

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Zbiór zadań maturalnych - CKE (Formuła 2023)

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
5	B ($\sqrt{\sqrt{144} + \sqrt{16}} = 2^{\frac{4}{3}}$)	1
7	C ((-1))	1
10	D (2)	1
18	C (ma dokładnie dwa rozwiązania: $x = 0$, $x = -3$)	1
39	C (22, 5°)	1
54	A ($\frac{1}{3}a^2h$)	1
56	B (225)	1
57	C (6)	1
58	A ($4! \cdot 5! \cdot 2$)	1
59	A ($5 \cdot 4 \cdot 3$)	1
61	B (25, 2)	1
62	B (1, 5)	1
63	A ($\frac{2}{15}$)	1
64	D ($\frac{1}{2}$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-2 pkt

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

Odpowiedź: Wykazano rozpisując

Wprowadźmy do zadania następujące oznaczenia:

- n - pierwsza liczba całkowita
- $n + 1$ - druga liczba całkowita
- $n + 2$ - trzecia liczba całkowita

W ten sposób opisiśmy trzy kolejne liczby całkowite, które musimy teraz dodać, zatem:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Dzięki wyłączeniu trójki przed nawias, możemy stwierdzić, że ta suma jak najbardziej dzieli się przez 3, dając wynik równy $n + 1$. Dowodzenie można uznać za zakończone.

Zadanie 2

0-1 pkt

Liczbę $a = (\sqrt{2} + \sqrt{7})^2$ można zapisać w postaci $a = x + y\sqrt{14}$, gdzie $x \in \mathbb{Z}$ oraz $y \in \mathbb{Z}$.

Uzupełnij poniższe równości. Wpisz właściwe liczby w wy kropkowanych miejscach.

$$x = \dots\dots\dots, y = \dots\dots\dots$$

Odpowiedź: $x = 9$ oraz $y = 2$

Spróbujmy rozpisać podaną liczbę a . Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, otrzymamy:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 = 2 + 2\sqrt{14} + 7 = 9 + 2\sqrt{14}$$

Otrzymany wynik musimy przyrównać do postaci $x + y\sqrt{14}$. Widzimy zatem, że w tym przypadku $x = 9$ oraz $y = 2$.

Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b , które spełniają warunki: $a \neq 0$ oraz $b \neq 0$ oraz $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b , spełniających powyższe warunki. Wynik podaj w postaci ułamka bez niewymierności w mianowniku.

Odpowiedź: $\left(-\frac{5\sqrt{6}}{6}\right)$

Krok 1. Zapisanie równań.

Z treści zadania wynika, że:

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0, \quad a\sqrt{2} = -b\sqrt{3}$$

Spróbujmy przekształcić to równanie, tak aby po jednej stronie mieć ułamek $\frac{a}{b}$, zatem:

$$a\sqrt{2} = -b\sqrt{3} \quad \bigg/ : \sqrt{2}, \quad a = \frac{-b\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \bigg/ : b, \quad \frac{a}{b} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

I analogicznie przekształćmy to nasze początkowe równanie, ale tym razem w taki sposób, aby otrzymać ułamek $\frac{b}{a}$, zatem:

$$a\sqrt{2} = -b\sqrt{3} \quad \bigg/ : a, \quad \sqrt{2} = \frac{-b\sqrt{3}}{a} \quad \bigg/ : -\sqrt{3}, \quad \frac{b}{a} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Znając wartości liczbowe ułamków $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{b}{a}$ możemy przystąpić do obliczenia sumy:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Krok 2. Obliczenie sumy podanego wyrażenia.

Chcąc dodać teraz do siebie te dwa ułamki, musimy sprowadzić je do wspólnego mianownika. W tym celu licznik oraz mianownik pierwszego ułamka należałoby pomnożyć przez wartość mianownika drugiego ułamka (czyli przez $\sqrt{3}$) i analogicznie licznik oraz mianownik drugiego ułamka trzeba pomnożyć przez wartość mianownika pierwszego ułamka (czyli przez $\sqrt{2}$). Całość wyglądałaby następująco:

$$\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} + \frac{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = , \quad = \frac{-3}{\sqrt{6}} + \frac{-2}{\sqrt{6}} = \frac{-5}{\sqrt{6}}$$

Otrzymany wynik jest poprawny, ale zgodnie z poleceniem, musimy jeszcze usunąć niewymierność, która pojawiła się w mianowniku. W tym celu musimy licznik oraz mianownik tego ułamka pomnożyć przez $\sqrt{6}$, otrzymując:

$$\frac{-5}{\sqrt{6}} = \frac{-5 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Zadanie 4

0-2 pkt

Dana jest liczba

$$a = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

Wykaż, że a jest liczbą całkowitą. Zapisz obliczenia.**Odpowiedź: Udowodniono dodając**

Chcąc dodać do siebie jakiekolwiek ułamki zwykłe, musimy sprowadzić je do wspólnego mianownika. W tym konkretnym zadaniu najlepszym pomysłem byłoby zacząć obliczeń od usunięcia niewymierności w każdym z mianowników.

W mianownikach wszystkich ułamków pojawiają nam się nie tylko same pierwiastki, ale wyrażenia z pierwiastkiem. W takich sytuacjach, chcąc usunąć niewymierność, musimy wymnożyć liczniki oraz mianowniki tych ułamków przez wyrażenie znajdujące się w mianowniku, ale ze zmienionym znakiem. Taki zabieg pozwoli nam zastosować w mianownikach wzór skróconego mnożenia $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Obliczenia wyglądałyby więc następująco:

$$a = \frac{1 \cdot (1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2})} + \frac{1 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})} + \frac{1 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{4})}{(\sqrt{3} + \sqrt{4}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{4})} = , = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{3 - 4} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} +$$

Upraszczając cały zapis otrzymaliśmy wynik równy 1, zatem otrzymaliśmy liczbę całkowitą, co należało udowodnić.

Zadanie 5

0-1 pkt

Która z podanych równości (A–D) jest prawdziwa?

Odpowiedź: B ($\sqrt{\sqrt{144} + \sqrt{16}} = 2^{\frac{4}{3}}$)

Prawdziwe jest jedynie równanie zapisane w drugiej odpowiedzi, ponieważ:

$$\sqrt{\sqrt{144} + \sqrt{16}} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4 = 2^2 = 2^{\frac{4}{3}}$$

Powiedzmy sobie może jeszcze, dlaczego pozostałe odpowiedzi są błędne:

Odp. A. - tutaj trzeba byłoby zastosować wzór skróconego mnożenia $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, więc od razu widać, że ten zapis jest niepoprawny.

Odp. C. - tu wystarczyło zauważyć, że $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ jest równe $\sqrt{\frac{9}{4}}$, czyli $\frac{3}{2}$. Ten ułamek podniesiony do potęgi trzeciej da zupełnie inny wynik niż to, co jest po prawej stronie.

Odp. D. - tu można dostrzec, że $\sqrt[3]{64}$ jest równe 4, a $4^{\frac{1}{8}}$ to zupełnie inna liczba niż 8^3 (zwróć uwagę, że $4^{\frac{1}{8}}$ to mniej niż 1, a 8^3 jest równe ponad 500).

Zadanie 6

0-2 pkt

Okres T drgań wahadła w pewnym zegarze dany jest wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdzie l oznacza długość wahadła, a g oznacza przyspieszenie grawitacyjne. Przyjmij do obliczeń, że przyspieszenie grawitacyjne na Ziemi wynosi $g_Z = 9,81 \frac{m}{s^2}$, a przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu wynosi $g_K = 1,62 \frac{m}{s^2}$.

Oblicz $\frac{T_K}{T_Z}$ - stosunek okresu drgań tego wahadła, gdyby znajdowało się ono na Księżycu, do okresu drgań tego samego wahadła znajdującego się na Ziemi. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Odpowiedź: $\frac{T_K}{T_Z}$

Krok 1. Zapisanie równań.

Z treści zadania wynika, że przyspieszenie grawitacyjne na Ziemi jest równe $9,81 \frac{m}{s^2}$, zatem podstawiając tą daną do wzoru na okres, otrzymamy:

$$T_Z = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9,81}}$$

I analogicznie, podstawiając przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu równe $1,62 \frac{m}{s^2}$, otrzymamy:

$$T_K = 2\pi\sqrt{\frac{l}{1,62}}$$

Krok 2. Obliczenie stosunku okresu drgań.

Celem zadania jest obliczenie stosunku drgań wahadła na Księżycu, względem drgań na Ziemi, zatem musimy podzielić T_K przez T_Z , otrzymując:

$$\frac{T_K}{T_Z} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{1,62}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{9,81}}} = \frac{\sqrt{\frac{l}{1,62}}}{\sqrt{\frac{l}{9,81}}} = \sqrt{\frac{l}{1,62} : \frac{l}{9,81}} = \sqrt{\frac{l}{1,62} \cdot \frac{9,81}{l}} = \sqrt{\frac{9,81}{1,62}} \approx \sqrt{6,056} \approx 2,46$$

Zadanie 7

0-1 pkt

Wartość wyrażenia $\log k + \log_{\frac{1}{100}} k^2 - \log_{\frac{1}{10}} k^3$, gdzie $k > 0$, jest równa:

Odpowiedź: C ((-1))

Zanim zaczniemy obliczać, to warto wspomnieć, że jeśli logarytm nie ma zapisanej podstawy, to domyślnie jest ona równa 10. Stąd też przykładowo $\log k$ to nic innego jak $\log_{10} k$.

Wracając do naszego przykładu, to korzystając z działań na logarytmach, możemy zapisać, że:

$$\log k \cdot \frac{1}{100} k^2 : \frac{1}{10} k^3 = \log_{\frac{1}{100}} k^3 : \frac{1}{10} k^3 = \log_{\frac{1}{100}} k^3 \cdot \frac{10}{k^3} = \log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10}$$

Jeśli umiemy podać wartość końcowego logarytmu, to od ręki możemy zapisać, że całość jest równa -1 . Jeśli jednak nie czujemy się na siłach, to możemy standardowo zapisać, że rozwiązaniem tego logarytmu jest x i całość wyglądałaby w ten oto sposób:

$$\log_{10} \frac{1}{10} = x \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{10}$$

Teraz musimy sprowadzając potęgi do jednakowej podstawy, otrzymując

$$10^x = \frac{1}{10}, \quad 10^x = 10^{-1}, \quad x = -1$$

Zadanie 8

0-2 pkt

Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają następujące warunki:

$$x, y, z > 0 \text{ oraz } x, y, z \neq 1 \text{ oraz } y^z = x$$

Dokończ zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych. Z podanych warunków wynika, że prawdziwe są równości:

A. $\log_x y = z$

B. $y^{-\log_y x} = \frac{1}{x}$

C. $\log_x z = y$

D. $y^{\log_z y} = x$

E. $\log_y x = z$

F. $z^{-\log_x z} = \frac{1}{y}$

Odpowiedź: B. oraz E.

Pierwsze równanie jesteśmy w stanie ułożyć tak naprawdę z definicji logarytmu, którą znajdziemy w tablicach matematycznych, czyli:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Musimy się tylko odpowiednio dopasować symbolami. Z treści zadania wynika, że $y^z = x$, zatem:

$$\log_y x = z \Leftrightarrow y^z = x$$

To oznacza, że jedną z poprawnych odpowiedzi jest na pewno E. Poszukajmy teraz drugiej odpowiedzi. Również w tablicach znajdziemy takie oto równanie:

$$a^{\log_a b} = b$$

Korzystając z naszych oznaczeń, zapisalibyśmy, że:

$$y^{\log_y x} = x$$

Dokładnie takiej odpowiedzi nie mamy, ale przyglądając się proponowanym odpowiedziom, widzimy, że jesteśmy dość blisko zapisu z odpowiedzi B. Pamiętając o tym, że ujemna potęga związana jest z odwrotnością liczby, moglibyśmy stwierdzić, że:

$$y^{-\log_y x} = \frac{1}{x}$$

Stąd też równie poprawną odpowiedzią będzie równanie z odpowiedzi B.

Zadanie 9

0-1 pkt

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Wyrażenie $2x^2 - 1$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $(1 - x\sqrt{2})(x\sqrt{2} - 1)$.

Dla każdej liczby rzeczywistej x wartość wyrażenia $(2 + x)^3 - x^2(x + 6) - 12x$ jest równa 8.

Wyrażenie $2x^2 - 1$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $(1 - x\sqrt{2})(x\sqrt{2} - 1)$.

Prawda

Fałsz

Dla każdej liczby rzeczywistej x wartość wyrażenia $(2 + x)^3 - x^2(x + 6) - 12x$ jest równa 8.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Możemy oczywiście wymnożyć podane nawiasy i sprawdzić jaki wynik otrzymamy:

$$(1 - x\sqrt{2})(x\sqrt{2} - 1) = x\sqrt{2} - 1 - 2x^2 + x\sqrt{2} = 2x^2 + 2\sqrt{2}x - 1$$

Ewentualnie moglibyśmy dostrzec, że to zadanie opiera się na wzorach skróconego mnożenia, a konkretnie chodzi tu o wzór $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$. W naszym pr

$$2x^2 - 1 = (x\sqrt{2} + 1)(x\sqrt{2} - 1)$$

Otrzymany wynik nie jest tożsamy z podanym wyrażeniem, więc zdanie jest fałszem.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, otrzymamy:

$$2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot x^2 + x^3 - x^3 - 6x^2 - 12x = , = 8 + 12x + 6x^2 - 6x^2 - 12x = 8$$

Zdanie jest więc prawdą.

$$W(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 26 \cdot 2$$

Zadanie 11

Dane jest wyrażenie

gdzie $a \in R$, $b \in R$, $a \neq b$, $a \neq -b$

Przekształć dane wyrażenie do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Odpowiedź: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Krok 1. Uproszczenie wyrażenia.

Chcąc dodać lub odjąć ułamki zwykłe, musimy sprowadzić je do wspólnego mianownika. Tutaj powinniśmy zauważyć, że w zadaniu wykorzystamy wzór skróconego

$$\left(\frac{a \cdot (a-b)}{(a+b) \cdot (a-b)} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2} \right) = , = \left(\frac{a^2-ab}{a^2-b^2} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \right) :$$

Krok 2. Obliczenie wartości liczbowej.

Mając uproszczoną postać, możemy przystąpić do podstawienia podanych liczb, czyli $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Otrzymamy wtedy:

$$\frac{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right)}{\frac{2}{\sqrt{3}} -}$$

Zadanie 12

Wyrażenie wymierne $\frac{2}{x-3} + 5$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie a, b, c, d są pewnymi współczynnikami rzeczywistymi. Wyznacz wartość

Odpowiedź: $a=5, b=-13, c=1, d$

Krok 1. Przekształcenie podanego wyrażenia.

Celem zadania jest poprawne przekształcenie podanego wyrażenia, a całość tak naprawdę sprowadza się do wykonania poprawnego dodawania. Musimy podaną sposob:

$$\frac{2}{x-3} + 5 = \frac{2}{x-3} +$$

Krok 2. Odczytanie współczynników.

Udało nam się sprowadzić wyrażenie do postaci z treści zadania, czyli $\frac{ax+b}{cx+d}$, więc pozostało nam już tylko przyrównanie współczynników, zatem: $a = 5, b = -13, c =$

Zadanie 13

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, gdzie $x \in R$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez:

A.	dwumian $(x - 3)$,	ponieważ	1.	liczba $x = 3$ jest pierwiastkiem wielomianu.
			2.	wyraz wolny wielomianu jest równy 6.
B.	dwumian $(x - 6)$,		3.	liczba $x = 6$ jest pierwiastkiem wielomianu.

Odpowiedź: A., ponieważ 1.

Wielomian jest podzielny przez dwumian typu $(x - a)$ wtedy, gdy $W(a) = 0$. Mówiąc bardzo obrazowo, musimy podstawić do wielomianu $x = 3$ oraz $x = 6$ i sprawdzić, czy otrzymamy zero.

$$W(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 3 + 6 = 27 - 36 + 3 + 6 = 0$$

$$W(6) = 6^3 - 4 \cdot 6^2 + 6 + 6 = 216 - 144 + 6 + 6 = 78 \neq 0$$

To oznacza, że wielomian jest podzielny przez dwumian $(x - 3)$, ponieważ liczba $x = 3$ jest pierwiastkiem wielomianu.

Zadanie 14

Rozwiąż nierówność. Podaj największą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność.

Odpowiedź: $x \leq -3$. Największe

Krok 1. Rozwiązanie nierówności.

Na początek ważna uwaga - mamy nierówność, czyli musimy pamiętać, że gdy mnożymy lub dzielimy obydwie strony przez liczbę ujemną, to trzeba zmienić znak na przeciwny.

Aby rozwiązać nierówność, musimy przenieść iksy na lewą stronę, a liczby na prawą. Najprościej będzie to zrobić w ten sposób:

$$2x \geq \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6 \quad \bigg/ -(\sqrt{5} \cdot x)$$

Wyrażenie $2 - \sqrt{5}$ jest ujemne, dlatego dzieląc obydwie strony przez tą wartość, musieliśmy zmienić znak nierówności na przeciwny.

Krok 2. Uproszczenie zapisu.

W otrzymanym wyniku dobrze byłoby jeszcze usunąć niewymierność z mianownika, zwłaszcza, że to dość mocno uprości nam cały zapis. Jak jesteśmy spostrzegawczy, możemy skorzystać z wzoru skróconego mnożenia $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, zatem:

$$x \leq \frac{(3\sqrt{5} - 6) \cdot (2 + \sqrt{5})}{(2 - \sqrt{5}) \cdot (2 + \sqrt{5})}$$

Krok 3. Podanie największej liczby całkowitej spełniającej nierówność.

Zgodnie z treścią zadania, musimy jeszcze podać największą liczbę całkowitą, która spełnia tę nierówność. Wartość x musi być mniejsza lub równa -3 , więc największą liczbą całkowitą spełniającą tę nierówność jest -3 .

Zadanie 15

Rozwiąż równanie

Odpowiedź: $x=3$ $\vee$ $x=-9$

Tego typu równania najprościej jest rozwiązywać metodą grupowania, wyłączając odpowiednie czynniki przed nawias:

$$-2x^3 + x^2 + 18x =$$

Otrzymaliśmy postać iloczynową, zatem możemy teraz przyrównać wartości w nawiasach do zera:

$$x^2 - 9 = 0 \quad \vee \quad -2x =$$

Zadanie 16

Rozwiąż równanie

Odpowiedź: $x=1$ $\vee$ $x=12$

Krok 1. Zapisanie równania w postaci iloczynowej.

Najprościej byłoby zauważyć, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu, ponieważ $W(1) = 0$.

$$W(1) =$$

Skoro tak, to możemy podzielić wielomian $W(x) = -x^3 + 13x - 12$ przez $x - 1$. Jak wykonać takie dzielenie? Możemy to zrobić za pomocą dzielenia pisemnego, aLiczby w górnym wierszu to współczynniki wielomianu $-x^3 + 13x - 12$ (zwróć uwagę, że nie mamy tutaj x^2 , stąd też w tym miejscu w tabelce pojawiło się 0). W lew

$$1 \cdot (-1) + 0 = -1 + 0 = -3 \Rightarrow \text{Pod liczbą 0 wpisujemy } -1$$

$$1 \cdot (-1) + 13 = -1 + 13 = 12 \Rightarrow \text{Pod liczbą 13 wpisujemy 12}$$

$$1 \cdot 12 + (-12) = 12 - 12 = 0 \Rightarrow \text{Pod liczbą } -12 \text{ wpisujemy 0}$$

Tabela wygląda więc następująco:

To oznacza, że wynikiem dzielenia wielomianu $-x^3 + 13x - 12$ przez dwumian $x - 1$ jest $-x^2 - x + 12$. W takim razie możemy stwierdzić, że równanie z treści zad

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania.

Najtrudniejsze już za nami, teraz musimy rozwiązać powstałe równanie w postaci iloczynowej. W tym celu wystarczy przyrównać wartości w nawiasach do zera, zatem

Z pierwszego równania otrzymamy rozwiązanie $x = 1$. Musimy jeszcze rozwiązać to drugie równanie, które jest równaniem kwadratowym zapisanym w postaci ogólWspółczynniki: $a = -1$, $b = -1$, $c = 12$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 1 + 48 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - 7}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 - 7}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

To oznacza, że będziemy mieć trzy rozwiązania tego równania:

Zadanie 17

Szymon przygotowuje się do egzaminu na prawo jazdy. Opanował już 97 spośród 3697 zadań. Postanowił, że każdego kolejnego dnia będzie rozwiązywał n zadań. Z będzie zwiększał dzienną liczbę rozwiązyanych zadań.

Odpowiedź: 90

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

Wprowadźmy do zadania proste oznaczenia:

m - liczba dni potrzebnych na rozwiązanie

n - liczba rozwiązywanych zadań dziennie

$m - 10$ - skrócona liczba dni nauki

$n + 5$ - zwiększona liczba rozwiązywanych zadań

Dodatkowo z treści zadania wynika, że zadań, których Szymon jeszcze nie opanował mamy:

Krok 2. Ułożenie równań.

Na podstawie treści zadania możemy wywnioskować, że liczba dni pomnożona przez liczbę zadań rozwiązywanych dziennie powinna dać wynik równy 3600, zatem:

Chcemy, by liczba dni była skrócona o 10, a liczba zadań żeby była zwiększona o 5, zatem powstanie nam następujące równanie:

$$(m -$$

Zapisałiśmy sobie przed chwilą, że $mn = 3600$, więc podstawiając tę wartość do naszego równania, otrzymamy:

$$3600 + 5$$

Teraz wracamy do równania $(m - 10) \cdot (n + 5) = 3600$ i podstawiamy tam wyznaczone przed chwilą $m = 2n + 10$, zatem:

$$(2n + 10 - 10) \cdot (n + 5) = 3600, \quad 2n$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Powstało nam równanie kwadratowe, które musimy teraz rozwiązać. Równanie jest zapisane w postaci ogólnej, zatem z pomocą przyjdzie nam delta:

Współczynniki: $a = 1$, $b = 5$, $c = -1800$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5$$

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -$$

Krok 4. Obliczenie liczby dni potrzebnych na rozwiązywanie zadań.

Z równania kwadratowego otrzymaliśmy dwa rozwiązania, ale to ujemne musimy oczywiście odrzucić, ponieważ liczba rozwiązywanych zadań nie może być ujemna. Z

$$m =$$

Zadanie 18

Równanie $\frac{(3x^2 - 6x)(x^2 - 9)}{(x - 2)(x - 3)^2} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

Odpowiedź: C (ma dokładnie dwa rozwiązania: $x = 0$, $x = -3$)

Krok 1. Zapisanie założeń do treści zadania.

Z racji tego, iż na matematyce nie istnieje dzielenie przez zero, to wartość z mianownika musi być różna od zera. To sprawia, że musimy do treści zadania wprowadzić

x

Krok 2. Rozwiązanie równania.

Mając zapisane założenia, możemy przystąpić do rozwiązywania. Najprościej będzie wymnożyć obydwie strony przez wartość z mianownika, zatem:

$$\frac{(3x^2 - 6x)(x^2 - 9)}{(x - 2)(x - 3)^2} = 0 \quad / \cdot (x - 2)(x - 3)^2, \quad (3x^2 - 6x)(x^2 - 9) = 0, \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 9 = 0, \quad x(3x - 6) = 0$$

Krok 3. Weryfikacja otrzymanych wyników.

Otrzymane wyniki musimy jeszcze zweryfikować z zapisanymi założeniami. Zgodnie z nimi musimy odrzucić rozwiązania $x = 2$ oraz $x = 3$, stąd też zostają nam jedy

Zadanie 19

Niech $\frac{m}{n}$ będzie ułamkiem nieskracalnym. Jeśli do licznika dodamy 6, a do mianownika dodamy 15, jego wartość nie zmieni się. Oblicz liczby m i n .

Odpowiedź: $m = 2$ oraz $n = 5$

Skoro wartość licznika ma być powiększona o 6, a mianownika o 15 i całość daje w dalszym ciągu postać $\frac{m}{n}$, to możemy ułożyć następujące równanie:

Mnożąc na krzyż, otrzymamy:

$$(m + 6) \cdot n = (n + 1)$$

Obliczyliśmy wartość naszego ułamka, ale to jeszcze nie koniec. Z treści zadania wynika, że nasz ułamek jest nieskracalny, więc otrzymaną postać $\frac{6}{15}$ musimy jeszcze

Szukany liczbami będą więc $m = 2$ oraz $n = 5$.

