

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Egzamin ósmoklasisty z matematyki - Informator CKE

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	A (11:34)	1
2	B (CXC)	1
4	B (4), D (większa niż 5)	1
6	B (72), D (100)	1
7	C (III)	1
8	B ($\frac{1}{2}$)	1
11	C (Więcej niż 4, 5 litra, ale mniej niż 5 litrów)	1
12	D ($F + G + H = 0$)	1
13	A (11 minut)	1
15	B (2^5)	1
16	C ($-\sqrt{10}$)	1
17	B (36cm^3)	1
18	B (105zł), C (45zł)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0–1 pkt

Kasia zauważyła, że ścienny zegar w mieszkaniu babci w ciągu każdej godziny spóźnia się o kolejne 4 minuty. Gdy poprawnie działający zegarek Kasi wskazywał godzinę 9:00, dziewczynka ustawiła na zegarze ściennym tę samą godzinę. Przyjęła, że w każdym kolejnym kwadransie opóźnienie jest jednakowe.

Którą godzinę wskaże – zgodnie z założeniami Kasi – zegar ścienny po upływie 2 godzin i 3 kwadransów od godziny 9:00, jeżeli zachowana zostanie zaobserwowana tendencja opóźniania?

Odpowiedź: A (11:34)

Krok 1. Wskazanie poprawnej godziny.

Sprawdźmy na początku którą to godzinę powinien wskazywać zegarek, gdyby się nie spóźniał. Skoro kwadrans to 15 minut, to trzy kwadransy to 45 minut. Po upływie dwóch godzin i trzech kwadransów od godziny 09:00 zegar powinien więc wskazywać godzinę 11:45.

Krok 2. Ustalenie wielkości spóźnienia.

W ciągu godziny zegarek spóźnia się o 4 minuty. Korzystając z proporcji możemy powiedzieć, że skoro kwadrans to $\frac{1}{4}$ godziny, to w ciągu kwadransa zegarek spóźnia się dokładnie o minutę.

To oznacza, że:

W ciągu dwóch godzin zegarek spóźni się o 8 minut.

W ciągu trzech kwadransów zegarek spóźni się o 3 minuty.

W ciągu dwóch godzin i trzech kwadransów zegarek spóźni się o $8 + 3 = 11$ minut.

Krok 3. Ustalenie wskazania zegarka.

Musimy ustalić co to znaczy, że zegarek się spóźnia. Skoro zegarek się spóźnia, to powinien wskazywać godzinę wcześniejszą niż 11:45. My wiemy, że zegarek jest spóźniony o łącznie 11 minut, więc wskaże nam godzinę 11:34.

Zadanie 2

0-1 pkt

Marta zapisała w systemie rzymskim cztery liczby: $CLXX$, CXC , $CCLXX$ oraz CCL .

Która z nich znajduje się na osi liczbowej najbliższej liczby 200?

Odpowiedź: B (CXC)

Krok 1. Zamiana liczb rzymskich na arabskie.

Sprawdźmy jakie liczby arabskie ukryły się pod każdą z odpowiedzi:

$$CLXX - 170, CXC - 190, CCLXX - 270, CCL - 250$$

Krok 2. Wskazanie poszukiwanej liczby.

Najbliżej liczby 200 na osi liczbowej znajduje się liczba 190, czyli CXC .

Zadanie 3

0-1 pkt

Do trzech jednakowych naczyń wiano tyle wody, że w pierwszym naczyniu woda zajmowała $\frac{2}{3}$ pojemności, w drugim: $\frac{3}{4}$ pojemności, a w trzecim $\frac{5}{7}$ pojemności danego naczynia.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. W naczyniu drugim było mniej wody niż w naczyniu trzecim. W pierwszym i drugim naczyniu łącznie było tyle samo wody, co w trzecim naczyniu.

W naczyniu drugim było mniej wody niż w naczyniu trzecim.

Prawda

Fałsz

W pierwszym i drugim naczyniu łącznie było tyle samo wody, co w trzecim naczyniu.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Aby ocenić prawdziwość tego zdania musimy porównać do siebie dwa ułamki - $\frac{3}{4}$ oraz $\frac{5}{7}$. Sprowadzając te ułamki do wspólnego mianownika otrzymamy:

$$\text{II naczynie: } \frac{3}{4} = \frac{21}{28}$$

$$\text{III naczynie: } \frac{5}{7} = \frac{20}{28}$$

To oznacza, że w drugim naczyniu było więcej wody niż w trzecim, czyli zdanie jest fałszem.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

W pierwszym i drugim naczyniu mamy:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$$

W trzecim naczyniu mamy raptem $\frac{5}{7}$ pojemności, czyli znacznie mniej niż w pierwszym i drugim naczyniu łącznie. Zdanie jest więc fałszem.

Zadanie 4

0-1 pkt

W każdej z dwóch torebek znajdują się 32 cukierki: 17 pomarańczowych, 10 jabłkowych i 5 truskawkowych.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Do pierwszej torebki należy dołożyć $\boxed{A} / \boxed{B}$ cukierki truskawkowe, aby wszystkie znajdujące się w niej cukierki truskawkowe stanowiły 25% wszystkich cukierków w tej torebce. Liczba cukierków pomarańczowych, które należy wyjąć z drugiej torebki, aby wśród pozostałych w niej cukierków było 40% pomarańczowych, jest $\boxed{C} / \boxed{D}$.

Odpowiedź: B (4), D (większa niż 5)

Krok 1. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Na początku mamy 32 cukierki, w tym 5 truskawkowych. Zobaczmy co się stanie jak dołożymy 3 lub 4 cukierki truskawkowe (bo takie mamy opcje w odpowiedziach).

a) Jak dołożymy 3 cukierki truskawkowe to będziemy mieli 35 cukierków, w tym 8 truskawkowych. Cukierki truskawkowe będą więc stanowiły wtedy $\frac{8}{35} \approx 23\%$.

b) Jak dołożymy 4 cukierki truskawkowe to będziemy mieli 36 cukierków, w tym 9 truskawkowych. Cukierki truskawkowe będą więc stanowiły wtedy $\frac{9}{36} = 25\%$.

Musimy więc dołożyć 4 cukierki truskawkowe.

A jak rozwiązać to zadanie gdyby było to zadanie otwarte (bez podanych odpowiedzi)? Biorąc pod uwagę, że 25% możemy zapisać w postaci ułamka $\frac{1}{4}$ to należałoby wtedy ułożyć następujące równanie:

$$\frac{5+x}{32+x} = \frac{1}{4}$$

Mnożąc na krzyż otrzymamy:

$$4 \cdot (5+x) = 1 \cdot (32+x), 20+4x=32+x, 3x=12, x=4$$

Wyszło nam więc ponownie, że należałoby dołożyć 4 cukierki truskawkowe.

Krok 2. Rozwiązanie drugiej części zadania.

W torebce mamy 32 cukierki, w tym 17 pomarańczowych. Chcemy by pomarańczowych cukierków było 40%, czyli żeby było ich $\frac{4}{10}$. Jeżeli z paczki zabierzemy x pomarańczowych cukierków, to będziemy mieć ich $17-x$. Pomniejszy nam się też liczba wszystkich cukierków w paczce i teraz wyniesie ona $32-x$. Zatem powstanie nam równanie:

$$\frac{17-x}{32-x} = \frac{4}{10}$$

Mnożąc na krzyż otrzymamy:

$$10 \cdot (17-x) = 4 \cdot (32-x), 170-10x=128-4x, 42=6x, x=7$$

Musimy więc zabrać 7 pomarańczowych cukierków.

Zadanie 5

0-1 pkt

Za 30dag orzechów pistacjowych zapłacono 15,75zł.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Za 40dag tych orzechów należy zapłacić 21zł.
Cena 1kg tych orzechów jest równa 52,50zł.

Za 40dag tych orzechów należy zapłacić 21zł.

Prawda

Fałsz

Cena 1kg tych orzechów jest równa 52,50zł.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Możemy ułożyć prostą proporcję:

Skoro 30dag orzechów kosztuje 15,75zł

To 10dag orzechów kosztuje 5,25zł

Więc 40dag orzechów kosztuje 21zł

Zdanie jest więc prawdą.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Możemy ułożyć prostą proporcję, pamiętając o tym że 1kg = 100dag:

Skoro 30dag orzechów kosztuje 15,75zł

To 10dag orzechów kosztuje 5,25zł

Więc 100dag (1kg) kosztuje 52,50zł

Zdanie jest więc prawdą.

Zadanie 6

0-1 pkt

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Wartość wyrażenia $2^3 \cdot 3^2$ jest równa A B. Wartość wyrażenia $5^3 - 5^2$ jest równa C D.

Odpowiedź: B (72), D (100)

Krok 1. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

$$2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

Krok 2. Rozwiązanie drugiej części zadania.

$$5^3 - 5^2 = 125 - 25 = 100$$

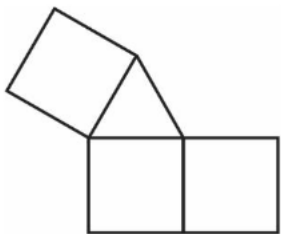
Zadanie 7

0-1 pkt

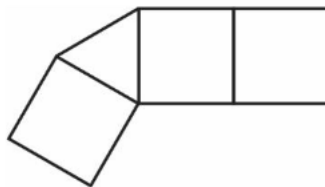
Wojtek narysował cztery figury składające się z kwadratów i trójkątów równobocznych (tak, jak pokazano na rysunku poniżej). Aby otrzymać z nich siatki graniastopu, zamierza dorysować do każdej figury jeden kwadrat albo jeden trójkąt.



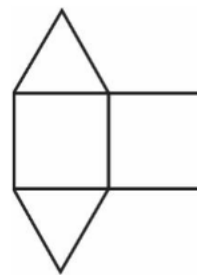
I



II



III



IV

Z której figury nie da się w ten sposób otrzymać siatki graniastopu?

Odpowiedź: C (III)

Nie da się stworzyć siatki z III figury. Skąd to wiemy? Kluczem jest tutaj położenie kwadratu, który nie styka się z trójkątem. Jakkolwiek byśmy tej siatki nie składali, to bok tego kwadratu nie zetknie nam się z bokiem trójkąta, czyli bryła nam się po prostu nie złoży.

Zadanie 8

0-1 pkt

Rzucamy raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w rzucie tą kostką wypadnie liczba oczek większa od 2, ale mniejsza od 6?

Odpowiedź: B ($\frac{1}{2}$)

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich możliwych wyników rzutu kostką (czyli zdarzeń elementarnych).

Rzucamy jedną sześcienną kostką, czyli możemy otrzymać jeden z sześciu wyników: 1, 2, 3, 4, 5, 6. To oznacza, że mamy sześć różnych możliwości otrzymania wyniku, czyli $|\Omega| = 6$.

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Sprzyjającym zdarzeniem jest wyrzucenie liczby większej od 2 i jednocześnie mniejszej od 6. Warunki naszego zadania spełniają zatem liczby: 3, 4, 5.

Interesują nas zatem trzy wyniki, czyli $|A| = 3$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 9

0-1 pkt

Dane jest wyrażenie $\frac{2^7 \cdot 2^7}{2^7 + 2^7}$.

Czy wartość tego wyrażenia jest liczbą podzielną przez 8? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C. **A)** każdy z wykładników jest liczbą nieparzystą.

B) wykładnik potęgi 2^6 nie jest podzielny przez 8.

C) wartość tego wyrażenia można zapisać w postaci $8 \cdot 2^3$.

Odpowiedź: Tak ponieważ opcja

Krok 1. Ustalenie kiedy wyrażenie będzie podzielne przez 8.

Aby udowodnić czy dane wyrażenie jest podzielne przez 8 musimy je przekształcić w taki sposób, by dało się je zapisać w postaci iloczynu, którego jednym ze składników jest liczba 8 (czyli musimy doprowadzić do postaci $8 \cdot \dots$). Widzimy wyraźnie, że w zadaniu operujemy na potęgach o podstawie 2, a liczbę 8 możemy zapisać jako $8 = 2^3$ i to z pewnością wykorzystamy podczas obliczeń, ale najpierw spróbujemy przekształcić to wyrażenie do prostszej postaci.

Krok 2. Uproszczenie wyrażenia.

W liczniku tego wyrażenia możemy skorzystać z własności działań na potęgach. Iloczyn potęg o tej samej podstawie obliczymy dodając do siebie wykładniki tych potęg. W mianowniku mamy sytuację nieco trudniejszą, bo nie mamy żadnych wzorów na dodawanie potęg, ale możemy zauważyć, że mamy tu tak naprawdę dwukrotne dodanie 2^7 , co możemy zapisać jako $2 \cdot 2^7$. Całość możemy więc rozpiszać w następujący sposób:

$$\frac{2^7 \cdot 2^7}{2^7 + 2^7} = \frac{2^{7+7}}{2 \cdot 2^7} = \frac{2^{14}}{2^1 \cdot 2^7} = \frac{2^{14}}{2^8} = 2^{14-8} = 2^6$$

Krok 3. Udowodnienie podzielności wyrażenia przez 8.

