprawdź jednostki i to, czy wynik jest większy od zera.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X siła odśrodkowa działająca na ciało	✓ w układzie inercyjnym jej nie ma	to siła pozorna
X $F_n = mg$ w najniższym punkcie	✓ $F_n = m \left(g + \frac{v^2}{r} \right)$	nić musi też „zakręcać” ciałem
X zmiana wartości prędkości zamiast wektora	✓ $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$	rysuj wektory
X $a = 0$ w ruchu jednostajnym po okręgu	✓ $a_d = \frac{v^2}{r}$	zmienia się kierunek prędkości

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 2.3 z matury 2026

Ciało o masie m zawieszone na nici o długości l porusza się po okręgu w płaszczyźnie pionowej. Stosunek wartości prędkości w najniższym i najwyższym punkcie wynosi $\frac{v_{max}}{v_{min}} = \sqrt{3}$. Wyznacz stosunek $\frac{F_{n\ max}}{F_{n\ min}}$ sił napięcia nici w tych punktach.

ROZWIĄZANIE

1. Najniższy punkt: $F_{n\ max} = m \left(g + \frac{v_{max}^2}{l} \right)$; najwyższy: $F_{n\ min} = m \left(\frac{v_{min}^2}{l} - g \right)$.
2. Z zasady zachowania energii: $\frac{1}{2} v_{max}^2 = \frac{1}{2} v_{min}^2 + g \cdot 2l$, a z warunku $v_{max}^2 = 3v_{min}^2$.
3. Stąd $3v_{min}^2 = v_{min}^2 + 4gl \Rightarrow v_{min}^2 = 2gl$, $v_{max}^2 = 6gl$.
4. $F_{n\ max} = m(g + 6g) = 7mg$, $F_{n\ min} = m(2g - g) = mg$, więc stosunek wynosi 7.

Odpowiedź: $\frac{F_{n\ max}}{F_{n\ min}} = 7$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — równania II zasady dynamiki w obu punktach,
- 2 pkt — zastosowanie zasady zachowania energii,
- 3 pkt — obliczenie $v_{min}^2 = 2gl$ i $v_{max}^2 = 6gl$,
- 4 pkt — wynik 7.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 2.1–2.3	7 pkt	ciało na nici w płaszczyźnie pionowej: $\Delta \vec{v}$, siły w najniższym punkcie, $\frac{F_{n\ max}}{F_{n\ min}}$
2025	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **FZ07.1–FZ07.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

4/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 4,6 pkt (0–6)

FORMY ZADAŃ

 wiązka 5–6 pkt: P/F o toczeniu +
wyprowadzenie przyspieszenia lub stosunku energii

Sygnal: Dwa równania (postęp + obrót) plus warunek $a = \varepsilon R$.

Co musisz umieć

- zapisywać II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego $M = I\varepsilon$ obok $F = ma$ dla środka masy,
- stosować warunek toczenia bez poślizgu $v = \omega R$, $a = \varepsilon R$,
- liczyć energię kinetyczną toczenia $E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$,
- korzystać z podanych momentów bezwładności ($I = \frac{1}{2}mR^2$, $I = mR^2$, $I = \frac{2}{5}mR^2$).

Jak rozpoznać zadanie

- „toczy się bez poślizgu” → $v = \omega R$ i dwa równania (ruch postępowy + obrotowy),
- „nić nawinięta na walec/bloczek o masie” → bloczek ma moment bezwładności, naprężenia po obu stronach są różne,
- „jaka część energii przypada na ruch postępowy” → iloraz $\frac{\frac{1}{2}mv^2}{E_{\text{całk}}}$,
- „walec drążony/pełny” → różne I , więc różne przyspieszenia na równi.

Teoria w pigułce

- Moment siły $M = Fr \sin \alpha$; II zasada dla obrotów: $M_{\text{wyp}} = I\varepsilon$.
- Toczenie bez poślizgu: $v_{\text{sm}} = \omega R$, $a_{\text{sm}} = \varepsilon R$; punkt styku chwilowo spoczywa, więc tarcie statyczne nie wykonuje pracy.
- Energia toczenia: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)$.
- Dla walca pełnego $I = \frac{1}{2}mR^2$, więc $E_{\text{post}} : E_{\text{obr}} = 2 : 1$, a $\frac{E_{\text{post}}}{E_{\text{całk}}} = \frac{2}{3}$.
- Staczanie z równi: $a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}$ — im większe I , tym wolniej.
- Zasada zachowania momentu pędu: $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, gdy moment sił zewnętrznych jest zerowy.

Σ Najważniejsze wzory

$$M = Fr$$

$$M = I\varepsilon$$

$$E_{\text{obr}} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$v = \omega R$$

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

$$L = I\omega$$

Algorytm krok po kroku

1. Rozdziel ruch: postępowy środka masy i obrotowy wokół środka masy.
2. Zapisz $\sum F = ma$ oraz $\sum M = I\varepsilon$ (momenty liczone względem osi przez środek masy).
3. Dołóż warunek toczenia $a = \varepsilon R$ — to trzecie równanie.
4. Rozwiąż układ; wyeliminuj siłę tarcia, jeśli nie jest pytana.
5. Alternatywnie użyj ZZE — szybciej, gdy pytają o prędkość, a nie o siły.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
✗ $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ dla toczącego się walca	✓ dochodzi $\frac{1}{2}I\omega^2$	energia obrotowa
✗ naprężenia nici po obu stronach bloczka równe	✓ różne, gdy bloczek ma masę	to one go rozpędzają
✗ tarcie przy toczeniu wykonuje pracę	✓ tarcie statyczne — nie	punkt styku spoczywa
✗ $a = g \sin \alpha$ dla staczającego się walca	✓ $a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mR^2}$	część energii idzie w obrót

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 2.2 z matury 2025 i 2.2 z matury 2024

Jednorodny walec o masie m i promieniu R ($I = \frac{1}{2}mR^2$) stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia α . Wyprowadź wzór na przyspieszenie środka masy walca.

ROZWIĄZANIE

- Ruch postępowy: $mg \sin \alpha - T = ma$ (T — siła tarcia statycznego).
- Ruch obrotowy względem środka masy: $TR = I\epsilon = \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{a}{R}$, więc $T = \frac{1}{2}ma$.
- Podstawiając: $mg \sin \alpha - \frac{1}{2}ma = ma \Rightarrow g \sin \alpha = \frac{3}{2}a$.
- $a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$ (mniej niż $g \sin \alpha$ — część energii zasila obrót).

Odpowiedź: $a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — równanie ruchu postępowego z siłą tarcia,
- 2 pkt — równanie ruchu obrotowego i warunek $a = \epsilon R$,
- 3 pkt — wyeliminowanie T ,
- 4 pkt — wynik $a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 3.1–3.2	5 pkt	bloczek-walec ($I_0 = \frac{1}{2}m_w R^2$) z ciężarkiem: wyznacz siłę F przy $a = \frac{1}{2}g$
2025	zad. 2.1–2.2	6 pkt	walec pełny i drążony na równi: wyprowadź a w zależności od g, β, k_2
2024	zad. 2.1–2.2	6 pkt	toczenie walca ciągniętego siłą F : iloraz $\frac{E_{\text{post}}}{E_{\text{całk}}}$ i przyspieszenie
2023	zad. 3.1–3.2	6 pkt	ciężarek na nici nawiniętej na walec: wyprowadź a w zależności od g
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **FZ08.1–FZ08.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PRIORYTET

B

CZĘSTOTLIWOŚĆ

1/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 0,4 pkt (0–2)

FORMY ZADAŃ

konstrukcja graficzna (2 pkt) z uzasadnieniem
odwołującym się do warunków równowagi

 **Sygnal:** Dwa warunki: siły i momenty; oś obrotu wybierz tam, gdzie znika niewiadoma.

Co musisz umieć

- stosować oba warunki równowagi: $\sum \vec{F} = 0$ oraz $\sum M = 0$,
- wyznaczać środek masy układu punktów:
$$x_{sm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},$$
- wyznaczać środek masy graficznie (pion przez punkt zawieszenia),
- obliczać siły reakcji podpór belki.

Jak rozpoznać zadanie

- „ciało wisi nieruchomo na szpilce” → środek masy leży na pionie przez punkt zawieszenia,
- „belka spoczywa na dwóch podporach” → dwa równania: sił i momentów,
- „dźwignia w równowadze” → $F_1 r_1 = F_2 r_2$.

Teoria w pigułce

- Warunki równowagi bryły: wypadkowa sił = **0** i wypadkowy moment sił względem dowolnego punktu = **0**.
- Ciało zawieszone swobodnie ustawia się tak, że środek masy znajduje się na pionie przechodzącym przez punkt zawieszenia — inaczej moment siły grawitacji obracałby ciało.
- Konstrukcja środka masy: zawieszamy ciało w dwóch różnych punktach i rysujemy pion — przecięcie to środek masy.
- Środek masy układu: $x_{sm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$; dla ciała jednorodnego i symetrycznego leży na osi symetrii.
- Wybór osi momentów jest dowolny — warto wybrać punkt, w którym „znika” nieznana siła.
- Równowaga trwała: środek masy podnosi się przy wychyleniu; chwiejna: obniża się.

Σ Najważniejsze wzory

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum M = 0$$

$$F_1 r_1 = F_2 r_2$$

$$x_{sm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

Algorytm krok po kroku

1. Narysuj wszystkie siły z punktami przyłożenia.
2. Wybierz oś obrotu (najlepiej przez nieznaną siłę) i zapisz $\sum M = 0$.
3. Dopisz $\sum \vec{F} = 0$ dla kierunku pionowego (i poziomego).
4. Rozwiąż układ; sprawdź, czy suma reakcji równa się sumie ciężarów.
5. W zadaniach graficznych opisz słownie **dlaczego** rysujesz pion — to punktowana część.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X moment liczony bez ramienia	✓ $M = Fr$, gdzie r to ramię	odległość prostopadła do linii siły
X środek masy zawsze w środku figury	✓ tylko dla jednorodnych i symetrycznych	kątomierz to półkole z otworem
X sam rysunek bez uzasadnienia	✓ CKE wymaga uzasadnienia	punkt jest za argumentację
X jedna oś obrotu z góry narzucona	✓ oś wybierasz dowolnie	wybierz najwygodniejszą

🔧 Przykład wzorcowy typ zadania z warunków równowagi (por. matura 2022 zad. 3)

Jednorodna belka o masie **20 kg** i długości **4 m** spoczywa na dwóch podporach: na lewym końcu i w odległości **1 m** od prawego końca. Na lewym końcu położono ciężarek o masie **10 kg** ($g = 10 \frac{m}{s^2}$). Oblicz siły nacisku na obie podpory.

ROZWIĄZANIE

1. Ciężar belki **200 N** działa w środku (w odległości **2 m** od lewego końca), ciężarek **100 N** na lewym końcu.
Podpory: w $x = 0$ i $x = 3$ m.

2. Momenty względem lewej podpory: $200 \cdot 2 = N_2 \cdot 3 \Rightarrow N_2 = \frac{400}{3} \approx 133,3 \text{ N}$.

3. Suma sił: $N_1 + N_2 = 300 \text{ N} \Rightarrow N_1 \approx 166,7 \text{ N}$.

Odpowiedź: $N_1 \approx 166,7 \text{ N}$; $N_2 \approx 133,3 \text{ N}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — poprawne rozmieszczenie sił (ciężar belki w środku),
- 2 pkt — zapisanie równania momentów,
- 3 pkt — obliczenie obu reakcji i sprawdzenie bilansu sił.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2025	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	zad. 3	2 pkt	kątomierz zawieszony na szpilce — wyznacz konstrukcyjnie środek masy i uzasadnij

Trening: zadania **FZ09.1–FZ09.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

Sygnal: Elipsa → półosć wielka i $v_P r_P = v_A r_A$; koło → $\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r}$.

Co musisz umieć

- stosować prawo powszechnego ciążenia i wyznaczać punkt, w którym siły się równoważą,
- wyprowadzać i stosować III prawo Keplera $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$,
- używać II prawa Keplera (zachowanie momentu pędu): $v_P r_P = v_A r_A$,
- obliczać prędkości kosmiczne, okres satelity i masę ciała centralnego.

