

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016**

**MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY**

**FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)**

i

**FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1**

SIERPIEŃ 2016

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	B	D	B	B	A	A	B	A	D	C	D	B	C	C	D	A	D	C	C	D	C	A	D	B

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 6x \geq (x-2)(x-8)$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $2x^2 + 4x - 16$ lub $x^2 + 2x - 8$.

Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- zapisujemy nierówność w postaci $x^2 + 2x - 8 \geq 0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 + 2x - 8$
 - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
 $\Delta = 4 + 32 = 36$ i stąd $x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2$ oraz $x_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$
- albo
- stosujemy wzory Viète'a:
 $x_1 \cdot x_2 = -8$ oraz $x_1 + x_2 = -2$, stąd $x_1 = 2$ oraz $x_2 = -4$

albo

- przekształcamy nierówność do postaci $(x-2)(2x+8) \geq 0$, skąd bezpośrednio odczytujemy pierwiastki: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$,

albo

- przekształcamy nierówność do postaci równoważnej $|x+1| \geq 3$, korzystając z własności wartości bezwzględnej, i odczytujemy te wartości x , dla których $|x+1| = 3$:
 $x = -4$, $x = 2$.

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -4) \cup \langle 2, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, -4) \cup \langle 2, +\infty)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap rozwiązania zadania popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
 - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
 - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.: $x_1 + x_2 = 1$ i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
 - błędnie zapisze nierówność z wartością bezwzględną, np. $|x-1| \geq 3$ i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -4) \cup \langle 2, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, -4) \cup \langle 2, +\infty)$ lub $(x \leq -4 \text{ lub } x \geq 2)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \leq -4, x \geq 2$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Uwagi

1. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x \leq -4$ i $x \geq 2$, $x \leq -4$ oraz $x \geq 2$ itp.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez $x-2$ bez stosownego założenia, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez $x-2$, rozważając dwa przypadki $x-2 > 0$ oraz $x-2 < 0$, rozwiąże nierówność w każdym z tych przypadków, ale nie rozważy przypadku $x-2 = 0$, to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = 2$, $x_2 = -4$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $(-\infty, -2) \cup \langle 2, +\infty)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Akceptujemy zapis przedziału nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej, np. $(-\infty, 2) \cup \langle -4, +\infty)$, $\langle -4, -\infty) \cup (+\infty, 2)$.

Zadania 27. (0–2)

Jeżeli do licznika pewnego nieskracalnego ułamka dodamy 32, a mianownik pozostawimy niezmieniony, to otrzymamy liczbę 2. Jeżeli natomiast od licznika i od mianownika tego ułamka odejmiemy 6, to otrzymamy liczbę $\frac{8}{17}$. Wyznacz ten ułamek.

Rozwiązanie (I sposób)

Niech x i y oznaczają odpowiednio licznik i mianownik szukanego ułamka nieskracalnego.

Z treści zadania otrzymujemy układ równań

$$\frac{x+32}{y} = 2 \quad \text{oraz} \quad \frac{x-6}{y-6} = \frac{8}{17},$$

$$2y = x + 32 \quad \text{oraz} \quad 17(x - 6) = 8(y - 6),$$

$$2y = x + 32 \quad \text{oraz} \quad 17x - 102 = 8y - 48.$$

Stąd

$$17x - 54 = 4x + 128,$$

$$13x = 182,$$

$$x = 14,$$

więc $2y = 14 + 32 = 46$. Zatem $y = 23$.

Szukany ułamek to $\frac{14}{23}$. Jest to ułamek nieskracalny.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$\frac{x+32}{y} = 2 \quad \text{i} \quad \frac{x-6}{y-6} = \frac{8}{17}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy wyznaczy szukany ułamek: $\frac{14}{23}$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy licznik $x = 14$ i mianownik $y = 23$ szukanego ułamka, ale nie zapisze tego ułamka, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie (II sposób)

Dodając do licznika i do mianownika ułamka $\frac{8}{17}$ liczbę 6, otrzymujemy ułamek $\frac{14}{23}$. Jest to ułamek nieskracalny, a gdy do jego licznika dodamy liczbę 32, to otrzymujemy $\frac{14+32}{23} = \frac{46}{23} = 2$. Zatem szukany ułamek to $\frac{14}{23}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy doda do licznika i do mianownika ułamka $\frac{8}{17}$ liczbę 6, zapisze, że szukanym ułamkiem jest $\frac{14}{23}$ i nie zapisze, że $\frac{14+32}{23} = \frac{46}{23} = 2$, a więc, że spełnia on drugi z warunków podanych w treści zadania.