Zadanie 20

Dana jest liczba dwucyfrowa a , w której suma cyfr jest równa 14. Jeżeli zamienimy miejscami jej cyfry, otrzymamy liczbę o 18 mniejszą od liczby sprzed tej zamiany cy

Odpowiedź: $a = 86$

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

Zacniemy od wprowadzenia oznaczeń dotyczących cyfr dziesiątek i jedności:

x - cyfra dziesiątek

y - cyfra jedności

Z treści wynika, że suma tych dwóch cyfr jest równa 14, zatem:

Spróbujmy teraz zapisać równanie opisujące naszą liczbę, bazując na oznaczeniach x oraz y . Wbrew pozorom nie możemy zapisać, że $a = xy$ lub $a = x + y$. Tego ty

Powyższy zapis jest standardowy w tego typu zadaniach, więc warto o nim pamiętać. Jeśli nie jest on zbyt zrozumiały (zwłaszcza to mnożenie przez 10), to wystarczy

Dodatkowo z treści zadania wiemy, że przy zamianie cyfr (czyli gdy będziemy mieli liczbę $10y + x$) powstanie liczba o 18 mniejsza, zatem:

Krok 2. Ułożenie i rozwiązanie układu równań.

Bazując na równaniach zapisanych w poprzednim kroku, możemy ułożyć następujący układ równań:

Najprościej będzie skorzystać z metody podstawiania. Wyznamy więc wartość x z pierwszego równania i przy okazji uporządkujemy to drugie równanie:

Teraz podstawiając pierwsze równanie do drugiego, otrzymamy:

Znamy już wartość jednej z cyfr, więc musimy jeszcze obliczyć drugą. W tym celu wystarczy podstawić obliczone $y = 6$ do jednego z równań np. $x = 14 - y$, otrzym

To oznacza, że nasza liczba a jest równa:

Zadanie 21

Pies goni lisa. Początkowa odległość między zwierzętami równa była $30m$. Długość każdego skoku psa jest równa $2m$, długość każdego skoku lisa jest równa $1m$. W

Odpowiedź: $120m$

To zadanie można rozwiązać układając odpowiednie równania, ale można też podejść do tematu nieco sprytniej. Wiemy, że na trzy skoki lisa przypadają dwa skoki ps

• Skok lisa ma $1m$, więc trzy skoki dają dystans $3 \cdot 1m = 3m$.

• Skok psa ma $2m$, więc dwa skoki dają dystans $2 \cdot 2m = 4m$.

Można więc przyjąć, że w trakcie jednego cyklu, pies dogoni lisa na $1m$. Do dogonienia ma on dystans $30m$, więc będzie potrzebował 30 cykli. Skoro więc każdy cykl

Zadanie 22

Suma liczb rzeczywistych a i b równa jest 527. Wiemy, że 8% liczby a jest równe 7,5% liczby b . Oblicz liczby a i b .

Odpowiedź: $a = 255$ oraz $b = 272$

Krok 1. Zapisanie równań.

Skoro suma liczb a i b równa jest 527, to możemy ułożyć proste równanie:

Dodatkowo z treści zadania wynika, że 8% liczby a , jest równe 7,5% liczby b , czyli:

Krok 2. Ułożenie i rozwiązanie układu równań.

Z tych dwóch otrzymanych równań musimy teraz ułożyć układ równań:

Układ możemy rozwiązać na różne sposoby, najlepiej będzie chyba zastosować metodę podstawiania. W tym celu musimy przekształcić pierwsze równanie i podstaw

Podstawiając pierwsze równanie do drugiego, otrzymamy:

$$0,08 \cdot (527 - b) :$$

Znamy już wartość jednej liczby, musimy jeszcze poznać brakującą liczbę a . W tym celu wystarczy podstawić obliczone przed chwilą $b = 272$ np. do równania $a = 527 - b$

Rozwiązaniem zadania jest więc para liczb: $a = 255$ oraz $b = 272$.

Zadanie 23

Rozwiąż układ równań

Odpowiedź: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Krok 1. Rozwiązanie układu równań.

Tym razem mamy układ równań, w którym jedno z równań jest równaniem kwadratowym. To generalnie nie zmienia istoty sprawy i rozwiązujemy ten układ w stand:

Podstawiając teraz drugie równanie do pierwszego, otrzymamy:

$$x^2 + (2x - 1)^2 - 4x + 4 \cdot (2x - 1) - 17$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego i zakończenie rozwiązywania układu równań.

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które musimy teraz rozwiązać. To równanie jest na tyle proste, że damy radę obliczyć je bez wyznaczania delty, zatem:

Jak to standardowo bywa w równaniach kwadratowych, otrzymaliśmy dwa rozwiązania i obydwa te rozwiązania są jak najbardziej poprawne. Teraz musimy wyznaczyć

Gdy $x = 2$, to:Gdy $x = -2$, to:To oznacza, że rozwiązaniem tego układu równań są dwie pary liczb: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \end{cases}$

Zadanie 24

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $y = f(x) = x^2 + 5x + 6$, gdzie $x \in R$.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Postać kanoniczna funkcji f wyraża się wzorem:

A. $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

B. $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

C. $y = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{2}$

D. $y = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}$

2. Postać iloczynowa funkcji f wyraża się wzorem:

E. $y = (x - 2)(x - 3)$

F. $y = (x - 2)(x + 3)$

G. $y = (x + 2)(x - 3)$

H. $y = (x + 2)(x + 3)$

Odpowiedź: B. oraz H.

Krok 1. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Chcąc zapisać postać kanoniczną, musimy najpierw poznać współrzędne wierzchołka paraboli $W = (p, q)$. W tym celu musimy skorzystać ze wzorów $p = \frac{-b}{2a}$ oraz q

Zacznijmy od współrzędnej p , zatem:

Teraz obliczmy współrzędną q . Tutaj we wzorze pojawia nam się delta, więc może wyliczmy ją osobno dla lepszej przejrzystości zapisu:

I teraz znając deltę, możemy zapisać, że:

To oznacza, że $W = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Teraz możemy przejść do zapisania postaci kanonicznej. Postać kanoniczną zapisujemy jako:

Wiemy już, że $p = -\frac{5}{2}$ oraz $q = -\frac{1}{4}$. Z postaci ogólnej odczytaliśmy też, że $a = 1$, zatem podstawiając te wszystkie informacje do powyższego wzoru, otrzymamy:

$y =$

Krok 2. Rozwiązanie drugiej części zadania.

Do zapisania postaci iloczynowej będziemy potrzebować miejsc zerowych. Musimy więc rozwiązać równanie kwadratowe $x^2 + 5x + 6 = 0$, a skoro deltę liczyliśmy ju

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} =$$

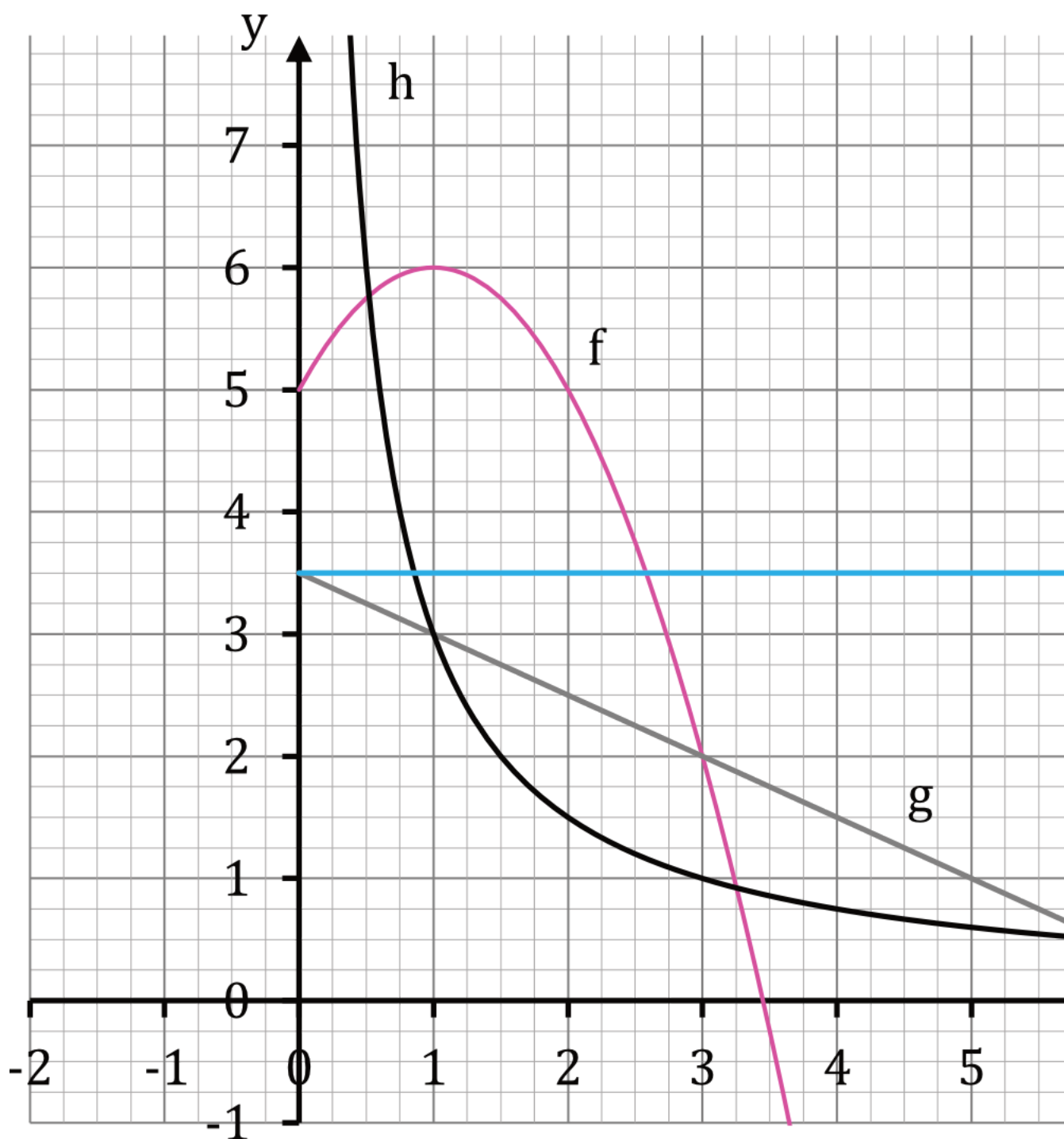
Teraz możemy przystąpić do zapisania postaci iloczynowej. Postać iloczynową zapisujemy jako:

Podstawiając wyznaczone przed chwilą miejsca zerowe $x_1 = -3$ oraz $x_2 = -2$, a także współczynnik $a = 1$, otrzymamy:

y

Zadanie 25

W kartezjańskim układzie w współrzędnych (x, y) przedstawiono fragmenty wykresów czterech funkcji: f, g, h, s .



Zadanie 1.

Największą wartość dla argumentu $x = 2$ przyjmuje funkcja:

- A. f
- B. g
- C. h
- D. s

Zadanie 2. Dla argumentu $x = 3$ tę samą wartość przyjmują funkcje:

A. f i s

B. s i h

C. f i g

D. g i s

Zadanie 3. Zapisz maksymalny przedział, w którym prawdziwa jest nierówność $g(x) > h(x)$.

Odpowiedź: 1. A. 2. C. 3. $\setminus x$

Rozwiązanie 1.

Przyglądając się wykresom funkcji, widzimy, że dla argumentu $x = 2$ najwyższą wartość osiągnie funkcja f (możemy nawet dodać, że ta wartość to $y = 5$).

Rozwiązanie 2.

Jeśli dwie funkcje przyjmują tę samą wartość dla danego argumentu, to z praktycznego punktu widzenia, wykresy tych funkcji po prostu się przetną. Widzimy więc, że

Rozwiązanie 3.

Zgodnie z zapisem $g(x) > h(x)$, interesuje nas sytuacja, w której dla danego argumentu, funkcja $g(x)$ przyjmuje większe wartości niż $h(x)$. Mówiąc bardziej obrazowo $x \in (1, 6)$. Tak na marginesie - nawiasy dajemy otwarte, bo dla tych skrajnych argumentów obydwie funkcje przyjmują jednakową wartość, a nas interesuje sytuacja,

Zadanie 26

Temperatura powietrza obniża się wraz ze wzrostem wysokości n.p.m. Na podstawie danych empirycznych stwierdzono, że temperatura maleje o $0,6^{\circ}\text{C}$, gdy wysokość była równa 13°C . W tym samym czasie dokonano pomiarów temperatury powietrza w Białce Tatrzańskiej i na Rysach.

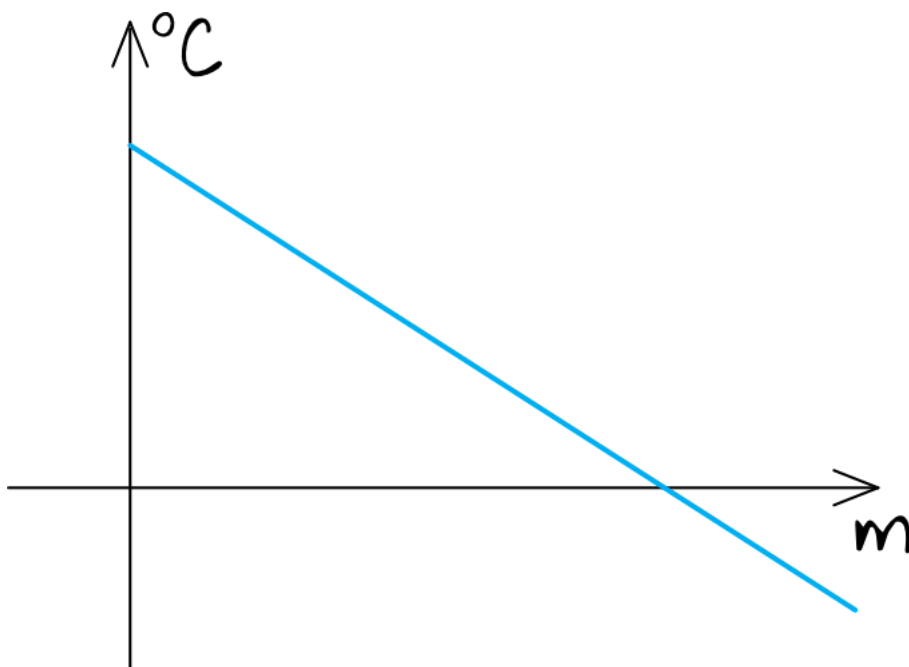
Zadanie 1.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1. Na Rysach, na wysokości 2499 metrów n.p.m., zmierzona temperatura powietrza nie przekraczała 5°C .
2. W Białce Tatrzańskiej (650 metrów n.p.m.) zmierzona temperatura powietrza była równa $16,5^{\circ}\text{C}$.

Zadanie 2.

Niech $f(x) = ax + b$ będzie funkcją opisującą zależność temperatury powietrza od wysokości x n.p.m. w dowolnym punkcie nad Zakopanem. Oblicz wartość współ



Odpowiedź: 1. Prawda oraz fałsz

Rozwiązanie 1.

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Różnica wysokości między Rysami i Zakopanem wynosi:

Zgodnie z treścią zadania, na każde 100m różnicy wysokości, temperatura zmienia się o $0,6^{\circ}\text{C}$. To oznacza, że tutaj ta różnica wyniesie:

Skoro więc w Zakopanem mieliśmy temperaturę 13°C , a na Rysach będzie ona o $8,994^{\circ}\text{C}$ mniejsza, to wyniesie ona:

Wyszło nam, że temperatura powietrza faktycznie nie przekracza 5°C , czyli zdanie jest więc prawdą.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Różnica wysokości między Zakopanem i Białką Tatrzańską wynosi:

To oznacza, że różnica temperatur wyniesie:

W takim razie temperatura w Białce Tatrzańskiej wyniesie:

Zdanie jest więc fałszem.

Rozwiązanie 2.

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Ustalmy co tak naprawdę musimy obliczyć. Widzimy, że zależność między wysokością i temperaturą jest liniowa (co $100m$ temperatura spada o $0,6$ stopnia), stąd ta temperatura jest mniejsza (czyli spodziewamy się, że współczynnik a wyjdzie nam ujemny). Generalnie nasza funkcja wygląda mniej więcej w ten oto sposób:



Krok 2. Wyznaczenie wartości współczynnika b .

Z własności funkcji liniowych wiemy, że współczynnik b mówi nam, w którym miejscu wykres funkcji liniowej przecina się z osią Oy , czyli jaką wartość przyjmuje ta fun

Wiemy, że w Zakopanem ($1000m$ n. p. m.) temperatura wynosi $13^{\circ}C$, więc skoro temperatura spada o $0,6^{\circ}C$ co $100m$, to na wysokości $0m$ n. p. m. ta temperatu

Krok 3. Wyznaczenie wartości współczynnika a .

Skoro współczynnik $b = 19$, to wiemy już, że $y = ax + 19$. Musimy odnaleźć jeszcze brakujący współczynnik a . Wiemy, że na wysokości 1000 metrów jest 13 stopni

Zadanie 27

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = -2x^2 + bx + c$ i przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x \in (-4, 2)$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji
Postać iloczynowa funkcji f wyraża się wzorem $f(x) = -2(x + 4)(x - 2)$.

Oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prosta $x = 1$.

Prawda

Fałsz

Postać iloczynowa funkcji f wyraża się wzorem $f(x) = -2(x + 4)(x - 2)$.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. W tym przypadku będzie miała ona ramiona skierowane w dół, ponieważ współczynnik $a = -2$. Skoro tak, to sytuacja

Widzimy, że skrajne argumenty, czyli $x = -4$ oraz $x = 2$ to miejsca zerowe naszej funkcji i to będzie nasz punkt wyjścia do dalszym obliczeń.

Krok 2. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Jedną z własności osi symetrii jest fakt, iż znajduje się ona dokładnie po środku między miejscami zerowymi. Do jej wyznaczenia możemy więc skorzystać ze średniej :

$$x = \frac{-4 + 2}{2}, \quad x = \frac{-2}{2}, \quad x = -1$$

Zdanie jest więc fałszem.

Krok 3. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

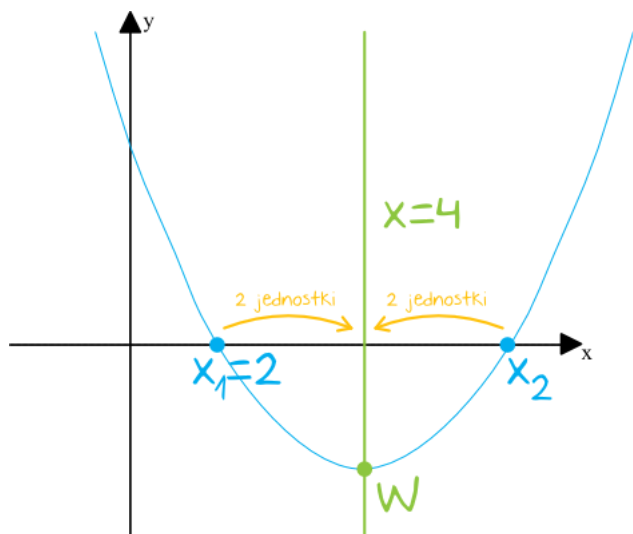
Postać iloczynową zapisujemy jako $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Ustaliśmy już, że miejscami zerowymi są $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 2$. Wiemy też, że współczynnik $a = -2$:

$$f(x) = -2(x - (-4))(x - 2), \quad f(x) = -2(x + 4)(x - 2)$$

Zdanie jest więc prawdą.

Zadanie 28

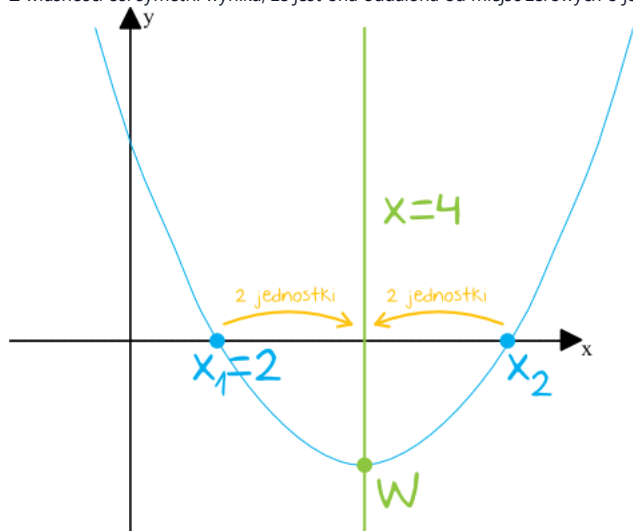
Dana jest funkcja kwadratowa f . Do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(0, 8)$, a osią symetrii jej wykresu jest prosta o równaniu $x = 4$. Jednym z r



Odpowiedź: $f(x) = \frac{2}{3}(x - 2)(x - 6)$

Krok 1. Wyznaczenie drugiego miejsca zerowego.

Z własności osi symetrii wynika, że jest ona oddalona od miejsc zerowych o jednakową odległość. Można więc powiedzieć, że skoro od pierwszego miejsca zerowego



Do tego samego wyniku możemy dojść oczywiście korzystając ze średniej arytmetycznej, z której to często wyznaczamy oś symetrii:

Krok 2. Wyznaczenie współczynnika a i zapisanie postaci iloczynowej.

Postać iloczynową zapisujemy jako $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Znamy już miejsca zerowe, więc moglibyśmy zapisać, że:

Do poznania pełnego wzoru brakuje nam jeszcze współczynnika a . Aby poznać jego wartość, wystarczy podstawić do powyższego wzoru współrzędne znanego pu

$$8 = a(0 - 2)(0 - 6)$$

To oznacza, że wzorem tej funkcji w postaci iloczynowej będzie $f(x) = \frac{2}{3}(x - 2)(x - 6)$.

Zadanie 29

Aby zaorać pole o powierzchni P w ciągu 8 godzin, potrzeba trzech ciągników. Przyjmijmy, że każdy ciągnik w ustalonej jednostce czasu może zaorać tę samą pow

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Zaoranie pola o powierzchni P przy pomocy dwu
Cztery ciągniki, które pracują o połowę szybciej, zaorałyby to pole w ciągu 4 godzin.

Zaoranie pola o powierzchni P przy pomocy dwóch ciągników zajęłoby 12 godzin.

Prawda

Fałsz

Cztery ciągniki, które pracują o połowę szybciej, zaorałyby to pole w ciągu 4 godzin.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Musimy zauważyć, że w tym zadaniu pojawiają nam się wielkości odwrotnie proporcjonalne (czyli im więcej ciągników, tym czas pracy będzie krótszy). Bazując na tr

$$3 \text{ ciągniki} \Rightarrow 8 \text{ godzin}, 2 \text{ ciągniki} \Rightarrow x \text{ godzin}$$

Skoro są to wartości odwrotnie proporcjonalne, to będziemy wykonywali tak zwane mnożenie w linii (a nie na krzyż), czyli:

$$3 \cdot 8 = 2 \cdot x, 24 = 2x, x = 12$$

Zdanie jest więc prawdą.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Możemy przyjąć, że 4 ciągniki pracujące o połowę szybciej wykonają taką samą pracę jak 6 standardowych ciągników, ponieważ $4 \cdot 1,5 = 6$. Ponownie więc układ

$$3 \text{ ciągniki} \Rightarrow 8 \text{ godzin}, 4 \cdot 1,5 = 6 \text{ ciągników} \Rightarrow x \text{ godzin}$$

Mnożąc w linii otrzymamy:

$$3 \cdot 8 = 6 \cdot x, 24 = 6x, x = 4$$

Zdanie jest więc prawdą.

Zadanie 30

Dane są liczby: $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$, $c = 4\sqrt{2}$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

Liczby a , b oraz c tworzą w podanej kolejności:

A.	ciąg arytmetyczny,	ponieważ	1.	$b = \frac{a + c}{2}$
			2.	$b = \frac{(c - a)}{2}$
			3.	$b^2 = a \cdot c$
B.	ciąg geometryczny,			

Odpowiedź: B., ponieważ 3.

Jeżeli ten ciąg jest arytmetyczny, to znajdzie w nim bardzo charakterystyczna własność między trzema kolejnymi wyrazami, czyli:

Z kolei jeśli ten ciąg jest geometryczny, to znajdzie w nim następująca własność:

Sprawdźmy zatem, która z tych własności będzie spełniona, zaczynając od ciągu arytmetycznego. Podstawiając dane z treści zadania, otrzymamy:

4

Wyszła nam sprzeczność, czyli wiemy już, że ten ciąg nie jest arytmetyczny. To teraz sprawdźmy, czy jest geometryczny:

Taki wynik oznacza, że faktycznie ten ciąg jest geometryczny, ponieważ $b^2 = a \cdot c$ i taka też jest odpowiedź.

Zadanie 31

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Jego różnica jest równa 4, a suma jego pierwszych pięciu wyrazów jest trzy razy

Odpowiedź: $a_1 = 2$

Z treści zadania wynika, że:

3 ·

Spróbujmy teraz rozpisać poszczególne wyrazy tego ciągu, korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu:

Wiemy, że różnica tego ciągu to $r = 4$, zatem moglibyśmy zapisać, że:

Podstawiając teraz te rozpisane wyrazy, otrzymamy:

$$3 \cdot (a_1 + a_1 + 4 + a_1 + 8 + a_1 + 12 + a_1 + 16) = a_1 + 20 + a_1 +$$

Zadanie 32

Iloraz skończonego ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{3}$, trzeci wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{9}$, a suma wszystkich wyrazów to $\frac{364}{243}$. Oblicz, z ilu wyrazów składa

Odpowiedź: 6

Krok 1. Wyznaczenie wartości pierwszego wyrazu.