Jak rozpoznać zadanie

- „orbita eliptyczna, peryhelium, aphelium” → $a = \frac{r_P + r_A}{2}$ oraz $v_P r_P = v_A r_A$,
- „oblicz okres obiegu w latach, dane w au” → III prawo Keplera w jednostkach Ziemi: $T^2 = a^3$,
- „gdzie wypadkowa siła grawitacji jest zerowa” → $\frac{M_1}{x^2} = \frac{M_2}{(d-x)^2}$,
- „satelita geostacjonarny” → $T = 24$ h i orbita w płaszczyźnie równika.

Teoria w pigułce

- $F = G \frac{Mm}{r^2}$; przyspieszenie grawitacyjne $g = G \frac{M}{r^2}$ — nie zależy od masy ciała spadającego.
- Dla orbity kołowej: $G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ oraz $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$.
- III prawo Keplera: $\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}$; w jednostkach au i lat dla Układu Słonecznego po prostu $T^2 = a^3$.
- II prawo Keplera (równe pola w równych czasach) to zachowanie momentu pędu: $v_P r_P = v_A r_A$ (prędkości prostopadłe do promienia).
- Oś wielka elipsy: $2a = r_P + r_A$. W peryhelium ciało porusza się najszybciej.
- Energia w polu grawitacyjnym: $E_p = -G \frac{Mm}{r}$; II prędkość kosmiczna $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = v_I \sqrt{2}$.

Σ Najważniejsze wzory

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

$$v_P r_P = v_A r_A$$

$$2a = r_P + r_A$$

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}$$

🔧 Algorytm krok po kroku

1. Ustal, czy orbita jest kołowa (wtedy r stałe), czy eliptyczna (wtedy $a = \frac{r_P + r_A}{2}$).
2. Do okresów i promieni użyj III prawa Keplera; w au i latach stała znika.
3. Do porównania prędkości w dwóch punktach elipsy użyj $v_P r_P = v_A r_A$ (lub ZZE z $E_p = -\frac{GMm}{r}$).
4. Do „zerowej siły” zapisz równość sił i rozwiąż równanie kwadratowe (pierwiastkuj obie strony).
5. Sprawdź rząd wielkości — okresy planet w latach, prędkości w km/s.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹLE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times a = r_P + r_A$	$\checkmark 2a = r_P + r_A$	to oś wielka, nie pólś
$\times v_P/v_A = r_P/r_A$	$\checkmark v_P/v_A = r_A/r_P$	bliżej — szybciej
$\times$ III prawo Keplera z r orbity eliptycznej	$\checkmark$ z pólśią wielką a	dla elipsy liczy się a
$\times g$ zależy od masy spadającego ciała	$\checkmark g = \frac{GM}{r^2}$	masa ciała się skraca

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 5 z matury 2026 (planetoida) i 5 z matury 2025 (Chiron)

Planetoida krąży wokół Słońca po orbicie eliptycznej o peryhelium $r_P = 0,81$ au i osi wielkiej $2a = 5,62$ au. Prędkość w peryhelium wynosi $v_P = 43,29 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Oblicz okres obiegu planetoidy (w latach) oraz jej prędkość w aphelium.

ROZWIĄZANIE

1. Półś wielka: $a = \frac{5,62}{2} = 2,81$ au.
2. III prawo Keplera (au, lata): $T = \sqrt{a^3} = \sqrt{2,81^3} = \sqrt{22,188} \approx 4,71$ roku.
3. Aphelium: $r_A = 2a - r_P = 5,62 - 0,81 = 4,81$ au.
4. Z II prawa Keplera: $v_A = v_P \frac{r_P}{r_A} = 43,29 \cdot \frac{0,81}{4,81} \approx 7,29 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Odpowiedź: $T \approx 4,71$ roku; $v_A \approx 7,29 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie pólśi wielkiej,
- 2 pkt — zastosowanie III prawa Keplera i wynik $\approx 4,7$ roku,
- 3 pkt — obliczenie r_A ,
- 4 pkt — zastosowanie $v_P r_P = v_A r_A$ i wynik $\approx 7,3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 5.1–5.4	7 pkt	planetoida na orbicie eliptycznej: wektor prędkości, okres z III prawa Keplera, $\frac{a_P}{a_A}$, prędkość w aphelium
2025	zad. 5.1–5.3	6 pkt	Chiron: $r_P = 8,5$ au, $r_A = 18,9$ au — okres obiegu i porównanie prędkości
2024	zad. 5.1–5.2	5 pkt	układ Ziemia–Księżyc: III zasada dynamiki i punkt zerowej siły wypadkowej
2023	zad. 5.1–5.4	7 pkt	gwiazda S2 wokół Sgr A*: masa obiektu centralnego i wyprowadzenie III prawa Keplera
2022	zad. 7.1–7.3	6 pkt	sondy STEREO na orbitach kołowych: okres T_B , kąt po roku, iloraz prędkości

FZ11 Drgania harmoniczne

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

2/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 3,0 pkt (0–8)

FORMY ZADAŃ

wiązka 7–8 pkt: P/F z wykresu, rysunek sił w wybranym punkcie, obliczenie amplitudy lub siły

 **Sygnal:** Okres $\rightarrow k$; najniższe położenie $\rightarrow F_s = mg + kA$.

Co musisz umieć

- odczytywać z wykresu okres, amplitudę i fazę drgań,
- stosować $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (sprężyna) i $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (wahadło matematyczne),
- analizować siły w dowolnym punkcie toru (wypadkowa zawsze do położenia równowagi),
- korzystać z bilansu energii $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$.

Jak rozpoznać zadanie

- „ciężarek na sprężynie / wahadło” + wykres okresowy $\rightarrow$ ruch harmoniczny,
- „w najniższym położeniu” $\rightarrow F_s = mg + kA$, bo wydłużenie to $\Delta l + A$,
- „największa prędkość” $\rightarrow$ w położeniu równowagi; „największe przyspieszenie” $\rightarrow$ w skrajnym,
- wykres $\frac{F_s}{F_g} \rightarrow$ wartość 1 odpowiada położeniu równowagi.

Teoria w pigułce

- $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, $v = \omega A \cos(\dots)$, $a = -\omega^2 x$ — przyspieszenie zawsze przeciwne do wychYLENIA.
- Siła harmoniczna: $F = -kx$; w położeniu równowagi wypadkowa = 0, w skrajnym — największa.
- Wahadło sprężynowe: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — okres **nie** zależy od amplitudy ani od g .
- Wahadło matematyczne: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ — nie zależy od masy (dla małych wychyleń).
- Pionowa sprężyna: położenie równowagi jest przesunięte o $\Delta l = \frac{mg}{k}$; drgania zachodzą wokół niego, a T się nie zmienia.
- Energia: $E = \frac{1}{2}kA^2$; E_k maksymalna w środku, E_p sprężystości — na krańcach; $v_{max} = \omega A$, $a_{max} = \omega^2 A$.

Σ Najważniejsze wzory

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$v_{max} = \omega A$$

$$a_{max} = \omega^2 A$$

$$\Delta l = \frac{mg}{k}$$

⚙️ Algorytm krok po kroku

1. Z wykresu odczytaj okres T (odległość między powtórzeniami) i amplitudę.
2. Policz $\omega = \frac{2\pi}{T}$, a z $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ wyznacz k lub m .
3. Zaznacz położenie równowagi — wszystkie siły odnoś do niego.
4. Do amplitudy użyj energii ($\frac{1}{2}kA^2$) albo $v_{max} = \omega A$.
5. Sprawdź: w skrajnym położeniu $v = 0$, ale a jest maksymalne.

⚠️ Najczęstsze pułapki

ŹLE	DOBRCZE	DLACZEGO
X T zależy od amplitudy	✓ nie zależy (izochronizm)	to cecha ruchu harmonicznego
X $F_s = kA$ w najniższym punkcie	✓ $F_s = k(\Delta l + A) = mg + kA$	sprężyna była już rozciągnięta
X v i a maksymalne w tym samym punkcie	✓ przesunięte o ćwierć okresu	v w środku, a na krańcu
X wahadło matematyczne zależy od masy	✓ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	masa się skraca

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 3.3 z matury 2024 i 5.2–5.3 z matury 2022

Ciężarek o masie $m = 0,15$ kg zawieszony na sprężynie drga pionowo z okresem $T = 0,8$ s. Amplituda drgań wynosi $A = 4$ cm ($g = 9,8 \frac{m}{s^2}$). Oblicz współczynnik sprężystości sprężyny oraz wartość siły sprężystości w najniższym położeniu ciężarka.

ROZWIĄZANIE

$$1. T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,15}{0,64} \approx 9,25 \frac{N}{m}.$$

$$2. \text{Wydłużenie w położeniu równowagi: } \Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{1,47}{9,25} \approx 0,159 \text{ m.}$$

$$3. \text{W najniższym położeniu wydłużenie wynosi } \Delta l + A, \text{ więc } F_s = k(\Delta l + A) = mg + kA.$$

$$4. F_s = 1,47 + 9,25 \cdot 0,04 \approx 1,47 + 0,37 = 1,84 \text{ N.}$$

Odpowiedź: $k \approx 9,25 \frac{N}{m}$; $F_s \approx 1,84 \text{ N}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — wyznaczenie k ze wzoru na okres,
- 2 pkt — obliczenie $k \approx 9,3 \frac{N}{m}$,
- 3 pkt — zauważenie, że wydłużenie to $\Delta l + A$,
- 4 pkt — obliczenie $F_s \approx 1,8 \text{ N}$.

Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2025	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2024	zad. 3.1–3.3	8 pkt	ciężarek na sprężynie: analiza wykresu, siły w punkcie P , siła sprężystości w najniższym położeniu
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	zad. 5.1–5.3	7 pkt	wykres $\frac{F_s}{F_g}(t)$: okres, współczynnik sprężystości k , amplituda

Trening: zadania **FZ11.1–FZ11.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnal:** Przy zmianie ośrodka stała jest f ; λ zmienia się tak jak v .

Co musisz umieć

- stosować $v = \lambda f$ i wiedzieć, że przy przejściu do innego ośrodka **częstotliwość się nie zmienia**,
- rysować powierzchnie falowe przy załamaniu i dyfrakcji,
- wyznaczać warunki wzmocnienia ($\Delta r = k\lambda$) i wygaszenia ($\Delta r = (k + \frac{1}{2})\lambda$),
- opisywać fale stojące: $L = n\frac{\lambda}{2}$, $f_n = \frac{nv}{2L}$,
 $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

Jak rozpoznać zadanie

- „fala przechodzi do innego ośrodka” → $f = \text{const}$, zmienia się λ i v ,
- „różnica dróg” → interferencja: całkowita wielokrotność λ = wzmocnienie,
- „struna zamocowana na obu końcach” → węzły na końcach, $L = n\frac{\lambda}{2}$,
- „wąska szczelina” → dyfrakcja: za szczeliną fala jest kolista (półkola).

Teoria w pigułce

- $v = \lambda f$; przy przejściu między ośrodkami f jest zachowana, więc $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$.
- Powierzchnie falowe są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali; odległość między sąsiednimi to λ .
- Prawo załamania fal: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$ — fala wchodząca do ośrodka o mniejszej prędkości załamuje się do normalnej.
- Interferencja: wzmocnienie dla $\Delta r = k\lambda$, wygaszenie dla $\Delta r = (k + \frac{1}{2})\lambda$ (źródła zgodne w fazie).
- Fala stojąca na strunie zamocowanej na obu końcach: $L = n\frac{\lambda}{2}$, czyli $f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, gdzie $\mu = \frac{m}{L}$.
- Dyfrakcja: im węższa szczelina w porównaniu z λ , tym silniejsze ugięcie; za bardzo wąską szczeliną fala jest kolista.

Σ Najważniejsze wzory

$$v = \lambda f$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\Delta r = k\lambda \text{ (wzmocnienie)}$$

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Algorytm krok po kroku

1. Wypisz, co jest stałe: przy zmianie ośrodka — częstotliwość.
2. Policz λ z odległości powierzchni falowych albo z $v = \lambda f$.
3. Do interferencji: policz różnicę dróg i podziel przez λ — wynik całkowity czy półkowy?
4. Do fal stojących: narysuj mod, policz ile połówek fali mieści się na długości.
5. Rysunki: zachowaj odstępy między powierzchniami falowymi proporcjonalne do λ .

