



**CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA**

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2013/2014**

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

**ROZWIĄZANIA ZADAŃ
I SCHEMAT PUNKTOWANIA**

SIERPIEŃ 2014

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	A	B	B	C	B	B	D	A	D	C	D	B	D	C	C	C	B	D	C	C	D	D	A	A

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

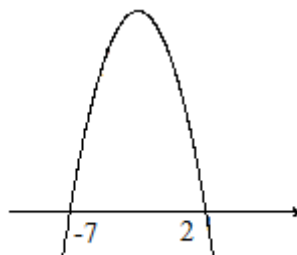
Rozwiąż nierówność $-x^2 - 5x + 14 < 0$.

Rozwiązanie

Ze wzorów $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ na pierwiastki trójmianu kwadratowego

otrzymujemy: $x_1 = 2$, $x_2 = -7$.

Szkicujemy parabolę, której ramiona skierowane są ku dołowi i zaznaczamy na osi argumentów jej miejsca zerowe.



Odczytujemy zbiór rozwiązań: $x \in (-\infty, -7) \cup (2, \infty)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 p.
gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 2$, $x_2 = -7$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy $x^2 + 5x - 14$ na czynniki liniowe i zapisze nierówność $(x + 7)(x - 2) > 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np. $x_1 = 7$, $x_2 = 2$,
 $x \in (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$

albo

- doprowadzi nierówność do postaci $\left|x + \frac{5}{2}\right| > \frac{9}{2}$ (na przykład z postaci

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} > 0) \text{ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.}$$

Zdający otrzymuje2 p.

gdy poda odpowiedź w postaci:

- $x \in (-\infty, -7) \cup (2, \infty)$

albo

- $x < -7$ lub $x > 2$

albo

- $x < -7, x > 2$

albo

- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 11x + 66 = 0$.

Rozwiązanie I sposób (grupowanie wyrazów)

Stosując metodę grupowania otrzymujemy:

$$x^2(x-6) - 11(x-6) = 0 \quad \text{albo} \quad x(x^2-11) - 6(x^2-11) = 0, \quad \text{stąd} \quad (x-6)(x^2-11) = 0, \quad \text{zatem}$$

$$x = 6 \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{11}, \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{11}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 p.

gdy doprowadzi lewą stronę równania do postaci iloczynowej, np.: $(x-6)(x^2-11) = 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2 p.

gdy poda rozwiązanie $x = 6$ lub $x = \sqrt{11}$, lub $x = -\sqrt{11}$.

Uwaga

Zdający może od razu zapisać rozkład na czynniki. Jeśli na tym poprzestanie lub błędnie poda rozwiązanie równania to otrzymuje **1 punkt**.

Rozwiązanie II sposób (dzielenie)

Sprawdzamy, że $W(6) = 6^3 - 6 \cdot 6^2 - 11 \cdot 6 + 66 = 0$, więc jednym z pierwiastków tego wielomianu jest $x = 6$.

Dzielimy wielomian przez dwumian $x-6$ i otrzymujemy x^2-11 . Mamy więc równanie postaci $(x-6)(x^2-11) = 0$, a stąd otrzymujemy $x = 6$ lub $x = \sqrt{11}$, lub $x = -\sqrt{11}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 p.

gdy wykona dzielenie wielomianu przez dwumian $x-6$, otrzyma iloraz x^2-11 i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2 p.

gdy poda rozwiązanie $x=6$ lub $x=\sqrt{11}$, lub $x=-\sqrt{11}$.

Uwaga

Jeżeli w zapisie rozwiązania występuje jedna usterka, to za takie rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 24.

Rozwiązanie I sposób

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $2n$, $2n+2$, $2n+4$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Wówczas suma sześciątów tych trzech liczb jest równa:

$$\begin{aligned}(2n)^3 + (2n+2)^3 + (2n+4)^3 &= 8n^3 + 8n^3 + 24n^2 + 24n + 8 + 8n^3 + 48n^2 + 96n + 64 = \\ &= 24n^3 + 72n^2 + 120n + 72 = 24(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) = 24 \cdot l\end{aligned}$$

Liczba postaci $24 \cdot l$, gdzie l jest liczbą naturalną jest podzielna przez 24.