Wiedząc, że $8 = 2^3$ możemy teraz rozisać ten nasz wynik do następującej postaci:

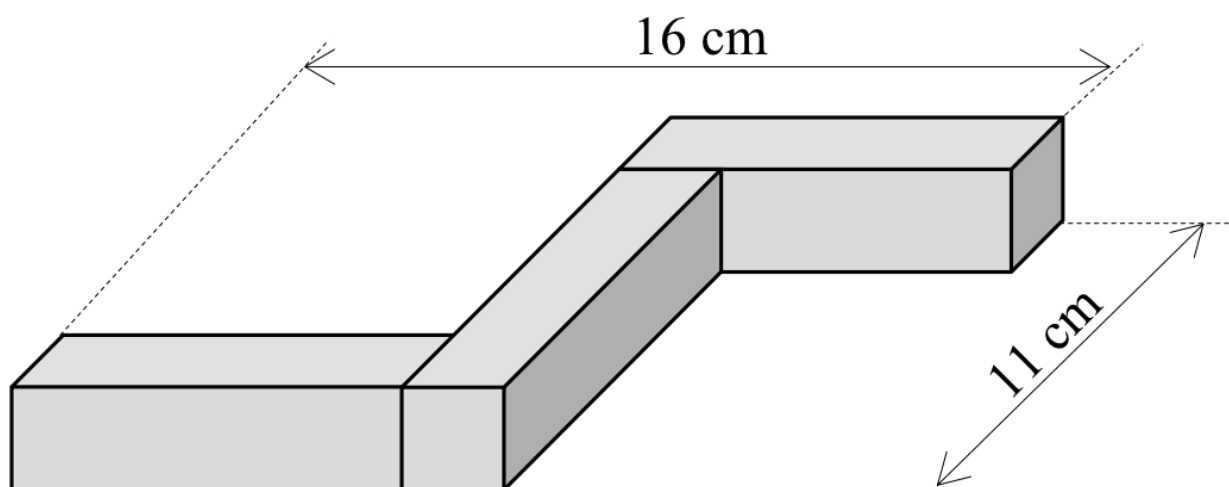
$$2^6 = 2^3 \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^3$$

To wyrażenie jest więc podzielne przez 8, ponieważ wartość tego wyrażenia można zapisać w postaci $8 \cdot 2^3$.

Zadanie 10

0-1 pkt

Witek ma trzy jednakowe prostopadłościennne klocki. W każdym z tych klocków dwie ściany są kwadratami, a cztery pozostałe – prostokątami. Z tych klocków zbudował figurę przedstawioną na rysunku.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Dłuższe krawędzie prostopadłościennego klocka mają po 8 cm.

Objętość jednego klocka jest równa 72cm^3 .

Dłuższe krawędzie prostopadłościennego klocka mają po 8 cm.

Prawda

Fałsz

Objętość jednego klocka jest równa 72cm^3 .

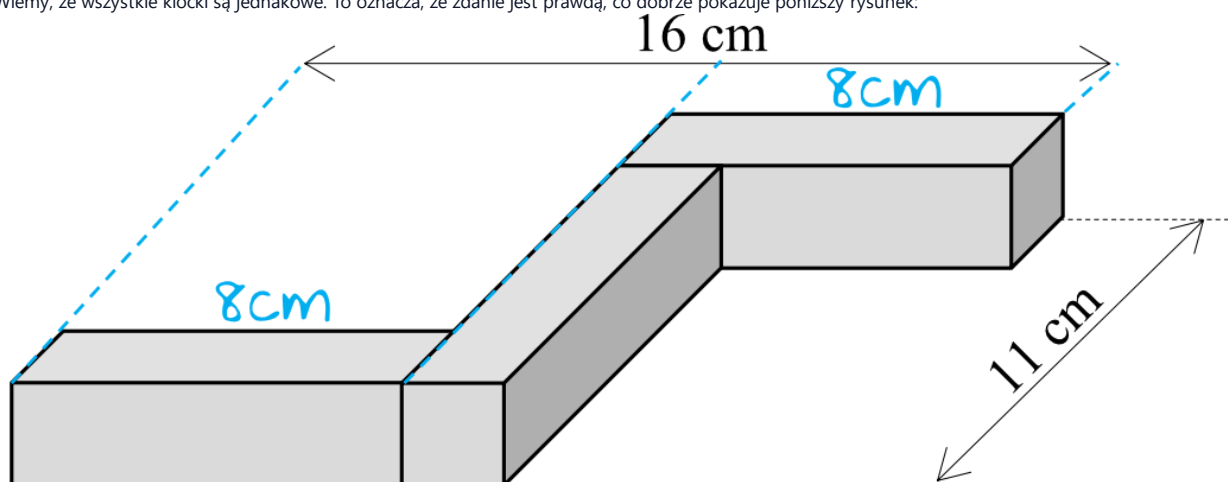
Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

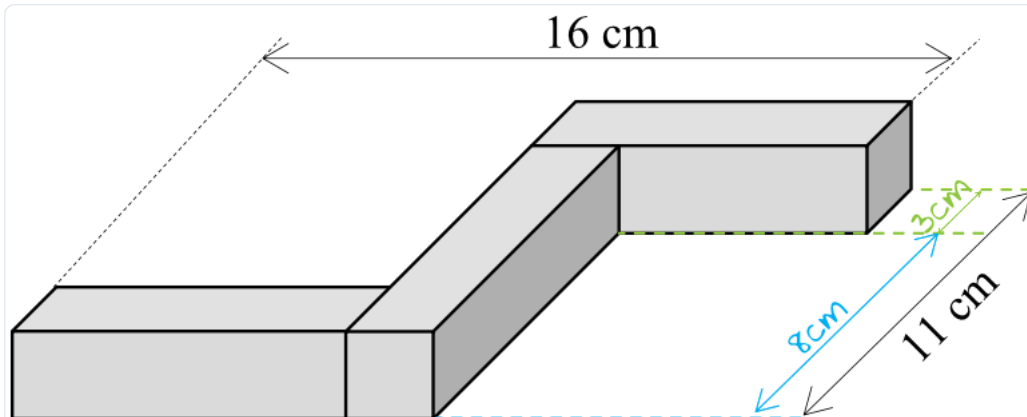
Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Wiemy, że wszystkie klocki są jednakowe. To oznacza, że zdanie jest prawdą, co dobrze pokazuje poniższy rysunek:



Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Do obliczenia objętości potrzebna nam jest znajomość długości krawędzi podstawy, a tę obliczymy tak naprawdę wprost z rysunku:



Z treści zadania wiemy, że w podstawie tej bryły jest kwadrat. Wiemy więc, że w podstawie graniastosłupa jest kwadrat o boku 3 cm , a sam graniastosłup ma wysokość 8 cm . To oznacza, że objętość tego prostopadłościanu wyniesie:

$$V = P_p \cdot H, \quad V = 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} \cdot 8\text{ cm}, \quad V = 72\text{ cm}^3$$

Zdanie jest więc prawdą.

Napój otrzymano, po tym jak rozcieńczono 450 ml soku wodą w stosunku $1 : 10$. Ile napoju otrzymano?

Odpowiedź: C (Więcej niż $4,5$ litra, ale mniej niż 5 litrów)

Jeżeli rozcieńczono sok w stosunku $1 : 10$ to oznacza, że wody jest 10 razy więcej niż soku. Skoro mamy 450 ml soku, to znaczy że wody było $10 \cdot 450\text{ ml} = 4,5\text{ l}$.

Soku jest 450 ml (czyli $0,45\text{ l}$), wody jest $4,5\text{ l}$, zatem napoju mamy:

$$0,45\text{ l} + 4,5\text{ l} = 4,95\text{ l}$$

Otrzymaliśmy więc więcej niż $4,5$ litra soku, ale mniej niż 5 litrów.

Zadanie 12

0-1 pkt

Dane są trzy wyrażenia:

$$F = x - (2x + 5)G = 6 - (-3x + 2)H = 5 - (2x + 4)$$

Dla każdej wartości x prawdziwa jest równość:

Odpowiedź: D ($F + G + H = 0$)

Krok 1. Uproszczenie każdego z wyrażeń.

Uprośćmy każde z wyrażeń:

$$F = x - (2x + 5) = x - 2x - 5 = -x - 5, \quad G = 6 - (-3x + 2) = 6 + 3x - 2 = 3x + 4, \quad H = 5 - (2x + 4) = 5 - 2x - 4 = -2x + 1$$

Krok 2. Sprawdzenie poprawności każdej z równości.

Sprawdźmy teraz po kolei każdą z równości:

Odp. A. $F + G = H$

Suma $F + G$ jest równa:

$$-x - 5 + 3x + 4 = 2x - 1$$

Otrzymany wynik nie jest równy wyrażeniu H , dlatego ta odpowiedź jest nieprawdą.

Odp. B. $F + H = G$

Suma $F + H$ jest równa:

$$-x - 5 - 2x + 1 = -3x - 4$$

Otrzymany wynik nie jest równy wyrażeniu G , dlatego ta odpowiedź jest nieprawdą.

Odp. C. $G + H = F$

Suma $G + H$ jest równa:

$$3x + 4 - 2x + 1 = x + 5$$

Otrzymany wynik nie jest równy wyrażeniu F , dlatego ta odpowiedź jest nieprawdą.

Odp. D. $F + G + H = 0$

Suma $F + G + H$ jest równa:

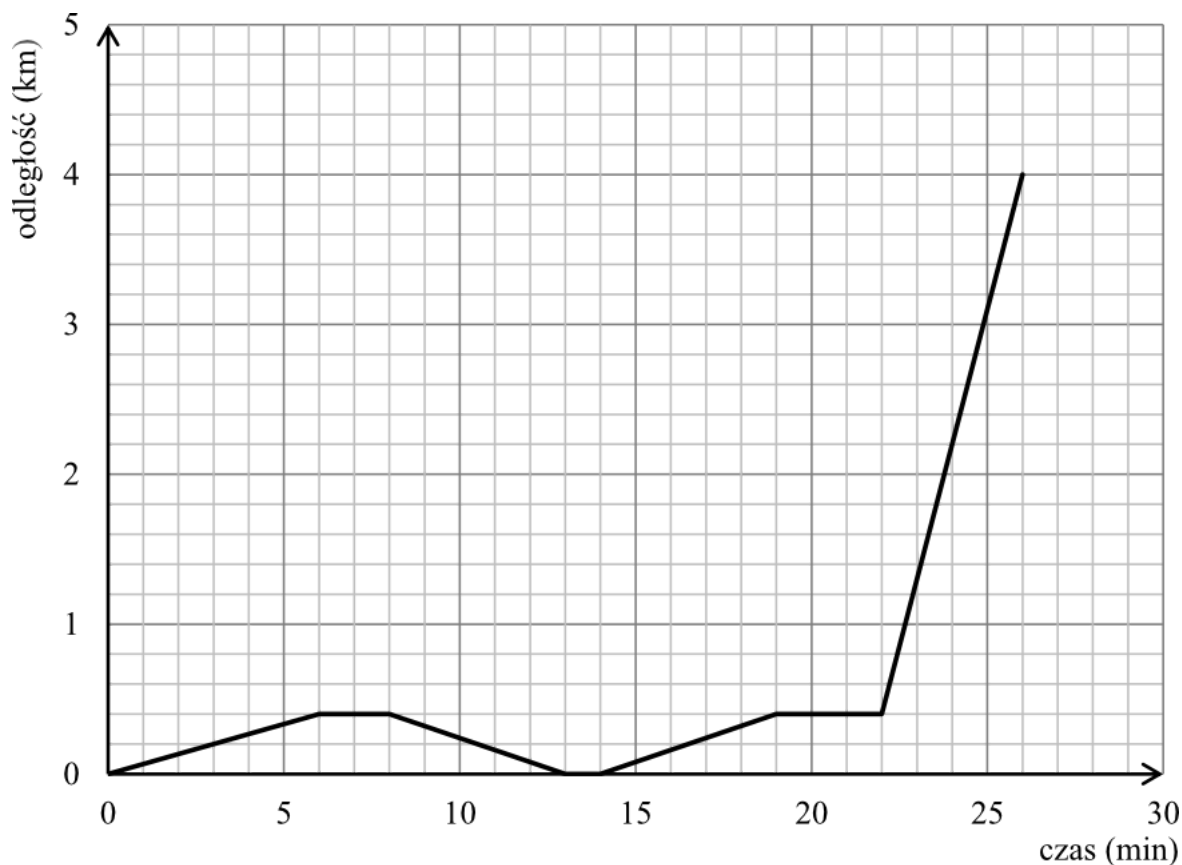
$$-x - 5 + 3x + 4 - 2x + 1 = 0$$

Otrzymany wynik jest równy 0, dlatego to właśnie ta odpowiedź jest prawdziwa.

Zadanie 13

0-1 pkt

Mateusz mieszka w odległości 4 km od szkoły. Część drogi do szkoły pokonuje pieszo, idąc do przystanku autobusowego. Tam czeka na autobus, a następnie wsiada do niego i jedzie do szkoły. Pewnego dnia, gdy był już na przystanku, stwierdził, że zapomniał zabrać zeszyt, więc wrócił po niego do domu. Wykres przedstawia, jak tego dnia zmieniała się odległość Mateusza od domu w zależności od czasu.



Od momentu, gdy Mateusz zawrócił z przystanku do domu, do momentu, gdy dotarł ponownie na przystanek, upłynęło:

Odpowiedź: A (11 minut)

Mateusz zawrócił do domu w ósmej minucie (od tego momentu linia wykresu zaczyna spadać, czyli Mateusz przybliża się do domu).