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X zmiana f przy przejściu do innego ośrodka	✓ $f = \text{const}$	zmienia się λ
X $\Delta r = \lambda$ jako wygaszenie	✓ to wzmocnienie	wygaszenie dla $\frac{\lambda}{2}$
X $L = n\lambda$ dla struny	✓ $L = n\frac{\lambda}{2}$	na końcach są węzły
X w rysunku powierzchni falowe równoległe do kierunku ruchu	✓ prostopadłe	to czoła fali

🔗 Przykład wzorcowy typ zadania 4 z matury 2026

Fala ultradźwiękowa biegnie w ośrodku O_1 z prędkością v_1 i przechodzi do ośrodka O_2 , w którym $v_1 = 2v_2$. Dziewięć powierzchni falowych w ośrodku O_1 pokonuje odległość $9\lambda_1 = 13,5 \text{ cm}$ w czasie $\Delta t = 0,07 \text{ ms}$. Oblicz λ_1 , prędkość v_1 , częstotliwość fali oraz iloraz $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

ROZWIĄZANIE

- $\lambda_1 = \frac{13,5 \text{ cm}}{9} = 1,5 \text{ cm} = 0,015 \text{ m}$.
- $v_1 = \frac{0,135 \text{ m}}{7 \cdot 10^{-5} \text{ s}} \approx 1929 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- $f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{1929}{0,015} \approx 1,29 \cdot 10^5 \text{ Hz}$.
- Częstotliwość się nie zmienia, więc $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = 2$.

Odpowiedź: $\lambda_1 = 1,5 \text{ cm}$; $v_1 \approx 1929 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $f \approx 128,6 \text{ kHz}$; $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie λ_1 z odległości powierzchni falowych,
- 2 pkt — obliczenie prędkości fali,
- 3 pkt — obliczenie częstotliwości,
- 4 pkt — uzasadnienie stałości f i iloraz $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$.

📅 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 4.1, 4.3, 4.4	6 pkt	ultradźwięki: λ_1 z powierzchni falowych, dyfrakcja na szczelinie, załamanie przy $v_1 = 2v_2$
2025	zad. 3.1–3.2	4 pkt	fala dźwiękowa powietrze→woda: zmiana λ i bieg wiązki (prawo załamania)
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	zad. 10.1–10.2	6 pkt	fale stojące na strunie: rysunek trzech modów, iloraz częstotliwości $\frac{f_2}{f_1}$

Trening: zadania **FZ12.1–FZ12.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnal:** Zbliżanie → krótsza fala, wyższy dźwięk; iloraz λ skraca f_0 .

Co musisz umieć

- obliczać natężenie fali kulistej $I = \frac{P}{4\pi r^2}$ i porównywać natężenia w dwóch punktach,
- stosować wzory Dopplera dla ruchomego źródła i ruchomego obserwatora,
- jakościowo oceniać, czy częstotliwość odebrana rośnie, czy maleje,
- przeliczać zmianę długości fali na prędkość źródła.

Jak rozpoznać zadanie

- „karetka zbliża się / oddala” → efekt Dopplera,
- „ile razy ciszej w odległości...” → $I \propto \frac{1}{r^2}$,
- „ $\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \dots$ ” → dwa wzory Dopplera i iloraz,
- „poziom natężenia w dB” → $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$.

Teoria w pigułce

- Natężenie fali: $I = \frac{P}{S}$; dla fali kulistej $S = 4\pi r^2$, więc $I \propto \frac{1}{r^2}$.
- Fala płaska bez pochłaniania ma stałe natężenie — powierzchnia falowa się nie rozszerza.
- Efekt Dopplera, ruchome źródło: $f_{odb} = f_0 \frac{v}{v \mp v_{zr}}$ (minus — źródło się zbliża).
- Ruchomy obserwator: $f_{odb} = f_0 \frac{v \pm v_{obs}}{v}$ (plus — obserwator się zbliża).
- Przy zbliżaniu długość fali maleje ($\lambda = \frac{v - v_{zr}}{f_0}$), przy oddalaniu rośnie.
- Poziom natężenia: $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ dB, gdzie $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$; dziesięciokrotny wzrost I to +10 dB.

Σ Najważniejsze wzory

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

$$f_{odb} = f_0 \frac{v}{v \mp v_{zr}}$$

$$f_{odb} = f_0 \frac{v \pm v_{obs}}{v}$$

$$\lambda = \frac{v \mp v_{zr}}{f_0}$$

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Algorytm krok po kroku

1. Ustal, co się porusza: źródło czy obserwator (albo oba).
2. Wybierz znak: zbliżanie → częstotliwość rośnie, oddalanie → maleje.
3. Przy ilorazie $\frac{\lambda_B}{\lambda_A}$ napisz oba wyrażenia i podziel — f_0 się skróci.
4. Rozwiąż równanie względem v_{zr} .
5. Sprawdź jakościowo: czy wynik zgadza się z kierunkiem zmiany częstotliwości?

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X zmiana f zależy od przyspieszenia źródła	✓ zależy od prędkości	ale zmiana prędkości zmienia f w czasie
X $I \propto \frac{1}{r}$	✓ $I \propto \frac{1}{r^2}$	powierzchnia kuli rośnie z r^2
X znak w mianowniku „na czuja”	✓ sprawdź kierunkiem zmiany f	zbliżanie = wyższy dźwięk
X +10 dB to dwa razy głośniejsze	✓ to 10 razy większe natężenie	skala logarytmiczna

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 4.2 z matury 2024

Ambulans jedzie ruchem jednostajnym i emituje dźwięk o częstotliwości f_0 . Obserwator A stoi przed ambulansem, obserwator B — za nim. Stosunek długości fal odbieranych przez obserwatorów wynosi $\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = 1,2$. Prędkość dźwięku w powietrzu $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz prędkość ambulansu.

ROZWIĄZANIE

1. Przed ambulansem (zbliżanie): $\lambda_A = \frac{v - u}{f_0}$; za ambulansem: $\lambda_B = \frac{v + u}{f_0}$.
2. $\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{v + u}{v - u} = 1,2$.
3. $340 + u = 1,2(340 - u) \Rightarrow 340 + u = 408 - 1,2u \Rightarrow 2,2u = 68$.
4. $u = \frac{68}{2,2} \approx 30,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (czyli ok. $111 \frac{\text{km}}{\text{h}}$).

Odpowiedź: $v_{\text{ir}} \approx 30,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapisanie obu długości fal ze wzorów Dopplera,
- 2 pkt — zapisanie ilorazu i skrócenie f_0 ,
- 3 pkt — rozwiązanie równania,
- 4 pkt — wynik $\approx 31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ z jednostką.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 4.2	1 pkt	porównanie natężenia fali płaskiej w dwóch miejscach (bez pochłaniania)
2025	zad. 4.1–4.2	5 pkt	natężenie fali kulistej $I = \frac{P}{4\pi r^2}$ oraz interferencja fal z dwóch głośników
2024	zad. 4.1–4.2	6 pkt	ambulans: P/F o zmianie częstotliwości i obliczenie prędkości z $\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = 1,2$
2023	zad. 4.2–4.4	4 pkt	efekt Dopplera dla fali elektromagnetycznej: częstotliwość odebrana i prędkość sondy
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **FZ13.1–FZ13.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

4/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,0 pkt (0–6)

FORMY ZADAŃ

 P/F o przemianach (1–2 pkt) + wyznaczenie objętości/temperatur i narysowanie wykresu $p(V)$ (4 pkt)

Sygnal: Kelwiny, $\frac{pV}{T} = \text{const}$, praca = pole pod $p(V)$.

Co musisz umieć

- stosować równanie Clapeyrona $pV = nRT$ i równanie stanu $\frac{pV}{T} = \text{const}$,
- rozpoznawać przemiany na wykresach $p(V)$, $p(T)$ i $V(T)$ oraz przerysowywać cykl z jednego układu do drugiego,
- stosować związek średniej energii kinetycznej z temperaturą $\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT$,
- obliczać pracę siły parcia jako pole pod wykresem $p(V)$.

Jak rozpoznać zadanie

- „ustalona masa gazu” $\rightarrow \frac{pV}{T} = \text{const}$,
- odcinek prosty przez początek układu na $p(V) \rightarrow p \propto V$, więc $T \propto V^2$,
- „narysuj cykl na wykresie $p(V)$ ” $\rightarrow$ izoterma to hiperbola, izochora — odcinek pionowy, izobara — poziomy,
- „średnia energia kinetyczna cząsteczek” $\rightarrow$ zależy tylko od temperatury.

Teoria w pigułce

- $pV = nRT$; dla ustalonej masy gazu $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$ (temperatury w kelwinach!).
- Izoterma: $pV = \text{const}$ (hiperbola); izobara: $\frac{V}{T} = \text{const}$; izochora: $\frac{p}{T} = \text{const}$.
- Gdy $p \propto V$ (odcinek przez początek układu $p(V)$), to $T \propto pV \propto V^2$.
- Średnia energia kinetyczna cząsteczki: $\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT$ — zależy wyłącznie od temperatury, nie od rodzaju gazu.
- Ciśnienie w modelu kinetycznym: $p = \frac{1}{3}n_0m\overline{v^2}$, gdzie n_0 — koncentracja cząsteczek.
- Praca siły parcia gazu = pole pod wykresem $p(V)$; przy izochorze praca jest zerowa.

Σ Najważniejsze wzory

$$pV = nRT$$

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT$$

$$W = p\Delta V \text{ (izobara)}$$

$$p = \frac{1}{3}n_0m\overline{v^2}$$

Algorytm krok po kroku

1. Zamień temperatury na kelwiny i wypisz stan początkowy i końcowy.
2. Wskaż, która wielkość jest stała — to określa typ przemiany.
3. Zastosuj równanie stanu (skreślając stałą wielkość).
4. Przy rysowaniu cyklu zaznacz punkty i połącz je zgodnie z typem przemiany.
5. Pracę licz jako pole pod $p(V)$ — pamiętaj o znaku (rozprężanie: gaz wykonuje pracę).

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X temperatura w $^{\circ}\text{C}$ w równaniu Clapeyrona	✓ zawsze w kelwinach	$T[\text{K}] = t + 273,15$
X $p \propto V$ oznacza izotermę	✓ izoterma to $pV = \text{const}$	$p \propto V$ daje $T \propto V^2$
X praca w izochorze	✓ $W = 0$	$\Delta V = 0$
X średnia E_k zależy od masy cząsteczek	✓ tylko od T	cięższe cząsteczki są wolniejsze

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 6 z matury 2026

Ustalona masa gazu doskonałego przechodzi ze stanu $A = (V_A = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3; p_A = 2 \cdot 10^4 \text{ Pa})$ do stanu $B = (V_B = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3; p_B = 5 \cdot 10^4 \text{ Pa})$ wzdłuż odcinka prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Oblicz iloraz temperatur $\frac{T_B}{T_A}$ oraz pracę wykonaną przez gaz.

ROZWIĄZANIE

$$1. \frac{T_B}{T_A} = \frac{p_B V_B}{p_A V_A} = \frac{5 \cdot 10^4 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = \frac{1250}{200} = 6,25.$$

$$2. (\text{Zgodnie z } p \propto V: \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^2 = 2,5^2 = 6,25.)$$

$$3. \text{Praca to pole trapezu pod wykresem: } W = \frac{p_A + p_B}{2} (V_B - V_A).$$

$$4. W = \frac{2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^4}{2} \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 3,5 \cdot 10^4 \cdot 0,015 = 525 \text{ J}.$$

Odpowiedź: $\frac{T_B}{T_A} = 6,25; W = 525 \text{ J}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zastosowanie równania stanu do ilorazu temperatur,
- 2 pkt — wynik **6,25**,
- 3 pkt — rozpoznanie, że praca to pole trapezu,
- 4 pkt — obliczenie $W = 525 \text{ J}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 6.1–6.2	2 pkt	przemiana $p \propto V$ (odcinek przez początek układu): P/F i iloraz $\frac{T_B}{T_A}$
2025	zad. 6.1–6.2	6 pkt	cykl $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ na wykresie $p(T)$: objętości i przerysowanie na wykres $p(V)$
2024	—	0 pkt	przemiany wewnątrz zadania 8 (cykl termodynamiczny)
2023	zad. 6.1	1 pkt	P/F: izochora ($p \propto T$) i izobara ($V \propto$ średnia E_k)
2022	zad. 6.1	1 pkt	iloraz prac siły parcia gazu w dwóch drogach przemian

Trening: zadania **FZ14.1–FZ14.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

5/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 3,6 pkt (2–4)

FORMY ZADAŃ

obliczenie ciepła pobranego/oddanego w przemianie lub cyklu (2–4 pkt), zawsze z

$$C_V = \frac{3}{2}R$$

Sygnal: $Q = \Delta U + W_{\text{gazu}}$; $\Delta U = \frac{3}{2}\Delta(pV)$ dla gazu jednoatomowego.