Zdający otrzymuje 2 p.
 gdy doda do licznika i do mianownika ułamka $\frac{8}{17}$ liczbę 6, zapisze, że szukanym ułamkiem jest $\frac{14}{23}$ oraz sprawdzi, że $\frac{14+32}{23} = \frac{46}{23} = 2$.

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$, to

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = ab + ac + bc.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc}.$$

Wykorzystujemy warunek $abc = 1$ i otrzymujemy zależność

$$\frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{bc + ac + ab}{1} = bc + ac + ab,$$

co kończy dowód.

Uwaga

Tezę możemy też uzasadnić w inny sposób:

1) Korzystamy z równości $abc = 1$

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\cancel{a}bc}{\cancel{a}} + \frac{a\cancel{b}c}{\cancel{b}} + \frac{ab\cancel{c}}{\cancel{c}} = bc + ac + ab.$$

2) Z równości $abc = 1$ otrzymujemy: $bc = \frac{1}{a}$, $ac = \frac{1}{b}$, $ab = \frac{1}{c}$. Zatem

$$bc + ac + ab = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.
 gdy

- wykorzysta definicję potęgi o wykładniku -1 i zapisze lewą stronę podanej równości w postaci $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \frac{bc + ac + ab}{abc}$ lub $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \frac{abc}{a} + \frac{abc}{b} + \frac{abc}{c}$

albo

- wykorzysta definicję potęgi o wykładniku -1 , pomnoży obie strony podanej równości przez iloczyn abc i zapisze równość w postaci równoważnej

$$\frac{1}{a} \cdot abc + \frac{1}{b} \cdot abc + \frac{1}{c} \cdot abc = ab \cdot abc + ac \cdot abc + bc \cdot abc,$$

albo

- wykorzysta założenie $abc = 1$, wyznaczając stąd iloczyny: $ab = \frac{1}{c}$, $ac = \frac{1}{b}$, $bc = \frac{1}{a}$ oraz zapisze prawą stronę podanej równości w postaci $ab + ac + bc = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy poda pełne uzasadnienie.

Uwaga

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość wzoru jedynie w wybranych przypadkach, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 29. (0–2)

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = x^2 - 11x$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -6, 6 \rangle$.

Rozwiązanie

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku w punkcie, którego pierwsza współrzędna jest równa $x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{11}{2}$. Ponieważ argument $x_w = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$ należy do przedziału $\langle -6, 6 \rangle$, więc najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle -6, 6 \rangle$ jest $f\left(\frac{11}{2}\right) = -\frac{121}{4} = -30\frac{1}{4}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

- gdy obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $x_w = 5\frac{1}{2}$, zapisze, że $x_w \in \langle -6, 6 \rangle$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwszej współrzędnej wierzchołka tej paraboli i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -6, 6 \rangle$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy i zapisze, że najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -6, 6 \rangle$ jest równa

$$f\left(\frac{11}{2}\right) = -30\frac{1}{4}.$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze jedynie trzy wartości funkcji: $f(-6) = 102$, $f\left(\frac{11}{2}\right) = -30\frac{1}{4}$ i $f(6) = -30$ oraz sformułuje poprawną odpowiedź, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający zapisze tylko obliczenie jednej wartości $f\left(\frac{11}{2}\right) = -30\frac{1}{4}$ oraz sformułuje poprawną odpowiedź, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

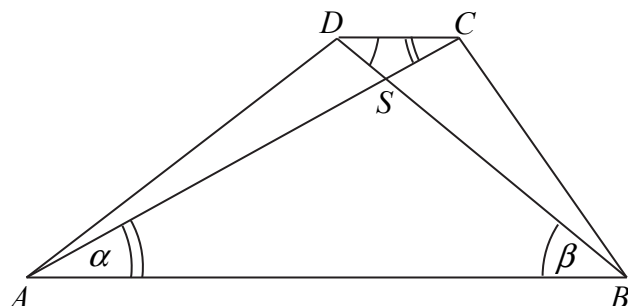
Zadanie 30. (0–2)

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne AC oraz BD przecinają się w punkcie S .