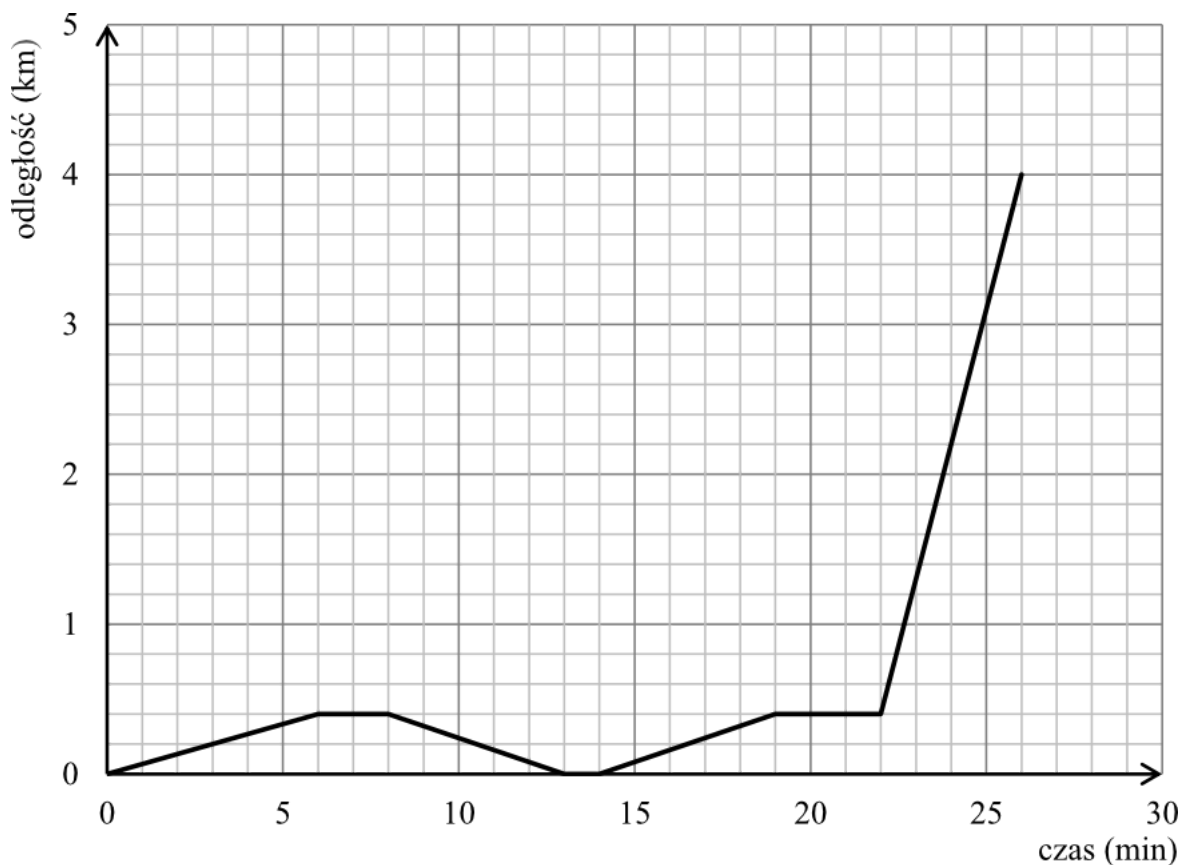
Na przystanku Mateusz pojawił się w dziewiętnastej minucie (od tego momentu linia wykresu zaczyna być prostą stałą, czyli Mateusz stoi już na przystanku).

To oznacza, że od momentu gdy Mateusz zawrócił z przystanku do momentu gdy dotarł tam ponownie upłynęło $19 - 8 = 11$ minut.

Zadanie 14

0-1 pkt

Mateusz mieszka w odległości 4 km od szkoły. Część drogi do szkoły pokonuje pieszo, idąc do przystanku autobusowego. Tam czeka na autobus, a następnie wsiada do niego i jedzie do szkoły. Pewnego dnia, gdy był już na przystanku, stwierdził, że zapomniał zabrać zeszyt, więc wrócił po niego do domu. Wykres przedstawia, jak tego dnia zmieniała się odległość Mateusza od domu w zależności od czasu.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Dom Mateusza znajduje się w odległości 400 m od przystanku autobusowego.

Autobus poruszał się ze średnią prędkością $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Dom Mateusza znajduje się w odległości 400 m od przystanku autobusowego.

Prawda

Fałsz

Autobus poruszał się ze średnią prędkością $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

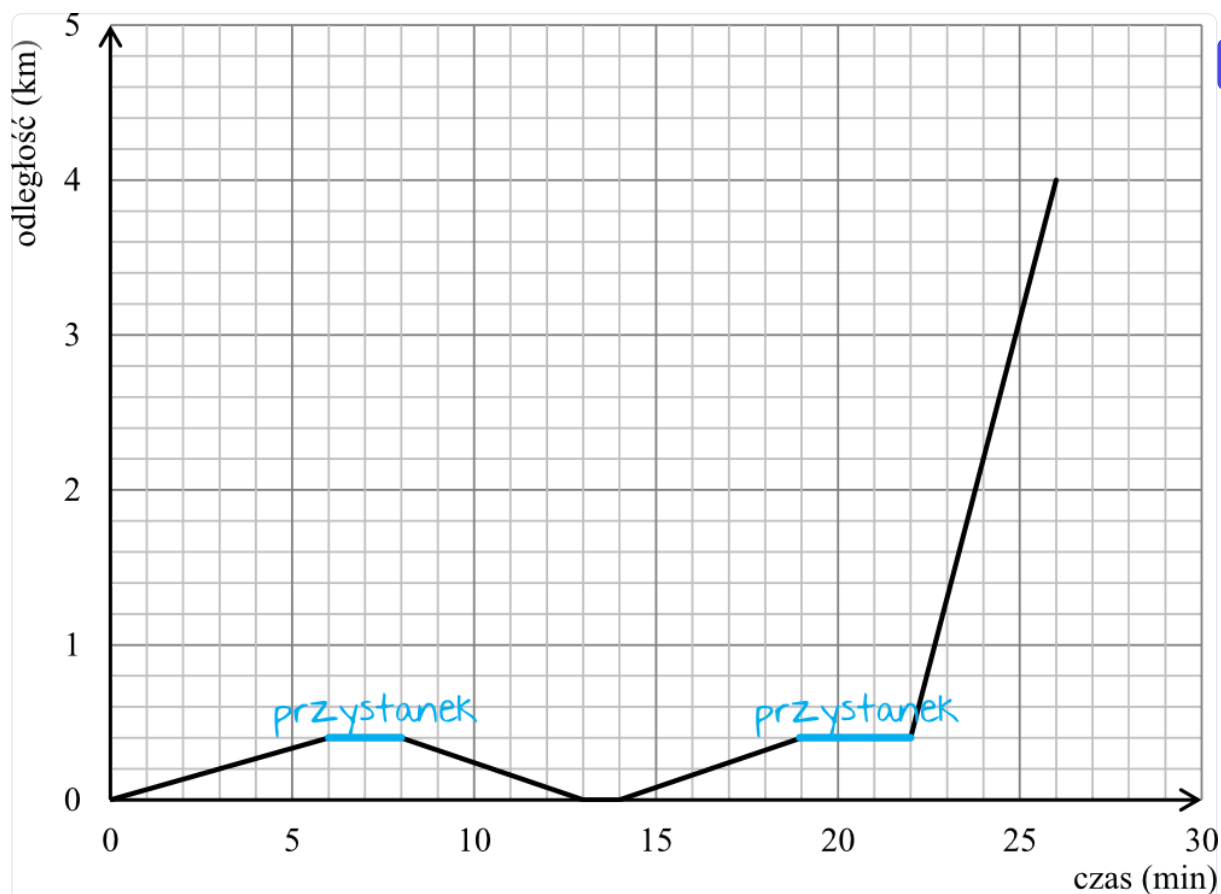
Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

To zdanie jest prawdą. Szukamy na wykresie sytuacji w której mamy prostą linię poziomą (wtedy Mateusz stoi w miejscu, czyli stoi na przystanku). Widzimy wyraźnie, że linia wykresu staje prosta na wysokości dwóch kratek, a skoro pięć krerek oznacza odległość 1 km , to dwie kratki stanowią właśnie $\frac{2}{5} \cdot 1\text{ km} = 400\text{ m}$.



Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Przystanek znajduje się 400m od domu Mateusza. Szkoła znajduje się w odległości 4km. Czyli autobus pokonał trasę:

$$4km - 0,4km = 3,6km$$

Autobus ruszył w 22 minucie naszego wykresu, a na metę dotarł w 26 minucie, czyli cała podróż trwała 4 minuty. Jeżeli $4min = \frac{1}{15}h$, to autobus jechał z prędkością:

$$v = \frac{s}{t}, v = \frac{3,6km}{\frac{1}{15}h}, v = 54 \frac{km}{h}$$

Zdanie jest więc prawdą.

Zapisano sumę 16 jednakowych składników: $\underbrace{2 + 2 + 2 \dots + 2}_{16 \text{ składników}}$. Wartość tej sumy jest równa:

Odpowiedź: B (2^5)

Gdyby dwójka była mnożona przez siebie szesnaście razy, to prawidłową odpowiedzią byłoby 2^{16} . Tutaj nie mamy jednak mnożenia, tylko dodawanie i to jest największa pułapka w tym zadaniu.

Dodanie do siebie szesnaście razy liczby 2 daje wynik:

$$16 \cdot 2 = 32$$

Taki wynik otrzymamy tylko podczas potęgowania 2^5 , bo to także jest 32 i dlatego jest to nasza poszukiwana odpowiedź.

To zadanie można też rozpisać wykorzystując działania na potęgach:

$$16 \cdot 2 = 2^4 \cdot 2^1 = 2^{4+1} = 2^5$$

Zadanie 16

0-1 pkt

Dane są cztery liczby: $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $-\sqrt{10}$, $-\sqrt{18}$. Suma trzech spośród nich jest równa 0. Którą liczbę należy odrzucić, aby pozostały te trzy liczby, których suma będzie równa 0?

Odpowiedź: C ($-\sqrt{10}$)

Zadanie sprawdza naszą umiejętność logicznego myślenia i sprawnego działania na pierwiastkach. Patrząc się na te liczby widzimy wyraźnie, że dwa najmniejsze pierwiastki są ze znakami dodatnimi, a dwa największe ze znakami ujemnymi. To powinien być dla nas sygnał, że na pewno odrzucić musimy którąś z ujemnych liczb, bo w przeciwnym razie wynik wyjdzie nam ujemny (a ma wyjść równy 0).

Spróbujmy więc dodać do siebie $\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{8}$. Jak jednak to zrobić? Aby dodać do siebie te pierwiastki musimy w $\sqrt{8}$ wyłaczyć czynnik przed znak pierwiastka. Całość obliczeń wyglądać będzie następująco:

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Teraz możemy otrzymany wynik przekształcić w następujący sposób:

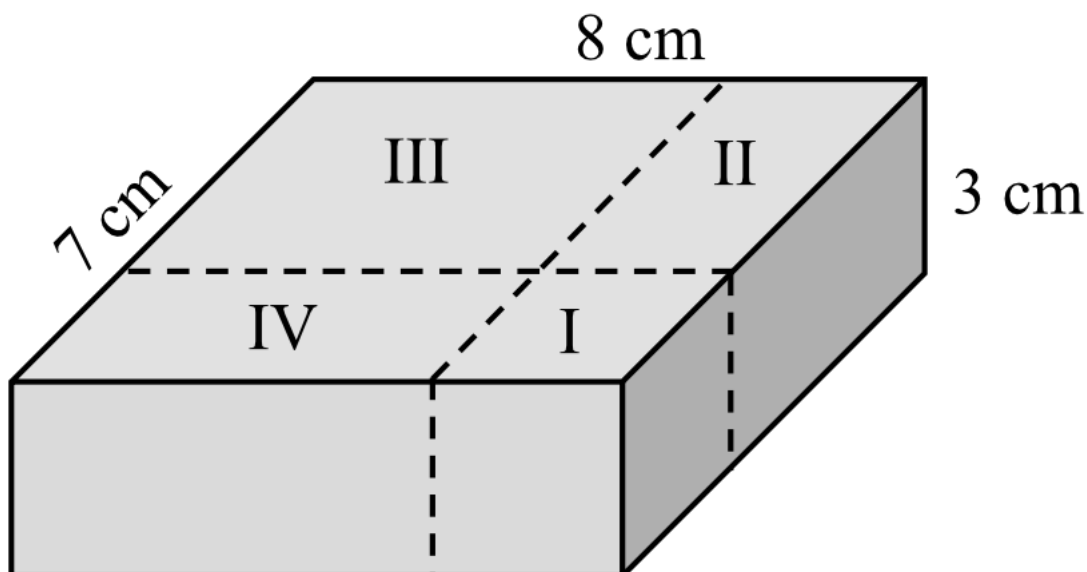
$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

To oznacza, że $\sqrt{2} + \sqrt{8} + (-\sqrt{18}) = 0$. Dlatego poszukiwaną liczbą do odrzucenia jest $-\sqrt{18}$.

Zadanie 17

0-1 pkt

Na rysunku przedstawiono prostopadłościenny klocek o wymiarach 8 cm , 7 cm i 3 cm oraz sposób, w jaki rozcięto go na cztery części: sześcian (I) i trzy prostopadłościany (II, III, IV).