Uwaga

Zdający może zapisać trzy kolejne liczby naturalne parzyste w innej postaci, np.: $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 p.

gdy zapisze sumę sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:

$$(2n)^3 + (2n+2)^3 + (2n+4)^3 = 24(n^3 + 3n^2 + 5n + 3).$$

Zdający otrzymuje2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie II sposób

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $2n$, $2n+2$, $2n+4$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Wówczas suma sześciątów tych trzech liczb jest równa:

$$\begin{aligned}(2n)^3 + (2n+2)^3 + (2n+4)^3 &= (2n)^3 + (2(n+1))^3 + (2(n+2))^3 = 8(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) = \\ &= 8(3n^3 + 9n^2 + 15n + 9) = 24(n^3 + 3n^2 + 5n + 3).\end{aligned}$$

Liczba postaci $24 \cdot l$, gdzie l jest liczbą naturalną jest podzielna przez 24.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze sumę sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:

$$(2n)^3 + (2n+2)^3 + (2n+4)^3 = 24(n^3 + 3n^2 + 5n + 3).$$

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie III sposób

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $n-2$, n , $n+2$, gdzie n jest parzystą liczbą środkową i $n \geq 2$.

Wówczas suma sześciątów tych trzech liczb jest równa:

$$(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3 = n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + n^3 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 3n^3 + 24n$$

n jest liczbą parzystą, stąd n^3 jest podzielne przez 8.

Zatem liczba $3n^3$ jest podzielna przez 24.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze sumę sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:

$$(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 24n.$$

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie IV sposób

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $2n-2$, $2n$, $2n+2$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Wówczas suma sześciątów tych trzech liczb jest równa:

$$\begin{aligned} (2n-2)^3 + (2n)^3 + (2n+2)^3 &= 8[(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3] = \\ &= 8(n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 8(3n^3 + 6n) = 24(n^3 + 2n). \end{aligned}$$

Liczba postaci $24 \cdot l$, gdzie l jest liczbą naturalną jest podzielna przez 24.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze sumę sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:

$$(2n-2)^3 + (2n)^3 + (2n+2)^3 = 24(n^3 + 2n).$$

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 29. (0–2)

Kąt α jest ostry oraz $\frac{4}{\sin^2 \alpha} + \frac{4}{\cos^2 \alpha} = 25$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Rozwiązanie I sposób

Sprowadzamy wyrażenie $\frac{4}{\sin^2 \alpha} + \frac{4}{\cos^2 \alpha} = 25$ do wspólnego mianownika i otrzymujemy

$\frac{4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 25$. Korzystając z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymujemy

$\frac{4}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 25$, a stąd $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{4}{25}$, a zatem $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$ (kąt α jest ostry).

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy:

- sprowadzi wyrażenie $\frac{4}{\sin^2 \alpha} + \frac{4}{\cos^2 \alpha} = 25$ do wspólnego mianownika i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

albo

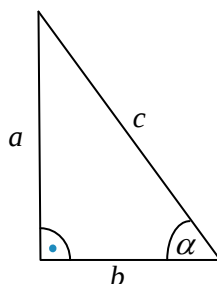
- doprowadzi wyrażenie do postaci $4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 25 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy, że $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$.

Rozwiązanie II sposób

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy długości przyprostokątnych przez a i b oraz zaznaczamy kąt ostry α taki, że $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ lub $\cos \alpha = \frac{b}{c}$.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ponieważ $\frac{4}{\sin^2 \alpha} + \frac{4}{\cos^2 \alpha} = 25$, więc $\frac{4c^2}{a^2} + \frac{4c^2}{b^2} = 25$, czyli $\frac{4c^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2} = 25$. Stąd

$$\frac{4c^2c^2}{a^2b^2} = 25.$$

Ponieważ $\sin^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2}$ i $\cos^2 \alpha = \frac{b^2}{c^2}$, to $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{4}{25}$. Zatem $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$ (kąt α jest ostry).