Wykaż, że jeżeli $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$, to pole trójkąta ABS jest 25 razy większe od pola trójkąta DCS .

Rozwiązanie (I sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąty ABS i DCS są podobne, gdyż kąty ASB i CSD są równe, jako kąty wierzchołkowe, natomiast naprzemianległe kąty SAB i SCD są równe, bo proste AB i CD są równoległe, podobnie kąty ABS i SDC są równe.

Stąd, że $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$, wynika równość $|CS| = \frac{1}{6}|AC|$. Skala podobieństwa trójkąta ABS do trójkąta CDS jest równa

$$k = \frac{|AS|}{|CS|} = \frac{\frac{5}{6}|AC|}{\frac{1}{6}|AC|} = 5.$$

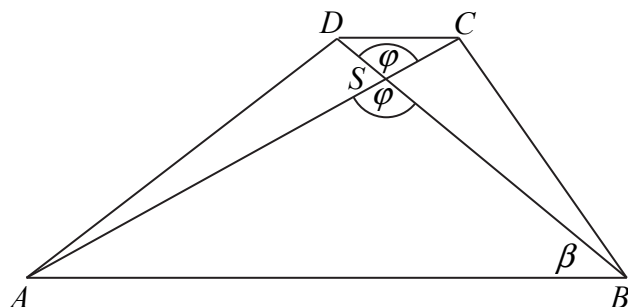
Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc

$$\frac{P_{ABS}}{P_{CDS}} = k^2, \text{ zatem } P_{ABS} = 25 \cdot P_{CDS}.$$

To należało wykazać.

Rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Kąty ASB i CSD to kąty wierzchołkowe, więc są równe.

Ponieważ $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$, więc $|CS| = \frac{1}{6}|AC|$.

Proste AB i CD są równoległe, więc z twierdzenia Talesa otrzymujemy proporcję

$$\frac{|AS|}{|CS|} = \frac{|BS|}{|DS|}.$$

Stąd i ze wzoru na „pole trójkąta z sinusem”, otrzymujemy

$$\frac{P_{ABS}}{P_{CDS}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin \varphi}{\frac{1}{2} \cdot |CS| \cdot |DS| \cdot \sin \varphi} = \frac{|AS| \cdot |BS|}{|CS| \cdot |DS|} = \left(\frac{|AS|}{|CS|} \right)^2 = \left(\frac{\frac{5}{6}|AC|}{\frac{1}{6}|AC|} \right)^2 = 25,$$

czyli $P_{ABS} = 25 \cdot P_{CDS}$, co należało wykazać.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- zapisze, że trójkąty ABS i CDS są podobne oraz wyznaczy skalę ich podobieństwa:
 $k = 5$

albo

- wyznaczy pola trójkątów ABS i CDS w zależności od sinusa tego samego kąta i zapisze proporcję wynikającą z twierdzenia Talesa: $P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin \varphi$,

$$P_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot |CS| \cdot |DS| \cdot \sin \varphi, \quad \frac{|AS|}{|CS|} = \frac{|BS|}{|DS|}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy wykaże, że $P_{ABS} = 25 \cdot P_{CDS}$.

Uwaga

Jeżeli zdający przyjmie konkretne długości odcinków, np. $|AC| = 6$ i $|AS| = 5$, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 31. (0–4)

Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2016 - 3n$, dla $n \geq 1$. Oblicz sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy $a_1 = 2013$, a każdy inny wyraz tego ciągu jest o 3 mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego.

Mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = -3$.

Wyznamy liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n) :

$$\begin{aligned} a_n &> 0, \\ 2016 - 3n &> 0, \\ n &< \frac{2016}{3}, \text{ a stąd } n < 672. \end{aligned}$$

Zatem $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{671}$ to wszystkie dodatnie wyrazy tego ciągu. Obliczmy ich sumę:

$$\begin{aligned} S_{671} &= \frac{a_1 + a_{671}}{2} \cdot 671 \text{ i } a_{671} = 2016 - 3 \cdot 671 = 3, \\ S_{671} &= \frac{2013+3}{2} \cdot 671 = 676\,368. \end{aligned}$$

Uwaga

Możemy obliczyć sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu, korzystając ze wzoru:

$$\begin{aligned} S_{671} &= \frac{2a_1 + 670r}{2} \cdot 671, \\ S_{671} &= \frac{2 \cdot 2013 + 670 \cdot (-3)}{2} \cdot 671 = \frac{4026 - 2010}{2} \cdot 671 = 1008 \cdot 671 = 676\,368. \end{aligned}$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.
Zdający

- obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n) : $a_1 = 2013$

albo

- zapisze różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) : $r = -3$,

albo

- zapisze warunek pozwalający obliczyć liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n) : np. $2016 - 3n > 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.
Zdający

- obliczy pierwszy wyraz i ciągu (a_n) oraz zapisze jego różnicę: $a_1 = 2013$ i $r = -3$

albo

- zapisze warunek pozwalający obliczyć liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n) : np. $2016 - 3n > 0$ i zapisze różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) : $r = -3$,

albo

- zapisze warunek pozwalający obliczyć liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n) : np. $2016 - 3n > 0$ i obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n) : $a_1 = 2013$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.
Zdający

- obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n) i obliczy liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n) : $a_1 = 2013$, $n = 671$

albo

- obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n) : $a_1 = 2013$ oraz wyznaczy najmniejszy dodatni wyraz tego ciągu: 3,

albo

- obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n) : $a_1 = 2013$ oraz wyznaczy numer wyrazu równego 0: $n = 672$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

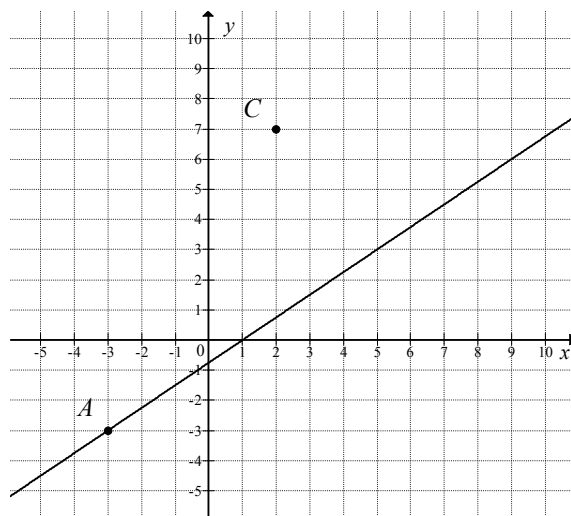
Rozwiązanie pełne 4 p.
Zdający obliczy sumę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n) : $S_{671} = 676\,368$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zauważy, że wyraz $a_{672} = 0$ i obliczy sumę $S_{672} = 676\,368$, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów, o ile nie popełni błędu w przedstawionym rozwiązaniu.
2. Jeżeli zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n) , wyznaczy najmniejszy dodatni wyraz ciągu, ale błędnie ustali jego numer i konsekwentnie obliczy sumę $\frac{2013+3}{2} \cdot 672 = 677\,376$, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 32. (0–4)

Na rysunku przedstawione są dwa wierzchołki trójkąta prostokątnego ABC : $A = (-3, -3)$ i $C = (2, 7)$ oraz prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, zawierająca przeciwprostokątną AB tego trójkąta.



Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta i długość odcinka AB .

Rozwiązanie (I sposób)

Współrzędne punktu B możemy obliczyć na kilka sposobów.

Sposób a)

Współczynnik kierunkowy prostej AC , a więc prostej przechodzącej przez punkty $A = (-3, -3)$ i $C = (2, 7)$, jest równy

$$a_{AC} = \frac{7+3}{2+3} = 2.$$

Prosta CB jest prostopadła do prostej AC i przechodzi przez punkt $C = (2, 7)$, więc ma równanie postaci

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) + 7, \text{ czyli } y = -\frac{1}{2}x + 8.$$

Współrzędne punktu B obliczymy rozwiązując układ równań $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$ i $y = -\frac{1}{2}x + 8$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} &= -\frac{1}{2}x + 8, \\ 3x - 3 &= -2x + 32, \\ 5x &= 35 \\ x &= 7 \text{ oraz } y = -\frac{1}{2} \cdot 7 + 8 = 4\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zatem $B = (7, 4\frac{1}{2})$.

Sposób b)

Wektory $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ są prostopadłe. Współrzędne wektora $\overrightarrow{CA}$ są równe

$$\overrightarrow{CA} = [-3-2, -3-7] = [-5, -10].$$

Punkt B leży na prostej AB , więc jego współrzędne możemy zapisać w postaci $B = \left(x, \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right)$. Zatem współrzędne wektora $\overrightarrow{CB}$ są równe $\overrightarrow{CB} = \left[x - 2, \frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right]$.