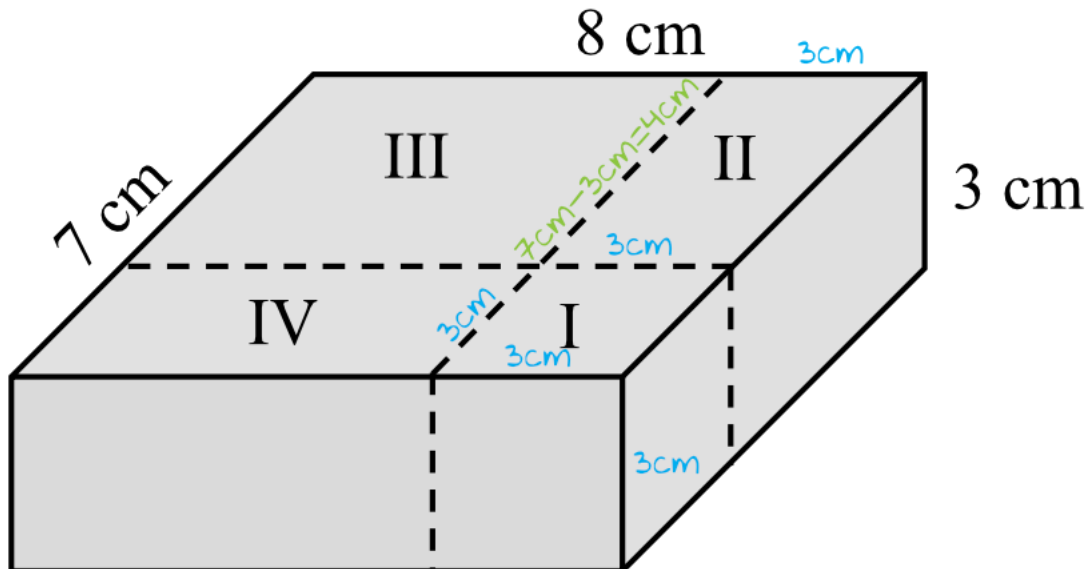


Objętość prostopadłościanu II jest równa:

Odpowiedź: B (36 cm^3)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego i odczytanie wymiarów prostopadłościanu II.

Wiemy, że prostopadłościan I jest sześcianem, czyli wszystkie jego krawędzie muszą mieć jednakową długość. Skoro jedna z krawędzi ma długość 3 cm , to znaczy że:



Ta prosta analiza pokazuje nam, że prostopadłościan II ma wymiary $3\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 3\text{ cm}$.

Krok 2. Obliczenie objętości prostopadłościanu II.

Korzystając ze wzoru na objętość prostopadłościanu możemy obliczyć, że:

$$V = abc, V = 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}, V = 36\text{ cm}^3$$

Zadanie 18

0–1 pkt

Na spektakl dostępne były bilety normalne w jednakowej cenie oraz bilety ulgowe, z których każdy kosztował o 50% mniej niż normalny. Pani Anna za 3 bilety normalne i 2 bilety ulgowe zapłaciła 120 złotych. Na ten sam spektakl pan Jacek kupił 2 bilety normalne i 3 ulgowe, a pan Marek kupił 2 bilety normalne i 1 ulgowy.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Pan Jacek zapłacił za bilety $\boxed{A}$ / $\boxed{B}$. Pani Anna zapłaciła za bilety o $\boxed{C}$ / $\boxed{D}$ więcej niż pan Marek.

Odpowiedź: B (105zł), C (45zł)

Krok 1. Obliczenie ceny biletu normalnego i ulgowego.

Musimy ułożyć odpowiednie równanie, które pozwoli nam obliczyć cenę każdego biletu. Wprowadźmy sobie zatem proste oznaczenia:

x - cena biletu normalnego

$0,5x$ - cena biletu ulgowego

Wiemy, że Pani Anna kupiła 3 bilety normalne i 2 ulgowe i zapłaciła 120zł, czyli powstaje nam równanie:

$$3x + 2 \cdot 0,5x = 120zł, \quad 3x + x = 120zł, \quad 4x = 120zł, \quad x = 30zł$$

Bilet normalny kosztuje więc 30zł, a ulgowy kosztuje $0,5 \cdot 30zł = 15zł$.

Krok 2. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Pan Jacek kupił 2 bilety normalne oraz 3 ulgowe, czyli zapłacił:

$$2 \cdot 30zł + 3 \cdot 15zł = 60zł + 45zł = 105zł$$

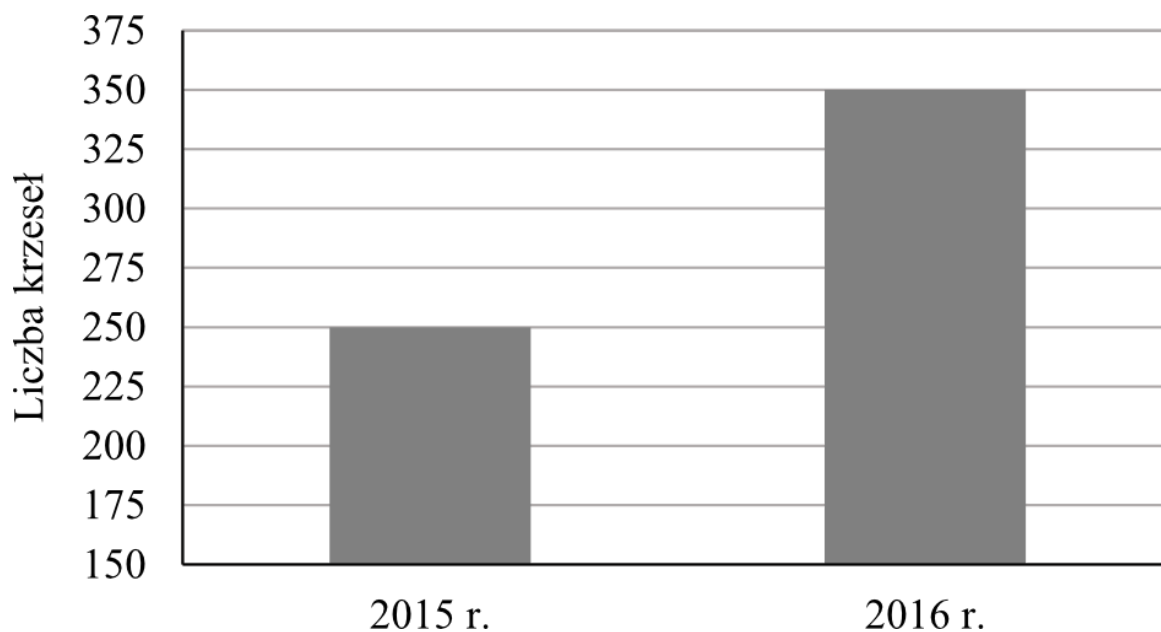
Krok 3. Rozwiązanie drugiej części zadania.

Pan Marek kupił 2 bilety normalne oraz 1 ulgowy, czyli zapłacił:

$$2 \cdot 30zł + 15zł = 75zł$$

Pani Anna wydała na bilety 120zł, czyli zapłaciła $120zł - 75zł = 45zł$ więcej od Pana Marka.

Na diagramie przedstawiono wielkość produkcji krzeseł w firmie Mebelix w 2015r. i 2016r.



Czy liczba wyprodukowanych krzeseł w roku 2016 była o 100% większa od liczby wyprodukowanych krzeseł w roku 2015?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B albo C. **A)** drugi słupek na wykresie jest 2 razy wyższy od pierwszego.

B) liczba krzeseł wyprodukowanych w 2016 roku jest o 40% większa niż liczba krzeseł wyprodukowanych w 2015 roku.

C) w 2016 roku wyprodukowano o 100 krzeseł więcej niż w 2015 roku.

Odpowiedź: Nie ponieważ opcja

W 2015 roku wyprodukowano 250 krzeseł. W 2016 roku wyprodukowano 350 krzeseł. Sprzedaż wzrosła więc o 100 sztuk. W związku z tym procentowy wzrost produkcji wyniósł:

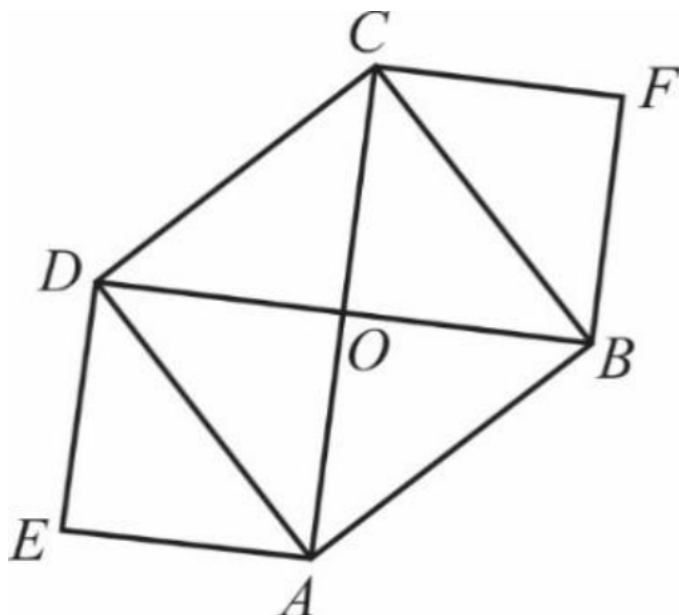
$$\frac{100}{250} = \frac{2}{5} = 40\%$$

Wzrost produkcji nie był więc równy 100%. To oznacza, że prawidłową odpowiedzią będzie "Nie, ponieważ liczba krzeseł wyprodukowanych w 2016 roku jest o 40% większa niż liczba krzeseł wyprodukowanych w 2015 roku."

Zadanie 20

0–1 pkt

Na rysunku przedstawiono kwadraty $ABCD$, $EAOD$ i $BFCO$. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $ABCD$.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Pole kwadratu $ABCD$ jest równe sumie pól kwadratów $EAOD$ i $BFCO$.

Obwód kwadratu $ABCD$ jest równy sumie długości wszystkich przekątnych kwadratów $EAOD$ i $BFCO$.

Pole kwadratu $ABCD$ jest równe sumie pól kwadratów $EAOD$ i $BFCO$.

Prawda

Fałsz

Obwód kwadratu $ABCD$ jest równy sumie długości wszystkich przekątnych kwadratów $EAOD$ i $BFCO$.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

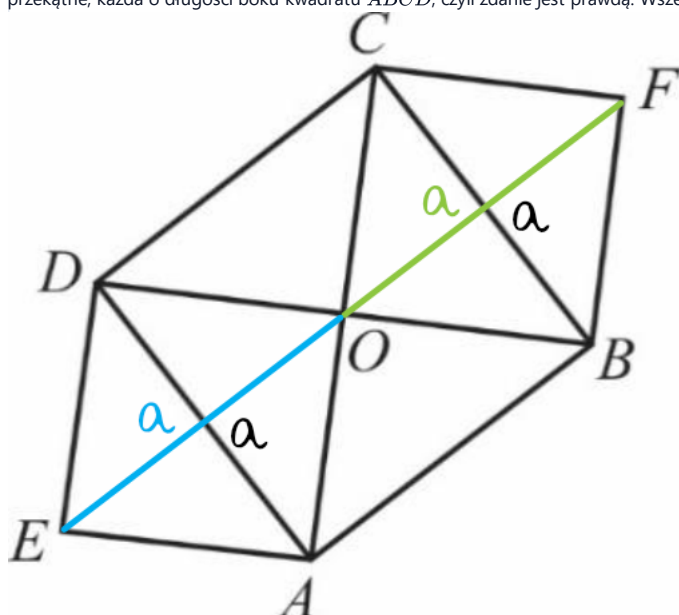
Zwróćmy uwagę, że wszystkie małe trójkąty mają identyczne wymiary oraz identyczne pole powierzchni. Kwadrat $ABCD$ składa się z czterech takich trójkątów, natomiast każdy z kwadratów $EAOD$ oraz $BFCO$ składa się z dwóch trójkątów. Razem więc kwadraty $EAOD$ oraz $BFCO$ mają identyczną sumę trójkątów (czyli identyczne pole powierzchni) co kwadrat $ABCD$. Pierwsze zdanie jest więc prawdą.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

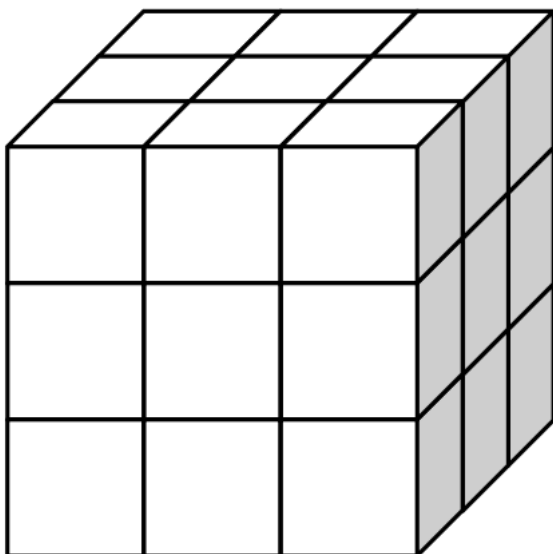
Warto pamiętać, że przekątne kwadratu mają jednakową długość. Jeżeli więc przykładowo przekątna AD w kwadracie $EAOD$ ma długość równą boku kwadratu $ABCD$, to także przekątna EO musi mieć taką samą długość. Kwadraty $EAOD$ i $BFCO$ mają więc łącznie 4

przekątne, każda o długości boku kwadratu $ABCD$, czyli zdanie jest prawdą. Wszelkie wątpliwości rozwieje poniższy rysunek pomocniczy:

Zadanie
21



Drewnianą kostkę sześcienną o krawędzi długości 30cm rozcięto na 27 jednakowych mniejszych sześciennych kostek. Z ośmiu takich małych kostek ułożono nowy sześcian.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Pole powierzchni nowego sześcianu jest równe 4800cm^2 .