Z treści zadania wiemy, że $q = \frac{1}{3}$ oraz $a_3 = \frac{1}{9}$. Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego, możemy zapisać, że:

a_3

Krok 2. Obliczenie liczby wyrazów tego ciągu.

Skorzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu, czyli:

Podstawiając do tego wzoru znane informacje, otrzymamy:

$$\frac{364}{243} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}, \quad \frac{364}{243} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \quad \Bigg/ \cdot \frac{2}{3}, \quad \frac{72}{243}$$

To oznacza, że ten ciąg składa się z sześciu wyrazów.

Zadanie 33

Liczby x, y, z , których suma jest równa 114, tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Liczby te są również wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego (a ,

Odpowiedź: $x = 38, y = 38, z = 38$

Krok 1. Zapisanie równań.

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, możemy zapisać, że:

Z treści zadania wynika, że suma trzech wyrazów, czyli a_1, a_4 oraz a_{25} jest równa 114, zatem:

$$a_1 + a_4 + a_{25} = 114, \quad a_1 + a_1 +$$

Krok 2. Wykorzystanie zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Z własności ciągów geometrycznych wiemy, że dla trzech kolejnych wyrazów zachodzi następująca zależność:

W przypadku naszego zadania zapisalibyśmy, że w takim razie:

Korzystając z rozpisanych wyrazów z poprzedniego kroku, zapisalibyśmy, że w takim razie:

$$(a_1 + 3r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 24r), \quad a_1^2 +$$

Krok 3. Obliczenie różnicy ciągu.

Mamy równanie, w którym są dwie niewiadome, czyli a_1 oraz r . Musimy więc doprowadzić całość do postaci z jedną niewiadomą i pomoże nam w tym równanie

$$r^2 - 2 \cdot (38 - 9r) \cdot r = 0, \quad r^2 - (76 - 18r) \cdot$$

Postało nam równanie kwadratowe w postaci ogólnej, które musimy teraz rozwiązać. Możemy oczywiście zrobić to za pomocą delty, ale jest akurat tutaj równar

$$r(r -$$

Krok 4. Weryfikacja otrzymanych wyników i obliczenie liczby x, y oraz z .

Otrzymaliśmy dwie różnice i pojawia się teraz pytanie, czy któraś z nich nie musi być przypadkiem odrzucona. Sprawdźmy jak będą wyglądać ciągi dla każdej z o

Gdy $r = 0$, to

$$a_1 = 38 - 9 \cdot 0, \quad a_1 = 38$$

$$a_4 = 38 + 3 \cdot 0, \quad a_4 = 38$$

$$a_{25} = 38 + 24 \cdot 0, \quad a_{25} = 38$$

Tym samym $x = 38, y = 38$ oraz $z = 38$.

Gdy $r = 4$, to:

$$a_1 = 38 - 9 \cdot 4, \quad a_1 = 38 - 36, \quad a_1 = 2$$

$$a_4 = a_1 + 3r, \quad a_4 = 2 + 3 \cdot 4, \quad a_4 = 2 + 12, \quad a_4 = 14$$

$$a_{25} = a_1 + 24r, \quad a_{25} = 2 + 24 \cdot 4, \quad a_{25} = 2 + 96, \quad a_{25} = 98$$

Tym samym $x = 2, y = 14$ oraz $z = 98$.

W pierwszym przypadku (dla $r = 0$) otrzymaliśmy ciągi stałe, a w drugim (dla $r = 4$) ciągi rosnące. Treść zadania nie precyzuje jakie mają być nasze ciągi, więc n

Zadanie 34

Trzy liczby, których suma jest równa 24, tworzą ciąg arytmetyczny. Po zwiększeniu ich odpowiednio o 4, 10 i 40 będą w tej samej kolejności tworzyły ciąg geom

Odpowiedź: 50, 8, -34 oraz \(\)

Krok 1. Zapisanie równań.

Z treści zadania wynika, że mamy jakieś trzy liczby, których suma daje wynik równy 24, zatem:

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, możemy zapisać, że:

Podstawiając teraz te zależności do początkowego równania, otrzymamy:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 24, c$$

To z kolei prowadzi nas do wniosku, że:

Krok 2. Wykorzystanie zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Z własności ciągów geometrycznych wiemy, że dla trzech kolejnych wyrazów zachodzi następująca zależność:

Podstawiając teraz zapisane wcześniej równania, otrzymamy:

$$18^2 = (8 - r + 4)^2 \cdot (8 + r + 40)^2, 324 = (12 - r)^2 \cdot (48 +$$

Krok 3. Obliczenie różnicy ciągu.

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które musimy rozwiązać. Jest to postać ogólna, więc skorzystamy z delty:

Współczynniki: $a = 1$, $b = 36$, $c = -252$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -$$

Krok 4. Weryfikacja otrzymanych wyników i wyznaczenie liczb tworzących ciąg.

Otrzymaliśmy dwie różne różnice, więc zastanówmy się, czy którąś z nich trzeba odrzucić.

Gdy $r = -42$, to:

$$a_1 = 8 - (-42) = 8 + 42 = 50, a_2 = 50 + (-42) = 50 - 42 = 8, a_3 = 50 + 2 \cdot (-42) = 50 - 84 = -34$$

Gdy $r = 6$, to:

$$a_1 = 8 - 6 = 2, a_2 = 2 + 6 = 8, a_3 = 8 + 6 = 14$$

Otrzymaliśmy dwa różne ciągi (jeden malejący, drugi rosnący) i żadnego z nich nie możemy wykluczyć (bo w treści zadania nie ma żadnej informacji o monotoni

Zadanie 35

Pani Joanna postanowiła systematycznie oszczędzać i co miesiąc na swoje subkonto odkładać pewną sumę pieniędzy. Pierwszego czerwca 2020 roku wpłaciła 3

Zadanie 1.

Oblicz kwotę, jaką pani Joanna wpłaciła na subkonto pierwszego czerwca 2022 roku.

Zadanie 2.

Oblicz, o ile większą kwotę niż w miesiącu poprzednim pani Joanna powinna odkładać, aby pierwszego czerwca 2025 roku (uwzględniając również wpłatę w tym

Odpowiedź: 1. $a_{25} = 900$ 2

Rozwiązanie 1.

Na początek ustalmy, ile wpłat dokonała Pani Joanna, bo to też może nie być do końca oczywiste. Pierwsza wpłata była w czerwcu 2020, druga w lipcu 2020, w

Powinniśmy dostrzec, że kwoty wpłat będą tworzyć pewien ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 300$ oraz $r = 25$. Skoro więc interesuje nas wartość dwudziestej

$$a_{25} = a_1 +$$

Rozwiązanie 2.

W tym zadaniu wykorzystamy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, czyli:

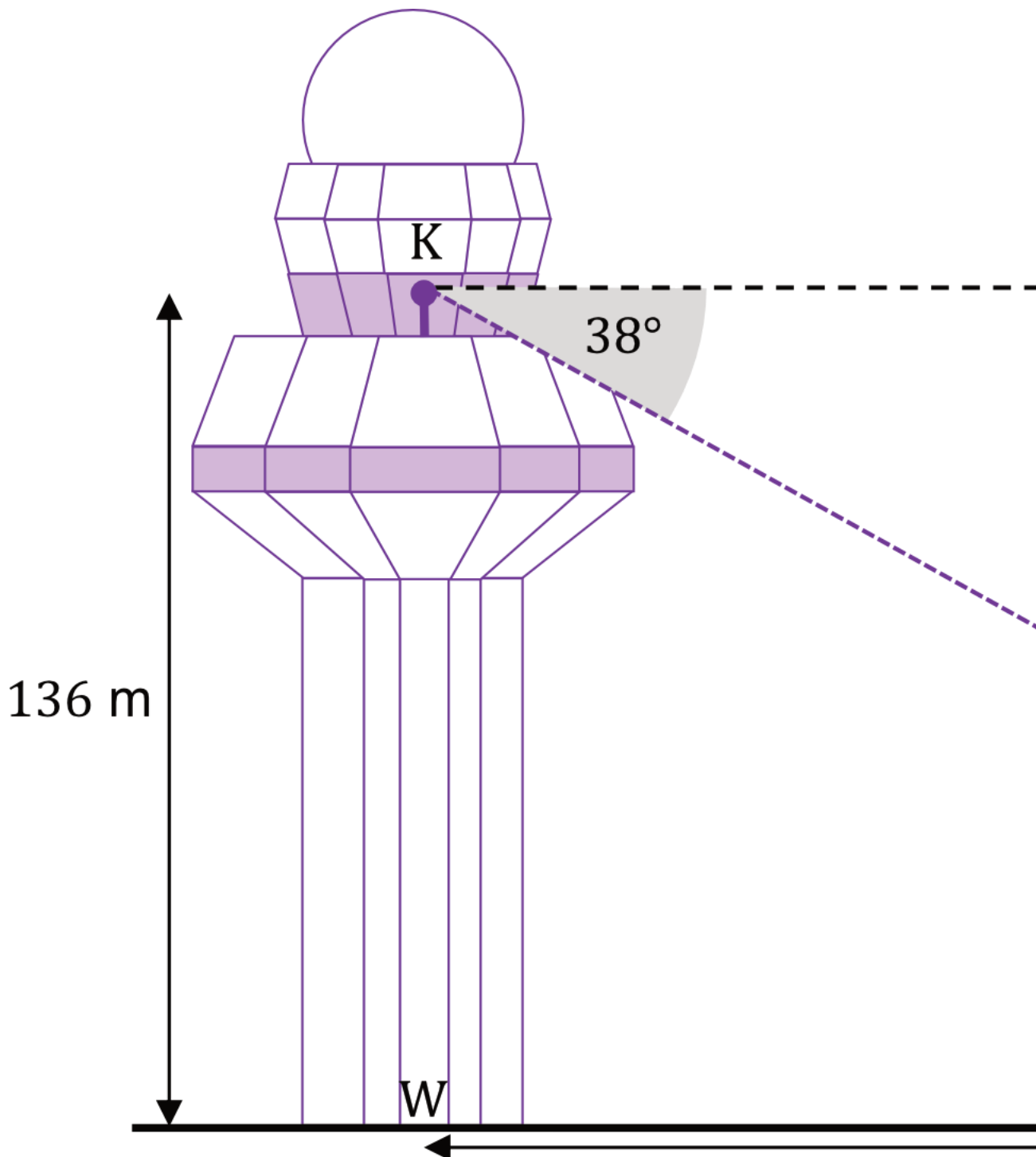
Bazując na wyliczance miesięcy z poprzedniego podpunktu, możemy stwierdzić, że wpłata pierwszego czerwca 2025 będzie wpłatą sześćdziesiątą pierwszą, czyli

$$76860 = \frac{2 \cdot 300 + (61 - 1) \cdot 25}{2}$$

To oznacza, że Pani Joanna powinna powiększać swoje wpłaty o 32zł miesięcznie.

Zadanie 36

Z okna wieży kontroli lotów widać startujący samolot S pod kątem 38° do poziomu. Kontroler K znajduje się na wysokości $136m$ od płyty lotniska (zobacz rys

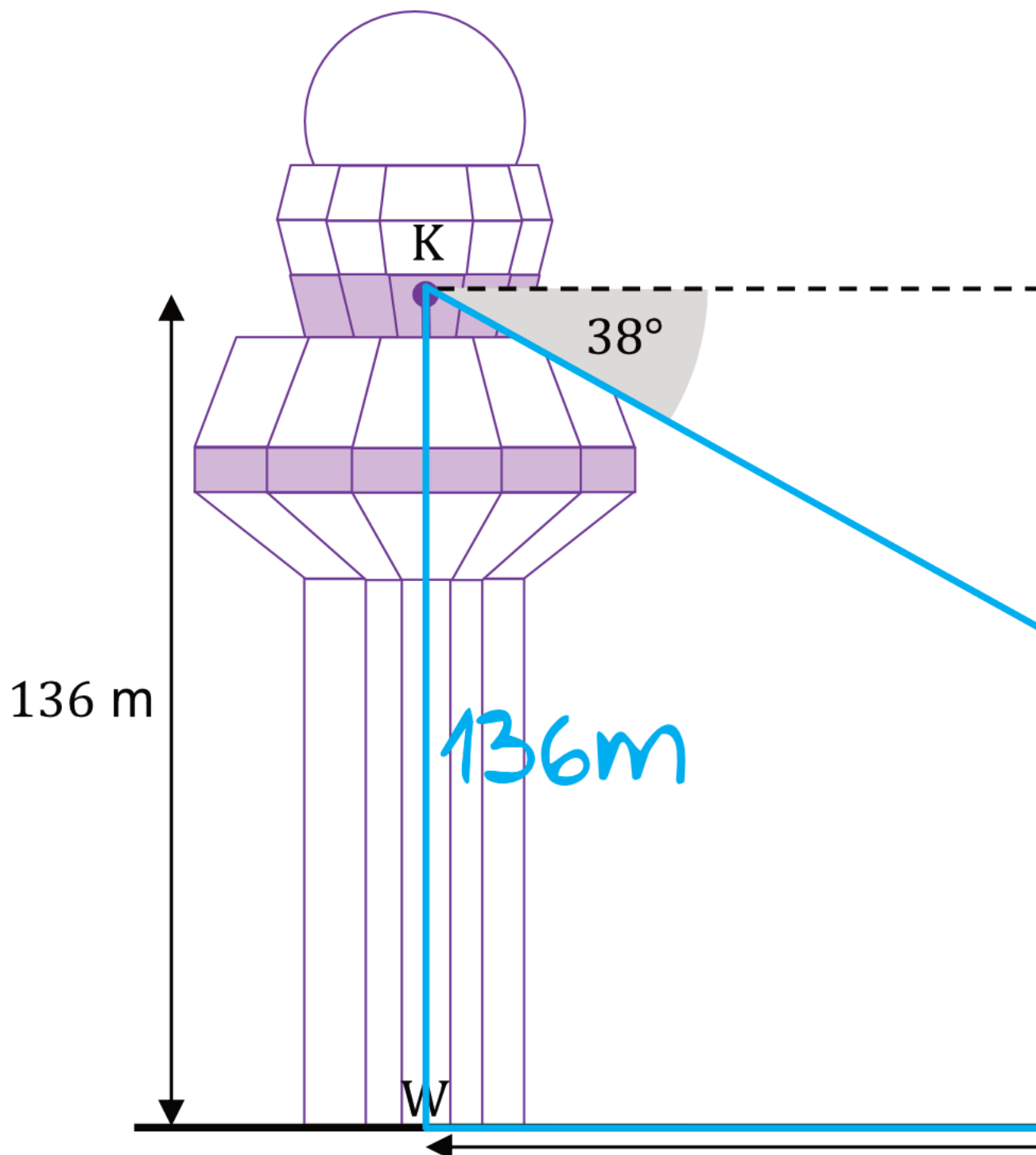


Oblicz odległość x samolotu S od podstawy W tej wieży. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych metrów.

Odpowiedź: $x \approx 174m$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Korzystając z własności kątów naprzemianległych, otrzymamy taką oto sytuację:



Krok 2. Obliczenie odległości x .

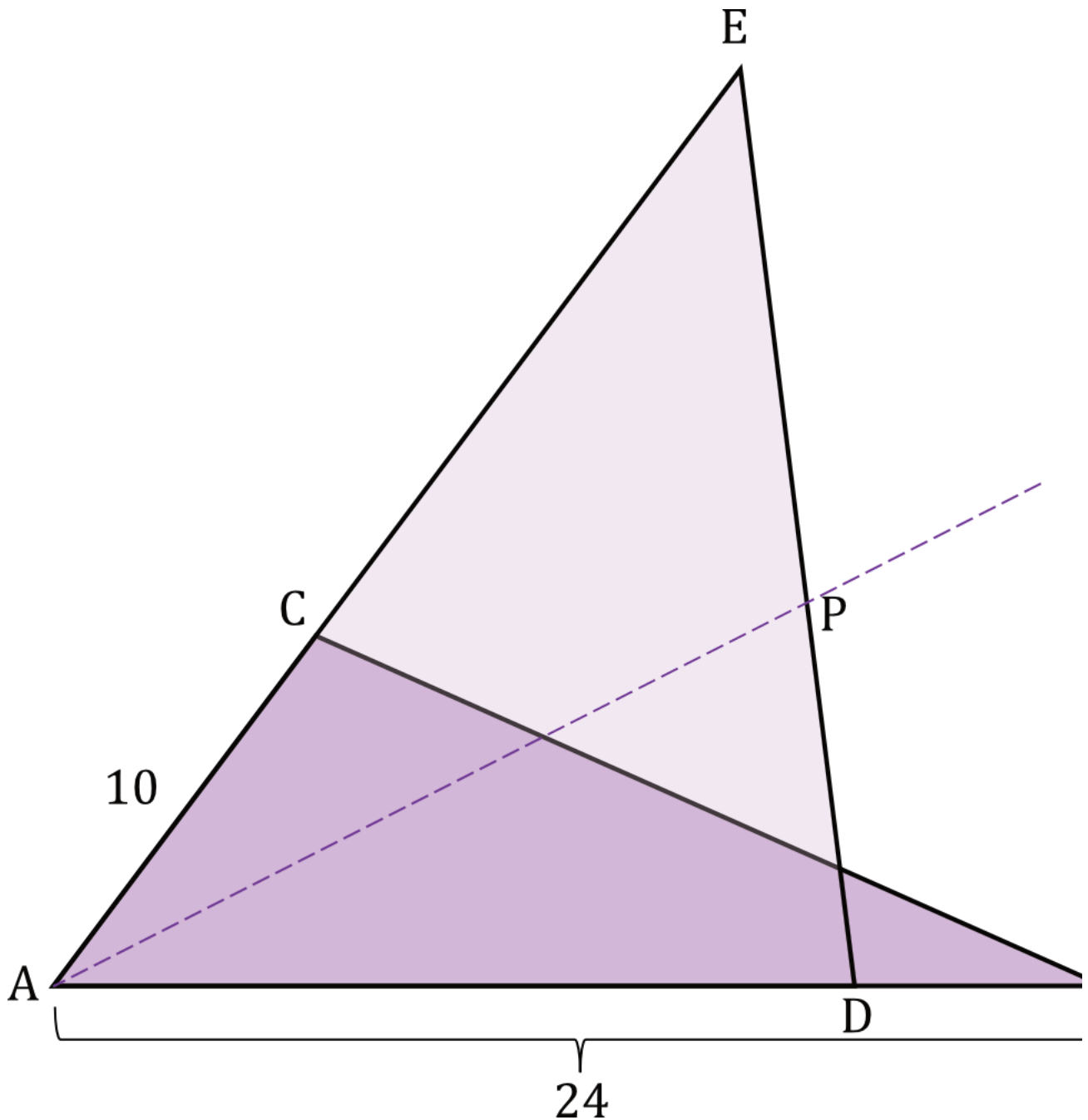
Interesuje nas poznanie długości x , czyli przyprostokątnej naszego trójkąta prostokątnego, która leży przy kącie o znanej mierze 38° . Korzystając zatem z funkcji

Z tablic trygonometrycznych odczytujemy, że $\tan 38^\circ \approx 0,7813$, zatem:

Zgodnie z treścią zadania, wyniki mamy podawać w zaokrągleniu do pełnych metrów, zatem $x \approx 174m$.

Zadanie 37

Dane są dwa trójkąty ABC i ADE o wspólnym kącie ostrym przy wierzchołku A . Ponadto $|AB| = 24$, $|AC| = 10$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta ADE jest c



Zadanie 1.

Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek DE w punkcie P , takim że $\frac{|DP|}{|PE|} = \frac{3}{4}$. Oblicz długości boków AD i AE trójkąta ADE .

Zadanie 2.

Pole trójkąta ABC jest równe 72. Oblicz długość boku BC trójkąta ABC .

Odpowiedź: 1. $|AE| = 8\sqrt{10}$

Rozwiązanie 1.

Krok 1. Zapisanie równań.

Z treści zadania wynika, że pole trójkąta ADE jest dwukrotnie większe od pola trójkąta ABC , czyli:

Przyjmijmy, że kąt BAC oznaczmy jako α . W takim razie, korzystając ze wzoru na pole powierzchni trójkąta "z sinusem", możemy zapisać, że:

$$\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AE| \cdot \sin \alpha$$

Podstawiając teraz znane z treści zadania długości boków, czyli $|AB| = 24$ oraz $|AC| = 10$, otrzymamy:

$$\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AE|$$

Krok 2. Zapisanie zależności wynikającej z twierdzenia o dwusiecznej kąta.

Spójrzmy na trójkąt ADE . Z twierdzenia o dwusiecznej kąta BAC wynika, że skoro $\frac{|DP|}{|PE|} = \frac{3}{4}$, to także $\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{3}{4}$. W związku z tym:

Krok 3. Obliczenie długości odcinka AE .

Podstawiając teraz wyznaczoną długość $|AD|$ do równania $|AD| \cdot |AE| = 480$, otrzymamy:

$$\frac{3}{4} |AE| \cdot |AE| =$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, bo długość boku musi być dodatnia. Zostaje nam więc $|AE| = \sqrt{640}$, co możemy jeszcze rozpisać jako $|AE| = \sqrt{64 \cdot 10}$

Krok 4. Obliczenie długości odcinka AD .

Na koniec została nam do obliczenia długość odcinka AD . Korzystając z równania $|AD| = \frac{3}{4} |AE|$, możemy zapisać, że:

Rozwiązanie 2.

Krok 1. Obliczenie wartości $\sin \alpha$.

Przyjmijmy, że kąt BAC oznaczmy jako α . W takim razie, korzystając ze wzoru na pole trójkąta "z sinusem", możemy zapisać, że:

Z treści zadania wiemy, że pole tego trójkąta jest równe 72 i wiemy, że $|AB| = 24$ oraz $|AC| = 10$ zatem:

$$72 = \frac{1}{2}$$

Krok 2. Obliczenie wartości $\cos \alpha$.

W tym zadaniu będziemy chcieli wykorzystać twierdzenie cosinusów, a póki co, znamy tylko wartość sinusa. Obliczmy zatem wartość cosinusa, a dokonamy tego

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \left(\frac{3}{5}\right)^2 +$$

Z treści zadania wynika, że kąt przy wierzchołku A jest ostry, a dla takich kątów cosinus przyjmuje jedynie dodatnie wartości, stąd też jedynym pasującym rozwi

Krok 3. Obliczenie długości boku BC .

Teraz możemy przejść do obliczenia długości boku BC , czyli boku, który leży naprzeciwko naszego kąta α . W tym celu skorzystamy z twierdzenia cosinusów:

Kluczową sprawą jest tutaj to, aby pod c podstawić właśnie ten nasz poszukiwany bok BC , bo to on jest naprzeciwko kąta α . Boki a oraz b to odpowiednio bok

$$|BC|^2 = 24^2 + 10^2 - 2 \cdot 24 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5}$$

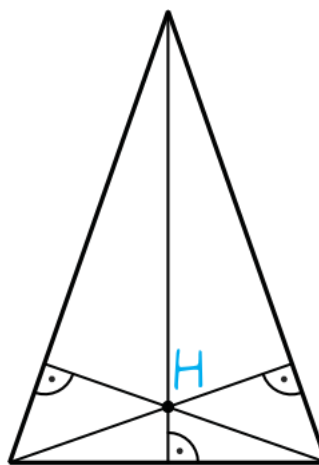
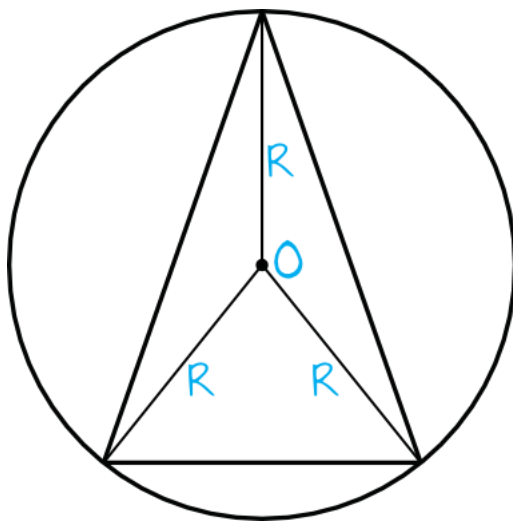
Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam jedynie $|BC| = \sqrt{292}$, co możemy jeszcze rozisać jako $|BC| = \sqrt{4 \cdot 73} = 2\sqrt{73}$.