Z warunku prostokątności wektorów $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} &= 0, \\ [-5, -10] \circ \left[x - 2, \frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right] &= 0, \\ -5(x - 2) - 10\left(\frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right) &= 0, \\ (x - 2) + 2\left(\frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right) &= 0, \\ \frac{5}{2}x - \frac{35}{2} &= 0, \\ 5x &= 35, \\ x &= 7.\end{aligned}$$

Zatem $B = \left(7, 4\frac{1}{2}\right)$.

Sposób c)

Punkt B leży na prostej AB , więc jego współrzędne możemy zapisać w postaci

$B = \left(x, \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right)$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy

$$\begin{aligned}|AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2, \\ \left(\sqrt{(x+3)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 3\right)^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{(2+3)^2 + (7+3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - 7\right)^2}\right)^2, \\ (x+3)^2 + \left(\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}\right)^2 &= 5^2 + 10^2 + (x-2)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right)^2, \\ x^2 + 6x + 9 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{54}{16}x + \frac{81}{16} &= 125 + x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{186}{16}x + \frac{961}{16}, \\ x &= 7.\end{aligned}$$

Zatem $B = \left(7, \frac{3}{4} \cdot 7 - \frac{3}{4}\right) = \left(7, 4\frac{1}{2}\right)$.

Długość odcinka AB jest równa

$$|AB| = \sqrt{(7+3)^2 + \left(4\frac{1}{2} + 3\right)^2} = \sqrt{100 + \left(7\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{400+225}{4}} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej AC : $a_{AC} = 2$

albo

- wyznaczy współrzędne wektora $\overrightarrow{CA} = [-5, -10]$,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora $\overrightarrow{CB}$ w zależności od jednej zmiennej,

$$\text{np: } \overrightarrow{CB} = \left[x - 2, \frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right],$$

albo

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa i zapisze $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$ oraz uzależni współrzędne punktu B od tej samej zmiennej: np.: $B = \left(x, \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający wyznaczy

- równanie prostej BC : $y = -\frac{1}{2}x + 8$

albo

- równanie z jedną niewiadomą wynikające z warunku prostokątności wektorów pozwalające obliczyć współrzędne punktu B : np. $[-5, -10] \circ [x - 2, \frac{3}{4}x - \frac{31}{4}] = 0$ (lub układ równań $[-5, -10] \circ [x - 2, y - 7] = 0$ i $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$),

albo

- równanie z jedną niewiadomą wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC :

$$\left(\sqrt{(x+3)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 3\right)^2} \right)^2 = \left(\sqrt{(2+3)^2 + (7+3)^2} \right)^2 + \left(\sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - 7\right)^2} \right)^2$$

lub układ równań z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} \left(\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} \right)^2 = \left(\sqrt{(2+3)^2 + (7+3)^2} \right)^2 + \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-7)^2} \right)^2 \\ y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka B : $B = (7, 4\frac{1}{2})$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka B oraz długość odcinka AB : $B = (7, 4\frac{1}{2})$,
 $|AB| = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie (II sposób)

Trójkąt ABC jest prostokątny, więc środek S okręgu opisanego na tym trójkącie jest środkiem przeciwprostokątnej AB . Jednocześnie leży on na symetralnej boku AC . Wyznaczamy najpierw równanie symetralnej boku AC . Jest to prosta prostopadła do prostej AC i przechodzi przez środek M odcinka AC . Ponieważ $A = (-3, -3)$ i $C = (2, 7)$, więc punkt M ma współrzędne:

$$M = \left(\frac{-3+2}{2}, \frac{-3+7}{2} \right) = \left(\frac{-1}{2}, 2 \right),$$

a współczynnik kierunkowy prostej AC jest równy $a_{AC} = \frac{7+3}{2+3} = 2$, więc prosta AC ma równanie postaci

$$y = 2(x+3) - 3, \text{ czyli } y = 2x + 3.$$

Współczynnik kierunkowy symetralnej MS boku AC jest zatem równy $a_{MS} = -\frac{1}{2}$, a symetralna MS ma równanie postaci

$$y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + 2,$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Współrzędne środka S okręgu opisanego trójkącie ABC obliczymy, rozwiązując układ równań

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \text{ i } y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Stąd

$$\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4},$$

$$3x - 3 = -2x + 7,$$

$$5x = 10$$

$$x = 2 \text{ oraz } y = -\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{7}{4} = \frac{3}{4}.$$

Zatem $S = (2, \frac{3}{4})$.