Objętość nowego sześcianu jest równa 8000cm^3 .

Pole powierzchni nowego sześcianu jest równe 4800cm^2 .

Prawda

Fałsz

Objętość nowego sześcianu jest równa 8000cm^3 .

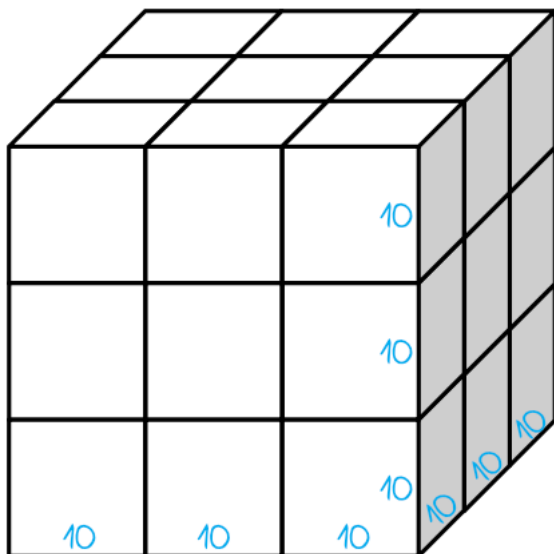
Prawda

Fałsz

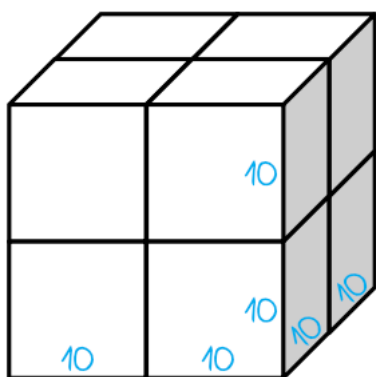
Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Obliczenie długości krawędzi pojedynczej kostki.

Skoro sześcian o krawędzi długości 30cm podzielono dokładnie tak jak przedstawia to rysunek, to każda mała kostka ma wymiary $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 10\text{cm}$.



Krok 2. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.
Z ośmiu kostek możemy złożyć następujący sześcian:



Widzimy więc, że jest to sześcian o boku 20cm . To oznacza, że jego pole powierzchni będzie równe:

$$P_c = 6a^2, P_c = 6 \cdot 20^2, P_c = 6 \cdot 400, P_c = 2400[\text{cm}^2]$$

Pierwsze zdanie jest więc nieprawdą.

Krok 3. Ocena prawdziwości drugiego zdania.
Korzystamy z tego samego sześcianu co w kroku drugim. Jego objętość będzie równa:

$$V = a^3, V = 20^3, V = 8000[\text{cm}^3]$$

Drugie zdanie jest więc prawdą.

W tabeli podano wybrane informacje na temat dwóch rodzajów herbat, które pije rodzina Nowaków.

Rodzaj opakowania	Zawartość opakowania	Cena opakowania	Ilość herbaty potrzebna do zaparzenia jednego kubka naparu
herbata w torebkach	50 torebek	8,50 zł	1 torebka
herbata syпка	50 g	5,00 zł	2 g

Rodzina ta wypija dziennie średnio 12 kubków herbaty i zamierza kupić możliwie najmniejszą liczbę opakowań herbaty jednego rodzaju, aby wystarczyło jej na 30 dni. Oblicz koszt zakupu herbaty syпkiej oraz koszt zakupu herbaty w torebkach.

Odpowiedź: Za herbatę w torebka

Krok 1. Obliczenie kosztu picia herbaty w torebkach.

Skoro rodzina wypija 12 torebek dziennie, to w ciągu miesiąca wypije:

$$12 \cdot 30 = 360 \text{ torebek}$$

Herbata pakowana jest w opakowaniu po 50 torebek, więc tych opakowań potrzebujemy:

$$360 : 50 = 7,2$$

To oznacza, że 7 opakowań nam nie wystarczy, musimy zatem kupić 8 opakowań, bo zgodnie z treścią zadania interesuje nas możliwie jak najmniejsza liczba opakowań herbaty, tak aby starczyło jej na 30 dni.

Skoro tak, to za herbatę w torebkach zapłacimy:

$$8 \cdot 8,5\text{zł} = 68\text{zł}$$

Krok 2. Obliczenie kosztu picia herbaty sypanej.

Chcemy przyrządzać 12 herbat dziennie, czyli miesięcznie będzie to:

$$30 \cdot 12 = 360 \text{ herbat}$$

Każdy napar potrzebuje 2g liści herbaty, czyli potrzebujemy:

$$360 \cdot 2\text{g} = 720\text{g}$$

Herbata sypka sprzedawana jest w opakowaniach po 50g, czyli takich opakowań potrzebujemy:

$$720\text{g} : 50\text{g} = 14,4$$

To oznacza, że tak naprawdę potrzebujemy 15 opakowań (bo 14 to za mało). Skoro każde opakowanie kosztuje 5zł, to za całość zapłacimy:

$$15 \cdot 5\text{zł} = 75\text{zł}$$

Zadanie 23

0-2 pkt

Uzasadnij, że pierwszy dzień września i pierwszy dzień grudnia tego samego roku wypadają w tym samym dniu tygodnia.

Odpowiedź: Udowodniono pokazują

Krok 1. Obliczenie ile dni upływa od pierwszego dnia września do pierwszego dnia grudnia.

Sprawdźmy ile dni ma każdy interesujący nas miesiąc:

Wrzesień: 30 dni

Październik: 31 dni

Listopad: 30 dni

Razem jest to 91 dni

Możemy więc powiedzieć, że od pierwszego września do pierwszego grudnia upływa 91 dni.

Krok 2. Dokończenie dowodzenia.

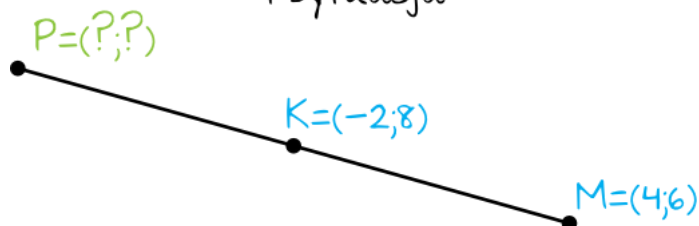
Przeliczmy 91 dni na tygodnie. Tydzień ma 7 dni, czyli jest to okres:

$$91 : 7 = 13 \text{ tygodni}$$

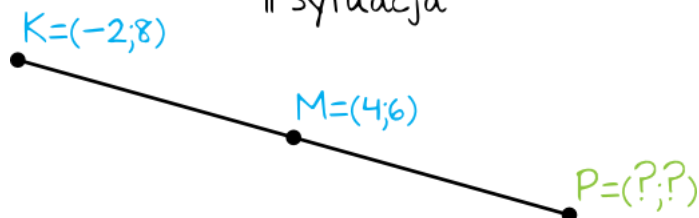
Otrzymaliśmy liczbę całkowitą (dzielenie bez reszty). Możemy więc powiedzieć że od pierwszego września do pierwszego grudnia upływa dokładnie 13 tygodni, czyli pierwszy grudnia wypada dokładnie w tym samym dniu tygodnia co pierwszy września i właśnie to należało udowodnić.

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie dane są punkty: $K = (-2, 8)$ i $M = (4, 6)$. Podaj współrzędne punktu P takiego, że jeden z trzech punktów P, K, M jest środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych punktach. Podaj wszystkie możliwości.

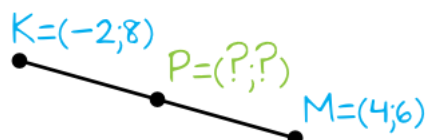
I sytuacja



II sytuacja



III sytuacja



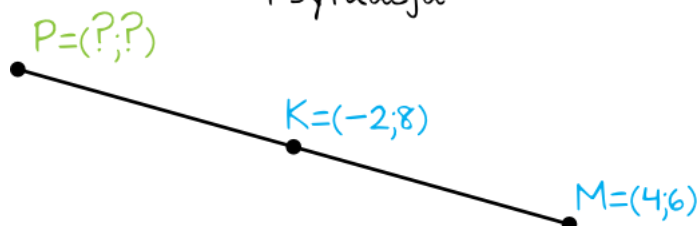
Odpowiedź: Punkt P może mieć

Krok 1. Analiza treści zadania.

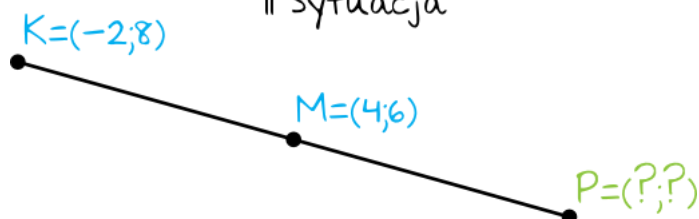
Zadanie nie precyzuje który punkt jest środkiem odcinka, a który jest punktem krańcowym odcinka. W związku z tym każdy z trzech punktów K, M, P może być środkiem naszego odcinka. Musimy więc rozważyć każdy z trzech wariantów

- punkt K jest środkiem odcinka PM
- punkt M jest środkiem odcinka PK
- punkt P jest środkiem odcinka KM

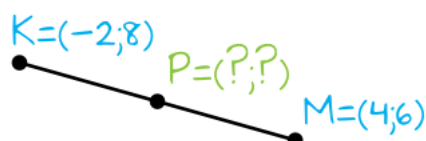
I sytuacja



II sytuacja



III sytuacja



Naszym zadaniem jest więc obliczenie współrzędnych punktu P w każdym z tych trzech przypadków. Do obliczeń współrzędnych punktu P skorzystamy ze wzorów na środek odcinka:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}, y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Krok 2. Rozpatrzenie sytuacji w której to punkt K jest środkiem odcinka.

Skoro $K = (-2, 8)$, to znaczy że:

Współrzędna xowa punktu P :

$$-2 = \frac{x+4}{2}, -4 = x+4, x = -8$$

Współrzędna ykowa punktu P :

$$8 = \frac{y+6}{2}, 16 = y+6, y = 10$$

Zatem $P = (-8; 10)$.

Krok 2. Rozpatrzenie sytuacji w której to punkt M jest środkiem odcinka.

Współrzędna xowa punktu P :

$$4 = \frac{x-2}{2}, 8 = x-2, x = 10$$

Współrzędna ykowa punktu P :

$$6 = \frac{y+8}{2}, 12 = y+8, y = 4$$

Zatem $P = (10; 4)$.

Krok 3. Rozpatrzenie sytuacji w której to punkt P jest środkiem odcinka.

Współrzędna xowa punktu P :

$$x = \frac{-2+4}{2}, x = \frac{2}{2}, x = 1$$

Współrzędna ykowa punktu P :

$$y = \frac{8+6}{2}, y = \frac{14}{2}, y = 7$$

Zatem $P = (1; 7)$.

Zadanie 25

0-2 pkt

W tabeli przedstawiono ceny kupna i sprzedaży dwóch walut w kantorze Pik.

	Kupno	Sprzedaż
1 dolar	4,18 zł	4,25 zł
1 funt brytyjski	5,10 zł	5,22 zł

Marcin chce wymienić 400 funtów brytyjskich na dolary. W tym celu musi najpierw wymienić funty na złotówki, a następnie – otrzymane złotówki na dolary. Ile dolarów otrzyma Marcin, jeżeli wymieni walutę w kantorze Pik?

Odpowiedź: Marcin otrzyma 480

Krok 1. Interpretacja tabeli kursów walut.

Największą pułapką w tym zadaniu jest zrozumienie tabeli kursów walut. Kolumna "kupno" pokazuje po jakiej cenie kantor kupuje waluty od swoich klientów. Kolumna "sprzedaż" pokazuje po jakiej cenie kantor sprzedaje waluty. Bardzo często jest tak, że mylnie interpretujemy tę tabelę i patrzymy na nią z perspektywy klienta, ale byłoby to nielogiczne gdybyśmy w tym samym kantorze mogli kupić dolara za 4,18 zł i sprzedać go za 4,25 zł.

Krok 2. Obliczenie ile złotych zapłaci kantor za 400 funtów.

Kantor kupuje funta po kursie 5,10 zł. Skoro Marcin ma 400 funtów, to kantor zapłaci mu:

$$400 \cdot 5,10 \text{ zł} = 2040 \text{ zł}$$

Krok 3. Obliczenie ile dolarów otrzyma Marcin za 2040 zł.