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b , zaznaczy w tym trójkącie kąt α i zapisze:

- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ i $\frac{4c^2c^2}{a^2b^2} = 25$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

albo

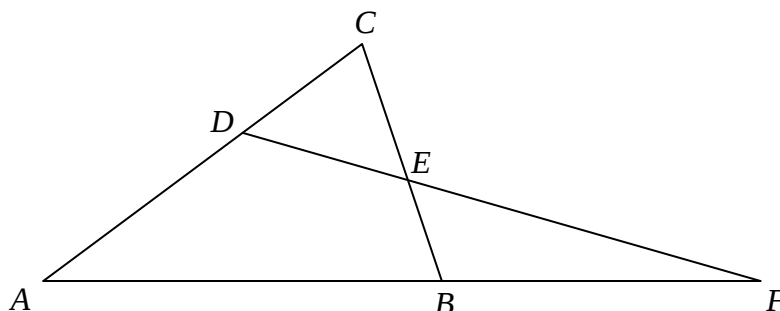
- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ i $4c^2c^2 = 25a^2b^2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy, że $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$.

Zadanie 30. (0–2)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| > |BC|$. Na bokach AC i BC tego trójkąta obrano odpowiednio takie punkty D i E , że zachodzi równość $|CD| = |CE|$. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F (zobacz rysunek). Wykaż, że $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| - 2 \cdot |\sphericalangle AFD|$.



Rozwiązanie I sposób

Niech $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle ABC| = \beta$ i $|\angle AFD| = \gamma$.

Ponieważ $|\angle ABC| = \beta$, stąd $|\angle FBE| = 180^\circ - \beta$ (z własności kątów przyległych).

$|\angle BEF| = 180^\circ - (180^\circ - \beta + \gamma) = \beta - \gamma$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie BEF).

Ponieważ $|\angle BEF| = \beta - \gamma$, więc $|\angle CED| = \beta - \gamma$ (z własności kątów wierzchołkowych).

W trójkącie CDE , mamy $|CD| = |CE|$, zatem $|\angle CDE| = \beta - \gamma$.

$|\angle DCE| = |\angle ACB| = 180^\circ - (\beta - \gamma + \beta - \gamma) = 180^\circ - 2\beta + 2\gamma$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie DCE).

$|\angle BAC| + |\angle ABC| + |\angle ACB| = 180^\circ$, stąd $\alpha + \beta + 180^\circ - 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie DCE). Zatem $\alpha = \beta - 2\gamma$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze zależności między miarami kątów w trójkątach BEF i CDE , np.: $|\angle BEF| = \beta - \gamma$
i $|\angle DCE| = 180^\circ - 2\beta + 2\gamma$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.: zapisze że $|\angle DCE| = |\angle ACB|$
i $|\angle BAC| + |\angle ABC| + |\angle ACB| = 180^\circ$, stąd $\alpha = \beta - 2\gamma$.

Rozwiązanie II sposób

Niech $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle ABC| = \beta$, $|\angle AFD| = \gamma$ i $|\angle CDE| = \delta$.

Trójkąt CDE jest równoramienny, stąd $|\angle CDE| = |\angle CED| = \delta$.

Ponieważ $|\angle CED| = \delta$, stąd $|\angle BEF| = \delta$ (z własności kątów wierzchołkowych).

Zatem $\beta = \gamma + \delta$ ($|\angle ABC| = \beta$ jest kątem zewnętrznym trójkąta BEF). Stąd $\beta - \gamma = \delta$

Ponieważ $|\angle CDE| = \delta$, stąd $|\angle ADE| = 180^\circ - \delta$ (z własności kątów przyległych).

Podobnie $|\angle CED| = \delta$, stąd $|\angle BED| = 180^\circ - \delta$ (z własności kątów przyległych).

$|\angle BAC| + |\angle ABC| + |\angle BED| + |\angle ADE| = 360^\circ$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w czworokącie $ABED$), stąd $\alpha + \beta + 180^\circ - \delta + 180^\circ - \delta = 360^\circ$. Zatem $\frac{\alpha + \beta}{2} = \delta$.