Zadanie 38

Dany jest trójkąt równoramienny, który nie jest równoboczny. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt H jest jego ortocentrum.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. Punkt O jest równo oddalony tylko od dwóch wierzchołków tego trójkąta.
- B. Punkt O jest równo oddalony od trzech wierzchołków tego trójkąta.
- C. Punkt O jest równo oddalony od trzech boków tego trójkąta.
- D. Punkt H jest równo oddalony tylko od dwóch wierzchołków tego trójkąta.
- E. Punkt H jest równo oddalony od trzech wierzchołków tego trójkąta.
- F. Punkt H jest równo oddalony od trzech boków tego trójkąta.

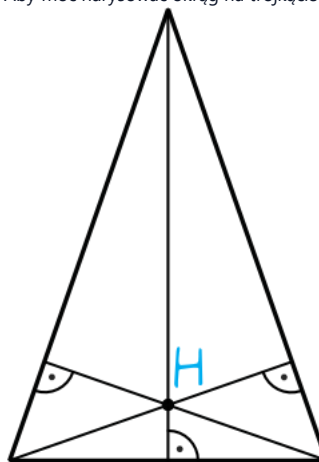
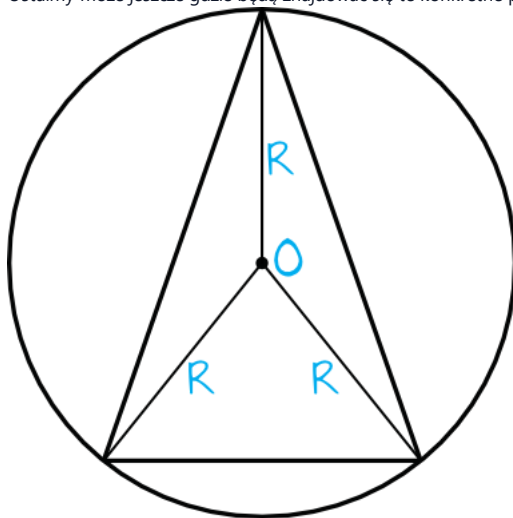


Odpowiedź: B. oraz D.

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Narysujmy przykładowy trójkąt równoramienny i oznaczmy na nim dwa interesujące nas punkty (najlepiej w osobnych rysunkach, tak aby było to bardziej przej

Ustalmy może jeszcze gdzie będą znajdować się te konkretne punkty. Aby móc narysować okrąg na trójkącie równoramiennym, to punkt O musi znajdować się



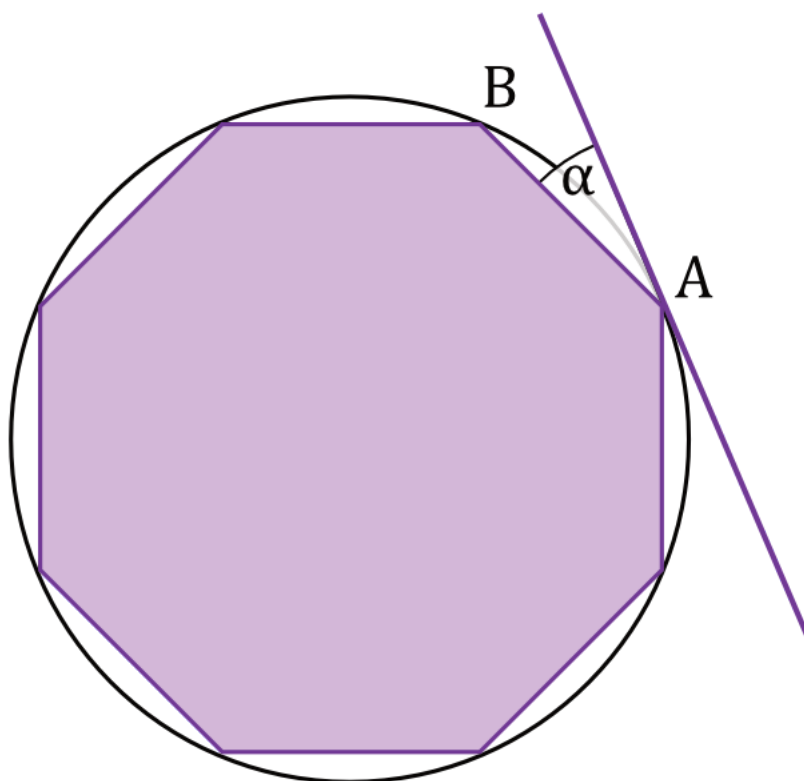
Krok 2. Wybór właściwych odpowiedzi.

Zaczniemy od punktu O , czyli środka okręgu. Tak jak sobie powiedzieliśmy w poprzednim kroku (co zresztą widać na pierwszym rysunku), narysowanie okręgu n

Jeśli chodzi o punkt H , to zgodnie z rysunkiem, będzie on równo oddalony tylko od dwóch wierzchołków tego trójkąta (tam, gdzie wysokość jest poprowadzon

Zadanie 39

Dany jest ośmiokąt foremny wpisany w okrąg K . Punkty A oraz B są sąsiednimi wierzchołkami tego ośmiokąta oraz α jest kątem między styczną do okręgu K

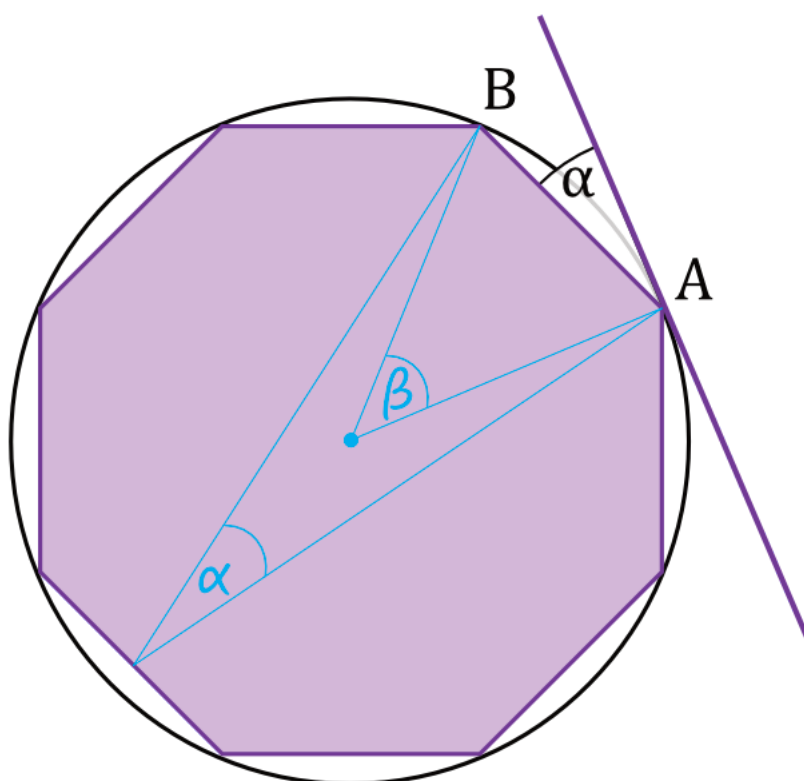


Miara kąta α jest równa:

Odpowiedź: C (22,5°)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Powinniśmy zwrócić uwagę, że boki ośmiokąta (w tym ten, który jest przy naszym kącie α) są cięciwami okręgu, który jest opisany na tej figurze. Z twierdzenia c



Na rysunku pomocniczym pojawił się też kąt β , który jest kątem środkowym opartym na łuku AB . Zgodnie z własnościami kątów wpisanych i środkowych, miar

Krok 2. Obliczenie miary kąta β .

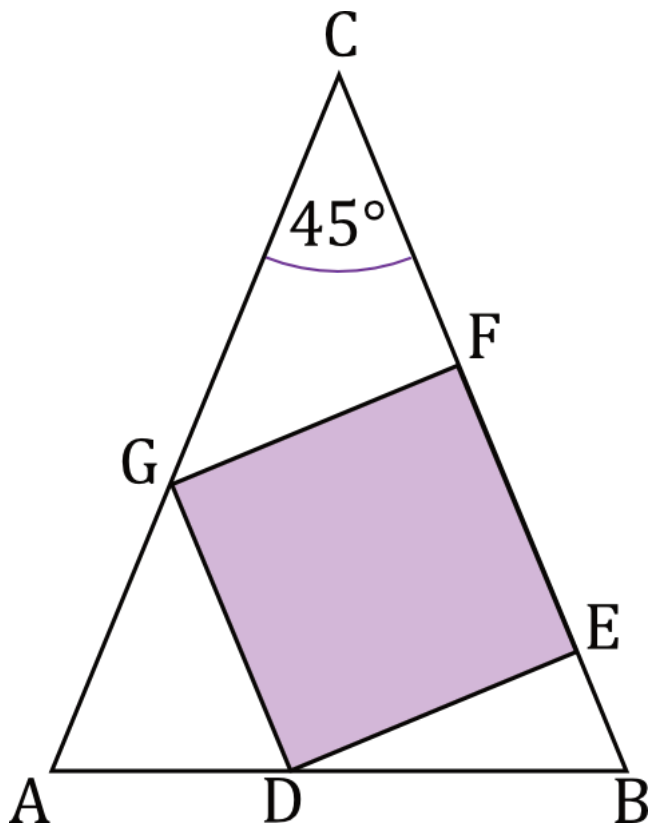
Miara kąta środkowego β stanowi $\frac{1}{8}$ kąta pełnego (ponieważ nasza figura jest ośmiokątem foremnym), zatem:

Krok 3. Obliczenie miary kąta α .

Kąt α stanowi połowę miary kąta β , zatem:

Zadanie 40

Dane są trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$ i $|\angle ACB| = 45^\circ$, oraz kwadrat $DEFG$ o polu równym 1. Wierzchołki E i F kwadratu leżą na



Oceń prawdziwość poniższych relacji. Wybierz P, jeśli relacja jest prawdziwa, albo F – jeśli jest fałszywa. $|\angle AGD| = 45^\circ$

$$|AG| - |BE| = 2 - \sqrt{2}$$

$$|\angle AGD| = 45^\circ$$

Prawda

Fałsz

$$|AG| - |BE| = 2 - \sqrt{2}$$

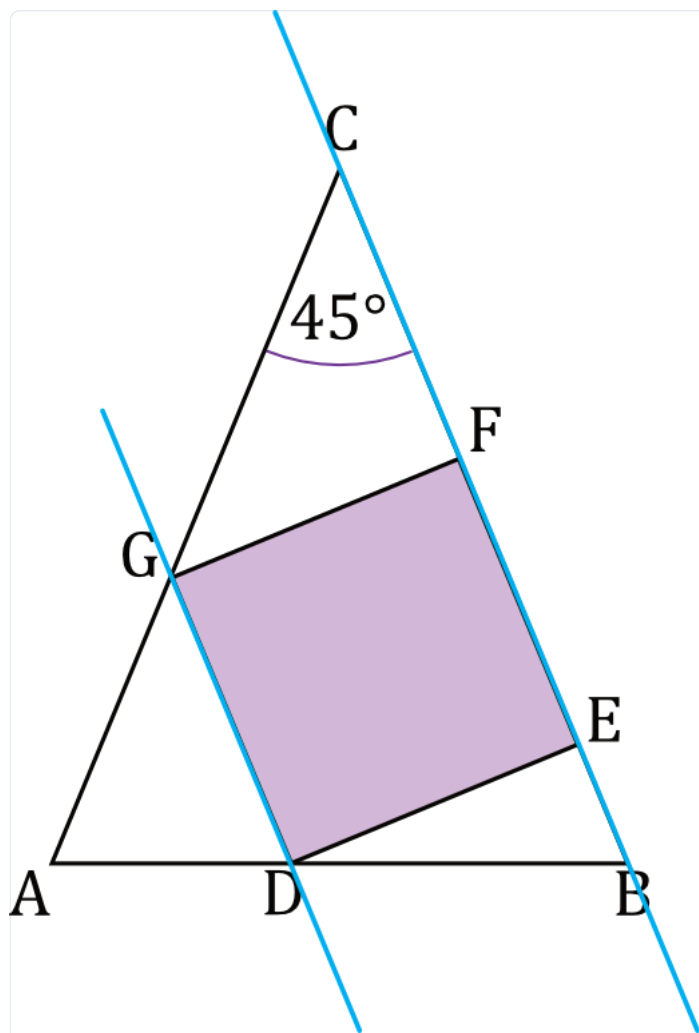
Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Kluczem do sukcesu jest dostrzeżenie, że odcinek DG jest równoległy do ramienia BC (ponieważ boki kwadratu są względem siebie równoległe). Mówiąc bard.



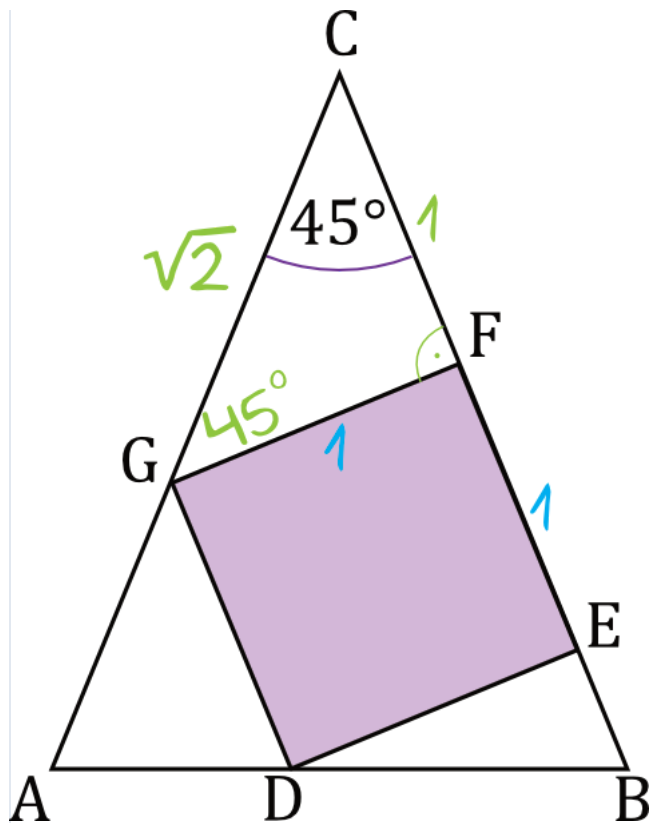
Można więc wysnuć wniosek, że trójkąt ADG jest trójkątem podobnym do trójkąta równoramiennego ABC , czyli tym samym trójkąt ADG jest także równor

Krok 2. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Skoro ustaliliśmy już, że trójkąty ADG oraz ABC są podobne, to znaczy, że będą miały one tę samą miarę kąta między ramionami. To prowadzi nas do wniosku

Krok 3. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Wiemy, że kwadrat $DEFG$ ma pole równe 1, czyli tym samym każdy bok tego kwadratu ma długość 1, ponieważ $P = 1^2 = 1$. Spójrzmy teraz na trójkąt GFC . Dodatkowo zgodnie z własnościami trójkątów o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ możemy stwierdzić, że $|GC| = \sqrt{2}$.



Długości ramion AC oraz BC są sobie równe, stąd też zgodnie z rysunkiem możemy zapisać, że:

$$|AC| = |BC|, |AG| + \dots$$

Dane są:

- okrąg o środku S i promieniu $r = 1$
- prosta k przechodząca przez S i przecinająca okrąg w punktach P i Q
- prosta l styczna do danego okręgu w punkcie T .

Prosta k przecina prostą l w punkcie R . Prosta przechodząca przez punkt Q i równoległa do odcinka ST przecina styczną l w punkcie U (zobacz rysunek).

Odpowiedź: $|TU| = \frac{\sqrt{1}}{2}$

Wiemy, że promień okręgu ma długość $r = 1$. Odcinek PQ jest średnicą tego okręgu, czyli tym samym możemy zapisać, że:

Możemy też już policzyć długość odcinka SR , ponieważ:

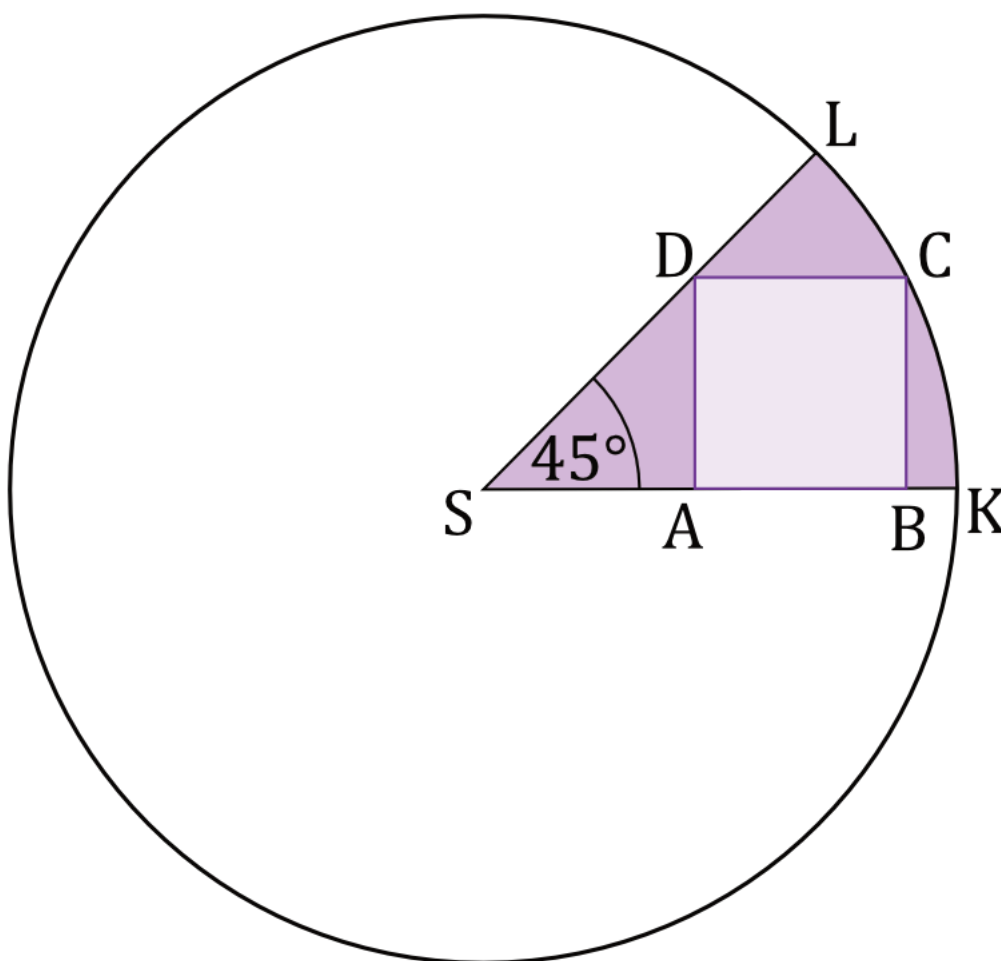
Spójrzmy na trójkąt STR . Jest to trójkąt prostokątny, ponieważ z własności stycznych do okręgu wynika, że styczna do okręgu tworzy z promieniem kąt procy.

$$|ST|^2 + |TR|^2 = |SR|^2, \quad 1^2 + 1^2 = 2^2$$

Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy zapisać, że:

Zadanie 42

W wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy KSL o mierze 45° wpisano kwadrat $ABCD$ w taki sposób, że wierzchołki A oraz B leżą na promieniu SK



Oblicz stosunek pola kwadratu $ABCD$ do pola wycinka kołowego KSL .

Odpowiedź: $\frac{8}{5\pi}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Kluczem do sukcesu będzie połączenie punktu S z punktem C , rysując w ten sposób promień okręgu, który jest jednocześnie przeciwprostokątną trójkąta S .

Krok 2. Obliczenie długości promienia.

$$(2a)^2 + a^2 =$$

Długość promienia musi być dodatnia, więc zostaje nam $r = a\sqrt{5}$.

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni wycinka kołowego.

Znamy długość promienia, więc możemy obliczyć pole całego koła:

$$P =$$

Skoro kąt środkowy ma miarę 45° , to wycinek koła stanowi $\frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8}$ pola całego koła. Możemy więc zapisać, że:

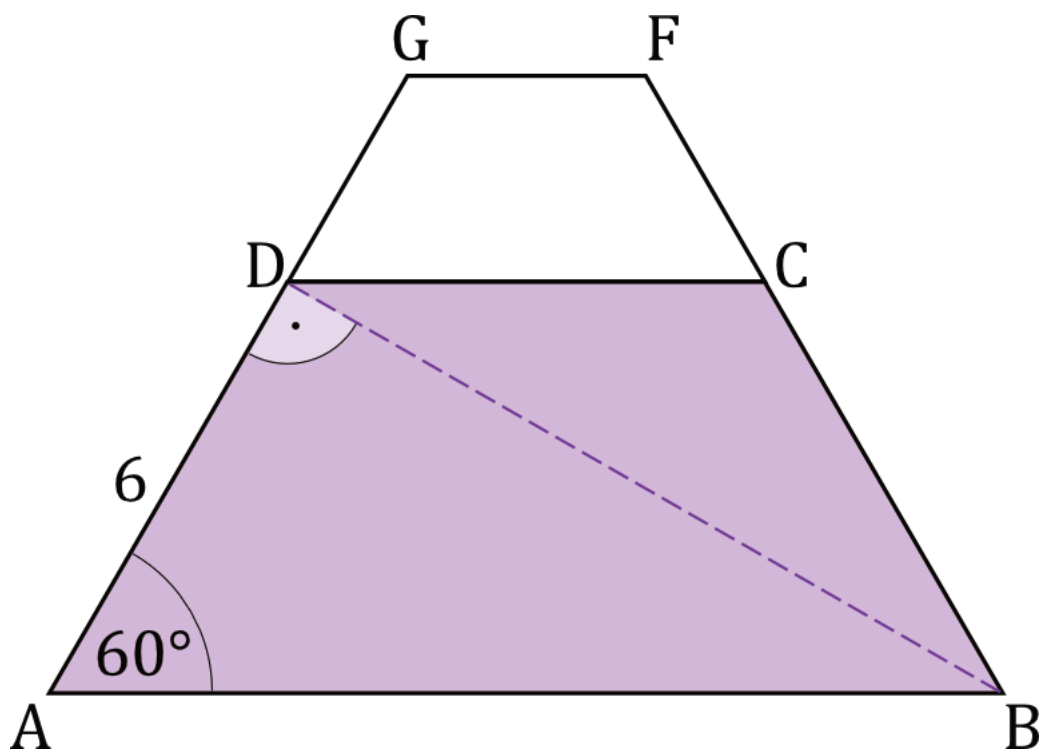
Krok 4. Obliczenie stosunku pól powierzchni.

Na koniec musimy jeszcze obliczyć stosunek powierzchni pola kwadratu (tutaj $P = a^2$), względem pola wycinka KSL (tutaj $P = \frac{5}{8}\pi \cdot a^2$). Bardzo łatwo tutaj

Zadanie 43

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD , gdzie $|AB| > |CD|$. Kąt ostry tego trapezu ma miarę 60° , a przekątna jest prostopadła

Oblicz pole trapezu $DCFG$.



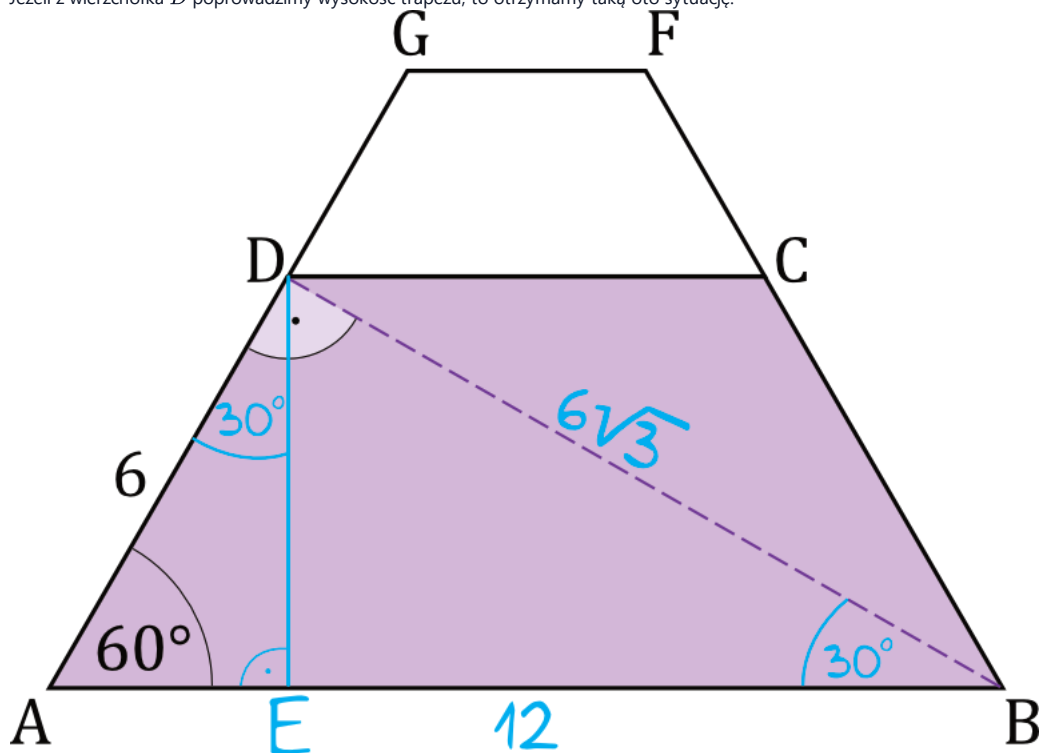
Odpowiedź: $(P_{DCFG}) = \frac{27}{2}$

Krok 1. Obliczenie długości podstawy AB oraz przekątnej BD .