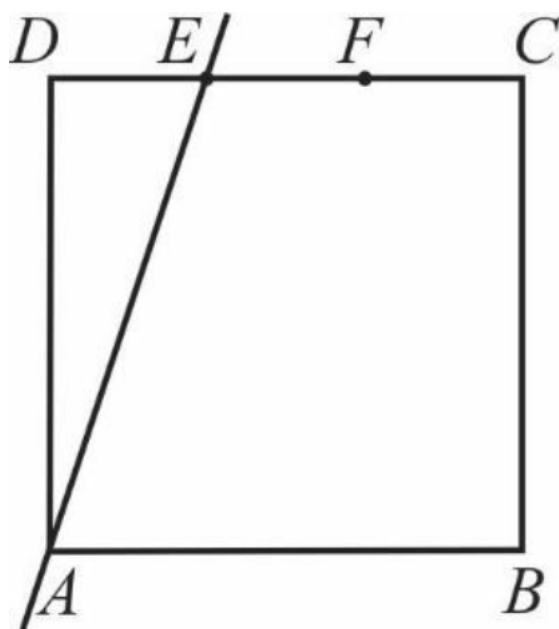
Kantor sprzedaje dolary po kursie 4,25 zł. Skoro Marcin ma 2040 zł, to kantor wyda mu:

$$2040 \text{ zł} : 4,25 \text{ zł} = 480$$

Zadanie 26

0-2 pkt

Bok CD kwadratu $ABCD$ podzielono punktami E i F na trzy odcinki równej długości. Przez wierzchołek A kwadratu i przez punkt E poprowadzono prostą. Pole trójkąta AED wynosi 24cm^2 .



Oblicz pole kwadratu $ABCD$.

Odpowiedź: Pole kwadratu wynosi

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Jeżeli założymy sobie, że kwadrat ma bok długości a , to zgodnie z treścią zadania odcinek DE ma długość $\frac{1}{3}a$.

Krok 2. Obliczenie długości boku kwadratu.

Wiemy że trójkąt AED jest trójkątem prostokątnym i ma pole równe 24cm^2 . Podstawa tego trójkąta ma długość $\frac{1}{3}a$, natomiast wysokość ma długość a . Wykorzystując więc wzór na pole trójkąta możemy ułożyć równanie z którego obliczymy długość boku a (czyli tym samym długość boku kwadratu).

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a \cdot a = 24, \quad \frac{1}{6}a^2 = 24, \quad a^2 = 144, \quad a = 12[\text{cm}]$$

Krok 3. Obliczenie pola kwadratu.

Wiemy już, że nasz kwadrat ma bok długości 12cm , zatem jego pole będzie równe:

$$P = 12\text{cm} \cdot 12\text{cm}, \quad P = 144\text{cm}^2$$

W pierwszym zbiorniku było czterokrotnie więcej wody niż w drugim. Po wlaniu 6 litrów wody do każdego z nich, w pierwszym jest dwukrotnie więcej wody niż w drugim. Ile łącznie wody jest teraz w obu zbiornikach?

Odpowiedź: W obu zbiornikach je

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń i ułożenie równania.

Wprowadźmy sobie oznaczenia i spróbujmy ułożyć równanie na podstawie treści zadania:

x - początkowa ilość litrów wody w drugim zbiorniku

$4x$ - początkowa ilość litrów wody w pierwszym zbiorniku (bo jest jej czterokrotnie więcej)

Wiemy, że po wlaniu 6 litrów wody otrzymamy sytuację w której w pierwszym zbiorniku jest dwa razy więcej wody, czyli:

$$4x + 6 = 2 \cdot (x + 6)$$

Uwaga: Równie dobrze możemy zapisać, że:

x - początkowa ilość litrów wody w pierwszym zbiorniku

$\frac{1}{4}x$ - początkowa ilość litrów wody w drugim zbiorniku

Wtedy po dolaniu wody otrzymamy równanie:

$$x + 6 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}x + 6 \right)$$

Krok 2. Obliczenie początkowej ilości wody w pierwszym i drugim zbiorniku.

Rozwiązując powstałe równanie obliczymy początkową ilość litrów wody w drugim zbiorniku, czyli:

$$4x + 6 = 2 \cdot (x + 6), \quad 4x + 6 = 2x + 12, \quad 2x = 6, \quad x = 3$$

Wyszło nam z obliczeń, że w drugim pojemniku mamy 3 litry wody. To oznacza, że w pierwszym zbiorniku było $4 \cdot 3 = 12$ litrów wody.

Krok 3. Obliczenie końcowej łącznej ilości wody w obu zbiornikach.

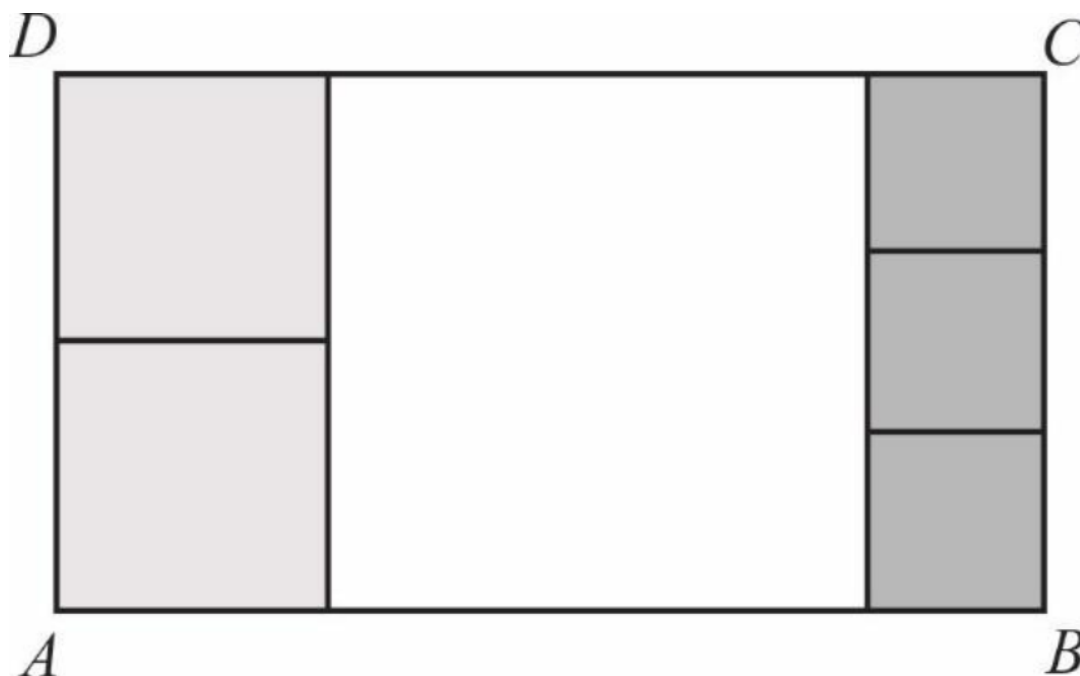
Naszym zadaniem jest obliczenie łącznej ilości wody w obu zbiornikach po dolaniach.

W pierwszym zbiorniku było 12 litrów wody, a po dolaniu 6 litrów było tam 18 litrów.

W drugim zbiorniku były 3 litry wody, a po dolaniu 6 litrów było tam 9 litrów.

Łącznie jest to więc $18 + 9 = 27$ litrów.

Prostokąt $ABCD$ podzielono na 6 kwadratów: jeden duży, dwa średnie i trzy małe, jak na rysunku.

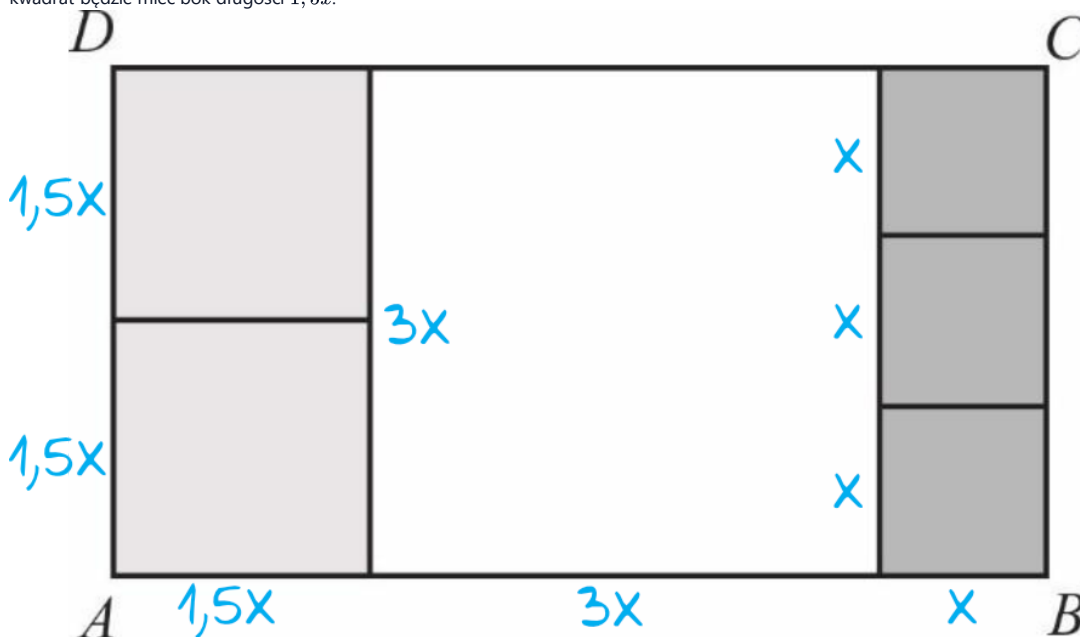


Uzasadnij, że pole powierzchni dużego kwadratu jest większe niż połowa powierzchni prostokąta $ABCD$.

Odpowiedź: Udowodniono obliczaj

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Oznaczmy sobie długość boku małego kwadratu jako x . To będzie oznaczać, że duży kwadrat będzie mieć długość $3x$, a średni kwadrat będzie mieć bok długości $1,5x$:



Krok 2. Obliczenie pola prostokąta $ABCD$.

Zgodnie z rysunkiem możemy powiedzieć, że nasz prostokąt ma boki długości $5,5x$ oraz $3x$, zatem jego pole powierzchni będzie równe:

$$P = 5,5x \cdot 3x, P = 16,5x^2$$

Krok 3. Obliczenie pola dużego kwadratu.

Duży kwadrat ma bok długości $3x$, zatem jego pole powierzchni będzie równe:

$$P = 3x \cdot 3x, P = 9x^2$$

Krok 4. Zakończenie dowodzenia.

Duży kwadrat ma pole równe $9x^2$.

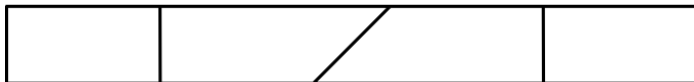
Półowa pola prostokąta $ABCD$ wynosi $16,5x^2 : 2 = 8,25x^2$.

To oznacza, że pole dużego kwadratu jest rzeczywiście większe niż połowa prostokąta $ABCD$.

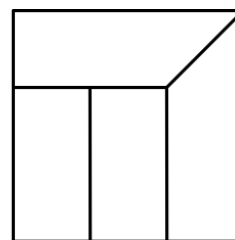
Zadanie 29

0-3 pkt

Prostokątny pasek papieru pocięto na cztery części w sposób przedstawiony na rysunku 1. Z tych części ułożono figurę w kształcie kwadratu tak, jak pokazano na rysunku 2. Pole tego kwadratu jest równe 36cm^2 .



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Oblicz obwód paska papieru przed pocięciem.

Odpowiedź: Obwód paska jest rów

Krok 1. Obliczenie długości boku kwadratu.

Kwadrat ma pole powierzchni 36cm^2 , czyli ma bok długości $\sqrt{36} = 6\text{cm}$.

Krok 2. Obliczenie szerokości paska.

Nasz kwadrat ma bok długości 6cm i na tę długość składają się trzy szerokości pociętego paska. To oznacza, że pasek miał szerokość:

$$6\text{cm} : 3 = 2\text{cm}$$

Krok 3. Obliczenie długości paska.

Pole powierzchni paska oraz kwadratu są sobie równe, bo składają się z tych samych elementów. Skoro znamy szerokość paska, to ze wzoru na pole powierzchni możemy obliczyć jego długość:

$$2\text{cm} \cdot x = 36\text{cm}^2, \quad x = 18\text{cm}$$

Krok 4. Obliczenie obwodu paska.

Pasek ma szerokość 2cm i długość 18cm , zatem jego obwód będzie równy:

$$Obw = 2 \cdot 2\text{cm} + 2 \cdot 18\text{cm}, \quad Obw = 4\text{cm} + 36\text{cm}, \quad Obw = 40\text{cm}$$

Zadanie 30

0-3 pkt

Trzy sąsiadki zamówiły wspólnie kawę w sklepie internetowym. Kawa dla pani Malinowskiej miała kosztować 120zł, a dla pani Wiśniewskiej i pani Śliwińskiej – po 90zł. Jednak przy zakupie otrzymały rabat i za zamówioną kawę zapłaciły tylko 260zł. Ile pieniędzy powinna zapłacić każda z Pań, aby jej wpłata była proporcjonalna do pierwotnej wartości zamówienia?

Odpowiedź: Pani Malinowska powi

Krok 1. Obliczenie początkowej wartości zamówienia.

Pani Malinowska miała zapłacić 120zł, a Panie Wiśniewska i Śliwińska po 90zł, czyli razem Panie miały zapłacić:

$$120zł + 90zł + 90zł = 300zł$$

Krok 2. Obliczenie udziału w zakupach każdej z Pań.