Co musisz umieć

- stosować I zasadę termodynamiki
 $\Delta U = Q + W$ (gdzie W — praca wykonana **nad** gazem),
- obliczać $\Delta U = nC_V\Delta T = \frac{3}{2}nR\Delta T$ dla gazu jednoatomowego,
- liczyć ciepło w przemianach: izochora $Q = \Delta U$, izobara $Q = nC_p\Delta T$, izoterma $Q = -W$,
- analizować cykle: praca = pole wewnątrz cyklu,
 $\Delta U_{\text{cyklu}} = 0$, sprawność $\eta = \frac{W}{Q_{\text{pob}}}$.

Jak rozpoznać zadanie

- „oblicz ciepło pobrane” → $Q = \Delta U + W_{\text{gazu}}$,
- „energia wewnętrzna” → zależy tylko od temperatury (dla gazu doskonałego),
- „w całym cyklu” → $\Delta U = 0$, więc $Q_{\text{netto}} = W_{\text{netto}}$,
- „ $C_V = \frac{3}{2}R$ ” w danych → gaz jednoatomowy,
 $C_p = \frac{5}{2}R$.

Teoria w pigułce

- I zasada: $\Delta U = Q + W$, gdzie W — praca sił zewnętrznych nad gazem. Gdy gaz się rozpręża, $W < 0$, a gaz wykonuje pracę $W_{\text{gazu}} = p\Delta V$.
- Energia wewnętrzna gazu doskonałego zależy **wyłącznie** od temperatury: $U = \frac{3}{2}nRT$ (jednoatomowy).
- Izochora: $W = 0$, więc $Q = \Delta U = nC_V\Delta T$.
- Izobara: $Q = nC_p\Delta T$, gdzie $C_p = C_V + R$; część ciepła idzie na pracę $p\Delta V = nR\Delta T$.
- Izoterma: $\Delta U = 0$, więc całe pobrane ciepło zamienia się w pracę gazu.
- W cyklu zamkniętym $\Delta U = 0$: praca netto równa się różnicy ciepła pobranego i oddanego; sprawność
 $\eta = \frac{W}{Q_{\text{pob}}} = 1 - \frac{Q_{\text{odd}}}{Q_{\text{pob}}}$.

Σ Najważniejsze wzory

$$\Delta U = Q + W$$

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

$$W_{\text{gazu}} = p\Delta V$$

$$C_p = C_V + R$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{odd}}}{Q_{\text{pob}}}$$

$$\eta_C = 1 - \frac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{g}}}$$

Algorytm krok po kroku

1. Narysuj lub wyobraź przemianę na wykresie $p(V)$ — stąd odczytasz znak pracy.
2. Policz ΔT z równania stanu (często przez iloraz pV).
3. $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$; W_{gazu} = pole pod wykresem.
4. $Q = \Delta U + W_{\text{gazu}}$ — znak dodatni oznacza ciepło pobrane.
5. W cyklu zsumuj przemiany i sprawdź, czy $\sum \Delta U = 0$.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
✗ $\Delta U = Q$ zawsze	✓ tylko w izochorze	w innych przemianach dochodzi praca
✗ znak pracy „na oko”	✓ rozprężanie: gaz wykonuje pracę	$W_{\text{gazu}} > 0$
✗ $Q = 0$ w izotermie	✓ $\Delta U = 0$, ale $Q = W_{\text{gazu}}$	ciepło jest wymieniane
✗ η liczone z pracy i ciepła oddanego	✓ $\eta = \frac{W}{Q_{\text{pob}}}$	w mianowniku ciepło pobrane

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 6.3 z matury 2026

Gaz doskonały jednoatomowy ($C_V = \frac{3}{2}R$) przechodzi ze stanu $A = (V_A = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3; p_A = 2 \cdot 10^4 \text{ Pa})$ do stanu $B = (V_B = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3; p_B = 5 \cdot 10^4 \text{ Pa})$ po odcinku prostej przechodzącej przez początek układu. Oblicz ciepło Q_{AB} pobrane przez gaz.

ROZWIĄZANIE

- Praca gazu (pole trapezu): $W_{\text{gazu}} = \frac{p_A + p_B}{2} (V_B - V_A) = 3,5 \cdot 10^4 \cdot 0,015 = 525 \text{ J}$.
- Zmiana energii wewnętrznej: $\Delta U = \frac{3}{2} (p_B V_B - p_A V_A)$, bo $nRT = pV$.
- $\Delta U = \frac{3}{2} (1250 - 200) = \frac{3}{2} \cdot 1050 = 1575 \text{ J}$.
- $Q_{AB} = \Delta U + W_{\text{gazu}} = 1575 + 525 = 2100 \text{ J}$.

Odpowiedź: $Q_{AB} = 2100 \text{ J}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie pracy jako pola pod wykresem,
- 2 pkt — zapisanie $\Delta U = \frac{3}{2} \Delta(pV)$,
- 3 pkt — obliczenie $\Delta U = 1575 \text{ J}$,
- 4 pkt — wynik $Q = 2100 \text{ J}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 6.3	4 pkt	ciepło Q_{AB} pobrane w przemianie $p \propto V$ (praca + zmiana energii wewnętrznej)
2025	zad. 6.3	2 pkt	ciepło oddane do chłodnicy w cyklu $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ w zależności od T_1, n, R
2024	zad. 8.1–8.2	4 pkt	ciepło pobrane w cyklu ($13,5 p_1 V_1$) i $ \Delta U $ w wybranej przemianie
2023	zad. 6.2–6.3	4 pkt	porównanie przyrostów temperatury i praca siły parcia w izobarze
2022	zad. 6.2–6.3	4 pkt	porównanie ΔU dwiema drogami i wyprowadzenie wzoru na ciepło przez p_1, V_1, C_V, R

Trening: zadania **FZ15.1–FZ15.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

Sygnal: Wektorowo, nie skalarnie; ładunek po przekątnej daje pole **2** razy słabsze.

Co musisz umieć

- stosować prawo Coulomba $F = k \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2}$ i wzór $E = k \frac{|Q|}{r^2}$,
- dodawać **wektorowo** natężenia pól od kilku ładunków (rozkład na składowe),
- rysować wektor wypadkowego natężenia pola i linie pola,
- korzystać z symetrii kwadratu: przekątna $a\sqrt{2}$, składowe pod kątem 45° .

Jak rozpoznać zadanie

- „ładunki w wierzchołkach kwadratu / trójkąta” → superpozycja wektorowa,
- „w którym punkcie pole jest zerowe” → przyrównanie wartości natężeń,
- „narysuj wektor $\vec{E}$ ” → od ładunku dodatniego **na zewnątrz**, do ujemnego — do niego,
- „siła działająca na ładunek próbny” → $\vec{F} = q\vec{E}$.

Teoria w pigułce

- $F = k \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2}$, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$.
- Natężenie pola: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, dla ładunku punktowego $E = k \frac{|Q|}{r^2}$.
- Zwrot $\vec{E}$: od ładunku dodatniego, do ujemnego. Wektory od różnych ładunków **dobajemy wektorowo**.
- W kwadracie o boku a : przekątna ma długość $a\sqrt{2}$, więc pole od ładunku „po przekątnej” jest **2** razy słabsze niż od sąsiedniego przy tym samym $|Q|$.
- Wygodna metoda: rozłóż każdy wektor na składowe x i y , dodaj osobno, a potem policz $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$.
- Linie pola zaczynają się na ładunkach dodatnich, kończą na ujemnych i nigdy się nie przecinają.

Σ Najważniejsze wzory

$$F = k \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2}$$

$$E = k \frac{|Q|}{r^2}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$k \approx 9 \cdot 10^9$$

Algorytm krok po kroku

1. Narysuj wektory natężenia od każdego ładunku osobno (uwaga na zwroty).
2. Policz wartości: $E_i = k \frac{|Q_i|}{r_i^2}$ — sprawdź odległości (bok czy przekątna).
3. Rozłóż na składowe x, y (kąty 45° dla przekątnych).
4. Dodaj składowe i policz wartość wypadkową.
5. Zaznacz wynik na rysunku — CKE punktuje także kierunek.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X dodawanie wartości $\vec{E}$ zamiast wektorów	✓ superpozycja wektorowa	prawie zawsze kosztuje punkty
X przekątna $= a$	✓ $a\sqrt{2}$, a E maleje 2 razy	$r^2 = 2a^2$
X zwrot $\vec{E}$ dla ładunku ujemnego „na zewnątrz”	✓ do ładunku	przyciąga ładunek próbny dodatni
X E w środku kwadratu z 4 równymi ładunkami $\neq 0$	✓ $= 0$ z symetrii	warto szukać symetrii

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 7.2 z matury 2026

W trzech wierzchołkach kwadratu o boku a umieszczono ładunki: $Q_1 = +Q$ (lewy dolny), $Q_2 = -Q$ (lewy górny), $Q_3 = +Q$ (prawy górny). Wyznacz wartość natężenia pola elektrycznego w pustym wierzchołku P (prawy dolny) w zależności od Q , a i stałej k .

ROZWIĄZANIE

- Od Q_1 (odległość a): $E_1 = \frac{kQ}{a^2}$, zwrot poziomo w prawo (od ładunku dodatniego).
- Od Q_3 (odległość a): $E_3 = \frac{kQ}{a^2}$, zwrot pionowo w dół.
- Od Q_2 (przekątna $a\sqrt{2}$): $E_2 = \frac{kQ}{2a^2}$, zwrot wzdłuż przekątnej **do** ładunku ujemnego, czyli składowe $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- $E_x = \frac{kQ}{a^2} - \frac{kQ}{2a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{kQ}{a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, a E_y ma tę samą wartość ze znakiem minus.
- $E_P = \sqrt{2} \cdot \frac{kQ}{a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{kQ}{a^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \approx 0,91 \frac{kQ}{a^2}$.

Odpowiedź: $E_P = \frac{kQ}{a^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \approx 0,91 \frac{kQ}{a^2}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — poprawne wartości i zwroty wszystkich trzech wektorów,
- 2 pkt — uwzględnienie odległości $a\sqrt{2}$ dla ładunku po przekątnej,
- 3 pkt — rozłożenie na składowe i ich zsumowanie,
- 4 pkt — poprawny wzór końcowy.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 7.1–7.2	5 pkt	trzy ładunki $(+Q, -Q, +Q)$ w wierzchołkach kwadratu — kierunek i wartość $\vec{E}_P$
2025	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2024	zad. 6	3 pkt	trzy ładunki ujemne w wierzchołkach kwadratu — wektor $\vec{E}_S$ w środku i wzór na jego wartość
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania

🔑 **Sygnal:** $qU = \Delta E_k$; przy v bliskim c licz energię relatywistycznie.

🔧 Co musisz umieć

- stosować $W = qU$ i $qU = \Delta E_k$ dla cząstki rozpędzanej w polu elektrycznym,
- liczyć natężenie pola między okładkami:
 $E = \frac{U}{d}$,
- stosować $C = \frac{Q}{U}$, $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$ i
 $E_C = \frac{1}{2} CU^2$,
- łączyć kondensatory szeregowo i równolegle.

🔍 Jak rozpoznać zadanie

- „rozpędzono w polu elektrycznym o napięciu U ”
→ $qU = \Delta E_k$,
- „między okładkami kondensatora” → pole
jednorodne, $E = \frac{U}{d}$,
- „energia zgromadzona w kondensatorze” →
 $\frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$,
- elektronowolt w danych → $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$; liczbowo $E[\text{eV}] = U[\text{V}]$ dla ładunku
elementarnego.