Ponieważ S jest środkiem boku AB , to

$$S = \left(\frac{-3+x_B}{2}, \frac{-3+y_B}{2} \right) = \left(2, \frac{3}{4} \right).$$

Stąd

$$\frac{-3+x_B}{2} = 2 \text{ i } \frac{-3+y_B}{2} = \frac{3}{4}$$

$$-3 + x_B = 4 \text{ i } -3 + y_B = \frac{3}{2}$$

$$x_B = 7 \text{ i } y_B = 4\frac{1}{2}.$$

Zatem $B = (7, 4\frac{1}{2})$.

Długość odcinka AB jest równa

$$|AB| = \sqrt{(7+3)^2 + (4\frac{1}{2}+3)^2} = \sqrt{100 + (7\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{400+225}{4}} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 p.

Zdający wyznaczy

- współczynnik kierunkowy prostej AC : $a_{AC} = 2$

albo

- wyznaczy współrzędne środka M odcinka AC : $M = (-\frac{1}{2}, 2)$ i zapisze, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC to punkt przecięcia symetralnej boku AC i prostej AB .

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający wyznaczy współrzędne środka S okręgu opisanego trójkącie ABC : $S = (2, \frac{3}{4})$ i na

tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- obliczy współrzędne wierzchołka B i nie obliczy długości boku AB : $B = (7, 4\frac{1}{2})$

albo

- obliczy długość boku AB i nie obliczy współrzędnych wierzchołka B :

$$|AB| = 2 \cdot |AS| = 2 \cdot 6\frac{1}{4} = 12\frac{1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

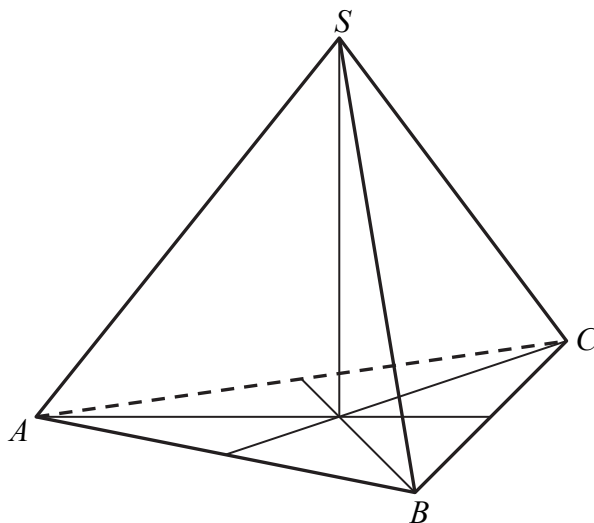
Zdający obliczy współrzędne wierzchołka B oraz długość odcinka AB : $B = (7, 4\frac{1}{2})$,
 $|AB| = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$.

Uwaga

Jeżeli zdający błędnie zinterpretuje treść zadania, przyjmując, że wierzchołkiem kąta prostego trójkąta ABC jest B , to otrzymuje **0 punktów**.

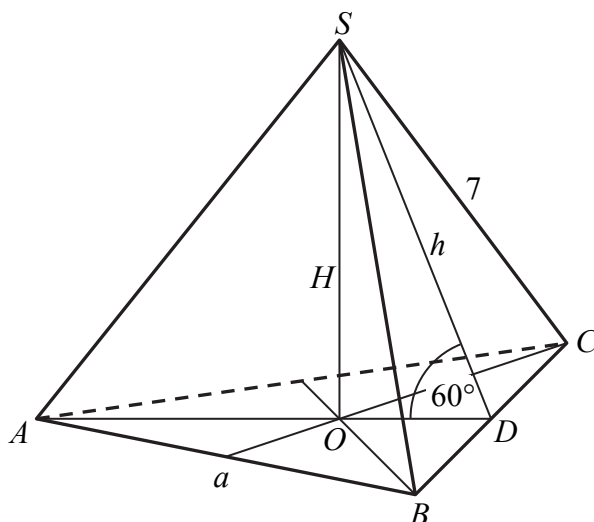
Zadanie 33. (0–5)

Trójkąt równoboczny ABC jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$, w którym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° , a krawędź boczna ma długość 7 (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Rozwiązanie I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Podstawa ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o boku długości a , ostrosłup jest prawidłowy, więc spodek O wysokości SO tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego i opisanego na podstawie ostrosłupa.