Z powyższych rozważań mamy $\beta - \gamma = \delta$ i $\frac{\alpha + \beta}{2} = \delta$, stąd $\alpha = \beta - 2\gamma$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze zależności między miarami kątów w trójkącie CDE i czworokącie $ABED$, np.:
 $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CED| = \delta$ i $\alpha + \beta + 180^\circ - \delta + 180^\circ - \delta = 360^\circ$.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.: zapisze że $\beta - \gamma = \delta$ i $\frac{\alpha + \beta}{2} = \delta$, stąd
 $\alpha = \beta - 2\gamma$.

Zadanie 31. (0–2)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym $a_5 = 22$ oraz $a_{10} = 47$.
 Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r tego ciągu.

Rozwiązanie

Wykorzystując wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego zapisujemy piąty i dziesiąty wyraz tego ciągu w zależności od wyrazu pierwszego a_1 i różnicy r : $a_5 = a_1 + 4r$ i $a_{10} = a_1 + 9r$.

Zapisujemy układ równań, np.:
$$\begin{cases} a_1 + 4r = 22 \\ a_1 + 9r = 47 \end{cases}$$

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu a_1 i różnicę r : $a_1 = 2$ i $r = 5$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy zapisze układ równań z niewiadomymi a_1 i r : $\begin{cases} a_1 + 4r = 22 \\ a_1 + 9r = 47 \end{cases}$ i na tym zakończy lub dalej
 popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu a_1 i różnicę r : $a_1 = 2$ oraz $r = 5$.

Zadanie 32. (0–5)

Miasta A i B są odległe o 450 km. Pani Danuta pokonała tę trasę swym samochodem w czasie o 75 minut dłuższym niż pani Lidia. Wartość średniej prędkości, z jaką jechała pani Danuta na całej trasie była o 18 km/h mniejsza od wartości średniej prędkości, z jaką jechała pani Lidia. Oblicz średnie wartości:

- prędkości, z jaką pani Danuta jechała z A do B.
- prędkości, z jaką pani Lidia jechała z A do B.

Rozwiązanie I sposób

Przyjmujemy oznaczenia v i t – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pani Lidii.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pani Lidii: $v \cdot t = 450$.

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pani Danuty: $v - 18$, $t + \frac{5}{4}$.

Zapisujemy układ równań, np.
$$\begin{cases} v \cdot t = 450 \\ (v - 18) \cdot \left(t + \frac{5}{4}\right) = 450 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy

$t = \frac{450}{v}$	$v = \frac{450}{t}$
podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy	
$(v - 18) \cdot \left(\frac{450}{v} + \frac{5}{4}\right) = 450$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2 - 18v - 6480 = 0$. $\Delta = 324 + 25920 = 162^2$ $v_1 = \frac{18 - 162}{2} = -72, \text{ sprzeczne z zał.}$ $v > 0$ $v_2 = \frac{18 + 162}{2} = 90 \text{ (km/h)}$ obliczamy prędkość drugiej pani $v - 18 = 72 \text{ (km/h)}$	$\left(\frac{450}{t} - 18\right) \cdot \left(t + \frac{5}{4}\right) = 450$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $4t^2 + 5t - 125 = 0$. $\Delta = 25 + 2000 = 45^2$ $t_1 = \frac{-5 - 45}{8} = -\frac{50}{8}, \text{ sprzeczne z zał. } t > 0$ $t_2 = \frac{-5 + 45}{8} = 5 \text{ (h)}$ obliczamy prędkość pani Lidii $v = \frac{450}{5} = 90 \text{ (km/h)}$ obliczamy prędkość drugiej pani $v - 18 = 72 \text{ (km/h)}$
Odp.: Prędkości, z jakimi jechały panie, są równe: 90 km/h (pani Lidia) i 72 km/h (pani Danuta).	

Rozwiązanie II sposób

Przyjmujemy oznaczenia v i t – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pani Danuty.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pani Danuty: $v \cdot t = 450$.

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Lidii: $v+18$, $t-\frac{5}{4}$.