📘 Teoria w pigułce

- Praca pola: $W = qU$; napięcie to praca na jednostkę ładunku: $U = \frac{W}{q}$.
- Potencjał ładunku punkowego $V = k \frac{Q}{r}$ dodaje się **skalar**nie (w odróżnieniu od natężenia).
- Pole jednorodne między okładkami: $E = \frac{U}{d}$, siła na ładunek $F = qE$ jest stała.
- Cząstka rozpędzana: $qU = \Delta E_k$; dla elektronu wygodnie liczyć w eV — napięcie 1000 V daje energię 1 keV.
- Kondensator: $C = \frac{Q}{U}$, energia $E_C = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C}$.
- Łączenie: równolegle $C = C_1 + C_2$ (jak opory szeregowo), szeregowo $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

Σ Najważniejsze wzory

$$W = qU$$

$$E = \frac{U}{d}$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

$$E_C = \frac{1}{2} CU^2$$

$$V = k \frac{Q}{r}$$

⚙️ Algorytm krok po kroku

1. Ustal, czy pole jest jednorodne (kondensator), czy centralne (ładunek punktowy).
2. Do ruchu cząstki użyj bilansu energii: $qU = \Delta E_k$ (przy v bliskim c — energia relatywistyczna).
3. Do kondensatorów: sprawdź, co jest stałe — napięcie (podłączony) czy ładunek (odłączony).
4. Przelicz jednostki: μF , nC, kV.
5. Sprawdź sens: energia cząstki w eV powinna być rzędu napięcia w woltach.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X dodawanie potencjałów wektorowo	✓ potencjał jest skalarem	natężenie jest wektorem
X C zależy od Q i U	✓ zależy od geometrii	$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$
X przy odłączonym źródle stałe U	✓ stały jest Q	wtedy U się zmienia
X 1 eV jako jednostka napięcia	✓ to jednostka energii	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

🔧 Przykład wzorcowy typ zadania 10.2 z matury 2024 i 10.3 z matury 2023

Elektron rozpędzono w polu elektrycznym z prędkości $v = 0$ do $v = 2,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Energia spoczynkowa elektronu $E_0 \approx 5,11 \cdot 10^5 \text{ eV}$, $c = 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Oblicz napięcie, w którym rozpędzono elektron.

ROZWIĄZANIE

- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{0,5556}} \approx 1,342.$
- $E_k = (\gamma - 1)E_0 = 0,342 \cdot 5,11 \cdot 10^5 \text{ eV} \approx 1,747 \cdot 10^5 \text{ eV}.$
- Z $eU = E_k$ wynika, że liczbowo $U \approx 1,75 \cdot 10^5 \text{ V}.$

Odpowiedź: $U \approx 1,75 \cdot 10^5 \text{ V}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie czynnika γ ,
- 2 pkt — obliczenie energii kinetycznej,
- 3 pkt — zastosowanie $eU = E_k$ i wynik $\approx 1,7 \cdot 10^5 \text{ V}.$

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2025	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2024	zad. 10.2	3 pkt	napięcie U_{AB} rozpędzające elektron do $2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (z energią relatywistyczną)
2023	zad. 10.3	1 pkt	napięcie, w którym rozpędzono elektron o zadanej energii
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **FZ17.1–FZ17.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

FZ18 Prąd stały: obwody, opór i moc

PRIORYTET

A+

CZĘSTOTLIWOŚĆ

2/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 2,6 pkt (0–7)

FORMY ZADAŃ

wiązka 6–7 pkt: P/F o obwodzie, analiza zmian po przerwaniu gałęzi, obliczenia z oporem właściwym

 **Sygnal:** Najpierw opór zastępczy, potem prąd główny, dopiero na końcu gałęzie.

Co musisz umieć

- obliczać opór zastępczy połączeń szeregowych i równoległych,
- stosować prawa Kirchhoffa i równanie obwodu z SEM: $\varepsilon = I(R + r)$,
- liczyć moc $P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ i energię $W = Pt$,
- stosować $R = \rho \frac{l}{S}$ i zależność oporu od temperatury $R = R_0(1 + \alpha \Delta T)$.

Jak rozpoznać zadanie

- „amperomierz idealny” → opór zerowy;
- „woltomierz idealny” → opór nieskończony,
- „przerwano gałąź / zwarto opornik” → przelicz opór zastępczy od nowa,
- „żarówka 60 W, 230 V” → $R = \frac{U^2}{P}$ w warunkach pracy,
- „drut o średnicy d ” → $S = \frac{\pi d^2}{4}$ (a nie πd^2).

Teoria w pigułce

- Szeregowo: $R = R_1 + R_2$, prąd wspólny. Równoległe: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, napięcie wspólne.
- Prawa Kirchhoffa: suma prądów w węźle = 0; suma napięć w oczku = 0.
- Obwód z ogniwem: $\varepsilon = I(R_z + r)$; napięcie na zaciskach $U = \varepsilon - Ir$ — maleje przy większym prądzie.
- Moc: $P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$. Przy stałym napięciu większą moc wydzielą **mniejszy** opór.
- $R = \rho \frac{l}{S}$; dla metali opór rośnie z temperaturą: $R = R_0(1 + \alpha \Delta T)$.
- Przerwanie jednej gałęzi połączenia równoległego zwiększa opór zastępczy, więc prąd główny maleje.

Σ Najważniejsze wzory

$$U = IR$$

$$R = R_1 + R_2$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta T)$$

$$\varepsilon = I(R + r)$$

Algorytm krok po kroku

1. Narysuj schemat i uprość: zaznacz, co jest szeregowo, a co równoległe.
2. Policz opór zastępczy i prąd główny.
3. Rozdziel prąd/napięcie na gałęzi (w równoległym — proporcjonalnie do $\frac{1}{R}$).
4. Po zmianie w obwodzie (przerwanie, zwarcie) powtórz rachunek od nowa.
5. Sprawdź bilans mocy: suma mocy na elementach = moc źródła.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times R = R_1 + R_2$ dla połączenia równoległego	$\checkmark \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$	opór zastępczy jest mniejszy od najmniejszego
$\times S = \pi d^2$	$\checkmark S = \frac{\pi d^2}{4}$	to średnica, nie promień
$\times$ większy opór = większa moc przy stałym U	$\checkmark$ odwrotnie	$P = \frac{U^2}{R}$
$\times$ pomijanie oporu wewnętrznego	$\checkmark U = \varepsilon - Ir$	przy dużych prądach istotne

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 8.2 z matury 2023

Żarówka o mocy $P = 60$ W zasilana napięciem $U = 230$ V ma włókno wolframowe o oporze w temperaturze 300 K równym $R_0 = 63 \Omega$. Temperaturowy współczynnik oporu wolframu wynosi $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{K}$. Oblicz temperaturę świecącego włókna.

ROZWIĄZANIE

- Opór w czasie pracy: $R = \frac{U^2}{P} = \frac{52900}{60} \approx 881,7 \Omega$.
- $R = R_0(1 + \alpha \Delta T) \Rightarrow \Delta T = \frac{\frac{R}{R_0} - 1}{\alpha}$.
- $\frac{R}{R_0} = \frac{881,7}{63} \approx 13,995$, więc $\Delta T = \frac{12,995}{4,5 \cdot 10^{-3}} \approx 2888$ K.
- $T = 300 + 2888 \approx 3188$ K (rzęd wielkości zgadza się z temperaturą pracy żarówki).

Odpowiedź: $T \approx 3190$ K

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie oporu w czasie pracy z P i U ,
- 2 pkt — zapisanie zależności oporu od temperatury,
- 3 pkt — obliczenie ΔT i temperatury końcowej.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2025	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2024	zad. 7.1–7.3	6 pkt	obwód z amperomierzem: P/F, moc na R_3 po przerwaniu obwodu, iloraz wskazań $\frac{I_{A2}}{I_{A1}}$
2023	zad. 8.1–8.3	7 pkt	żarówka wolframowa: współczynnik α , temperatura włókna, długość drutu z ρ
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **FZ18.1–FZ18.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnal:** $qvB = \frac{mv^2}{r}$; w okresie prędkość się skraca.

Co musisz umieć

- stosować $F = qvB \sin \alpha$ i wyznaczać kierunek siły regułą lewej/prawej dłoni,
- wyprowadzać promień i okres obiegu: $r = \frac{mv}{qB}$,
 $T = \frac{2\pi m}{qB}$,
- uzasadniać, że siła Lorentza nie wykonuje pracy (jest prostopadła do prędkości),
- stosować $F = BIl \sin \alpha$ oraz $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ dla prostoliniowego przewodnika.

Jak rozpoznać zadanie

- „cząstka porusza się po okręgu w polu magnetycznym” $\rightarrow qvB = \frac{mv^2}{r}$,
- „okres obiegu” $\rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB}$ — **nie zależy** od prędkości,
- „wykaż, że wartość prędkości jest stała” $\rightarrow$ siła prostopadła do $\vec{v}$, więc $\vec{W} = 0$,
- „linie pola to okręgi wokół przewodnika” $\rightarrow B \propto \frac{1}{r}$.

Teoria w pigułce

- Siła Lorentza: $F = |q|vB \sin \alpha$, zawsze **prostopadła** do $\vec{v}$ i do $\vec{B}$.
- Dla $\vec{v} \perp \vec{B}$ ruch jest jednostajny po okręgu: $|q|vB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B}$.
- Okres $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{|q|B}$ — nie zależy od v ani od r (zasada działania cyklotronu).
- Siła Lorentza nie wykonuje pracy, więc energia kinetyczna i wartość prędkości się nie zmieniają.
- Siła elektrodynamiczna: $F = BIl \sin \alpha$ — na przewodnik z prądem w polu magnetycznym.
- Pole prostoliniowego przewodnika: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ — maleje odwrotnie proporcjonalnie do odległości; linie pola są współśrodkowymi okręgami.

Σ Najważniejsze wzory

$$F = qvB \sin \alpha$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$F = BIl \sin \alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Algorytm krok po kroku

1. Ustal kąt między $\vec{v}$ (lub przewodnikiem) a $\vec{B}$.
2. Przyrównaj siłę Lorentza do dośrodkowej, jeśli ruch jest po okręgu.
3. Wyznacz r lub T ; pamiętaj, że T nie zależy od prędkości.
4. Kierunek siły określ regułą dłoni — i opisz go słowami w odpowiedzi.
5. Sprawdź jednostki: $1 \text{ T} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X T zależy od prędkości cząstki	✓ $T = \frac{2\pi m}{qB}$	szybsza cząstka ma większy promień
X siła Lorentza zmienia energię	✓ $W = 0$	jest prostopadła do prędkości
X $B \propto \frac{1}{r^2}$ dla przewodnika	✓ $B \propto \frac{1}{r}$	to nie pole punktowe
X pominęły $\sin \alpha$	✓ $F = BIl \sin \alpha$	dla $\vec{v} \parallel \vec{B}$ siła znika

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 9 z matury 2026

Elektron porusza się po okręgu w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 1,70$ mT, przy czym wektor prędkości jest prostopadły do $\vec{B}$, a prędkość jest znacznie mniejsza od c . Oblicz okres obiegu elektronu ($m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C).

ROZWIĄZANIE

- Siła Lorentza pełni rolę dośrodkowej: $evB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{eB}$.
- $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{eB}$ — prędkość się skraca.
- $T = \frac{2\pi \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 1,70 \cdot 10^{-3}} \approx 2,1 \cdot 10^{-8}$ s.

Odpowiedź: $T \approx 2,1 \cdot 10^{-8}$ s

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — przyrównanie siły Lorentza do dośrodkowej,
- 2 pkt — wyprowadzenie $T = \frac{2\pi m}{eB}$ (bez v),
- 3 pkt — poprawny wynik liczbowy z jednostką.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 9	3 pkt	okres obiegu elektronu po okręgu w polu $B = 1,70$ mT
2025	zad. 8	3 pkt	pole magnetyczne prostoliniowego przewodnika: porównanie B_1 i B_2 dla $r_2 = 4r_1$
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	zad. 7.1–7.3	7 pkt	proton na dwóch półokręgach: P/F, wykazanie stałości prędkości, obliczenie B_{CD}
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **FZ19.1–FZ19.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnal:** Moc średnia z wartości skutecznych: $P = \frac{U_0^2}{2R}$.