Spójrzmy na trójkąt ABD . Jest to trójkąt prostokątny o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Z treści zadania wynika, że $|AD| = 6$. Znamy więc długość krótszej przyprostokątnej

Krok 2. Obliczenie długości AE oraz DE .

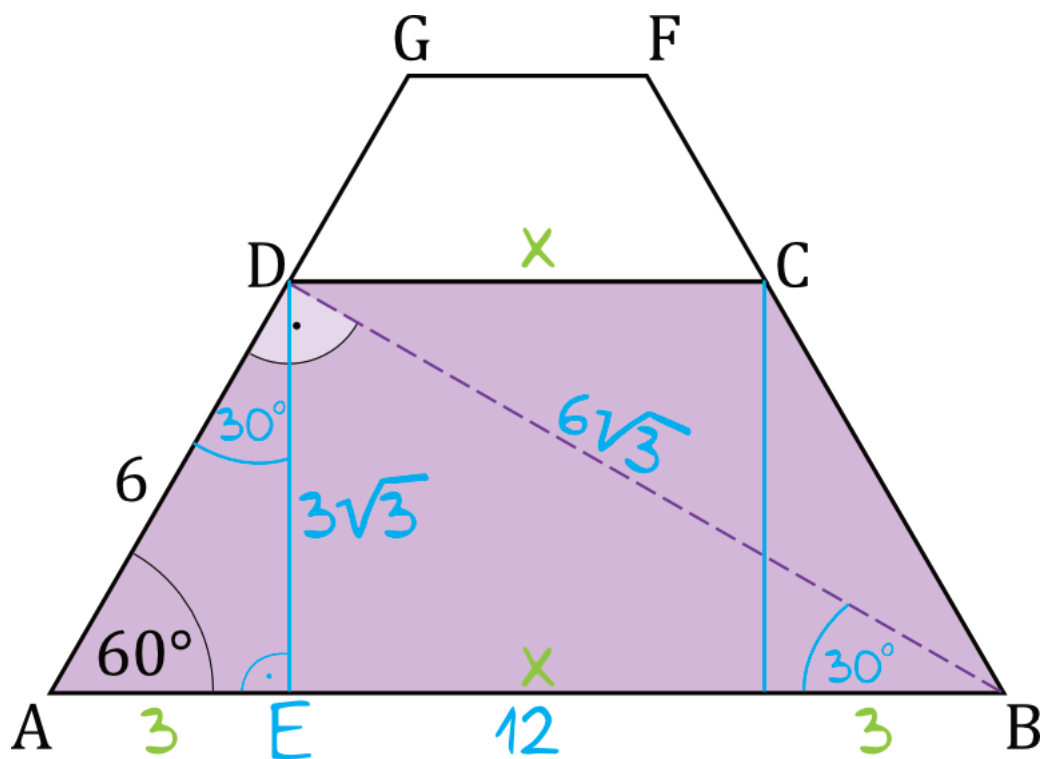
Jeżeli z wierzchołka D poprowadzimy wysokość trapezu, to otrzymamy taką oto sytuację:



Ponownie powstał nam trójkąt prostokątny o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Skoro więc $|AD| = 6$, to krótsza przyprostokątna $|AE| = 3$, a dłuższa przyprostokątna

Krok 3. Obliczenie długości górnej podstawy CD .

Skoro jest to trapez równoramienny, to obliczając długość odcinka AE otrzymaliśmy tak naprawdę taką oto sytuację:



Wiedząc, że $|AB| = 12$, możemy teraz zapisać, że:

To oznacza, że górna podstawa $|CD| = 6$.

Krok 4. Obliczenie skali podobieństwa trapezów.

Trapez $CDFG$ jest trapezem podobnym do $ABCD$. Znamy długości dolnych podstaw tych trapezów - w tym dużym $|AB| = 12$, a w tym mniejszym $|CD|$

Mówiąc bardzo obrazowo - wyszło nam, że trapez $CDFG$ ma wszystkie wymiary 2 razy mniejsze od trapezu $ABCD$.

Krok 5. Obliczenie pola powierzchni trapezu $ABCD$.

Znamy już wszystkie potrzebne dane do obliczenia pola trapezu $ABCD$, zatem:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h, \quad P_{ABCD} =$$

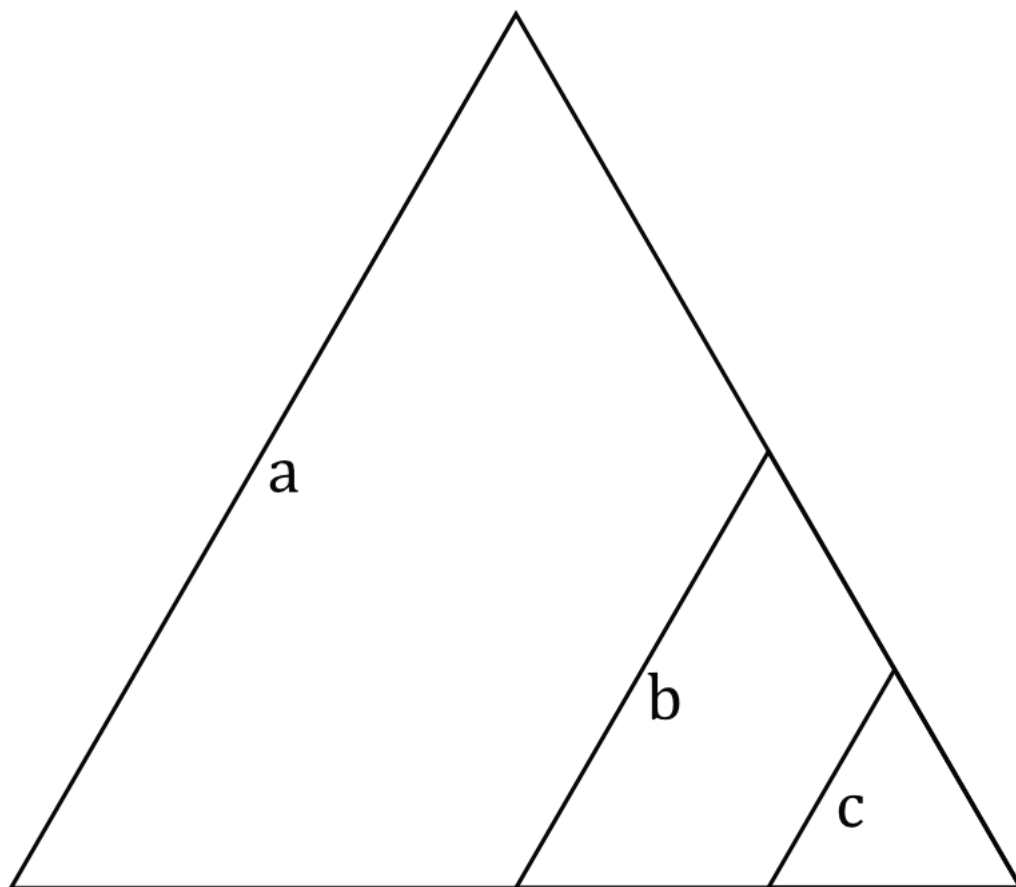
Krok 6. Obliczenie pola powierzchni trapezu $CDFG$.

Z własności figur podobnych wiemy, że jeżeli dana figura jest podobna do innej w skali podobieństwa k , to pole powierzchni tej figury będzie k^2 razy większe

$$P_{CDFG} = k^2 \cdot P_{ABCD}$$

Zadanie 44

W trójkącie równobocznym o boku długości a poprowadzono dwa odcinki równoległe do jednego z jego boków. Długości tych odcinków są równe b i c , przy

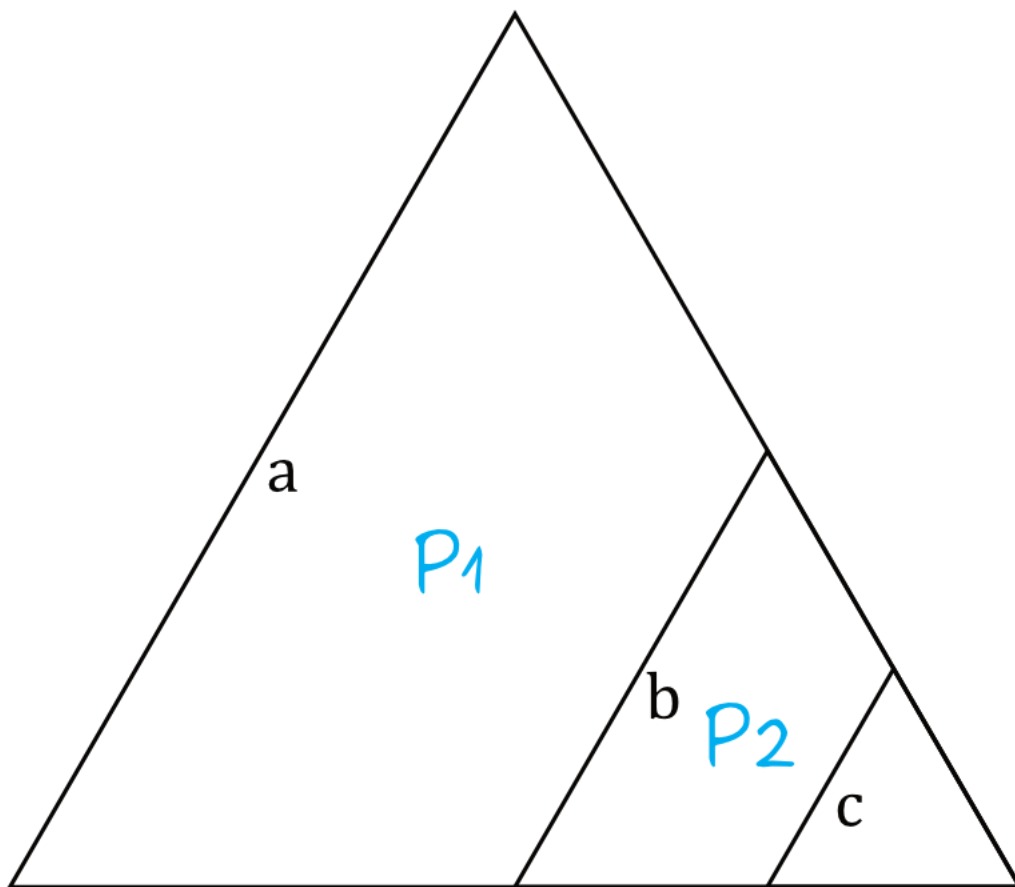


Wykaż, że stosunek pola trapezu o podstawach b i c do pola trapezu o podstawach a i b jest równy $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$.

Odpowiedź: Udowodniono, rozpisu

Krok 1. Zapisanie pól powierzchni trapezów.

Wprowadźmy oznaczenia pól powierzchni dwóch trapezów jako P_1 oraz P_2 , tak jak na rysunku:



Pole P_1 będzie różnicą między polem trójkąta równobocznego o boku a i pola trójkąta równobocznego o boku b . Korzystając zatem ze wzoru na pole trójkąt

$$P_1 = \frac{a^2}{4}$$

I analogicznie, pole trapezu P_2 to różnica między polem trójkąta równobocznego o boku b i trójkąta równobocznego o boku c , zatem:

$$P_2 = \frac{b^2}{4}$$

Krok 2. Obliczenie stosunku pól powierzchni.

Celem zadania jest wyznaczenie stosunku pola powierzchni P_2 względem P_1 , zatem:

$$\frac{P_2}{P_1} =$$

Otrzymaliśmy dokładnie taką samą postać jak w treści zadania, zatem dowodzenie możemy uznać za zakończone.

Zadanie 45

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , rozważamy dwie proste o równaniach $y = a + b \cdot x$ oraz $y = -\frac{1}{a} - \frac{2}{3}b^2 \cdot x$, gdzie $a \neq 0$,

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

Dla $a = 2$ i $b = -\frac{3}{2}$ rozważane proste są:

A.	prostopadłe,	ponieważ	1.	$a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -$
			2.	$(a + b) \left(-\frac{1}{a}\right)$
B.	równoległe,		3.	$b = -\frac{2}{3}b^2$

Odpowiedź: B., ponieważ 3.

Sporą pułapką w tym zadaniu są dość niestandardowe oznaczenia w równaniu prostej (zazwyczaj prostą zapisujemy równaniem w postaci $y = ax + b$, a tutaj

Na początek podstawmy do naszych równań dane z treści zadania, czyli $a = 2$ i $b = -\frac{3}{2}$.

I prosta:

y

II prosta:

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

Otrzymaliśmy dwie proste, które mają jednakową liczbę przed x (czyli mają jednakowy współczynnik kierunkowy a - nie mylić tego z liczbami a i b , które poje

Musimy jeszcze ustalić powód - stało się tak, ponieważ liczby stojące przed x okazały się takie same, czyli b z pierwszej prostej było równe tyle samo co $-\frac{2}{3}b^2$

Zadanie 46

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest trójkąt ABC . Wierzchołki tego trójkąta mają współrzędne: $A = (-15, -8)$, $B =$

Zadanie 1.

Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

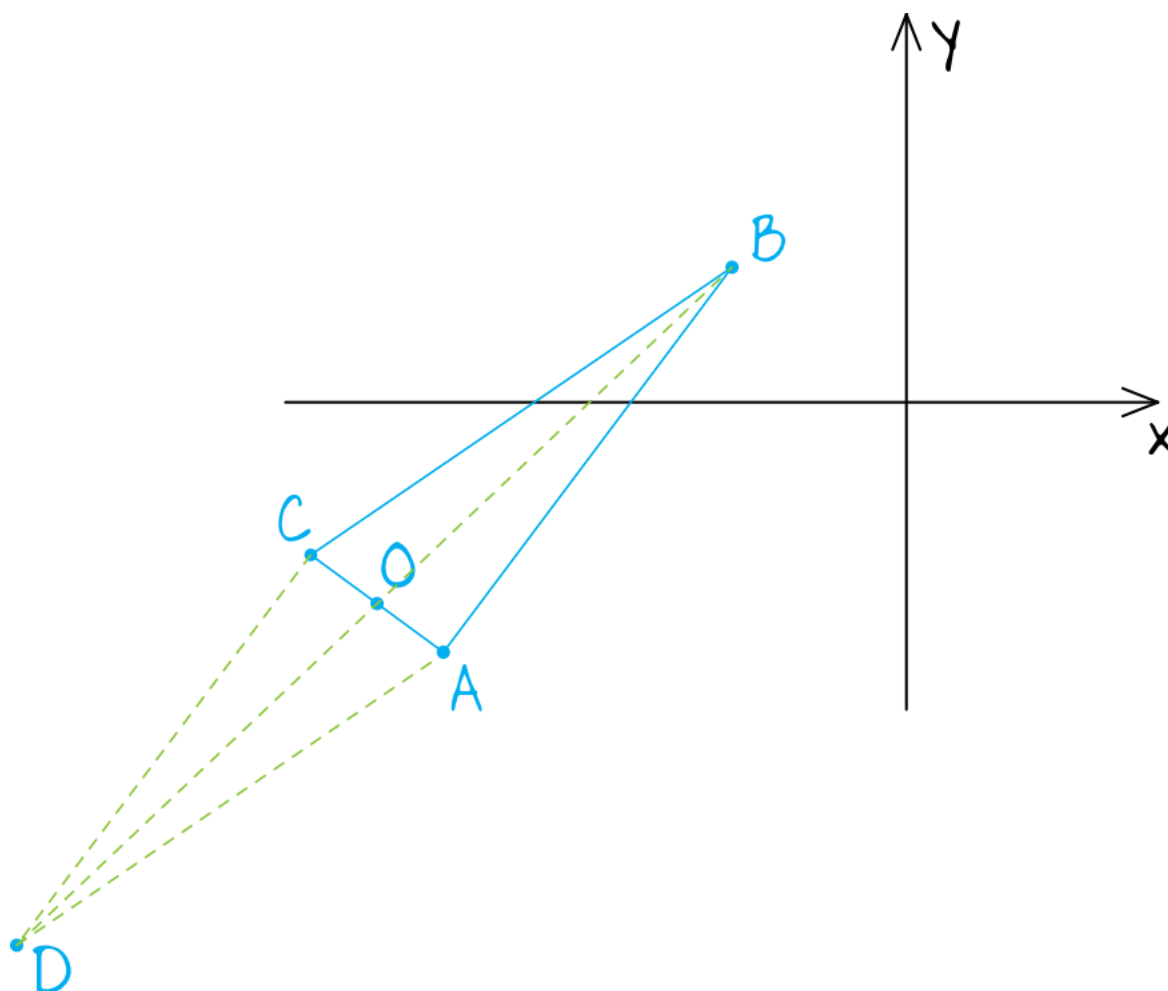
Zadanie 2.

Wierzchołki trójkąta ABC są trzema wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Odcinek AC jest przekątną tego równoległoboku. Oblicz współrzędne wierzchoł

Zadanie 3.

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie liczby w wyznaczonych miejscach, aby zdanie było prawdziwe.

Punkt S przecięcia środkowych trójkąta ABC ma współrzędne:



Odpowiedź: 1. Udowodniono korzy

Rozwiązanie 1.

Krok 1. Obliczenie długości wszystkich boków trójkąta.

W tym zadaniu skorzystamy ze wzoru na długość odcinka w układzie współrzędnych, czyli:

Spróbujmy w ten sposób obliczyć długość trzech boków tego trójkąta (podstawiając do powyższego wzoru odpowiednie dane). Zaczniemy od przyprostokątnej

$$|AB| = \sqrt{(-6 - (-15))^2 + (4 - (-8))^2}, |AC|$$

Teraz podobnie obliczymy przyprostokątną AC :

$$|AC| = \sqrt{(-19 - (-15))^2 + (-5 - (-8))^2}, |BC|$$

I na koniec została przeciwprostokątna BC :

$$|BC| = \sqrt{(-19 - (-6))^2 + (-5 - 4)^2}, |BC| = \sqrt{(-13)^2 + (-9)^2} = \sqrt{169 + 81} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$$

Krok 2. Wykazanie, że trójkąt jest prostokątny.

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to między długościami jego boków zajdzie równość znana z twierdzenia Pitagorasa, czyli $a^2 + b^2 = c^2$. Podstawmy zatem otrzy-

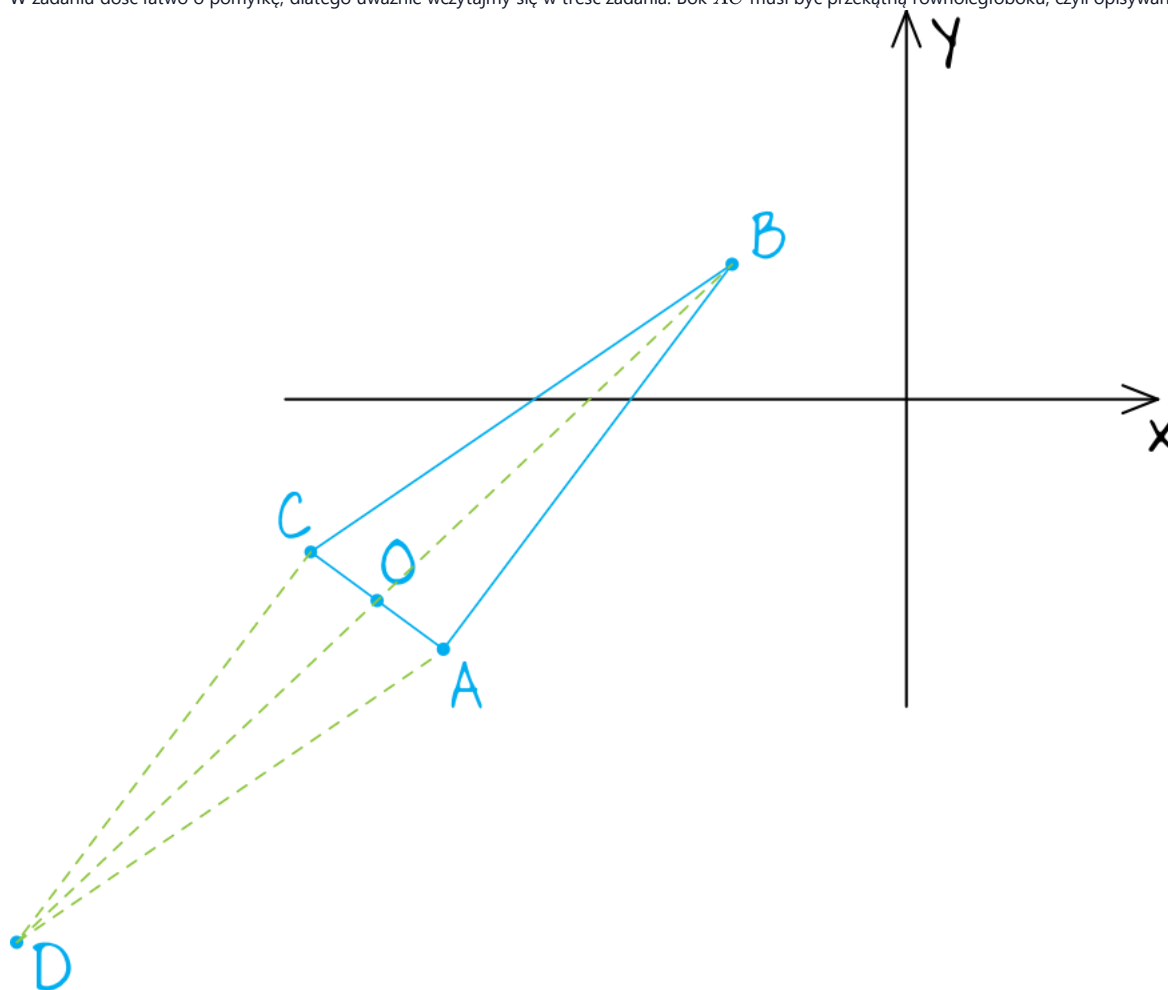
$$(\sqrt{225})^2 +$$

Skoro lewa strona jest równa stronie prawej, to faktycznie trójkąt jest prostokątny, co należało udowodnić.

Rozwiązanie 2.

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

W zadaniu dość łatwo o pomyłkę, dlatego uważnie wczytajmy się w treść zadania. Bok AC musi być przekątną równoległoboku, czyli opisywana w treści zad-



Krok 2. Wyznaczenie współrzędnych punktu O .

Kluczem do sukcesu w tym zadaniu będzie pamiętanie o tym, iż przekątne równoległoboku przecinają się w połowie swojej długości. Tym samym środek O b

Podstawiając do tego wzoru dane z treści zadania, otrzymamy:

$$O = \left(\frac{-15 + (-19)}{2}; \frac{-8 + (-1)}{2} \right)$$

Krok 3. Wyznaczenie współrzędnych punktu D .

Punkt S będzie jednocześnie środkiem odcinka BD . Ponownie więc możemy skorzystać ze wzoru na środek odcinka i tym samym obliczymy poszukiwane współrzędne:

$$x_S = \frac{x_B + x_D}{2};$$

$$y_S = \frac{y_B + y_D}{2}$$

To oznacza, że $D = (-28, -17)$.

Rozwiązanie 3.