Zatem

$$|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ oraz } |OD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° , stąd otrzymujemy

$$\frac{H}{|OD|} = \operatorname{tg} 60^\circ,$$

$$\frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{3},$$

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3},$$

$$H = \frac{a}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AOS , otrzymujemy

$$|AO|^2 + |OS|^2 = |AS|^2,$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 7^2,$$

$$\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = 49,$$

$$7a^2 = 49 \cdot 12,$$

$$a^2 = 7 \cdot 12,$$

$$a = 2\sqrt{21}.$$

Zatem $H = \sqrt{21}$.

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{(2\sqrt{21})^2\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{21} = \frac{4 \cdot 21\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{21} = 21\sqrt{7}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

• zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa
albo

• zapisze, że długość odcinka AO : $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy ostrosłupa,
albo

• zapisze, że długość odcinka OD : $|OD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy ostrosłupa

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający wyznaczy w zależności od jednej zmiennej, np. a – długości krawędzi podstawy

- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz długość odcinka AO : $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

albo

- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz długość odcinka OD : $|OD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający wyznaczy wysokość ostrosłupa w zależności od jednej zmiennej, np. a – długości krawędzi podstawy: $H = \frac{a}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa oraz długość krawędzi podstawy ostrosłupa (lub bezpośrednio pole podstawy ostrosłupa): $H = \sqrt{21}$, $a = 2\sqrt{21}$ i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

Rozwiązanie pełne 5 p.

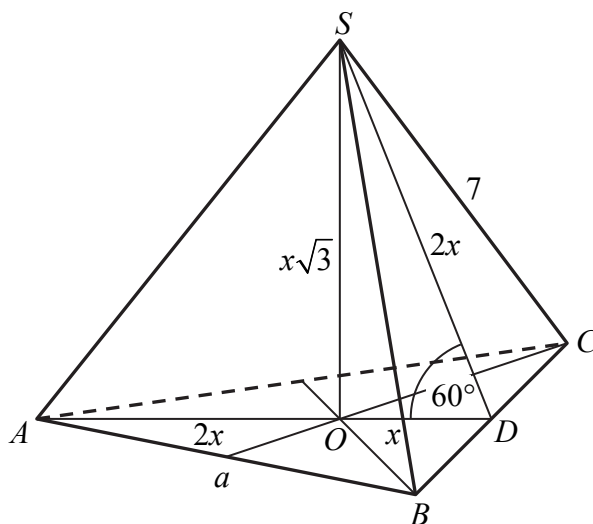
Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 21\sqrt{7}$.

Uwaga

Zdający nie musi zaznaczać kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, o ile z rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje ten kąt.

Rozwiązanie II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt DOS jest prostokątny, w którym jeden kąt ostry ma miarę 60° . Wysokość SD ściany bocznej oznaczmy przez $2x$. Zatem

$$H = |SO| = x\sqrt{3} \text{ oraz } |OD| = x.$$

Podstawa ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o boku długości a , ostrosłup jest prawidłowy, więc spodek O wysokości SO tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego i opisanego na podstawie ostrosłupa. Zatem

$$|AO| = 2x \text{ oraz } a = 2x\sqrt{3}.$$

Dla trójkąta AOS zapisujemy twierdzenie Pitagorasa i obliczamy x :

$$|AO|^2 + |OS|^2 = |AS|^2,$$

$$(2x)^2 + (x\sqrt{3})^2 = 7^2,$$

$$4x^2 + 3x^2 = 49,$$

$$7x^2 = 49,$$

$$x = \sqrt{7}.$$

Zatem $H = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$ oraz $a = 2x\sqrt{3} = 2\sqrt{21}$.

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{(2\sqrt{21})^2 \sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{21} = \frac{4 \cdot 21 \sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{21} = 21\sqrt{7}.$$

Uwaga

Zdający może podać wynik w postaci $V \approx 55,56$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania 1 p.