Zapisujemy układ równań, np.
$$\begin{cases} (v+18) \cdot \left(t - \frac{5}{4}\right) = 450 \\ v \cdot t = 450 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy

$t = \frac{450}{v}$	$v = \frac{450}{t}$
podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy	
$(v+18) \cdot \left(\frac{450}{v} - \frac{5}{4}\right) = 450$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2 + 18v - 6480 = 0$. $\Delta = 324 + 25920 = 162^2$ $v_1 = \frac{-18-162}{2} = -90$, sprzeczne z zał. $v > 0$ $v_2 = \frac{-18+162}{2} = 72 \text{ (km/h)}$ obliczamy prędkość pani Lidii $v+18 = 90 \text{ (km/h)}$	$\left(\frac{450}{t} + 18\right) \cdot \left(t - \frac{5}{4}\right) = 450$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $4t^2 - 5t - 125 = 0$. $\Delta = 25 + 2000 = 45^2$ $t_1 = \frac{5-45}{8} = -5$, sprz. z zał. $t > 0$ $t_2 = \frac{5+45}{8} = 6\frac{1}{4} \text{ (h)}$ obliczamy prędkość pani Danuty $v = \frac{450}{6\frac{1}{4}} = 72 \text{ (km/h)}$ obliczamy prędkość pani Lidii $v+18 = 90 \text{ (km/h)}$
Odp.: Prędkości, z jakimi jechały panie, są równe: 90 km/h (pani Lidia) i 72 km/h (pani Danuta).	

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

- Zapisanie zależności między drogą, prędkością i czasem dla jednej z pań oraz prędkości i czasu dla obu pań przy użyciu tych samych oznaczeń,
np.: dla pani Lidii $v \cdot t = 450$, czas pani Danuty $t + \frac{5}{4}$, prędkość pani Danuty $v-18$.
lub: dla pani Danuty $v \cdot t = 450$, czas pani Lidii $t - \frac{5}{4}$, prędkość pani Lidii $v+18$.

Uwaga

Nie wymagamy opisanie oznaczeń literowych, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t – odpowiednio z prędkością i czasem dla

pani Lidii:
$$\begin{cases} v \cdot t = 450 \\ (v-18) \cdot \left(t + \frac{5}{4}\right) = 450 \end{cases}$$

albo

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t – odpowiednio z prędkością i czasem dla

pani Danuty:
$$\begin{cases} (v+18) \cdot \left(t - \frac{5}{4}\right) = 450 \\ v \cdot t = 450 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np:

$$(v-18) \cdot \left(\frac{450}{v} + \frac{5}{4}\right) = 450 \text{ lub } \left(\frac{450}{t} - 18\right) \cdot \left(t + \frac{5}{4}\right) = 450, \text{ lub } (v+18) \cdot \left(\frac{450}{v} - \frac{5}{4}\right) = 450,$$

$$\text{lub } \left(\frac{450}{t} + 18\right) \cdot \left(t - \frac{5}{4}\right) = 450.$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 p.

- rozwiązanie równania z niewiadomą v z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie drugiej prędkości

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą t bezbłędnie i nieobliczenie prędkości obu pań

albo

- obliczenie t z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości obu pań.

Rozwiązanie pełne 5 p.

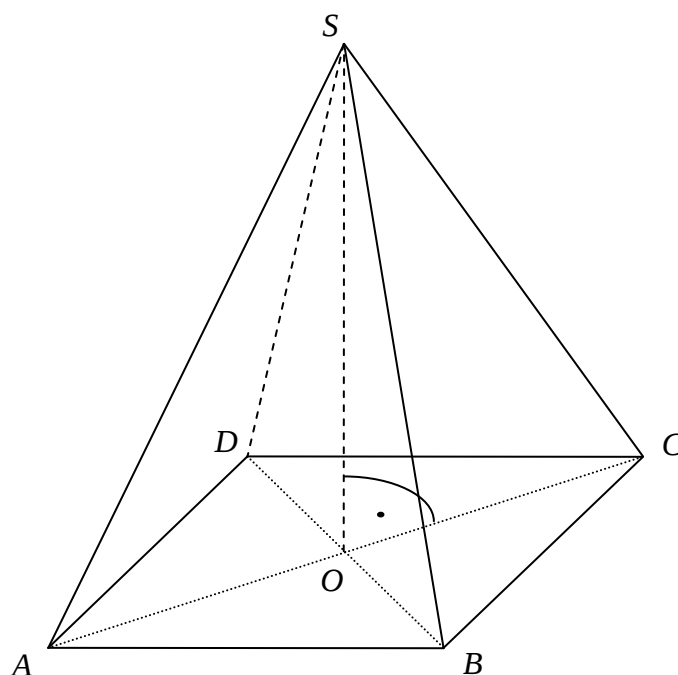
Obliczenie prędkości obu pań: 90 km/h i 72 km/h.