Do obliczenia punktu S , czyli punktu przecięcia się środkowych trójkąta ABC możemy skorzystać ze wzoru zapisanego w tablicach:

Podstawiając do tego wzoru współrzędne z treści zadania, otrzymamy:

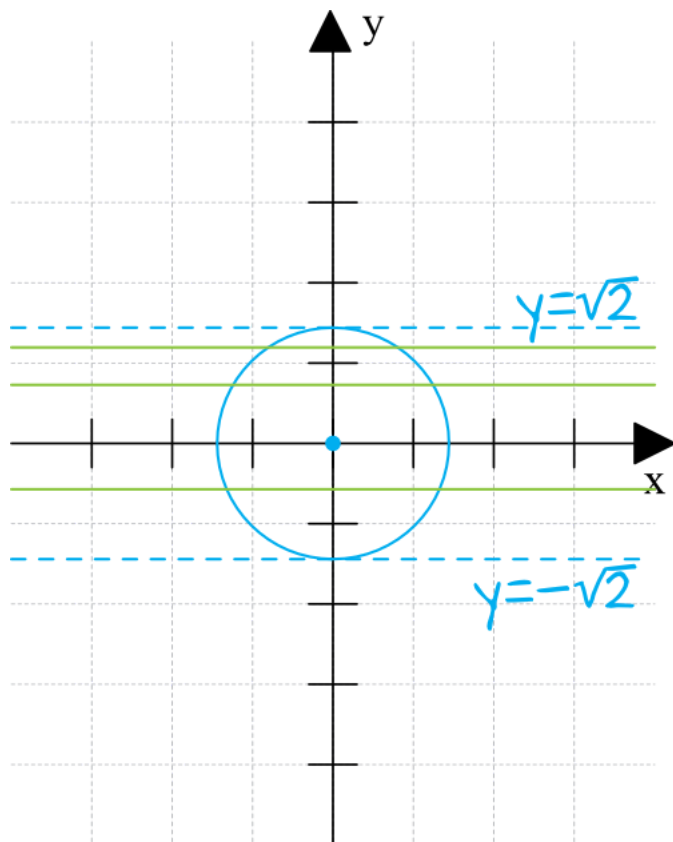
$$S = \left(\frac{-15 + (-6) + (-19)}{3}, \frac{-8 + 4 + (-1)}{3} \right)$$

Zadanie 47

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg O o równaniu $x^2 + y^2 = 2$ oraz prosta k o równaniu $y = m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiedni przedział w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Okrąg O i prosta k mają dwa punkty wspólne tylko wtedy, gdy $m \in \dots$



Odpowiedź: $(m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}))$

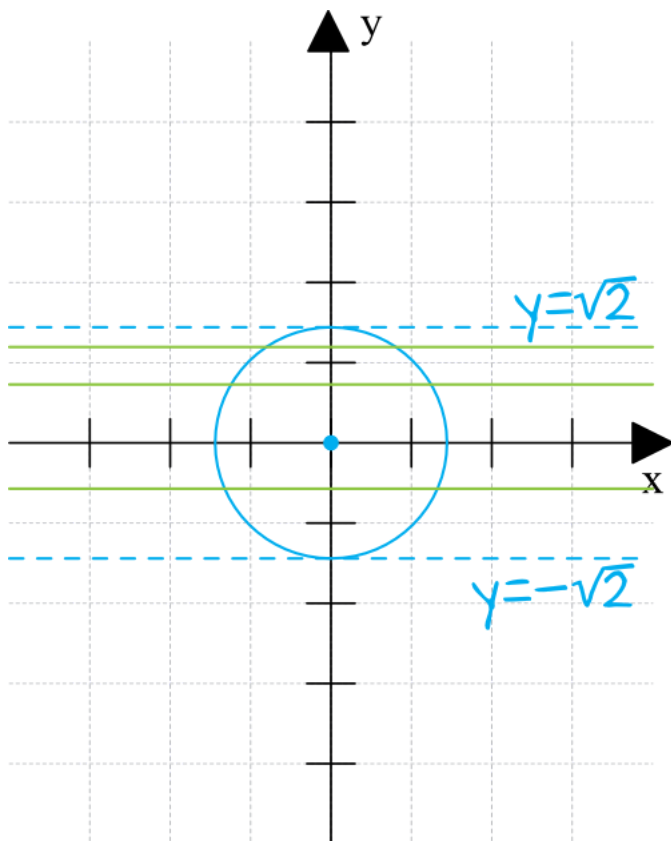
Krok 1. Odczytanie współrzędnych środka okręgu oraz długości promienia okręgu.

Równanie okręgu zapisujemy jako $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdzie a oraz b to współrzędne środka okręgu $S = (a; b)$. Z podanego w treści zadania równania

I teraz bardzo wyraźnie widać, że $a = 0$, $b = 0$ oraz $r = \sqrt{2}$, czyli $S = (0, 0)$ oraz $r = \sqrt{2}$.

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego i odczytanie punktów wspólnych.

Prosta $y = m$ to prosta, która będzie równoległa do osi Ox . Przykładowo gdy $m = 1$ to mamy prostą $y = 1$, a gdy $m = 7$, to mamy prostą $y = 7$. Musimy



Na powyższym rysunku widać kilka przykładowych zielonych linii, które przecinają okrąg w dwóch miejscach. Widzimy więc wyraźnie, że taka linia musi znajdować się między dwiema liniami niebieskimi, które są styczne do okręgu i prosta ma dwa punkty wspólne tylko wtedy, gdy $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Zadanie 48

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest trójkąt ABC . Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = -$

Odpowiedź: $P = 10$

Krok 1. Wyznaczenie współrzędnych punktu A .

Z treści zadania wynika, że wierzchołek A leży na osi Oy , co prowadzi nas do wniosku, że współrzędna x tego punktu jest równa 0. Musimy jeszcze wyznaczyć

Tym samym $A = (0, 6)$.

Krok 2. Wyznaczenie współrzędnych punktu B .

Punkt B leży na osi Ox , czyli jego współrzędna y jest równa 0. Musimy więc wyznaczyć jeszcze współrzędną x i zrobimy to dość podobnie jak w poprzednim

To oznacza, że $B = (2, 0)$.

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni trójkąta ABC .

W tym zadaniu możemy skorzystać z nietypowego wzoru na pole trójkąta, który znajduje się w tablicach maturalnych:

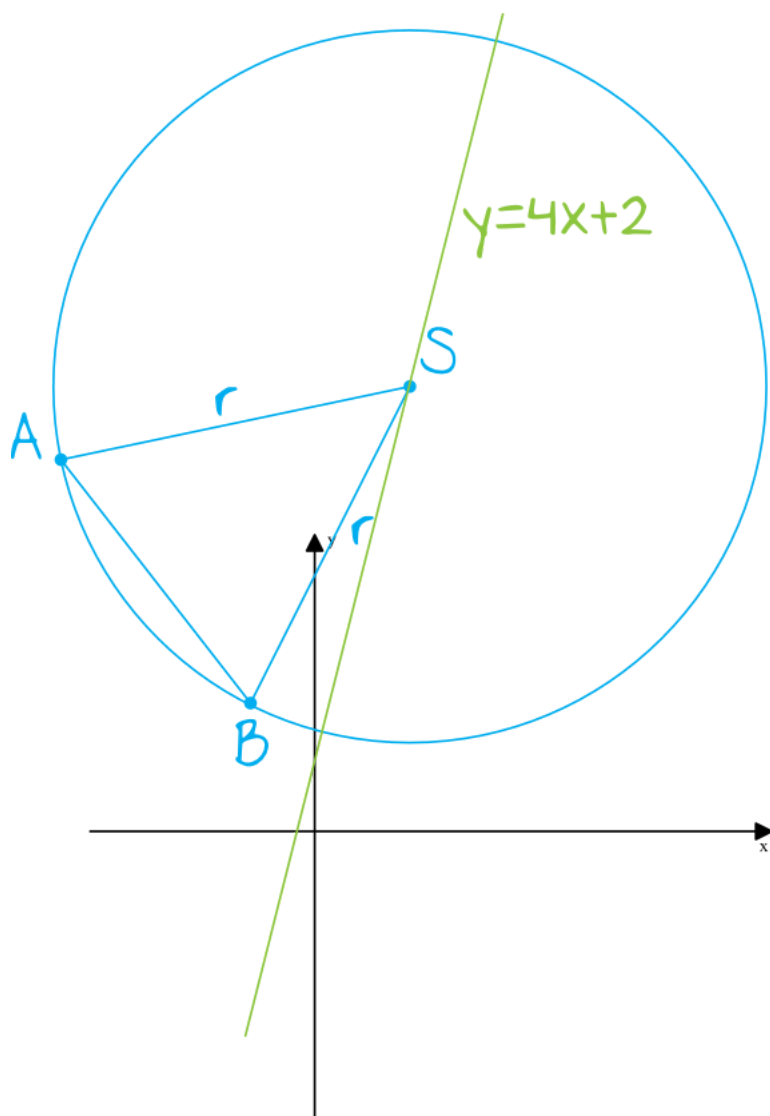
P

Znamy współrzędne wszystkich wierzchołków trójkąta, czyli $A = (0, 6)$, $B = (2, 0)$ oraz $C = (3, 7)$, zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |(2 - 0)(7 - 6) - (0 - 6)|$$

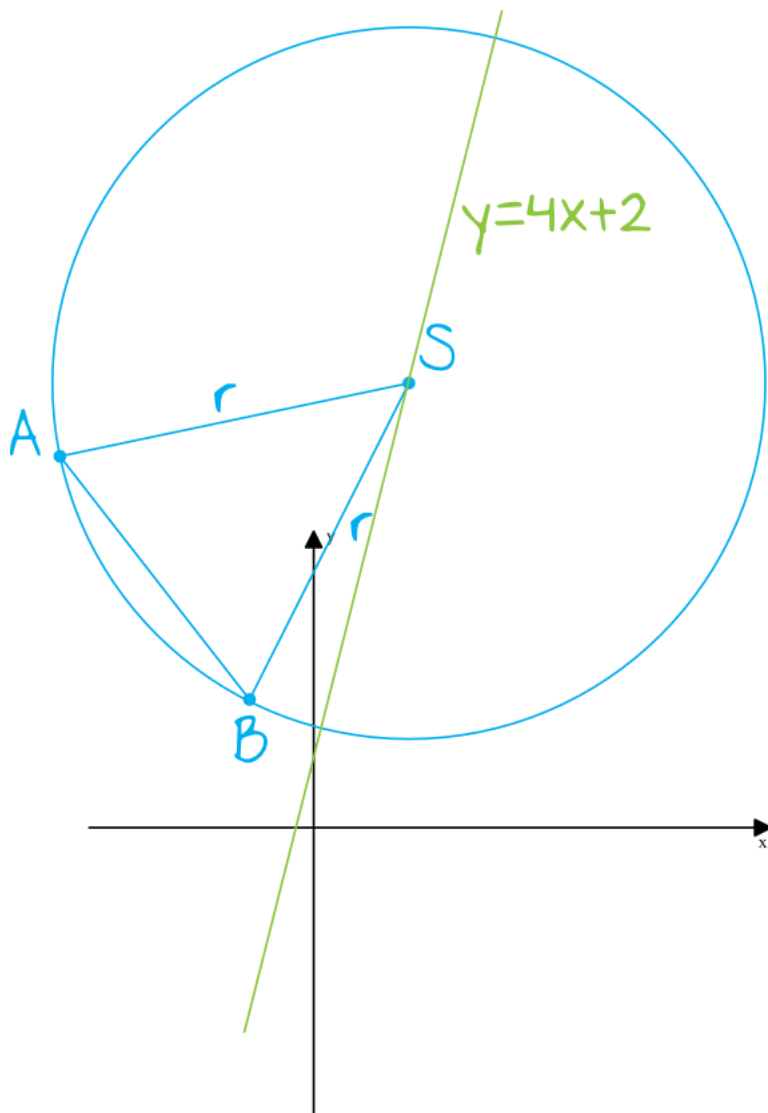
Zadanie 49

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (-8, 12)$ i $B = (-2, 4)$ są końcami cięciwy okręgu O . Środek tego okręgu leży na prostej k o



Odpowiedź: $S = (3, 14)$ oraz \(\)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.
Sytuacja z treści zadania wygląda następująco:



Powinniśmy dostrzec, że punkty A , B oraz S tworzą trójkąt równoramienny, w którym ramiona mają długość promienia okręgu i właśnie to będzie kluczem

Krok 2. Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu.

Odcinek AS ma taką samą długość jak odcinek BS . Korzystając z tej informacji oraz ze wzoru na długość odcinka, moglibyśmy zapisać, że:

$$|AS| = |BS|$$

Punkt S leży na prostej o równaniu $y = 4x + 2$, więc moglibyśmy zapisać, że $x_S = x$ oraz $y_S = 4x + 2$. Podstawiając teraz te dane oraz współrzędne $A =$

$$\sqrt{(x - (-8))^2 + (4x + 2 - 12)^2} = \sqrt{(x - (-2))^2 + (4x + 2 - 4)^2}, \sqrt{(x + 8)^2 + (4x - 10)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (4x - 2)^2} \quad \Bigg/ ^2, (x + 8)^2 + (4x -$$

To oznacza, że współrzędna x punktu S jest równa 3. Podstawiając teraz wyznaczone $x = 3$ do równania $y = 4x + 2$, wyznaczymy brakującą współrzędną y

To oznacza, że $S = (3, 14)$.

Krok 3. Obliczenie długości promienia.

Na koniec został nam jeszcze do policzenia promień tego okręgu. Jego długość będzie równa długości odcinka AS , zatem podstawiając dane do wzoru na dl

$$r = \sqrt{(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2}, r = \sqrt{($$

Zadanie 50

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Funkcja liniowa g określona jest wzorem $g(x) = -x + 5$. Oblicz współrzędne punktów

Odpowiedź: $(2; 3)$ oraz $(1; 4)$

Krok 1. Ułożenie i rozwiązanie układu równań.

Z geometrycznej interpretacji układu równań wiemy, że chcąc poznać współrzędne punktów przecięcia się wykresów, wystarczy rozwiązać następujący układ

Korzystając z metody podstawiania, otrzymamy:

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Powstało nam równanie kwadratowe, które musimy teraz rozwiązać.

Współczynniki: $a = -1$, $b = 3$, $c = -2$

$$\Delta = b^2 -$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} :$$

Krok 3. Wyznaczenie współrzędnych punktów przecięcia się wykresów funkcji.

Otrzymaliśmy dwie różne współrzędne x i jest to sytuacja jak najbardziej poprawna, ponieważ te dwa wykresy przeczną się w dwóch miejscach. Obliczmy teraz

Gdy $x = 2$, to:

$$y = -2 + 5, y = 3$$

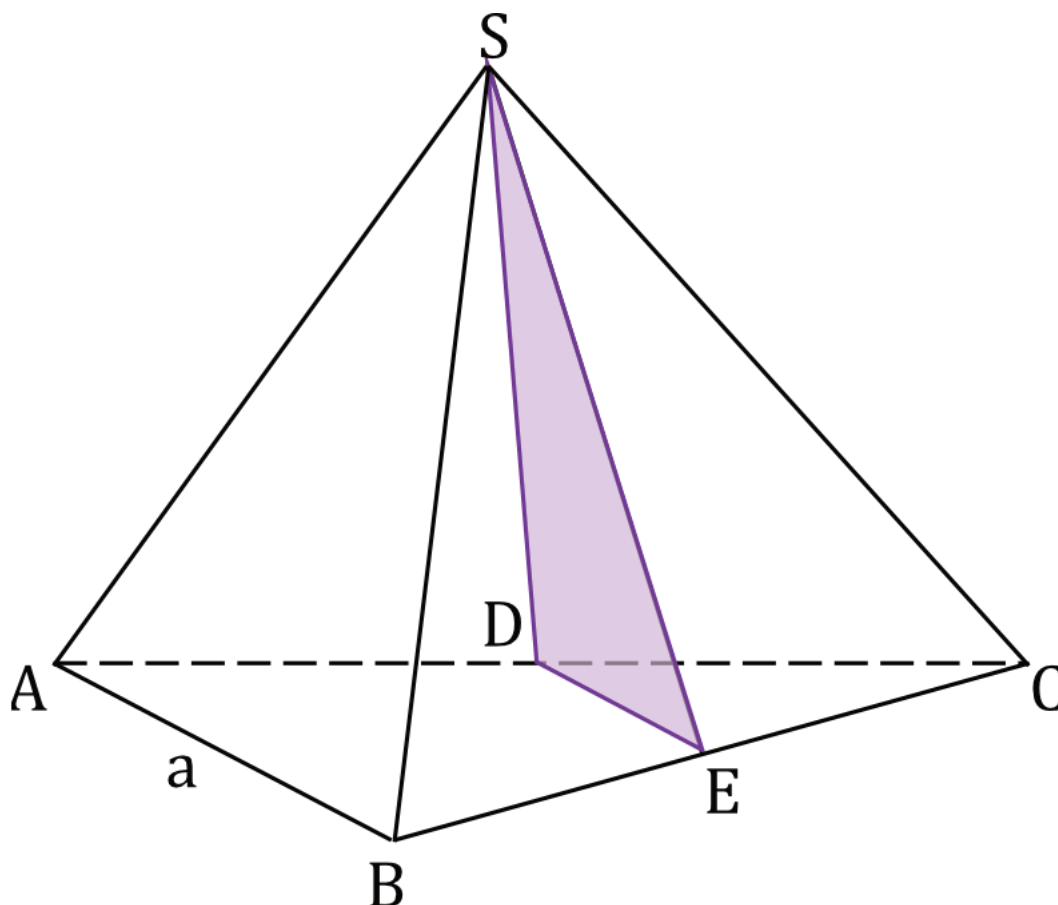
Gdy $x = 1$, to:

$$y = -1 + 5, y = 4$$

To oznacza, że te wykresy przecinają się w punktach $(2; 3)$ oraz $(1; 4)$.

Zadanie 51

Każda krawędź czworoscianu $ABCS$ ma długość a . Punkty D i E są środkami boków – odpowiednio – AC oraz BC (zobacz rysunek).



Oblicz pole trójkąta DES .

Odpowiedź: $(P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4})$

Krok 1. Wyznaczenie długości boków trójkąta DES .

Spójrzmy na trójkąt ECD . Z treści zadania wynika, że będzie miał on ramiona EC oraz DC jednakowej długości, równej $\frac{1}{2}a$. Dodatkowo wiemy, że kąt przy

Boki DS oraz ES są wysokościami trójkątów równobocznych, które znalazły się w ścianach bocznych. Wysokość takich trójkątów opisujemy wzorem $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni trójkąta DES .

W tym zadaniu skorzystamy z dość niecodziennego wzoru na pole trójkąta, który znajduje się w tablicach:

Do tego wzoru musimy podstawić długości boków a , b oraz c , a także wartość p , czyli połowę długości obwodu trójkąta. Obliczmy ją zatem oddzielnie:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$$

Teraz moglibyśmy od razu podstawić wszystkie znane dane do treści zadania, ale liczby są tutaj dość mocno rozbudowane, więc dość dobrym pomysłem byłoby

$$p - a = \frac{a+2a\sqrt{3}}{4} - \frac{a}{2} = \frac{a+2a\sqrt{3}}{4} - \frac{2a}{4} = \frac{2a\sqrt{3}-a}{4}$$

$$p - b = \frac{a+2a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a+2a\sqrt{3}}{4} - \frac{2a\sqrt{3}}{4} = \frac{a}{4}$$

$$p - c = \frac{a+2a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a+2a\sqrt{3}}{4} - \frac{2a\sqrt{3}}{4} = \frac{a}{4}$$

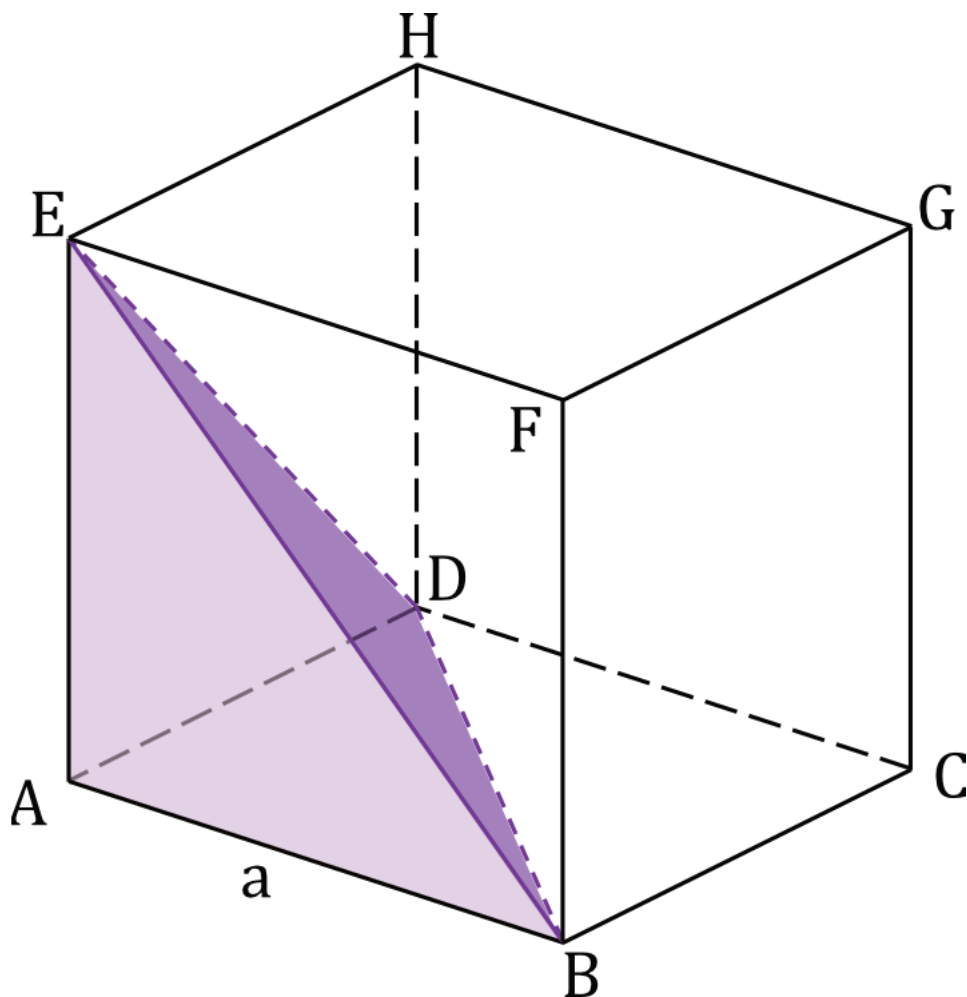
Teraz podstawiając te różnice do wzoru na pole trójkąta, otrzymamy:

Teraz dobrze byłoby zauważyć, że przy mnożeniu dwóch pierwszych wyrażeń będziemy mogli zastosować wzór skróconego mnożenia $(a + b)(a - b) = a^2 -$

$$P = \sqrt{\frac{2a\sqrt{3} + a}{4} \cdot \frac{2a\sqrt{3} - a}{4} \cdot \frac{a^2}{16}}, P = \sqrt{\frac{4}{-}}$$

Zadanie 52

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a . Punkty A, B, D i E są wierzchołkami ostrosłupa (zobacz rysunek).



Oblicz pole powierzchni ostrosłupa $ABDE$.

Odpowiedź: $(P_c) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$

Krok 1. Obliczenie pól powierzchni poszczególnych ścian ostrosłupa.

Na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $ABDE$ składają się trzy trójkąty prostokątne ABD , ABE oraz ADE , a także trójkąt równoboczny BDE . Oblicz

Trójkąty prostokątne mają przyprostokątne o długości a , czyli ich pole powierzchni będzie równe:

Trójkąt równoboczny ma bok o długości przekątnej podstawy. W podstawie sześcianu mamy oczywiście kwadrat, a z własności kwadratów wiemy, że kwadrat

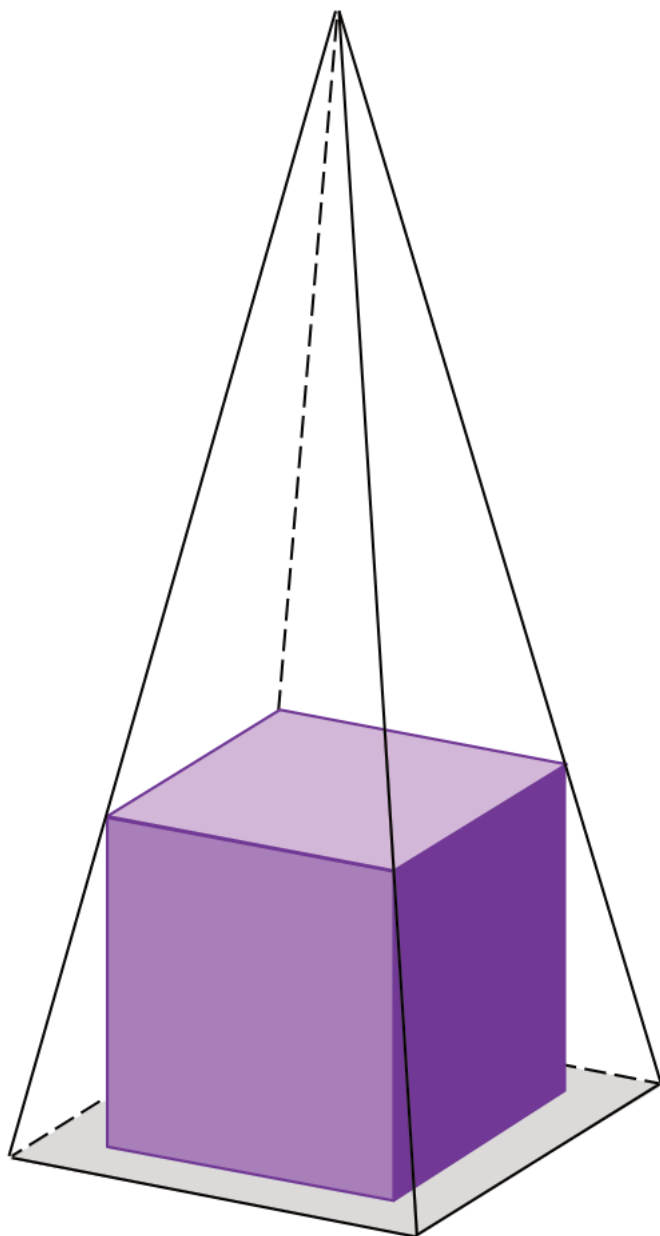
$$P_{BDE} =$$

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni ostrosłupa.

$$P_c = 3 \cdot \frac{1}{2} a^2 + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

Zadanie 53

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 2 i wysokości 8. Wpisano w niego sześcian w taki sposób, że dolna podstawa sześcianu za



Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Krawędź sześcianu jest dłuższa niż 1, 5. Ostrosłup jest czterokrotnie wyższy od sześcianu. Objętość sześcianu jest większa od 4.