Zdający

- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa albo
 - zapisze zależność między długościami odcinków OA i OD , np. $|OD| = x$, $|OA| = 2x$, gdzie x – pół wysokości ściany bocznej,
- i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający wyznaczy w zależności od jednej zmiennej, np. x – pół wysokości ściany bocznej,

- wysokość ostrosłupa SO : $|SO| = H = x\sqrt{3}$
- albo
- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz zapisze zależność między długościami odcinków OA i OD , np. $|OD| = x$, $|OA| = 2x$
- i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający wyznaczy długość a krawędzi podstawy ostrosłupa w zależności od x : $a = 2x\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa oraz długość krawędzi podstawy ostrosłupa (lub bezpośrednio pole podstawy ostrosłupa): $H = \sqrt{21}$, $a = 2\sqrt{21}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 21\sqrt{7}$.

Uwaga

Zdający nie musi zaznaczać kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, o ile z rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje ten kąt.

Zadanie 34. (0–2)

Ze zbioru siedmiu liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że większą z wylosowanych liczb będzie liczba 5.

Rozwiązanie (I sposób)

Niech zdarzeniami elementarnymi będą uporządkowane pary (a, b) liczb z podanego zbioru, takie że $a \neq b$. Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch liczb, z których większą jest liczba 5.

Zdarzeniu A sprzyja osiem zdarzeń elementarnych

$$A = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}.$$

Rozwiązanie (II sposób)

Niech zdarzeniami elementarnymi będą dwuelementowe podzbiory $\{a, b\}$ liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = \binom{7}{2} = 21.$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch liczb, z których większą jest liczba 5.

Zdarzenia A sprzyjają cztery zdarzenia elementarne

$$A = \{\{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe:

$$P(A) = \frac{4}{21}.$$

Uwaga

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A możemy też zapisać w tabeli.

	1	2	3	4	5	6	7
1					☺		
2					☺		
3					☺		
4					☺		
5	☺	☺	☺	☺			
6							
7							

Symbol ☺ użyty w tabeli oznacza zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A .

Wówczas $|\Omega| = 7^2 - 7 = 42$ i $|A| = 8$. Zatem $P(A) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$ (lub $|\Omega| = \binom{7}{2} = 21$)

albo

- obliczy (zaznaczy poprawnie w tabeli) liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzenia A : $|A| = 8$ (lub $|A| = 4$).

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

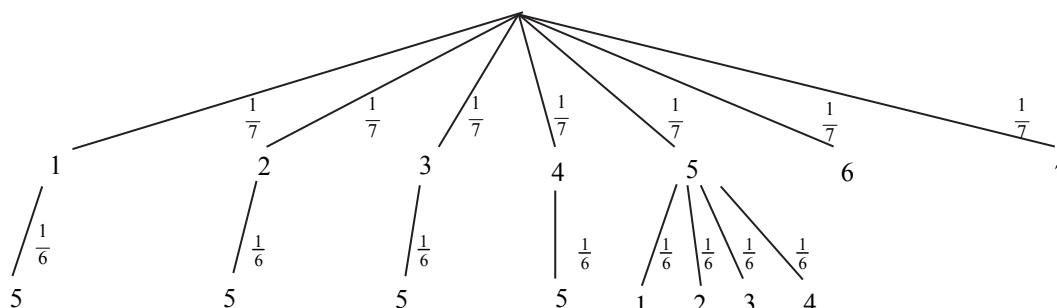
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd przy zliczaniu w tabeli par, spełniających warunki zadania i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze **tylko** $P(A) = \frac{8}{42}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Rozwiązanie (III sposób)

Niech A oznacza zdarzenie – większa z wylosowanych liczb jest równa 5. Narysujmy drzewo zawierające tylko istotne gałęzie



Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia jest równe

$$P(A) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy narysuje pełne drzewo oraz przynajmniej na jednej gałęzi zapisze poprawne prawdopodobieństwo i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy i zapisze prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{4}{21}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeśli zdający dodaje prawdopodobieństwa na gałęziach drzewa, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt** (pod warunkiem, że prawdopodobieństwa na gałęziach drzewa są zapisane prawidłowo).
3. Jeżeli zdający popełni błąd:
- przy przepisywaniu prawdopodobieństw z gałęzi drzewa
- lub
- w zapisaniu prawdopodobieństwa na jednej gałęzi drzewa,
- lub
- nie zaznaczy jednej istotnej gałęzi drzewa
- i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt**.