Co musisz umieć

- stosować prawo Faradaya $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ i regułę Lenza,
- obliczać strumień $\Phi = BS \cos \alpha$ i jego zmiany,
- przeliczać wartości skuteczne: $U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$,
 $P_{sr} = \frac{U_0^2}{2R}$,
- stosować równanie transformatora $\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

Jak rozpoznać zadanie

- „zmienia się strumień / ramka wysuwana z pola” → SEM indukcji,
- „w którą stronę płynie prąd indukcyjny” → reguła Lenza (przeciwdziała zmianie),
- „ $U(t) = U_0 \sin \omega t$ ” → $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$,
- „transformator podwyższający” → więcej zwojów po stronie wtórnej.

Teoria w pigułce

- Prawo Faradaya: $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, gdzie $\Phi = BS \cos \alpha$; dla N zwojów mnożymy przez N .
- Reguła Lenza: prąd indukcyjny płynie tak, by **przeciwdziałać** zmianie, która go wywołała (to konsekwencja zasady zachowania energii).
- Prętem o długości l poruszającym się z prędkością v prostopadle do $\vec{B}$: $\varepsilon = Blv$.
- Prąd przemienny: $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$, $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Wartości skuteczne: $U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$, $I_{sk} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$; moc średnia $P = U_{sk} I_{sk} = \frac{U_0^2}{2R}$.
- Transformator idealny: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{I_2}{I_1}$ — moc się nie zmienia.

Σ Najważniejsze wzory

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$\Phi = BS \cos \alpha$$

$$\varepsilon = Blv$$

$$U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$P_{sr} = \frac{U_0^2}{2R}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Algorytm krok po kroku

1. Ustal, co się zmienia: B , pole powierzchni czy kąt.
2. Policz $\Delta\Phi$ i podziel przez czas — to wartość SEM.
3. Kierunek prądu wyznacz regułą Lenza (pole prądu przeciwdziała zmianie).
4. Dla prądu przemiennego wypisz U_0 i ω z wzoru, a potem policz f i U_{sk} .
5. Moc średnią licz z wartości skutecznych, nigdy z amplitud.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
$\times P = \frac{U_0^2}{R}$	$\checkmark P_{sr} = \frac{U_0^2}{2R}$	moc liczymy z wartości skutecznych
$\times f = \omega$	$\checkmark f = \frac{\omega}{2\pi}$	radiany na sekundę to nie herce
$\times$ prąd indukcyjny „wzmacnia” zmianę	$\checkmark$ przeciwdziała jej	reguła Lenza
$\times$ transformator zwiększa moc	$\checkmark$ moc się nie zmienia	rośnie napięcie, maleje prąd

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 8 z matury 2022

Prądnica wytwarza napięcie $U(t) = 7,50 \text{ V} \cdot \sin(10,0 \frac{1}{s} \cdot t)$ i zasila opornik $R = 4,00 \Omega$. Oblicz częstotliwość prądu w obwodzie oraz średnią moc wydzielaną na oporniku w czasie jednego okresu.

ROZWIĄZANIE

- $\omega = 10,0 \frac{1}{s}$, więc $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{6,283} \approx 1,59 \text{ Hz}$.
- $U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{7,50}{1,414} \approx 5,30 \text{ V}$.
- $P = \frac{U_{sk}^2}{R} = \frac{28,125}{4} \approx 7,03 \text{ W}$ (równoważnie $P = \frac{U_0^2}{2R}$).

Odpowiedź: $f \approx 1,59 \text{ Hz}$; $P \approx 7,03 \text{ W}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — odczytanie ω i obliczenie częstotliwości,
- 2 pkt — obliczenie wartości skutecznej napięcia,
- 3 pkt — obliczenie mocy średniej $\approx 7,0 \text{ W}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2025	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	zad. 8.1–8.2	3 pkt	prądnica $U(t) = 7,50 \text{ V} \cdot \sin(10,0 \frac{1}{s} \cdot t)$: częstotliwość i średnia moc na oporniku

Trening: zadania **FZ20.1–FZ20.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnal:** Kąty od normalnej; w soczewce $x + y = d$ i $y = px$.

Co musisz umieć

- stosować prawo Snella $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$ oraz $n = \frac{c}{v}$,
- obliczać kąt graniczny $\sin \alpha_{gr} = \frac{n_2}{n_1}$ i rozpoznawać całkowite wewnętrzne odbicie,
- stosować równanie soczewki $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ oraz powiększenie $p = \frac{y}{x}$,
- rysować bieg promieni charakterystycznych i wyznaczać konstrukcyjnie ognisko.

Jak rozpoznać zadanie

- „światło wychodzi tylko przez fragment powierzchni” → kąt graniczny,
- „ostry obraz na ekranie” → obraz rzeczywisty, x i y dodatnie,
- „powiększenie p ” → $y = px$, podstaw do równania soczewki,
- „wiązka równoległa po przejściu” → promienie wychodzą z ogniska (albo do niego zbiegają).

Teoria w pigułce

- $n = \frac{c}{v}$ — im większy współczynnik załamania, tym wolniej biegnie w nim światło.
- Prawo Snella: $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$; przejście do ośrodka gęstszego optycznie = załamanie do normalnej.
- Kąt graniczny (tylko przy przejściu do ośrodka rzadszego): $\sin \alpha_{gr} = \frac{n_2}{n_1}$; powyżej niego zachodzi całkowite wewnętrzne odbicie.
- Równanie soczewki: $\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, powiększenie $p = \frac{y}{x} = \frac{h'}{h}$; dla soczewki rozpraszającej $f < 0$.
- Zdolność skupiająca $Z = \frac{1}{f}$ (w dioptriach); dla soczewek stykających się $Z = Z_1 + Z_2$.
- Promienie charakterystyczne: równoległy do osi → przez ognisko; przez środek → bez załamania; przez ognisko → równoległy do osi.

Σ Najważniejsze wzory

$$n = \frac{c}{v}$$

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

$$\sin \alpha_{gr} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$p = \frac{y}{x}$$

$$Z = \frac{1}{f}$$

Algorytm krok po kroku

1. Narysuj normalną w punkcie padania i zaznacz kąt **od normalnej**.
2. Sprawdź, w którą stronę idzie światło (do gęstszego czy rzadszego ośrodka).
3. Do soczewki: wypisz x , y , f i to, co jest szukane; użyj $p = \frac{y}{x}$, jeśli podano powiększenie.
4. Rozwiąż równanie; przy dwóch położeniach soczewki skorzystaj z symetrii $x \leftrightarrow y$.
5. Sprawdź: obraz rzeczywisty ma $y > 0$, pozorny $y < 0$.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X kąty liczone od powierzchni	✓ od normalnej	to najczęstszy błąd w rysunkach
X kąt graniczny przy wejściu do szkła	✓ tylko przy wyjściu do rzadszego	wymaga $n_1 > n_2$
X $p = \frac{x}{y}$	✓ $p = \frac{y}{x}$	obraz do przedmiotu
X f dodatnia dla rozpraszającej	✓ $f < 0$	znak decyduje o typie soczewki

🔧 Przykład wzorcowy typ zadania 9 z matury 2022

Na ławie optycznej ustawiono przedmiot i ekran w odległości $d = 49$ cm. Przy pewnym położeniu soczewki skupiającej na ekranie powstał ostry obraz powiększony $p = 2,5$ razy. Oblicz ogniskową soczewki oraz podaj drugie położenie soczewki, przy którym na ekranie powstanie ostry obraz.

ROZWIĄZANIE

- $x + y = 49$ cm oraz $y = 2,5x$, więc $3,5x = 49 \Rightarrow x = 14$ cm, $y = 35$ cm.
- $\frac{1}{f} = \frac{1}{14} + \frac{1}{35} = \frac{5+2}{70} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$, czyli $f = 10$ cm.
- Równanie soczewki jest symetryczne względem zamiany $x \leftrightarrow y$, więc drugie ostre położenie to $x_2 = 35$ cm (obraz pomniejszony $p = 0,4$).

Odpowiedź: $f = 10$ cm; drugie położenie: 35 cm od przedmiotu

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zapisanie układu $x + y = d$, $y = px$,
- 2 pkt — obliczenie x i y ,
- 3 pkt — obliczenie $f = 10$ cm,
- 4 pkt — wskazanie drugiego położenia z uzasadnieniem symetrii.

📅 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 8.1–8.2	4 pkt	kula szklana ($n = 1,50$): kąt φ z kąta granicznego oraz zmiana po zanurzeniu w wodzie
2025	zad. 7.1–7.2	5 pkt	soczewka: P/F o obrazie oraz konstrukcyjne wyznaczenie położenia soczewki i ogniska
2024	zad. 9.1–9.2	4 pkt	układ dwóch soczewek o wspólnym ognisku: szerokość wiązki i rysunek biegu promieni
2023	zad. 9.1–9.2	6 pkt	krążek szklany: bieg promienia po odbiciu i załamaniu oraz prędkość światła w szkłe
2022	zad. 9.1–9.2	4 pkt	ławka optyczna: ogniskowa z $d = 49$ cm i powiększenia $p = 2,5$; drugie położenie soczewki

Trening: zadania **FZ21.1–FZ21.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnal:** Najpierw połowa, potem $\cos^2$; amplituda to pierwiastek z natężenia.

Co musisz umieć

- stosować warunek wzmocnienia w doświadczeniu Younga i wzór $x = \frac{\lambda L}{d}$,
- stosować równanie siatki dyfrakcyjnej $d \sin \theta = k\lambda$,
- stosować prawo Malusa $I = I_1 \cos^2 \alpha$ oraz regułę $I_1 = \frac{1}{2}I$ dla światła niespolaryzowanego,
- wiązać natężenie z amplitudą: $I \propto E^2$.

Jak rozpoznać zadanie

- „dwie szczeliny, prążki na ekranie” → interferencja Younga,
- „siatka o N rysach na milimetr” → $d = \frac{1}{N}$,
- „światło niespolaryzowane pada na polaryzator” → po nim $I_1 = \frac{1}{2}I$,
- „dwa polaryzatory pod kątem α ” → prawo Malusa.

Teoria w pigułce

- Doświadczenie Younga: jasne prążki dla $d \sin \theta = k\lambda$; odległość prążków na ekranie $x = \frac{\lambda L}{d}$.
- Siatka dyfrakcyjna: $d \sin \theta = k\lambda$, gdzie d to stała siatki; im mniejsze d , tym większe kąty ugięcia.
- Światło niespolaryzowane po pierwszym polaryzatorze ma natężenie $I_1 = \frac{1}{2}I$ (uśrednienie po kątach).
- Prawo Malusa: $I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$, gdzie α to kąt między osiami polaryzatorów.
- Natężenie jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy pola elektrycznego: $I \propto E^2$, więc $\frac{E_1}{E_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$.
- Interferencja i polaryzacja to dowody falowej natury światła; polaryzacja dodatkowo — że fala jest poprzeczna.

Σ Najważniejsze wzory

$$d \sin \theta = k\lambda$$

$$x = \frac{\lambda L}{d}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}I$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$$

$$I \propto E^2$$

Algorytm krok po kroku

1. Ustal, czy źródło jest spolaryzowane (wtedy od razu prawo Malusa), czy nie (najpierw $\frac{1}{2}$).
2. Dla siatki policz stałą d z liczby rys na jednostkę długości.
3. Podstaw do $d \sin \theta = k\lambda$ i sprawdź, ile rzędów jest możliwych ($\sin \theta \leq 1$).
4. Przy porównaniach amplitud pamiętaj o pierwiastku: $E \propto \sqrt{I}$.
5. Sprawdź rząd wielkości: λ światła widzialnego to 400–700 nm.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
✗ $I_1 = I$ po pierwszym polaryzatorze	✓ $I_1 = \frac{1}{2}I$	dla światła niespolaryzowanego
✗ $I_2 = I_1 \cos \alpha$	✓ $I_1 \cos^2 \alpha$	kwadrat cosinusa
✗ E maleje tak jak I	✓ $E \propto \sqrt{I}$	natężenie zależy od kwadratu amplitudy
✗ nieograniczona liczba rzędów siatki	✓ $\sin \theta \leq 1$	$k \leq \frac{d}{\lambda}$

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 9 z matury 2025

Wiązka niespolaryzowanego światła o natężeniu I pada na polaryzator $\mathcal{P}_1$, a następnie na polaryzator $\mathcal{P}_2$, którego oś tworzy z osią pierwszego kąt $\alpha = 45^\circ$. Natężenie po pierwszym polaryzatorze oznaczamy I_1 , po drugim — I_2 . Oceń, czy zachodzą relacje: $E_1 = \sqrt{2}E_2$, $I_1 = 2I_2$, $I = 4I_2$.