Krawędź sześcianu jest dłuższa niż 1, 5.

Prawda

Fałsz

Ostrosłup jest czterokrotnie wyższy od sześcianu.

Prawda

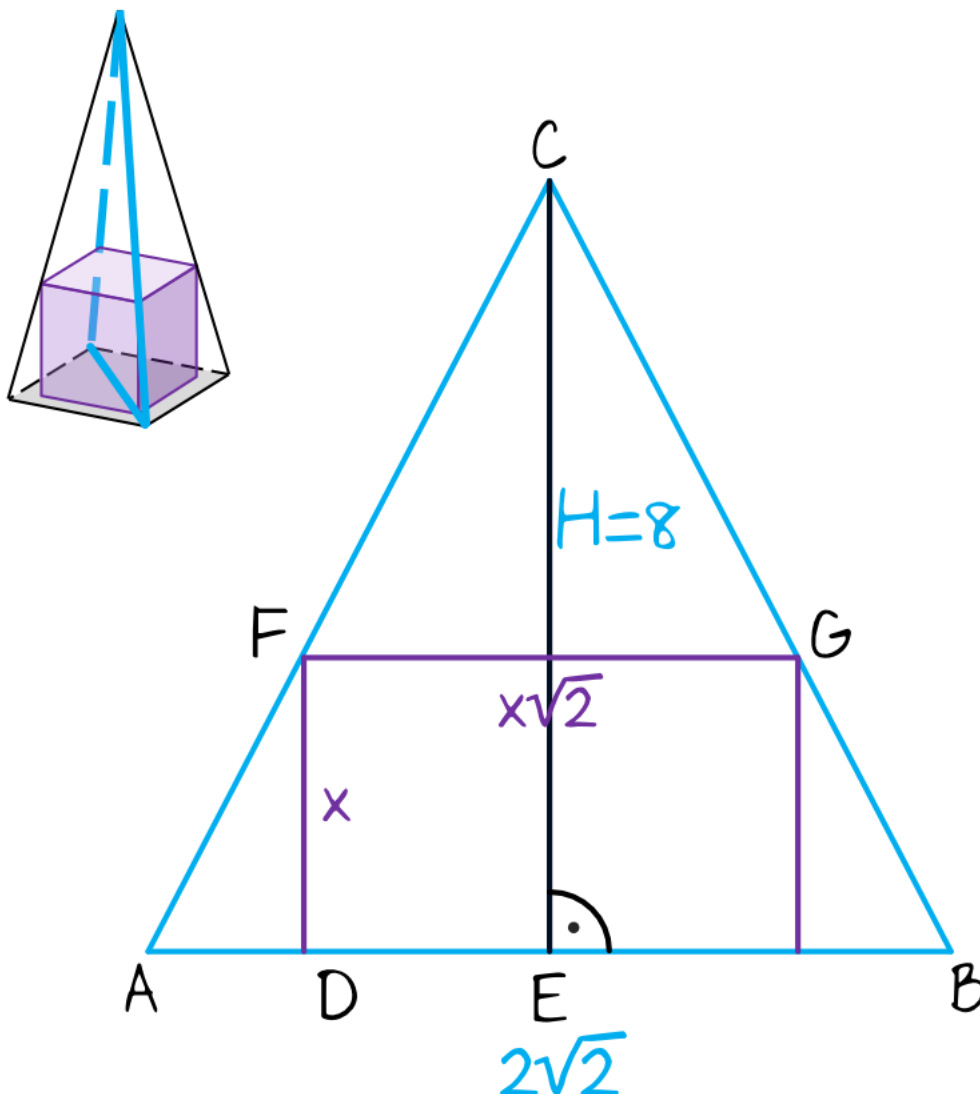
Fałsz

Objętość sześcianu jest większa od 4.

Prawda

Fałsz

Zadanie jest bardzo trudne i trzeba tutaj wykonać dość skomplikowany rysunek pomocniczy. Całość zadania opierać się będzie na przekątnej podstawy. Ostrzo sytuacja:



Powinniśmy zauważyć, że na rysunku powstały nam dwa trójkąty podobne, czyli ADF oraz AEC . Skoro tak, to moglibyśmy zapisać, że:

Teraz najprościej będzie pomnożyć wszystko na krzyż, zatem:

$$(\sqrt{2} - \frac{1}{2}x\sqrt{2}) \cdot 8 = \sqrt{2}$$

Zgodnie z obliczeniami wyszło nam, że długość krawędzi sześcianu jest równa 1, 6, zatem zdanie jest prawdą.

Krok 4. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

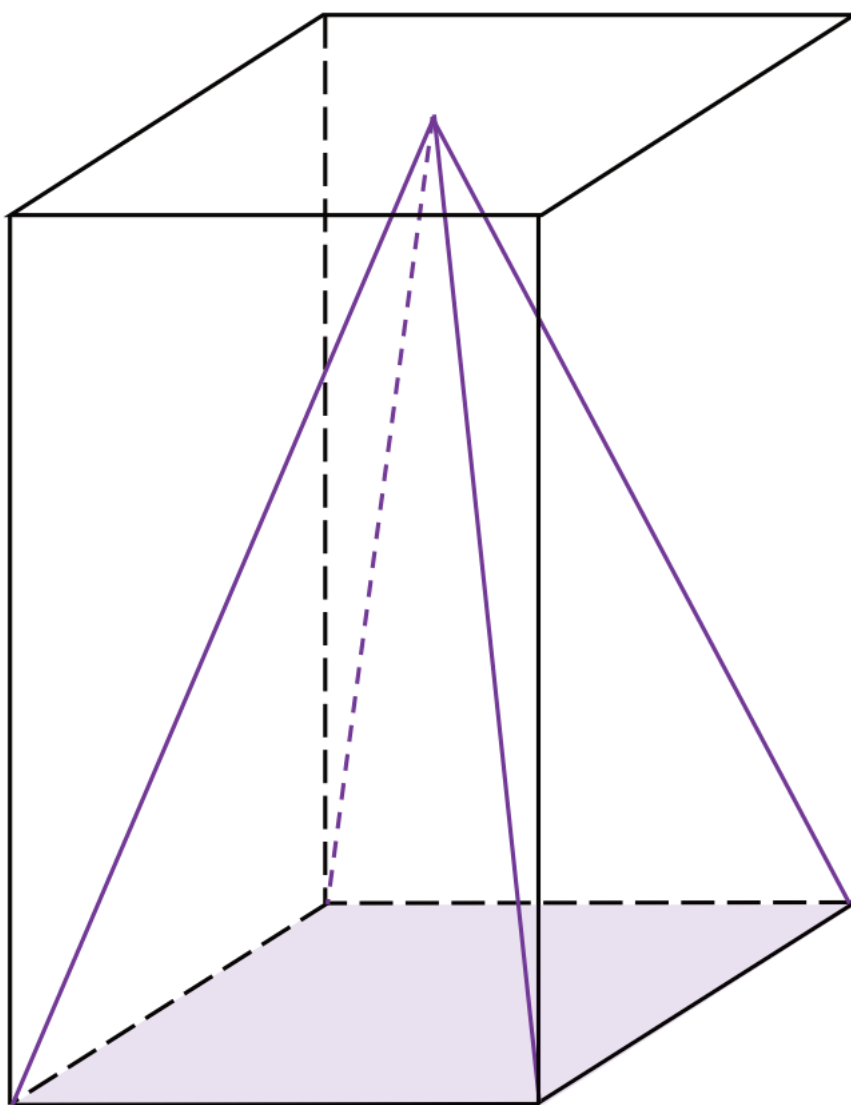
Ostrosłup ma wysokość równą 8, a sześcian wysokość równą 1, 6. Ostrosłup jest więc $\frac{8}{1,6} = 5$ razy wyższy od sześcianu, zatem zdanie jest fałszem.

Krok 5. Ocena prawdziwości trzeciego zdania.

Objętość sześcianu o boku $a = 1,6$ wynosi:

Objętość jest więc faktycznie większa od 4, zatem zdanie jest prawdą.

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, o krawędzi podstawy a oraz wysokości h . Wpisano w niego ostrosłup prawidłowy czworokątny w taki sposób, że wycięciu ostrosłupa z graniastosłupa.



Różnica objętości bryły F i objętości ostrosłupa jest równa:

Odpowiedź: A ($\frac{1}{3}a^2h$)

Krok 1. Obliczenie objętości graniastosłupa.

Nasz graniastosłup jest prawidłowy, czyli w swojej podstawie będzie miał on kwadrat. Skoro tak, to zgodnie z oznaczeniami z treści zadania, możemy zapisać

Krok 2. Obliczenie objętości ostrosłupa.

Teraz obliczmy objętość ostrosłupa. Tutaj sytuacja będzie bardzo podobna, wystarczy tak naprawdę tylko skorzystać ze wzoru na objętość ostrosłupów, za

Krok 3. Obliczenie objętości bryły F .

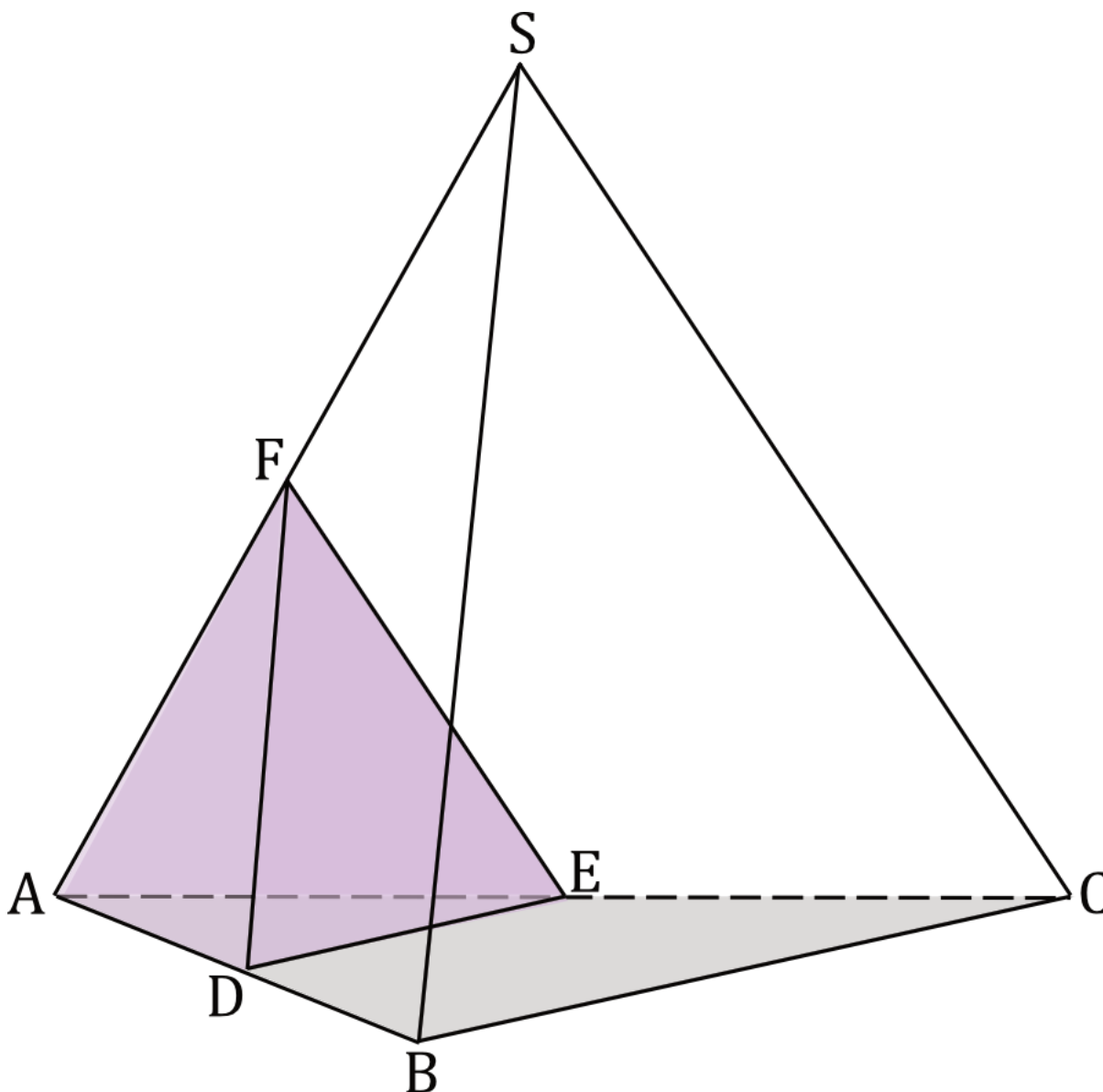
Trzeba uważnie wczytać się w treść zadania, bo łatwo tutaj o pomyłkę. Bryła F to ta część graniastopu z której wyjmiemy nasz ostrosłup. Jej objętość b

Krok 4. Obliczenie różnicy objętości bryły F i objętości ostrosłupa.

Celem zadania jest odpowiedź o ile bryła F ma większą objętość od ostrosłupa. W związku z tym:

Zadanie 55

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ zaznaczono środki krawędzi AB , AC i AS odpowiednio punktami D , E , F (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Pole powierzchni ostrosłupa $ADEF$ jest Objętość ostrosłupa $ADEF$ jest ośmiokrotnie mniejsza od objętości ostrosłupa $ABCS$.

Pole powierzchni ostrosłupa $ADEF$ jest dwukrotnie mniejsze od pola powierzchni ostrosłupa $ABCS$.

Prawda

Fałsz

Objętość ostrosłupa $ADEF$ jest ośmiokrotnie mniejsza od objętości ostrosłupa $ABCS$.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Dostrzeżenie brył podobnych i obliczenie skali podobieństwa.

Ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy, czyli w swojej podstawie ma on trójkąt równoboczny. Przyjmijmy, że krawędź podstawy będzie tutaj równa a , natomiast podstawy jest równa $\frac{1}{2}a$, a wysokość $\frac{1}{2}h$. To prowadzi nas do wniosku, że te bryły są podobne. Jeżeli więc przyjmijmy, że duży ostrosłup jest bryłą podst

Krok 2. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Skala podobieństwa $k = \frac{1}{2}$ oznacza, że tak naprawdę każda krawędź małego ostrosłupa jest dwa razy mniejsza od krawędzi dużego ostrosłupa. Z własno:

To oznacza, że pole powierzchni ostrosłupa $ADEF$ będzie czterokrotnie mniejsze od pola powierzchni dużego ostrosłupa, więc zdanie jest fałszem.

Krok 3. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Jeżeli dwie figury są względem siebie podobne w skali k to objętość bryły podobnej stanowi k^3 objętości bryły podstawowej. W związku z tym:

To oznacza, że objętość ostrosłupa $ADEF$ jest ośmiokrotnie mniejsza od objętości dużego ostrosłupa, więc zdanie jest prawdą.

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, w zapisie których cyfra 5 występuje dokładnie jeden raz, jest:

Odpowiedź: B (225)

Krok 1. Obliczenie liczby możliwych kombinacji w każdym z wariantów.

Chcemy, by w zapisie naszej liczby pojawiła się tylko raz cyfra 5. Może ona się pojawić na miejscu setek, dziesiątek lub jedności, dlatego każdy z takich w

I możliwość to $5 \square \square$, czyli 5 jako cyfra setek.

W takiej sytuacji:

- Cyfra dziesiątek - tutaj możemy mieć każdą z cyfr od 0 do 9, oprócz 5 (bo ma być tylko jedna piątka w liczbie), zatem mamy tutaj 9 możliwości
- Cyfra jedności - tutaj możemy mieć każdą z cyfr od 0 do 9, oprócz 5 (bo ma być tylko jedna piątka w liczbie), zatem mamy tutaj 9 możliwości

Zgodnie z regułą mnożenia takich liczb będziemy mieć $9 \cdot 9 = 81$

II możliwość to $\square 5 \square$, czyli 5 jako cyfra dziesiątek.

W takiej sytuacji:

- Cyfra setek - tutaj możemy mieć każdą z cyfr od 1 do 9, oprócz 5 (bo ma być tylko jedna piątka w liczbie), zatem mamy tutaj 8 możliwości
- Cyfra jedności - tutaj możemy mieć każdą z cyfr od 0 do 9, oprócz 5 (bo ma być tylko jedna piątka w liczbie), zatem mamy tutaj 9 możliwości

Zgodnie z regułą mnożenia takich liczb będziemy mieć $8 \cdot 9 = 72$

III możliwość to $\square \square 5$, czyli 5 jako cyfra jedności.

W takiej sytuacji:

- Cyfra setek - tutaj możemy mieć każdą z cyfr od 1 do 9, oprócz 5 (bo ma być tylko jedna piątka w liczbie), zatem mamy tutaj 8 możliwości
- Cyfra dziesiątek - tutaj możemy mieć każdą z cyfr od 0 do 9, oprócz 5 (bo ma być tylko jedna piątka w liczbie), zatem mamy tutaj 9 możliwości

Zgodnie z regułą mnożenia takich liczb będziemy mieć $8 \cdot 9 = 72$

Krok 2. Obliczenie liczby wszystkich możliwych kombinacji.

Teraz musimy skorzystać z reguły dodawania, czyli dodać wszystkie pasujące kombinacje, zatem:

Zadanie 57

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych o sumie cyfr równej 3 jest:

Odpowiedź: C (6)

Spróbujmy wpisać wszystkie interesujące nas liczby, bo wbrew pozorom nie będzie ich aż tak dużo. Zwróć uwagę, że w grę wchodzi jedynie liczby skład

To oznacza, że jest tylko 6 takich liczb.

Zadanie 58

Na dwóch półkach ustawiano 9 książek: 4 biograficzne i 5 fantasy. Ustawiono je w taki sposób, aby na każdej półce znalazły się książki wyłącznie jednego

Wszystkich sposobów ustawienia książek przy zadanym warunku jest:

Odpowiedź: A ($4! \cdot 5! \cdot 2$)

Książki biograficzne możemy ustawić na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sposobów, czyli na $4!$ sposobów.

Książki fantasy możemy ustawić na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sposobów, czyli na $5!$ sposobów.

Dodatkowo możemy ustawić na pierwszej półce książki biograficzne, a na drugiej fantasy i na odwrót, czyli tutaj mamy 2 możliwości ustawienia gatunków

To oznacza, że zgodnie z regułą mnożenia, wszystkich możliwych ustawień będziemy mieć:

Zadanie 59

Firma krawiecka produkuje prostokątne dwukolorowe obrusy w jednakowym rozmiarze. Każdy obrus jest zszyty z trzech pasów materiału tej samej szerokości. Obrusy uznajemy za różne, gdy różnią się kolorem lamówki lub kolorem pasów zewnętrznych, lub kolorem pasa wewnętrznego.



Liczba wszystkich różnych obrusów, które firma może produkować, jest równa:

Odpowiedź: A ($5 \cdot 4 \cdot 3$)

Przeanalizujmy, ile różnych kolorów może się pojawić na każdej z części obrusa:

- Zewnętrzny pas możemy uszyć na 5 różnych kolorów, stąd też mamy tutaj 5 możliwości.
- Wewnętrzny pas możemy uszyć na 4 różne kolory (bez tego, który jest użyty na zewnątrz), więc mamy tutaj 4 możliwości.
- Lamówki możemy uszyć na 3 różne kolory, stąd też mamy tutaj 3 możliwości.

To oznacza, że zgodnie z regułą mnożenia, wszystkich pasujących kombinacji obrusów będziemy mieć:

Zadanie 60

Do dyspozycji są dwa puste pojemniki oraz pięć kul. Każdą z kul należy umieścić w pojemniku. Liczba wszystkich różnych rozmieszczeń tych kul zależy od

Uzupełnij tabelę. Wpisz w każdą pustą komórkę tabeli właściwą odpowiedź wybraną spośród A–F.

A. 6

B. $2 \cdot 5$

C. 2^4

D. 3

E. 2^5

F. 5^2

Cechy kul i pojemników	Liczba wszy k
Kule rozróżnialne, pojemniki rozróżnialne	
Kule rozróżnialne, pojemniki nierozróżnialne	
Kule nierozróżnialne, pojemniki rozróżnialne	
Kule nierozróżnialne, pojemniki nierozróżnialne	

Odpowiedź: 1. E 2. C 3. A 4.

I przypadek: Kule rozróżnialne, pojemniki rozróżnialne

Jeżeli kule są rozróżnialne (czyli np. każda ma inny kolor) i pojemniki są także rozróżnialne (np. mniejszy i większy), to będziemy mieć taką sytuację:

- Pierwsza kula może trafić do jednego z dwóch pojemników, czyli mamy 2 możliwości
- Druga kula może trafić do jednego z dwóch pojemników, czyli mamy 2 możliwości
- Trzecia kula może trafić do jednego z dwóch pojemników, czyli mamy 2 możliwości
- Czwarta kula może trafić do jednego z dwóch pojemników, czyli mamy 2 możliwości
- Piąta kula może trafić do jednego z dwóch pojemników, czyli mamy 2 możliwości

To oznacza, że zgodnie z regułą mnożenia wszystkich przypadków będziemy mieć:

II przypadek: Kule rozróżnialne, pojemniki nierozróżnialne

Jeżeli kule są rozróżnialne (czyli np. każda ma inny kolor), a pojemniki są nierozróżnialne (czyli są identyczne i nie ma znaczenia czy kula trafia do pierwszego pojemnika oraz żółta i czerwona kula w drugim pojemniku, to były dwa zupełnie różne zdarzenia. Tutaj będą to zdarzenia jednakowe, bo poj

III przypadek: Kule nierozróżnialne, pojemniki rozróżnialne

Jeżeli kule są nierozróżnialne (czyli są identyczne i nie ma znaczenia która to konkretnie kula), a pojemniki są rozróżnialne, to całość zadania sprowadza się więc następujące możliwości:

To oznacza, że wszystkich różnych rozmieszczeń mamy dokładnie 6.

IV przypadek: Kule nierozróżnialne, pojemniki nierozróżnialne

I tu podobnie jak w drugim przypadku, skoro pojemniki są nierozróżnialne, to liczba kombinacji będzie 2 razy mniejsza niż przy pojemnikach rozróżnialnych. Takim razem wszystkich różnych rozmieszczeń będziemy mieć tutaj $6 : 2 = 3$.

Zadanie 61

Średnia arytmetyczna wieku czterech kobiet jest równa 24 lata. Średnia arytmetyczna wieku sześciu mężczyzn jest równa 26 lat. Średnia arytmetyczna w

Odpowiedź: B (25, 2)

Skoro średnia wieku czterech kobiet wynosi 24, to łącznie te kobiety mają $4 \cdot 24 = 96$ lat. Analogicznie, skoro średnia wieku sześciu mężczyzn jest równa

Średnia arytmetyczna wieku tych dziesięciu osób będzie zatem równa:

Zadanie 62

Mediana zestawu sześciu liczb 1, 2, 3, 4, 5, $2x$ jest równa 3. Liczba x jest równa:

Odpowiedź: B (1, 5)

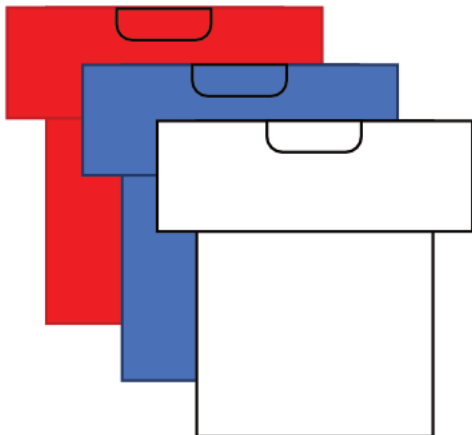
Mamy parzystą liczbę wyrazów, zatem jeśli uporządkujemy liczby w ciągu niemalejącym (czyli od najmniejszej do największej), to mediana będzie średnią

Średnią arytmetyczną będziemy wyliczać z wartości trzeciej i czwartej liczby uporządkowanego zestawu. Jak się dobrze przyjrzymy, to zauważymy, że me

Zadanie 63

Marek ma 3 koszulki w kolorach czerwonym, niebieskim i białym. Darek ma 5 koszulek w kolorach czerwonym, białym, zielonym, żółtym i szarym. Chłopcy

Koszulki Marka



Kosz



Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że następnego dnia chłopcy założą koszulki w tym samym kolorze, jest równe:

Odpowiedź: A ($\frac{2}{15}$)

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Skoro Marek ma 3 koszulki, a Darek 5 koszulek, to zgodnie z regułą mnożenia, wszystkich zdarzeń elementarnych będziemy mieć $|\Omega| = 3 \cdot 5 = 15$.