Pani Malinowska miała zapłacić 120zł z łącznej kwoty 300zł, czyli jej udział w zakupach wyniósł $\frac{120}{300} = \frac{4}{10}$

Pani Wiśniewska miała zapłacić 90zł z łącznej kwoty 300zł, czyli jej udział w zakupach wyniósł $\frac{90}{300} = \frac{3}{10}$

Pani Śliwińska miała zapłacić 90zł z łącznej kwoty 300zł, czyli jej udział w zakupach wyniósł $\frac{90}{300} = \frac{3}{10}$

Krok 3. Obliczenie kwoty do zapłaty po otrzymaniu rabatu.

Kwota do zapłaty przez każdą z Pań ma być proporcjonalna do pierwotnej wartości zamówienia. Końcowy rachunek wyniósł 260zł, czyli:

$$\text{Pani Malinowska powinna zapłacić } \frac{4}{10} \cdot 260zł = 104zł$$

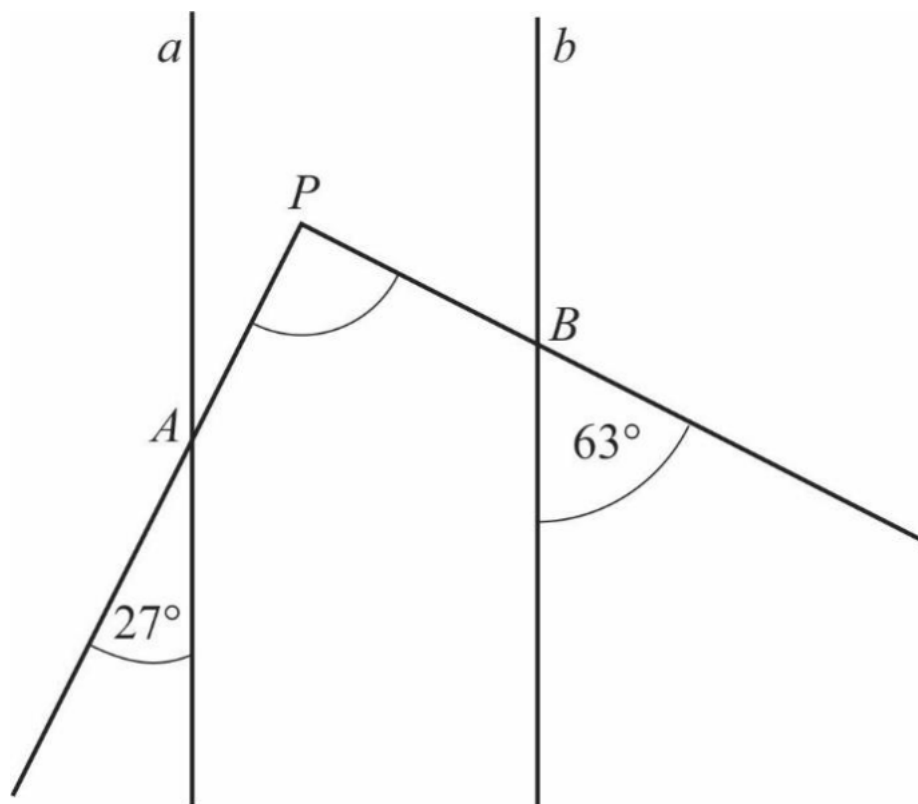
$$\text{Pani Wiśniewska powinna zapłacić } \frac{3}{10} \cdot 260zł = 78zł$$

$$\text{Pani Śliwińska powinna zapłacić } \frac{3}{10} \cdot 260zł = 78zł$$

Zadanie 31

0-2 pkt

Proste a i b są równoległe.

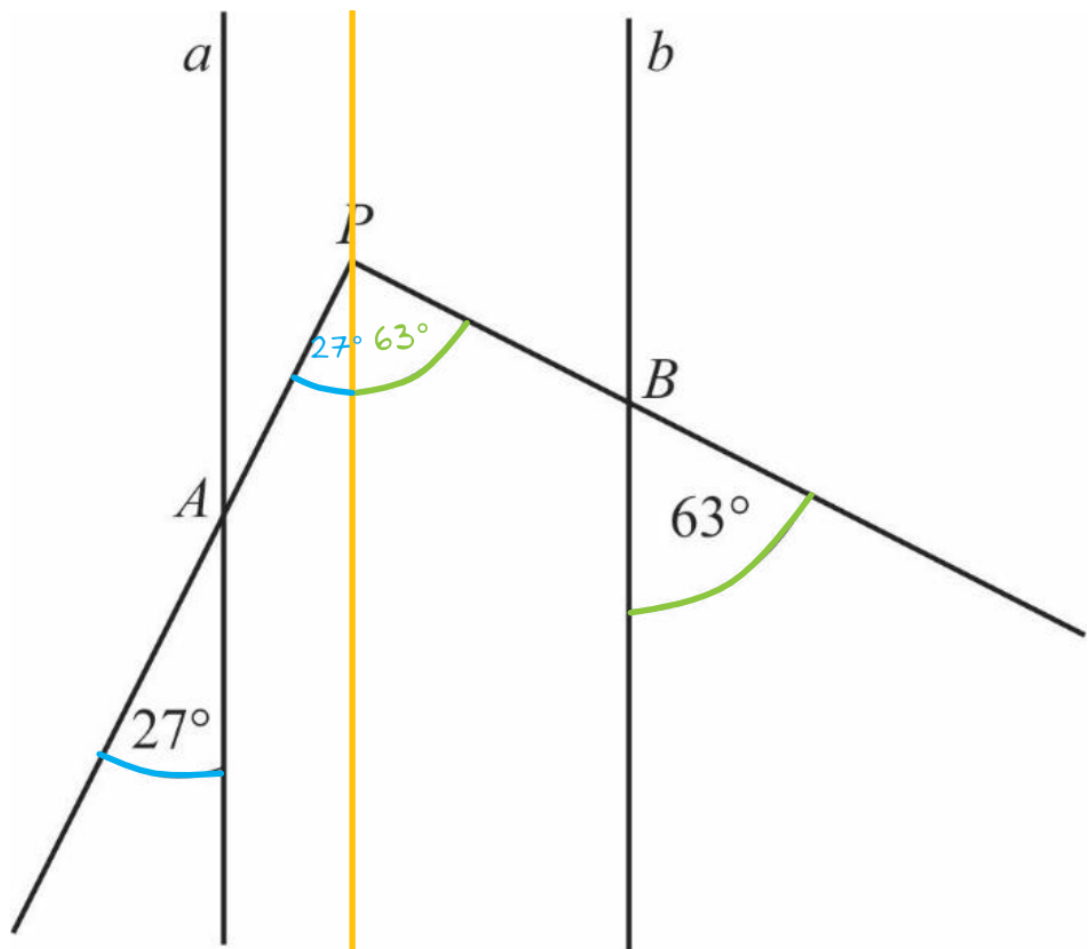


Półproste PA i PB przecinają te proste, w wyniku czego tworzą z nimi kąty ostre o miarach podanych na rysunku. Uzasadnij, że kąt APB jest prosty.

Odpowiedź: Uzasadniono dorysowu

I sposób - przeprowadzając prostą przez punkt P :

Jeżeli przez punkt P poprowadzimy prostą równoległą do prostych a oraz b , to korzystając z własności kątów odpowiadających otrzymamy następującą sytuację:



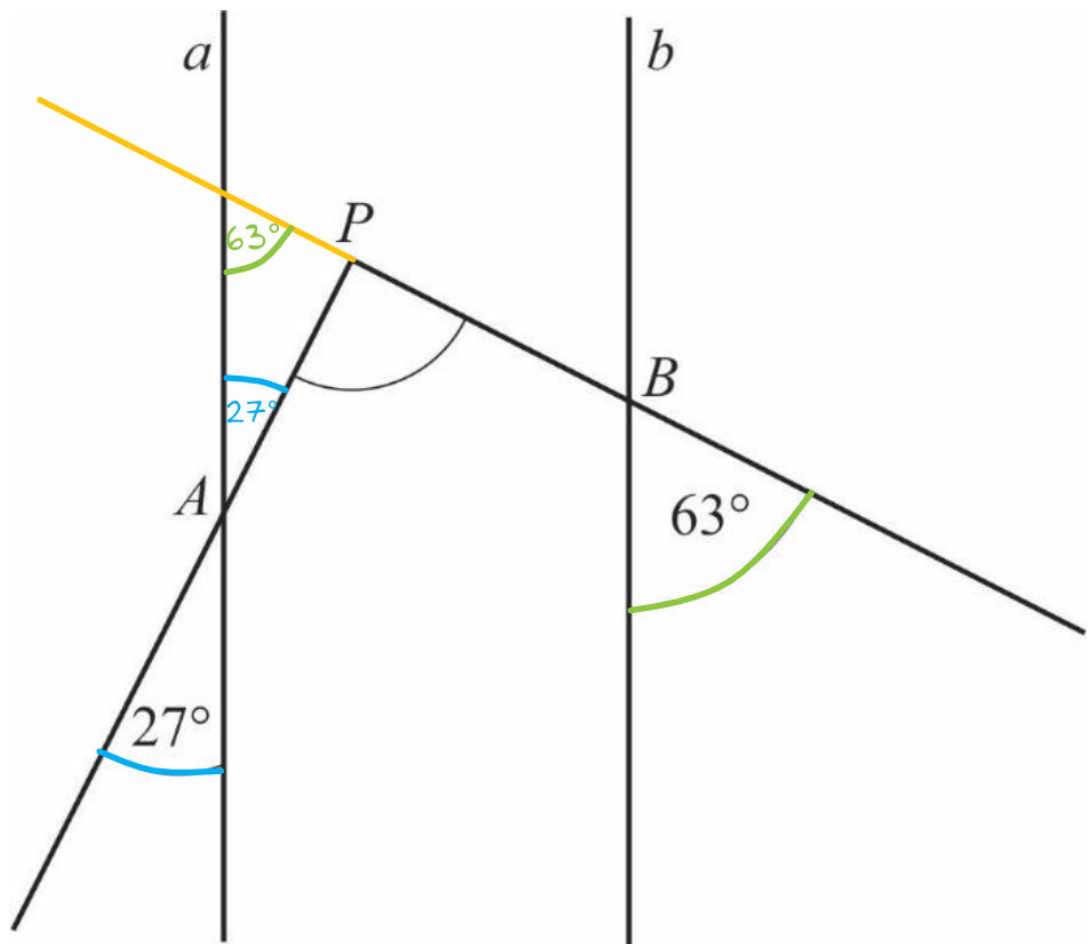
Suma kątów $27^\circ + 63^\circ$ daje kąt 90° i właśnie to należało udowodnić.

II sposób - przedłużając półprostą PB :

Jeżeli przedłużymy półprostą PB tak aby przecięła się z prostą a to otrzymamy trójkąt ACP którego dwa kąty wyznaczymy z własności kątów:

$|\angle CAP| = 27^\circ$ (kąt wierzchołkowy)

$|\angle ACP| = 63^\circ$ (kąt odpowiadający)



To oznacza, że kąt CPA ma miarę:

$$180^\circ - 27^\circ - 63^\circ = 90^\circ$$

Kąty CPA oraz poszukiwany przez nas APB są kątami przyległymi (czyli takimi których łączna miara wynosi 180°). Skoro $|\angle CPA| = 90^\circ$, to:

$$|\angle APB| = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Zadanie 32

0-4 pkt

W pojemniku znajdują się niebieskie, czarne i zielone piłeczki. Czarnych piłeczek jest o 20% mniej niż niebieskich, a niebieskich – o 6 mniej niż zielonych. Niebieskich i zielonych piłeczek jest łącznie o 48 więcej niż czarnych. Ile jest wszystkich piłeczek w tym pojemniku?

Odpowiedź: W pojemniku znajduje

Krok 1. Wprowadzenie poprawnych oznaczeń.

Tutaj możemy tak naprawdę tworzyć bardzo różnorodne oznaczenia, ale patrząc na kontekst zadania to najprościej będzie chyba odnosić się zawsze do niebieskich piłek:

x - liczba niebieskich piłeczek

$0,8x$ - liczba czarnych piłeczek

$x + 6$ - liczba zielonych piłeczek

Krok 2. Zapisanie i rozwiązanie równania.

Skoro niebieskich i zielonych piłeczek jest łącznie o 48 więcej niż czarnych, to powstaje nam równanie:

$$\text{niebieskie} + \text{zielone} = \text{czarne} + 48, \quad x + (x + 6) = 0,8x + 48, \quad 2x + 6 = 0,8x + 48, \quad 1,2x = 42, \quad x = 35$$

Krok 3. Obliczenie liczby poszczególnych piłeczek.