ROZWIĄZANIE

- Po pierwszym polaryzatorze $I_1 = \frac{1}{2}I$.
- Prawo Malusa: $I_2 = I_1 \cos^2 45^\circ = I_1 \cdot \frac{1}{2}$, więc $I_1 = 2I_2$ ✓.
- Stąd $I = 2I_1 = 4I_2$ ✓.
- Natężenie jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy: $\frac{E_1}{E_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \sqrt{2}$ ✓.

Odpowiedź: wszystkie trzy relacje są prawdziwe

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — zastosowanie reguły $I_1 = \frac{1}{2}I$,
- 2 pkt — poprawne użycie prawa Malusa,
- 3 pkt — powiązanie amplitudy z natężeniem ($E \propto \sqrt{I}$).

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	dyfrakcja fali mechanicznej w zad. 4.3 (klucz FZ12)
2025	zad. 9.1–9.2	3 pkt	dwa polaryzatory pod kątem 45° : $I_1 = \frac{1}{2}I$ i relacje między E oraz I
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania

Trening: zadania **FZ22.1–FZ22.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

 **Sygnał:** $E = E_0 + E_k$, $\gamma = \frac{E}{E_0}$, $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}$.

Co musisz umieć

- stosować $E = \gamma mc^2$, $E_0 = mc^2$,
 $E_k = (\gamma - 1)E_0$,
- wyznaczać $\frac{v}{c}$ z ilorazu energii: $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$,
- stosować dylatację czasu i skrócenie długości,
- formułować postulaty STW (stałość c i równoważność układów inercjalnych).

Jak rozpoznać zadanie

- „energia spoczynkowa / kinetyczna cząstki” + v porównywalne z $c \rightarrow$ wzory relatywistyczne,
- „prędkość fali EM względem...” $\rightarrow$ zawsze c , niezależnie od ruchu źródła,
- „czas w układzie rakiety / czas własny” $\rightarrow$ dylatacja czasu,
- „do dwóch cyfr znaczących $\frac{v}{c}$ ” $\rightarrow$ rachunek przez γ .

Teoria w pigułce

- Postulaty: (1) prawa fizyki są takie same we wszystkich układach inercjalnych; (2) prędkość światła w próżni jest jednakowa dla wszystkich obserwatorów.
- Czynniki Lorentza: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \geq 1$.
- Energia całkowita $E = \gamma mc^2$, spoczynkowa $E_0 = mc^2$, kinetyczna $E_k = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2$.
- Z $\gamma = \frac{E}{E_0}$ wynika $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$ — to najszybsza droga w zadaniach CKE.
- Dylatacja czasu: $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ (czas własny Δt_0 jest najkrótszy); skrócenie długości: $l = \frac{l_0}{\gamma}$.
- Związek energii i pędu: $E^2 = (pc)^2 + E_0^2$; dla fotonu $E_0 = 0$, więc $E = pc$.

Σ Najważniejsze wzory

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$E = \gamma mc^2$$

$$E_k = (\gamma - 1)E_0$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

$$l = \frac{l_0}{\gamma}$$

🔧 Algorytm krok po kroku

1. Policz energię całkowitą: $E = E_0 + E_k$.
2. Wyznacz $\gamma = \frac{E}{E_0}$.
3. Policz $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$ (albo v wprost).
4. Przy dylatacji/skróceniu ustal, który obserwator mierzy czas własny / długość spoczynkową.
5. Sprawdź: zawsze $\frac{v}{c} < 1$, a $\gamma \geq 1$.

⚠️ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
✗ $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ przy $v \sim c$	✓ $E_k = (\gamma - 1)mc^2$	klasyczny wzór zaniża wynik
✗ $\Delta t_0 = \gamma \Delta t$	✓ $\Delta t = \gamma \Delta t_0$	czas własny jest najkrótszy
✗ $l_0 = \frac{l}{\gamma}$	✓ $l = \frac{l_0}{\gamma}$	obiekt w ruchu jest krótszy
✗ prędkość światła zależy od ruchu źródła	✓ zawsze c	to drugi postulat

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 10 z matury 2026

Cząstka β^- ma energię kinetyczną $E_{kin} = 1,311$ MeV, a jej energia spoczynkowa wynosi $E_0 = 0,511$ MeV. Oblicz iloraz $\frac{v}{c}$ dla tej cząstki (wynik podaj z dokładnością do dwóch cyfr znaczących).

ROZWIĄZANIE

1. $E = E_0 + E_{kin} = 0,511 + 1,311 = 1,822$ MeV.
2. $\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{1,822}{0,511} \approx 3,566$.
3. $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{12,71}} = \sqrt{0,9213} \approx 0,96$.

Odpowiedź: $\frac{v}{c} \approx 0,96$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie energii całkowitej,
- 2 pkt — wyznaczenie czynnika γ ,
- 3 pkt — obliczenie $\frac{v}{c} \approx 0,96$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 10	3 pkt	cząstka β^- : $E_{kin} = 1,311$ MeV, $E_0 = 0,511$ MeV — oblicz $\frac{v}{c}$
2025	zad. 10	3 pkt	cząstka o $v = \frac{1}{2}c$ i $E_k = 79,05$ keV — oblicz energię spoczynkową
2024	zad. 10.1	1 pkt	iloraz energii całkowitej do spoczynkowej dla elektronu o $v = 2,00 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$
2023	zad. 4.1, 10.1–10.2	5 pkt	prędkość fali EM niezależna od ruchu źródła; wykres $E(v)$; obliczenie $\frac{v}{c}$
2022	—	0 pkt	brak osobnego zadania

FZ24 Fizyka kwantowa i atomowa

PRIORYTET

A

CZĘSTOTLIWOŚĆ

2/5 arkuszy

PUNKTY W ARKUSZU

śr. 1,8 pkt (0–5)

FORMY ZADAŃ

identyfikacja linii widmowej (3 pkt), obliczenie energii fotonu (3 pkt), P/F o fotonach

 **Sygnal:** ΔE z poziomów Bohra, potem $\lambda = \frac{1240}{E[\text{eV}]}$ nm.

Co musisz umieć

- stosować $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$ i przeliczać energię na eV,
- liczyć energie poziomów w atomie wodoru:
$$E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2},$$
- stosować równanie Einsteina dla zjawiska fotoelektrycznego $hf = W + E_k$,
- stosować hipotezę de Broglie'a $\lambda = \frac{h}{p}$.

Jak rozpoznać zadanie

- „przejście z poziomu n na m ” →
 $\Delta E = E_m - E_n$, potem $\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$,
- „wybijają elektrony z metalu” → zjawisko fotoelektryczne, praca wyjścia,
- „linia widmowa o długości...” → sprawdź, któremu przejściu odpowiada,
- „fale materii / dyfrakcja elektronów” → de Broglie.

Teoria w pigułce

- Foton: $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$; $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J·s, $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J.
- Model Bohra dla wodoru: $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ eV; przejście $n \rightarrow m$ ($n > m$) emituje foton o energii $E_n - E_m$.
- Seria Balmera (przejścia na $n = 2$) leży w zakresie widzialnym — stąd linie widma wodoru.
- Zjawisko fotoelektryczne: $hf = W + E_{k \max}$; poniżej częstotliwości progowej nie ma emisji, niezależnie od natężenia światła.
- Dualizm: $\lambda = \frac{h}{p}$ — im większy pęd, tym krótsza fala materii.
- Im większa różnica poziomów, tym większa energia fotonu i krótsza fala: $\lambda \propto \frac{1}{\Delta E}$.

Σ Najważniejsze wzory

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$$

$$hf = W + E_k$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Algorytm krok po kroku

1. Wypisz poziomy energetyczne biorące udział w przejściu.
2. Policzyć ΔE w eV, a potem zamień na dżule (jeśli trzeba).
3. $\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$ — pamiętaj o jednostkach ($hc \approx 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$).
4. W fotoefekcie: energia fotonu minus praca wyjścia = maksymalna energia kinetyczna.
5. Sprawdź: światło widzialne to 1,8–3,1 eV.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X E_n dodatnie	✓ poziomy są ujemne	zero energii to elektron swobodny
X większa energia = dłuższa fala	✓ odwrotnie	$\lambda = \frac{hc}{E}$
X silniejsze światło wybija elektrony	✓ liczy się częstotliwość	natężenie zmienia tylko liczbę elektronów
X pomylenie eV i J	✓ $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$	najczęstszy błąd rachunkowy

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 11.2 z matury 2025 i 11.1 z matury 2022

Oblicz energię (w eV) i długość fali fotonu emitowanego przez atom wodoru przy przejściu z poziomu $n = 4$ na $n = 2$. Przyjmij $E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}$ oraz $hc \approx 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$.

ROZWIĄZANIE

- $E_4 = -\frac{13,6}{16} = -0,85 \text{ eV}$, $E_2 = -\frac{13,6}{4} = -3,40 \text{ eV}$.
- $E_{42} = E_4 - E_2 = -0,85 + 3,40 = 2,55 \text{ eV}$.
- $\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240}{2,55} \approx 486 \text{ nm}$ — to niebieskozielona linia wodoru (H_β).

Odpowiedź: $E_{42} = 2,55 \text{ eV}$; $\lambda \approx 486 \text{ nm}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — obliczenie energii obu poziomów,
- 2 pkt — obliczenie energii fotonu **2,55 eV**,
- 3 pkt — obliczenie długości fali $\approx$ **486 nm**.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2025	zad. 11.1–11.2	4 pkt	atom wodoru: porównanie λ_{53} i λ_{43} oraz obliczenie energii fotonu E_{42}
2024	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2023	—	0 pkt	brak osobnego zadania
2022	zad. 11.1–11.2	5 pkt	widmo emisyjne wodoru i helu: identyfikacja linii wodoru oraz P/F o energiach fotonów

Trening: zadania **FZ24.1–FZ24.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

Sygnal: Bilans A i Z ; z wykresu — ile razy spadła wielkość, potem $\log_2$.

Co musisz umieć

- uzupełniać równania rozpadów, korzystając z zachowania liczby masowej i ładunkowej,
- stosować prawo rozpadu $N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$; odczytywać $T_{1/2}$ z wykresu,
- obliczać deficyt masy i energię wiązania: $\Delta E = \Delta m c^2$ ($1 \text{ u} \cdot c^2 = 931,5 \text{ MeV}$),
- stosować zasadę zachowania pędu przy rozpadzie (energii kinetycznej produktów).

Jak rozpoznać zadanie

- „ β^- ” $\rightarrow Z$ rośnie o 1, A bez zmian; „ β^+ ” $\rightarrow Z$ maleje o 1; „ α ” $\rightarrow A - 4, Z - 2$,
- „czas połowicznego rozpadu z wykresu” $\rightarrow$ znajdź, kiedy wielkość spada do połowy,
- „najmniejsza energia potrzebna do rozbicia jądra” $\rightarrow$ energia wiązania z deficytu masy,
- „moc cieplna próbki po latach” $\rightarrow P = P_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$.

Teoria w pigułce

- W każdej reakcji jądrowej zachowane są: liczba masowa A i liczba atomowa (ładunkowa) Z .
- Rozpad α : ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_2^4\text{He}$. Rozpad β^- : ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + e^- + \bar{\nu}$.
- Prawo rozpadu: $N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$; po każdym $T_{1/2}$ zostaje połowa jąder.
- Aktywność $A = \lambda N$ maleje tak samo jak liczba jąder; to samo dotyczy masy i mocy cieplnej próbki.
- Deficyt masy: $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{jądra}}$; energia wiązania $E = \Delta m c^2$, przy czym $1 \text{ u} \cdot c^2 = 931,5 \text{ MeV}$.
- W rozpadzie nieruchomego jądra pędy produktów są równe co do wartości, więc $\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{m_2}{m_1}$ — lżejsza cząstka unosi większość energii.