Uwagi

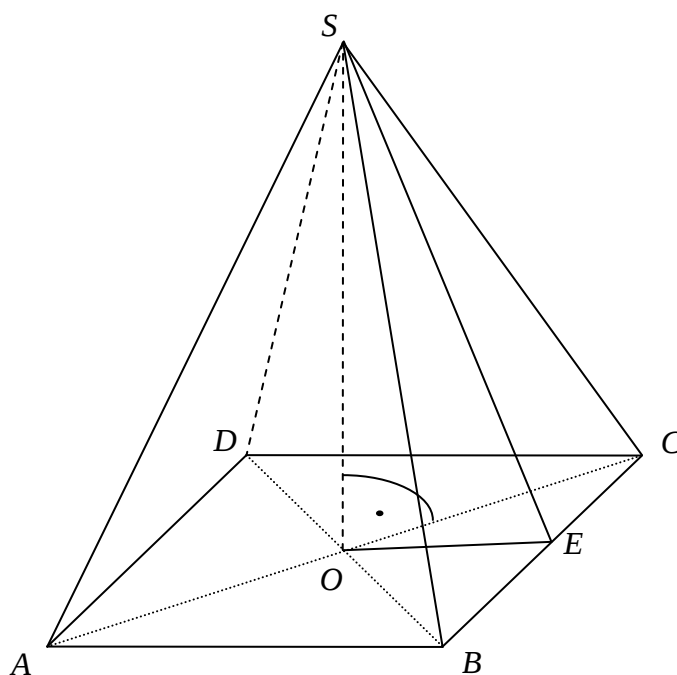
1. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) jedną prędkość: 90 km/h lub 72 km/h, to otrzymuje **0 pkt.**
2. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkości obu pań: 90 km/h i 72 km/h, to otrzymuje **1 pkt.**
3. Jeżeli zdający pokonał zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki, to może otrzymać **2 pkt** za całe rozwiązanie.

Zadanie 33. (0–4)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa 22, a tangens kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy jest równy $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Rozwiązanie



Niech $|ES| = h = 22$, $|AB| = a$, $|OE| = \frac{a}{2}$, $|SO| = H$.

Podany tangens kąta to stosunek $\frac{|SO|}{|OE|}$. Zatem $\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Trójkąt SOE jest prostokątny. Zatem $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 484$.

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} \frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5} \\ H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 484 \end{cases}$.

1) Obliczamy z pierwszego równania H : $5H = 2\sqrt{6}a$, czyli $H = \frac{2\sqrt{6}}{5}a$.

2) Podstawiamy wyznaczoną wartość do równania stopnia drugiego i otrzymujemy równanie: $\frac{121}{100}a^2 = 484$.

3) Obliczamy a (długość krawędzi podstawy): $a = 20$.

4) Obliczamy H (wysokość ostrosłupa): $H = 8\sqrt{6}$.

5) Obliczamy objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 8\sqrt{6}$.

Objętość ostrosłupa jest równa: $V = \frac{3200}{3}\sqrt{6}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zapisanie zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy ostrosłupa a wysokością ostrosłupa, wynikającej z podanej wartości tangensa kąta nachylenia ściany bocznej do

płaszczyzny podstawy: $\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zapisanie dwóch zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy ostrosłupa a wysokością ostrosłupa, pozwalających na wyznaczenie obu tych wielkości:

$$\text{np. zapisanie układu równań } \begin{cases} \frac{H}{a} = \frac{4\sqrt{6}}{5} \\ \frac{2}{2} \\ H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 484 \end{cases}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Obliczenie długości krawędzi podstawy i wysokości ostrosłupa: $a = 20$ i $H = 8\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{3200}{3}\sqrt{6}$.