Wiemy już, że mamy 35 niebieskich piłeczek. Teraz musimy policzyć pozostałe kolory:

Czarne: $0,8 \cdot 35 = 28$

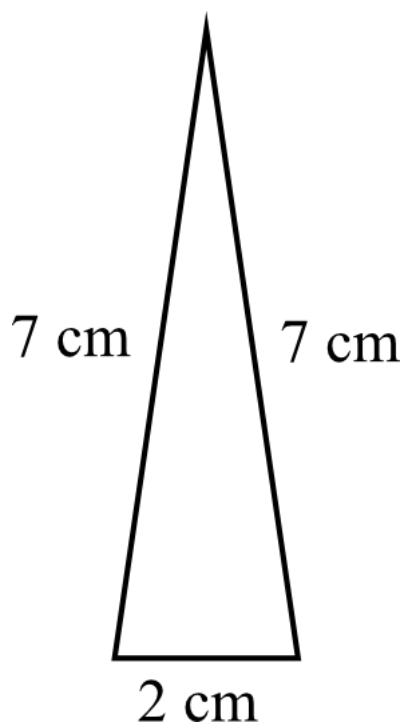
Zielone: $35 + 6 = 41$

Krok 4. Obliczenie łącznej liczby wszystkich piłeczek.

Wszystkich piłeczek mamy zatem:

$$35 + 28 + 41 = 104$$

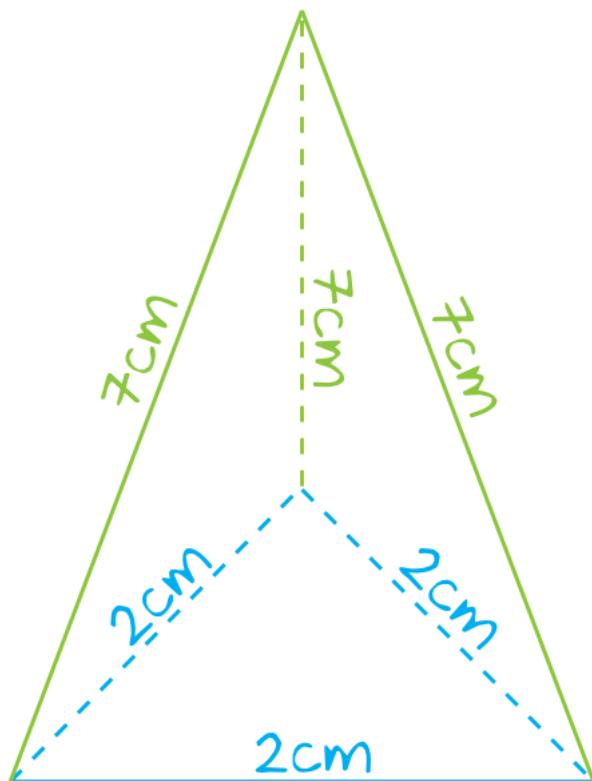
Trójkąt przedstawiony na rysunku jest ścianą boczną ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.



Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Odpowiedź: Pole powierzchni cał

Krok 1. Obliczenie pola podstawy.

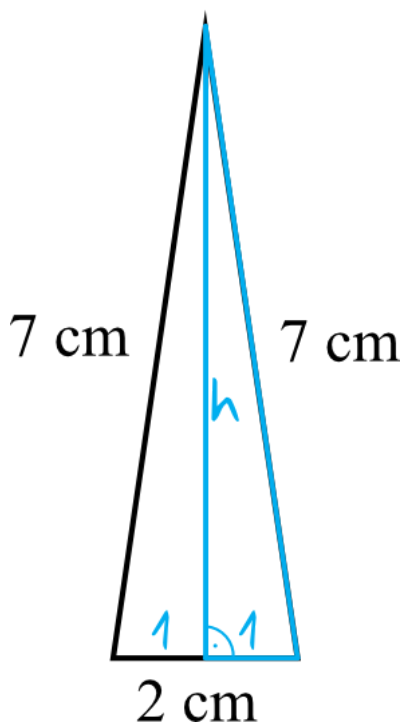


Wiemy, że ostrosłup jest ostrosłupem prawidłowym trójkątnym. To oznacza, że w podstawie musi znaleźć się trójkąt równoboczny. Z rysunku możemy od razu odczytać, że długość boku tego trójkąta znajdującego się w podstawie jest równa 2 cm (patrz rysunek), a skoro tak, to pole podstawy będzie równe:

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, P_p = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} P_p = \frac{4\sqrt{3}}{4}, P_p = \sqrt{3}[\text{cm}^2]$$

Krok 2. Obliczenie wysokości ściany bocznej.

Do obliczenia pola powierzchni całkowitej potrzebujemy znać jeszcze pola ściany bocznej. Aby ją obliczyć musimy poznać wysokość trójkąta i tu skorzystamy z Twierdzenia Pitagorasa oraz z własności trójkątów równoramiennych, która mówi nam że wysokość takiego trójkąta dzieli podstawę na dwie równe części.



Z Twierdzenia Pitagorasa otrzymamy:

$$1^2 + h^2 = 7^2, \quad 1 + h^2 = 49, \quad h^2 = 48, \quad h = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}[\text{cm}]$$

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni pojedynczej ściany bocznej.

Wiemy już, że w ścianie bocznej znajduje się trójkąt o podstawie 2 cm oraz wysokości $4\sqrt{3}\text{ cm}$, zatem jego pole powierzchni będzie równe:

$$P_b = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3}, \quad P_b = 1 \cdot 4\sqrt{3}, \quad P_b = 4\sqrt{3}[\text{cm}^2]$$

Krok 4. Obliczenie pola powierzchni całkowitej.

Na pole powierzchni całkowitej składają się jedna podstawa oraz trzy ściany boczne, zatem:

$$P_c = P_p + 3P_b, \quad P_c = \sqrt{3} + 3 \cdot 4\sqrt{3}, \quad P_c = \sqrt{3} + 12\sqrt{3}, \quad P_c = 13\sqrt{3}[\text{cm}^2]$$

Zadanie 34

0-2 pkt

Jaskinię Książęcą może zwiedzić codziennie tylko dziesięć grup, które wchodzą po jednej w jednakowych odstępach czasu. Pierwsza grupa rozpoczyna zwiedzanie o 9:00, a ostatnia – o 16:30. Grupa harcerzy przyszła zwiedzić jaskinię o godzinie 13:25. Ile co najmniej minut harcerze będą czekali na wejście do jaskini?

Odpowiedź: Harcerze będą musieli

Krok 1. Obliczenie czasu pojedynczego zwiedzania jaskini.

Od 9:00 do 16:30 upływa 7 godzin 30 minut, czyli 450 minut.

W tym czasie jaskinię zwiedzi (czyli wejdzie i wyjdzie) 9 grup (dziesiąta grupa wejdzie o 16:30). To oznacza, że jedno zwiedzanie trwa:

$$450 : 9 = 50 \text{ minut}$$

Krok 2. Obliczenie czasu czekania na wejście do jaskini.

Skoro czas zwiedzania wynosi 50 minut, to wejścia do jaskini prezentują się następująco:

I wejście: 9:00

II wejście: 9:50

III wejście: 10:40

IV wejście: 11:30

V wejście: 12:20

VI wejście: 13:10

VII wejście: 14:00

Harcerze przychodzą na miejsce o godzinie 13:25, więc będą musieli poczekać 35 minut.

Zadanie 35

0-2 pkt

Agnieszka zapisała liczbę czterocyfrową podzielną przez 7. Skreśliła w tej liczbie cyfrę jedności i otrzymała liczbę 496. Jaką liczbę czterocyfrową zapisała Agnieszka?

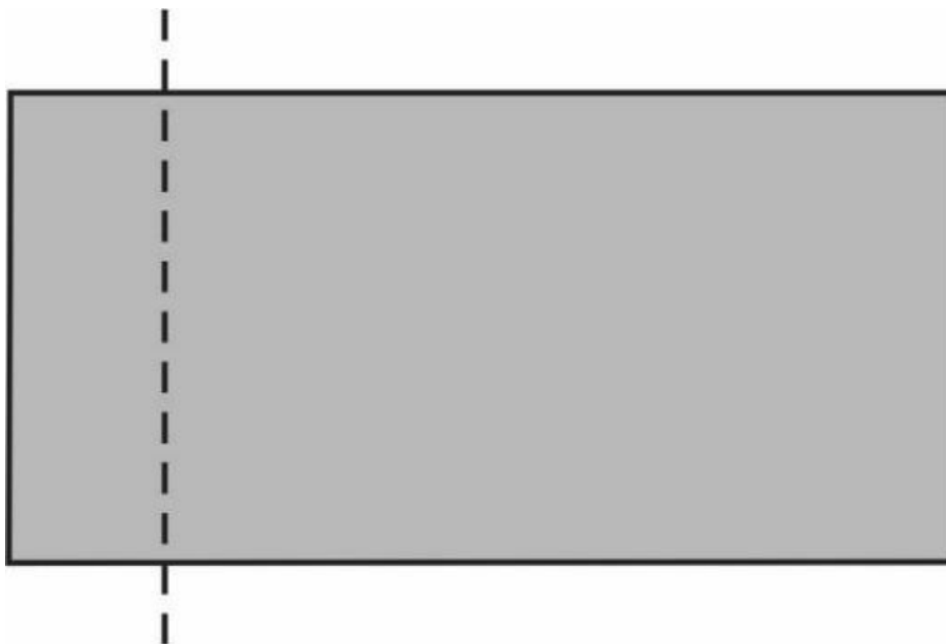
Odpowiedź: Agnieszka zapisała 1

Liczbę zapisaną przez Agnieszkę możemy symbolicznie zapisać jako 496■. Generalnie nie mamy żadnej cechy podzielności liczb przez 7, która mogłaby nam pomóc w rozwikłaniu jaka to cyfra znajduje się na ostatnim miejscu tej liczby, ale możemy zauważyć, że ta nasza liczba to tak naprawdę suma $4900 + 6■$. 4900 jest na pewno podzielne przez 7, więc musimy znaleźć liczbę dwucyfrową podzielną przez 7 w której cyfra dziesiątek jest równa 6. Taka jest tylko jedna liczba i jest to 63 i taka też będzie "końcówka" naszej czterocyfrowej liczby. To oznacza, że Agnieszka zapisała liczbę 4963.

Zadanie 36

0-3 pkt

Prostokąt o bokach długości 12 i 6 podzielono na dwa prostokąty (patrz rysunek).

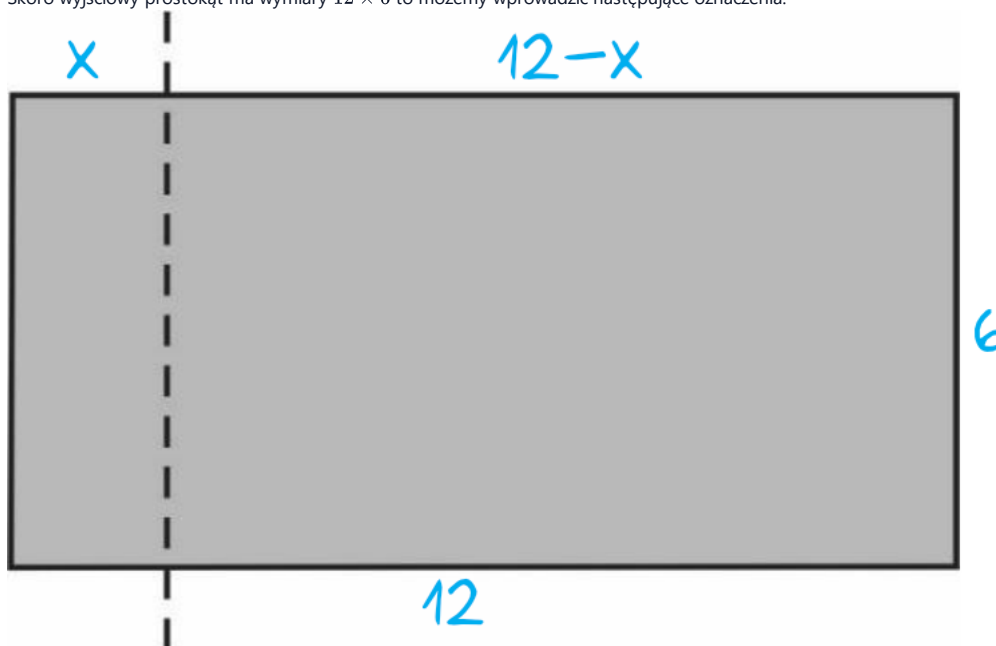


Obwód jednego z prostokątów otrzymanych w wyniku podziału jest 2 razy większy od obwodu drugiego. Podaj wymiary prostokąta o mniejszym obwodzie.

Odpowiedź: Prostokąt o mniejszy

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Skoro wyjściowy prostokąt ma wymiary 12×6 to możemy wprowadzić następujące oznaczenia:



Krok 2. Obliczenie obwodów mniejszego i większego prostokąta.

Mniejszy prostokąt ma obwód równy:

$$Obw_M = 2 \cdot x + 2 \cdot 6 = 2x + 12$$

Większy prostokąt ma obwód równy:

$$Obw_D = 2 \cdot (12 - x) + 2 \cdot 6, Obw_D = 24 - 2x + 12, Obw_D = 36 - 2x$$

Krok 3. Ułożenie i rozwiązanie równania.

Z treści zadania wiemy, że obwód dużego prostokąta jest dwukrotnie większy, zatem powstaje nam równanie:

$$Obw_D = 2 \cdot Obw_M, \quad 36 - 2x = 2 \cdot (2x + 12), \quad 36 - 2x = 4x + 24, \quad 12 = 6x, \quad x = 2$$

Krok 4. Wyznaczenie wymiarów mniejszego prostokąta.

Patrząc się na rysunek pomocniczy widzimy, że nasz mniejszy prostokąt ma wymiary 6 i x , czyli 6 i 2.