Σ Najważniejsze wzory

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$$

$$\Delta E = \Delta m c^2$$

$$1 \text{ u} \cdot c^2 = 931,5 \text{ MeV}$$

$$A = \lambda N$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Algorytm krok po kroku

1. Zapisz równanie reakcji i zbilansuj A oraz Z .
2. Do prawa rozpadu policz, ile $T_{1/2}$ mieści się w podanym czasie.
3. Do energii: policz deficyt masy w u, a potem pomnóż przez $931,5 \frac{\text{MeV}}{\text{u}}$.
4. Jeśli wykres jest w skali logarytmicznej, skorzystaj z tego, że $\log$ maleje liniowo.
5. Sprawdź sens: energia wiązania na nukleon to około **7–9 MeV**.

⚠ Najczęstsze pułapki

ŹŁE	DOBRCZE	DLACZEGO
X w β^- maleje A	✓ A się nie zmienia	neutron zmienia się w proton
X masa jądra = suma mas nukleonów	✓ jest mniejsza o deficyt	to źródło energii wiązania
X po dwóch $T_{1/2}$ nic nie zostaje	✓ zostaje $\frac{1}{4}$	rozpad jest wykładniczy
X cięższy produkt unosi więcej energii	✓ lżejszy	$E_k \propto \frac{1}{m}$ przy równych pędach

🔥 Przykład wzorcowy typ zadania 11 z matury 2026

Izotop neonu $^{23}_{10}\text{Ne}$ ulega rozpadowi β^- . Uzupełnij schemat rozpadu, a następnie — korzystając z wykresu zależności $\log_{10} m$ od czasu, na którym prosta maleje od punktu $(0; 1,4)$ do punktu $(3,3; -0,2)$ (czas w minutach) — oblicz czas połowicznego rozpadu jąder ^{23}Ne .

ROZWIĄZANIE

1. Bilans: $A = 23$ bez zmian, Z rośnie o 1, więc powstaje $^{23}_{11}\text{Na}$ (sód).
2. Z wykresu: $\log m$ maleje o 1,6 w czasie 3,3 min, czyli masa maleje $10^{1,6} \approx 39,8$ razy.
3. $(\frac{1}{2})^{t/T} = \frac{1}{39,8} \Rightarrow \frac{t}{T} = \log_2 39,8 \approx 5,31$.
4. $T = \frac{3,3}{5,31} \approx 0,62 \text{ min} \approx 37 \text{ s}$.

Odpowiedź: $^{23}_{10}\text{Ne} \rightarrow ^{23}_{11}\text{Na} + \beta^- + \bar{\nu}$; $T_{1/2} \approx 0,62 \text{ min}$

Jak CKE przyznaje punkty:

- 1 pkt — poprawne liczby A i Z produktu,
- 2 pkt — identyfikacja pierwiastka (sód),
- 3 pkt — odczyt z wykresu i przeliczenie na krotność spadku masy,
- 4 pkt — obliczenie $T_{1/2} \approx 0,6 \text{ min}$.

📊 Ślad w prawdziwych arkuszach CKE

ROK	ZADANIA	PKT	CZEGO DOTYCZYŁO
2026	zad. 11.1–11.3	7 pkt	rozpad β^- neonu ^{23}Ne : schemat, P/F o masach, $T_{1/2}$ z wykresu $\log m(t)$
2025	zad. 12.1, 12.3	5 pkt	rozpad α plutonu ^{238}Pu i moc cieplna próbki po czasie t
2024	zad. 11.1–11.3	6 pkt	rozpad β^+ fluoru ^{18}F : odczyt z wykresu, schemat rozpadu, energia produktów
2023	zad. 11.1–11.3	6 pkt	synteza ^{277}Cn , sześć rozpadów α , energia wiązania jądra
2022	zad. 12.1–12.3	6 pkt	^{214}Pb : wykres $R(t)$ i $T_{1/2}$, stosunek aktywności, równanie rozpadu β^-

Trening: zadania **FZ25.1–FZ25.10** (plik zadań) · pełne rozwiązania w pliku rozwiązań.

Ściąga — wszystkie klucze na jednej stronie

Sygnał rozpoznawczy i 3–4 najważniejsze wzory każdego klucza. Przejrzyj ją rano przed maturą.

FZ01	Kinematyka i wykresy ruchu Dwa ciała → dwa równania ruchu; „największa odległość” = równe prędkości.	$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ $v = v_0 + a t$ $v^2 - v_0^2 = 2 a \Delta x$ $s = \text{pole pod } v(t)$
FZ02	Rzuty i spadek swobodny Rozdziel pion i poziom; wierzchołek toru to $v_y = 0$, a nie $a = 0$.	$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ $t_w = \frac{v_0}{g}$ $\Delta h = \frac{v_0^2}{2g}$ $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
FZ03	Zasady dynamiki, tarcie i równia Każde ciało osobno, osie wzdłuż ruchu, tarcie zawsze przeciwnie do ruchu.	$\vec{F}_w = m\vec{a}$ $T = \mu N$ $N = mg \cos \alpha$ $F_{zsuw} = mg \sin \alpha$
FZ04	Opory ruchu, prędkość graniczna i hydrostatyka „Prędkość przestaje rosnąć” → wypadkowa zero; pamiętaj o wyporze.	$F_o = A v$ $F_o = k \rho S v^2$ $F_w = \rho g V$ $p = \rho g h$
FZ05	Praca, moc i zasada zachowania energii Dwa stany bez pytania o czas → energia; tarcie = strata energii mechanicznej.	$W = F s \cos \alpha$ $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ $E_p = m g h$ $E_s = \frac{1}{2} k x^2$
FZ06	Pęd, popęd i zderzenia Pęd przed = pęd po; przy równych pędach energia jest odwrotnie proporcjonalna do masy.	$\vec{p} = m\vec{v}$ $\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{p}$ $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$ $E_k = \frac{p^2}{2m}$
FZ07	Ruch po okręgu i siła dośrodkowa Oś do środka okręgu; wypadkowa realnych sił = $\frac{m v^2}{r}$.	$a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ $F_d = \frac{m v^2}{r}$ $v = \frac{2 \pi r}{T}$ $\omega = \frac{2 \pi}{T} = 2 \pi f$
FZ08	Bryła sztywna: moment siły, toczenie, energia obrotowa Dwa równania (postęp + obrót) plus warunek $a = \varepsilon R$.	$M = F r$ $M = I \varepsilon$ $E_{obr} = \frac{1}{2} I \omega^2$ $v = \omega R$
FZ09	Równowaga ciał i środek masy Dwa warunki: siły i momenty; oś obrotu wybierz tam, gdzie znika niewiadoma.	$\sum \vec{F} = 0$ $\sum M = 0$ $F_1 r_1 = F_2 r_2$ $x_{sm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$
FZ10	Grawitacja, satelity i prawa Keplera Elipsa → półos wielka i $v_P r_P = v_A r_A$; koło → $\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r}$.	$F = G \frac{M m}{r^2}$ $v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ $T^2 = \frac{4 \pi^2 a^3}{GM}$ $v_P r_P = v_A r_A$
FZ11	Drgania harmoniczne Okres → k ; najniższe położenie → $F_s = m g + k A$.	$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ $T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ $\omega = \frac{2 \pi}{T}$ $E = \frac{1}{2} k A^2$
FZ12	Fale mechaniczne, interferencja i fale stojące Przy zmianie ośrodka stała jest f ; λ zmienia się tak jak v .	$v = \lambda f$ $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$ $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$ $\Delta r = k \lambda$ (wzmocnienie)
FZ13	Dźwięk: natężenie i efekt Dopplera Zbliżanie → krótsza fala, wyższy dźwięk; iloraz λ skraca f_0 .	$I = \frac{P}{4 \pi r^2}$ $f_{odb} = f_0 \frac{v}{v \mp v_{zr}}$ $f_{odb} = f_0 \frac{v \pm v_{obs}}{v}$ $\lambda = \frac{v \mp v_{zr}}{f_0}$
FZ14	Gaz doskonały i przemiany gazowe Kelwiny, $\frac{pV}{T} = \text{const}$, praca = pole pod $p(V)$.	$pV = nRT$ $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ $\overline{E_k} = \frac{3}{2} kT$ $W = p \Delta V$ (izobara)
FZ15	Pierwsza zasada termodynamiki, ciepło i cykle $Q = \Delta U + W_{gazu}$; $\Delta U = \frac{3}{2} \Delta(pV)$ dla gazu jednoatomowego.	$\Delta U = Q + W$ $\Delta U = \frac{3}{2} n R \Delta T$ $W_{gazu} = p \Delta V$ $C_p = C_v + R$
FZ16	Elektrostatyka: prawo Coulomba i natężenie pola Wektorowo, nie skalarnie; ładunek po przekątnej daje pole 2 razy słabsze.	$F = k \frac{ Q_1 Q_2 }{r^2}$ $E = k \frac{ Q }{r^2}$ $\vec{F} = q \vec{E}$ $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$
FZ17	Potencjał, napięcie, praca pola i kondensatory	$W = qU$ $E = \frac{U}{d}$ $C = \frac{Q}{U}$ $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$

$qU = \Delta E_k$; przy v bliskim c licz energię relatywistycznie.

FZ18

Prąd stały: obwody, opór i moc

Najpierw opór zastępczy, potem prąd główny, dopiero na końcu gałęzie.

$$U = IR \quad R = R_1 + R_2 \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

FZ19

Pole magnetyczne: siła Lorentza i elektrodynamiczna

$qvB = \frac{mv^2}{r}$; w okresie prędkość się skraca.

$$F = qvB \sin \alpha \quad r = \frac{mv}{qB} \quad T = \frac{2\pi m}{qB} \quad F = BIl \sin \alpha$$

FZ20

Indukcja elektromagnetyczna i prąd przemienny

Moc średnia z wartości skutecznych: $P = \frac{U_0^2}{2R}$.

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad \Phi = BS \cos \alpha \quad \varepsilon = Blv \quad U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

FZ21

Optyka geometryczna: załamanie i soczewki

Kąty od normalnej; w soczewce $x + y = d$ i $y = px$.

$$n = \frac{c}{v} \quad n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \sin \alpha_{gr} = \frac{n_2}{n_1} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

FZ22

Optyka falowa: interferencja, dyfrakcja, polaryzacja

Najpierw połowa, potem $\cos^2$; amplituda to pierwiastek z natężenia.

$$d \sin \theta = k\lambda \quad x = \frac{\lambda L}{d} \quad I_1 = \frac{1}{2} I \quad I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$$

FZ23

Szczególna teoria względności

$E = E_0 + E_k$, $\gamma = \frac{E}{E_0}$, $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}$.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad E = \gamma mc^2 \quad E_k = (\gamma - 1)E_0$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

FZ24

Fizyka kwantowa i atomowa

ΔE z poziomów Bohra, potem $\lambda = \frac{1240}{E[\text{eV}]}$ nm.

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2} \quad hf = W + E_k \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

FZ25

Fizyka jądrowa: rozpady, energia wiązania, prawo rozpadu

Bilans A i Z ; z wykresu — ile razy spadła wielkość, potem $\log_2$.

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} \quad \Delta E = \Delta m c^2 \quad 1 \text{ u} \cdot c^2 = 931,5 \text{ MeV}$$

$$A = \lambda N$$

Źródła i metodologia

Analiza dotyczy powtarzalnych **umiejętności i schematów**, a nie przewidywania treści konkretnych zadań. Częstotliwość i punkty policzono na podstawie **pięciu** arkuszy majowych CKE z fizyki (poziom rozszerzony) z lat **2022–2026** — wszystkie w Formule 2023 — rozpisanych zadanie po zadaniu w serwisie matematix.pl. Każdy z tych arkuszy ma 60 pkt, a zadania są pogrupowane w wiązki wokół jednej informacji wstępnej: dlatego klucz „waży” tyle, ile punktów przypadało na całą wiązkę.

Zadania treningowe są **autorskie** — odwzorowują typy umiejętności z arkuszy, ale nie są kopiami zadań CKE. Wszystkie odpowiedzi zostały zweryfikowane rachunkowo.

- CKE — Egzamin maturalny z fizyki w Formule 2023: arkusze, zasady oceniania, „Wybrane wzory i stałe fizykochemiczne”,
- matematix.pl — arkusze maturalne z fizyki z rozwiązaniami (poziom rozszerzony, lata 2015–2026),
- matematix.pl/poradnik-maturalny-fizyka — interaktywna wersja tego opracowania: zadania z zapisem postępów.