Zadanie 34. (0–4)

Zbiór M tworzą wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, w zapisie których występują dwie różne cyfry spośród: 1, 2, 3, 4, 5. Ze zbioru M losujemy jedną liczbę, przy czym każda liczba z tego zbioru może być wylosowana z tym samym prawdopodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę większą od 20, w której cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.

I sposób rozwiązania (model klasyczny)

Zdarzeniami elementarnymi są liczby ze zbioru M . Możemy je utożsamiać z ciągami (a, b) , których wyrazami są liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mamy do czynienia z modelem klasycznym.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$.

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest większa niż 20 i jej cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności. Zdarzeniu temu sprzyjają zdarzenia elementarne (a, b) takie, że $a \in \{2, 3, 4, 5\}$ oraz $a < b$. Zatem liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest równa $|A| = 3 + 2 + 1 = 6$.

Łatwo możemy też zapisać wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , czyli

$$A = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), \\ (3, 4), (3, 5), \\ (4, 5)\}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 20$

albo

- opíše zdarzenie sprzyjające np. w postaci (a, b) , gdzie $a \in \{2, 3, 4, 5\}$ oraz $a < b$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt
Zdający

- opíše zdarzenie sprzyjające np. w postaci (a, b) , gdzie $a \in \{2, 3, 4, 5\}$ oraz $a < b$
i obliczy ich liczbę: $|A| = 6$

albo

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 20$ i opíše zdarzenie sprzyjające np. w postaci (a, b) , gdzie $a \in \{2, 3, 4, 5\}$ oraz $a < b$

albo

- zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu: $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zdający obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 20$ oraz opíše zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A, np. w postaci (a, b) takie, że $a \in \{2, 3, 4, 5\}$, gdzie $a < b$ oraz obliczy ich liczbę: $|A| = 6$.

Rozwiązanie pełne4 pkt

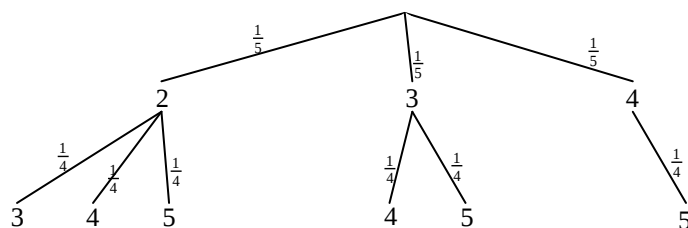
Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{3}{10}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia sprzyjające opuści przez nieuwagę jedno z nich, ale z zapisu wynika, że rozumie istotę doświadczenia i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające, ale popełni błąd przy ich zliczaniu to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.

II sposób rozwiązania (metoda drzewa)

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest większa niż 20 i jej cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności. Sporządzmy drzewko ilustrujące nasze doświadczenie losowe. Drzewko ograniczymy tylko do jego istotnych gałęzi. Prawdopodobieństwo na kolejnych odcinkach tego drzewa jest równe odpowiednio $\frac{1}{5}$ oraz $\frac{1}{4}$. Zaznaczmy te gałęzie drzewka, które odpowiadają zajściu zdarzenia A.



Korzystając ze sporządzonego drzewa obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A

$$P(A) = 6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{10}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Zdający narysuje drzewo ilustrujące „losowanie” kolejno dwóch różnych cyfr ze zbioru M i przynajmniej na jednym odcinku gałęzi zapisze prawdopodobieństwo.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zdający

- narysuje drzewo z istotnymi gałęziami i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa

albo

- narysuje drzewo z wybranymi istotnymi gałęziami, z którego będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zdający

- narysuje drzewo z istotnymi gałęziami, przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa i zaznaczy zdarzenia sprzyjające

albo

- narysuje drzewo z wybranymi istotnymi gałęziami, z którego będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa i zaznaczy zdarzenia sprzyjające.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{3}{10}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający opuści przez nieuwagę jedną gałąź (z rysunku będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia) i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający narysuje wszystkie istotne gałęzie, ale popełni błąd przy ich zliczaniu i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.