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

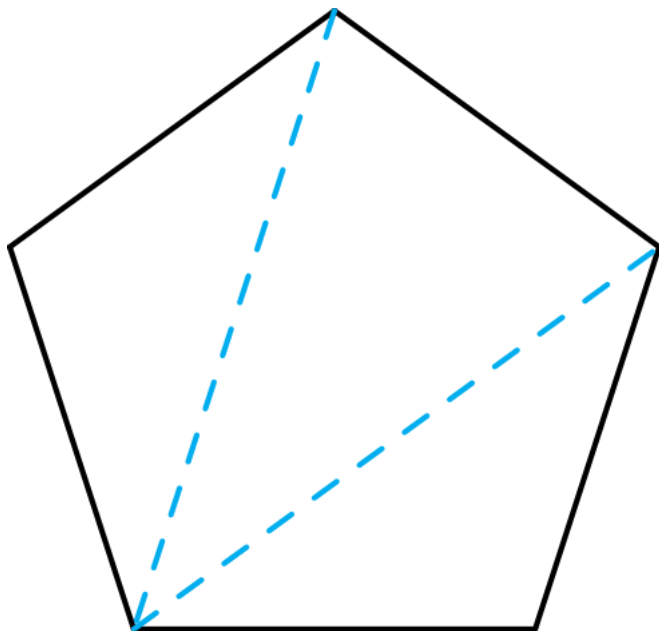
Zdarzeniem sprzyjającym jest sytuacja w której będziemy mieć dwie koszulki tego samego koloru. Widzimy, że powtórzyć może się tutaj jedynie kolor cz

To oznacza, że $|A| = 2$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Zadanie 64

Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$. Losujemy jednocześnie dwa różne wierzchołki tego pięciokąta. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na



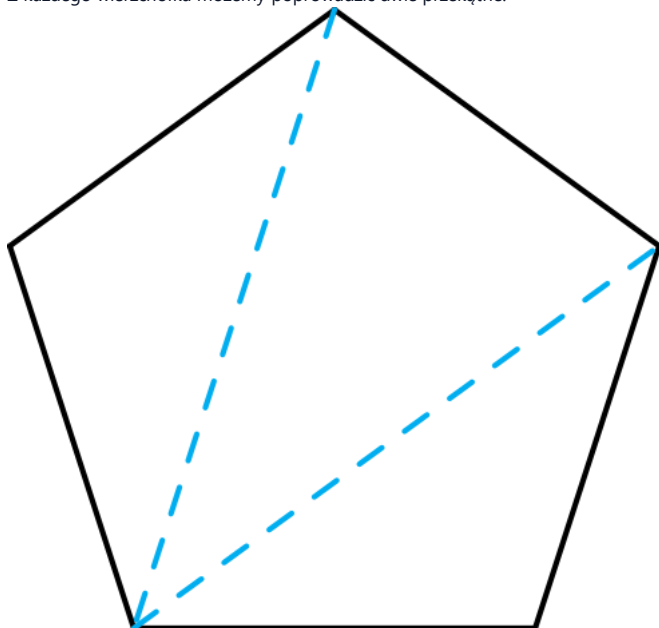
Odpowiedź: D ($\frac{1}{2}$)

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Najpierw losujemy jeden z pięciu wierzchołków, a potem losujemy kolejny, z czterech dostępnych. To oznacza, że zgodnie z regułą mnożenia, wszystkich

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Z każdego wierzchołka możemy poprowadzić dwie przekątne:



Skoro mamy pięć wierzchołków, a z każdego możemy poprowadzić dwie przekątne, to zdarzeń sprzyjających będziemy mieć:

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Zadanie 65

Ze zbioru pięciu liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie liczby będą parzyste, jest równe $\frac{2}{25}$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta, jest równe $\frac{8}{25}$.

Prawda

Fałsz

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie liczby będą parzyste, jest równe $\frac{2}{25}$.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Losowanie odbywa spośród pięciu liczb i jest to losowanie ze zwracaniem (czyli wylosowana liczba może się powtórzyć). To oznacza, że zgodnie z regułą

Chcemy, by suma wylosowanych liczb była parzysta. Musimy się więc zastanowić, jakie to liczby trzeba do siebie dodać, by taką parzystą sumę otrzymać nam pasuje.

- Liczbami nieparzystymi są 1, 3 oraz 5. Losujemy dwie liczby, czyli zgodnie z regułą mnożenia, interesujących nas kombinacji z liczbami nieparzystymi będziemy mieli 3 kombinacje.
- Liczbami parzystymi są 2 oraz 4. Losujemy dwie liczby, czyli zgodnie z regułą mnożenia, interesujących nas kombinacji z liczbami parzystymi będziemy mieli 1 kombinację.

To oznacza, że zgodnie z regułą dodawania wszystkich zdarzeń sprzyjających będziemy mieć $|A| = 3 + 1 = 4$.

W takim razie prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest parzysta, wynosi:

Zdanie jest więc fałszem.

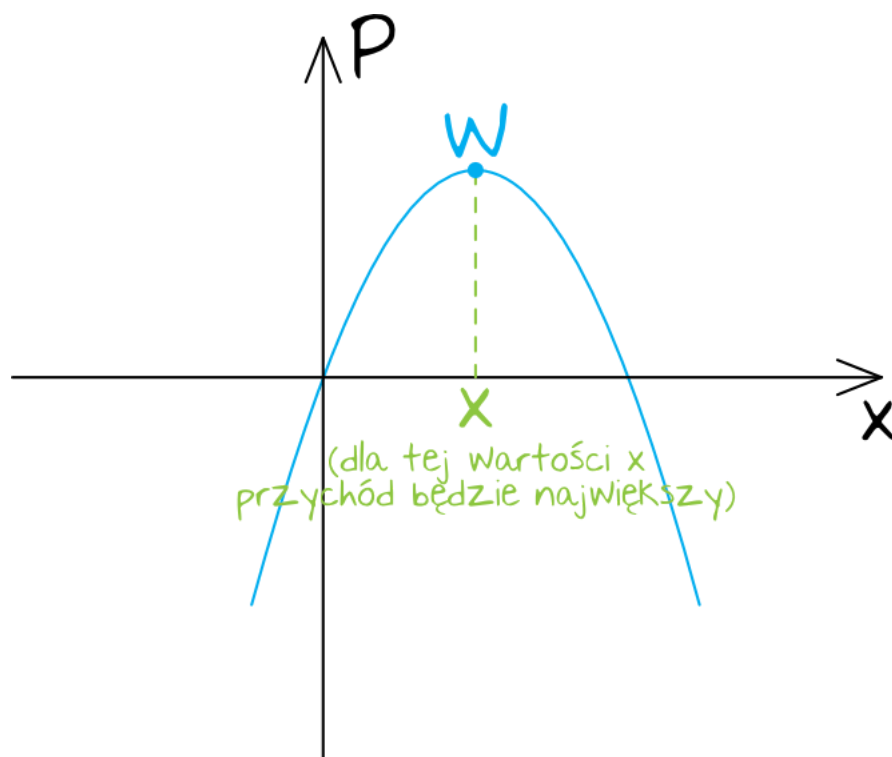
Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Podczas omawiania pierwszego zdania ustaliliśmy już, że wszystkich zdarzeń elementarnych mamy $|\Omega| = 25$, a możliwości wylosowania liczb parzystych

Zdanie jest więc fałszem.

Zadanie 66

Firma handlowa ustaliła, że liczba sprzedanych przez nią egzemplarzy gry komputerowej w ciągu każdego tygodnia zależy od jej ceny. Liczbę sprzedaży oblicz ten największy przychód.



Odpowiedź: Cena równa 80 or

Krok 1. Zapisanie równań.

Aby zrozumieć istotę zadania, spróbujmy całość opisać w taki sposób, jak rozwiązujemy inne tego typu zadania. Z treści zadania wynika, że liczbę spr

Z treści zadania wynika też, że tygodniowy przychód oznaczamy symbolem P , no a ten przychód to będzie liczba sprzedanych sztuk gry pomnożona

Krok 2. Zapisanie wzoru funkcji $P(x)$.

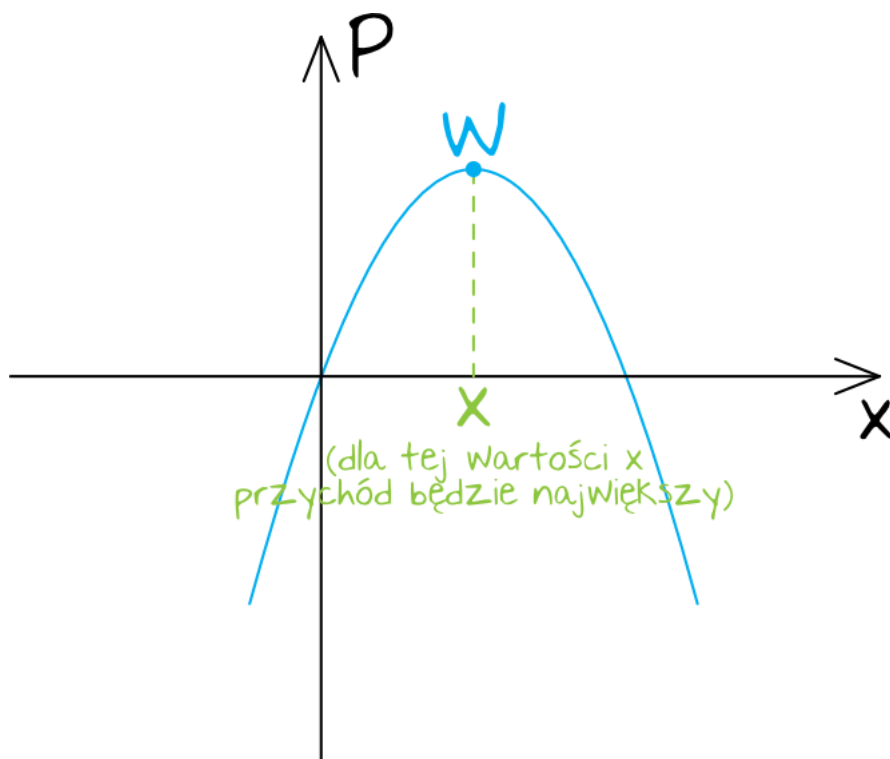
Kluczem do sukcesu przy tego typu zadaniach jest poprawne zapisanie przychodu w postaci funkcji z jedną zmienną, czyli zmienną x . Podstawiając y

$$P = x \cdot ($$

Otrzymaliśmy informację, że przychód można opisać wzorem $-15x^2 + 2400x$, czyli udało nam się zapisać wzór na przychód z użyciem tylko jednej r

Krok 3. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Tutaj parabola będzie mieć ramiona skierowane do dołu (bo współczynnik $a = -15$). Sytuacja będzie w



Chcemy się dowiedzieć, dla jakiego x osiągniemy jak najwyższy przychód P . Z własności parabol wiemy, że parabola skierowana ramionami do dołu

$$x_W =$$

Krok 4. Obliczenie przychodu.

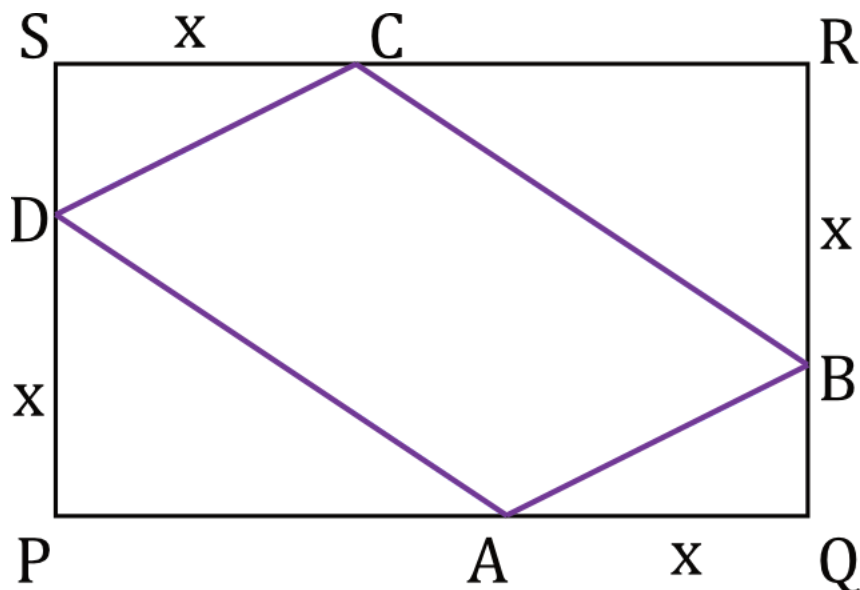
Wiemy już, że największa wartość jest przyjmowana, gdy $x = 80$, czyli największy przychód osiągniemy wtedy, gdy cena gry jest równa 80. Jedną z rz

$$P = -15 \cdot 80^2 + 2400 \cdot$$

Największy tygodniowy przychód wyniesie więc 96000.

Zadanie 67

Dany jest prostokąt $PQRS$ o bokach długości $|PQ| = |SR| = 10$ oraz $|PS| = |QR| = 6$. Na bokach PQ, QR, RS, SP obrano odpowiednio punkty



Odpowiedź: $x = 4$ oraz $P=28$

Krok 1. Zapisanie pól powierzchni figur.

Zanim zaczniemy cokolwiek obliczać, zwróćmy uwagę, że $|PA| = |CR| = 10 - x$ oraz że $|DS| = |BQ| = 6 - x$.

Pole naszego czworokąta $ABCD$ będzie równe polu dużego prostokąta $PQRS$, który jest pomniejszony o pola czterech trójkątów prostokątnych. (

$$P_{PAD} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (10 - x) = 5x - \frac{1}{2}x^2$$

$$P_{AQB} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (6 - x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$$

$$P_{BRC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (10 - x) = 5x - \frac{1}{2}x^2$$

$$P_{CSD} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (6 - x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$$

Obliczmy jeszcze od razu pole prostokąta $PQRS$, które jest równe:

$$P_{CSD} = 6 \cdot 10 = 60$$

Teraz zgodnie z planem, od jeśli od pola prostokąta odejmiemy pola małych trójkątów, to otrzymamy pole czworokąta $ABCD$, zatem:

$$P = 60 - \left((3x - \frac{1}{2}x^2) + (5x - \frac{1}{2}x^2) + (3x - \frac{1}{2}x^2) + (5x - \frac{1}{2}x^2) \right)$$

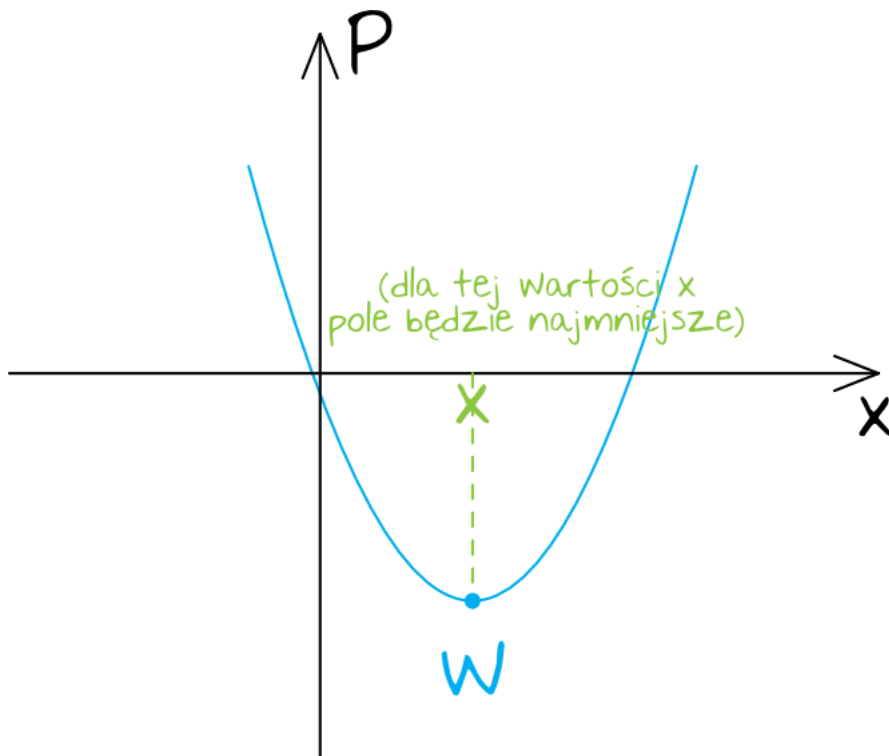
Krok 2. Zapisanie wzoru funkcji $P(x)$.

Otrzymaliśmy informację, że pole powierzchni można opisać wzorem $2x^2 - 16x + 60$. W ten sposób udało nam się zapisać wzór na pole z użyciem x .

Dodatkowo w treści zadania pojawił nam się warunek, że $x \geq 3$, który powinniśmy uwzględnić w dziedzinie tej funkcji. Dodatkowo wiemy, że skoro k

Krok 3. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Tutaj parabola będzie mieć ramiona skierowane do góry (bo współczynnik $a = 2$). Sytuacja będzie więc



Chcemy się dowiedzieć, dla jakiego x osiągniemy jak najmniejsze pole P . Z własności parabol wiemy, że parabola skierowana ramionami do góry osią

x

Otrzymany wynik mieści się w naszej dziedzinie, więc wszystko jest w porządku.

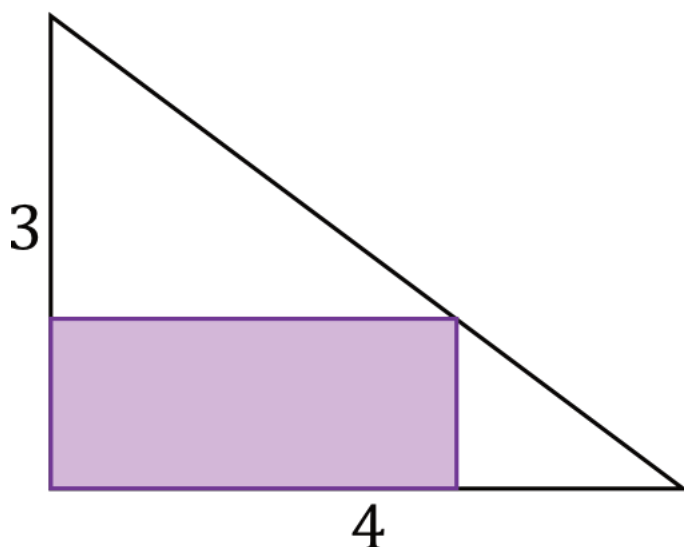
Krok 4. Obliczenie pola powierzchni.

Wylczyliśmy, że pole powierzchni będzie najmniejsze gdy $x = 4$. Zgodnie z treścią zadania, musimy jeszcze obliczyć to pole, zatem korzystając z wcze

$$P = 2x^2 - 16x + 60, P =$$

Zadanie 68

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 i 4. Wpisano w niego prostokąt w taki sposób, że dwa z jego boków zawierają się w przyprostokąt

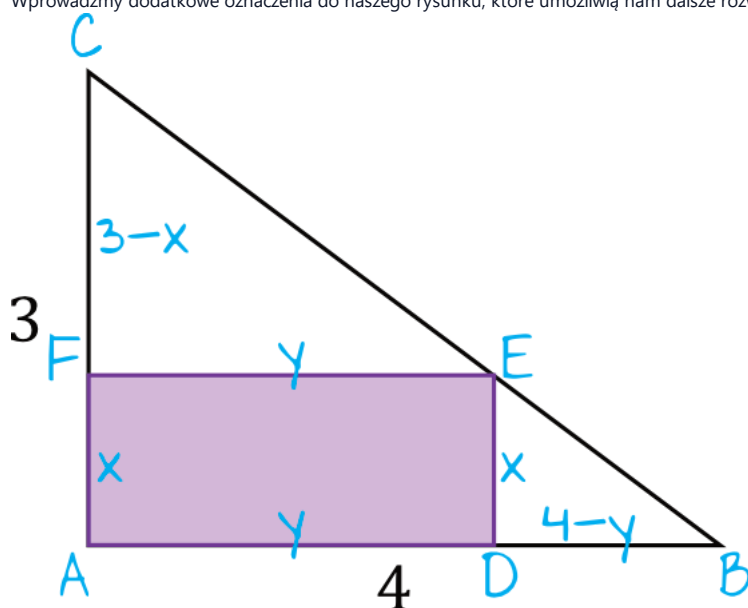


Jakie wymiary powinien mieć prostokąt, aby jego pole było największe? Oblicz to największe pole.

Odpowiedź: Wymiary $\frac{3}{2}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia do naszego rysunku, które umożliwią nam dalsze rozwiązywanie:



Krok 2. Dostrzeżenie trójkątów podobnych i zapisanie równań.

Powinniśmy zauważyć, że prostokąt wydzielił nam na rysunku także dwa mniejsze trójkąty prostokątne, czyli DBE oraz FEC . Wszystkie te trójkąty. Przykładowo, stosunek długości przyprostokątnych górnego trójkąta prostokątnego FEC o długościach $3 - x$ oraz y musi być taki sam, jak stosunek

Mnożąc teraz na krzyż, otrzymamy:

Dodatkowo możemy od razu zapisać, że pole prostokąta wyznaczymy ze wzoru:

Krok 3. Zapisanie wzoru funkcji $P(x)$.

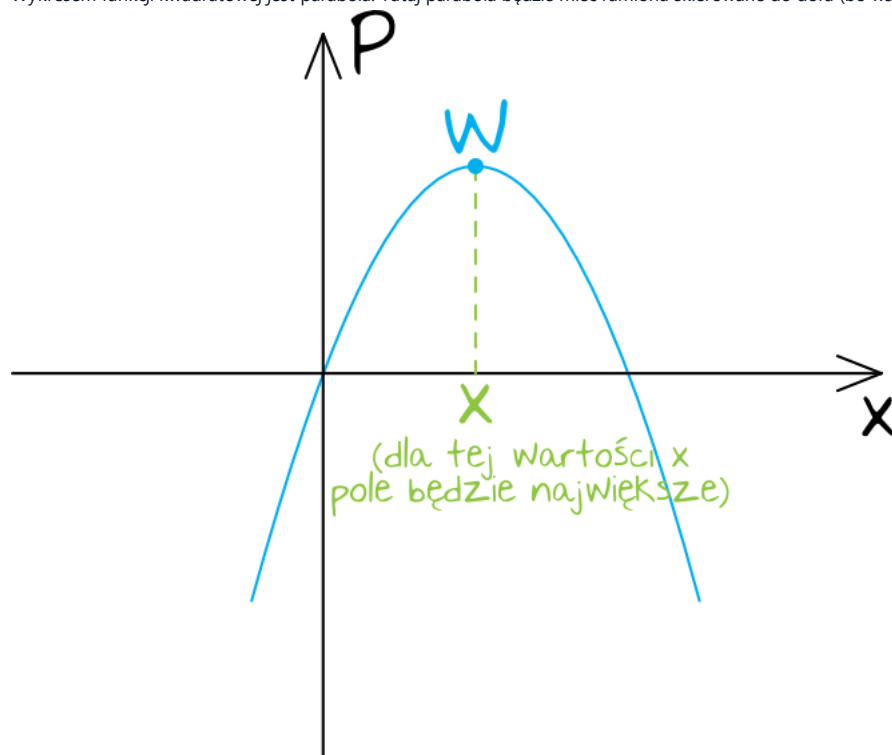
Kluczem do sukcesu przy tego typu zadaniach jest poprawne zapisanie pola powierzchni w postaci funkcji z jedną zmienną, czyli zmienną x . Podstawi-

$P =$

Otrzymaliśmy informację, że pole powierzchni prostokąta można opisać wzorem $-\frac{4}{3}x^2 + 4x$. W ten sposób udało nam się zapisać wzór na pole z uż

Krok 4. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Tutaj parabola będzie mieć ramiona skierowane do dołu (bo współczynnik $a = -\frac{4}{3}$). Sytuacja będzie w



Chcemy się dowiedzieć, dla jakiego x osiągniemy jak największe pole P . Z własności parabol wiemy, że parabola skierowana ramionami do dołu osiągnie

$$x_W = \frac{-b}{2a}, \quad x_W = \frac{-4}{2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}$$

Krok 5. Wyznaczenie długości drugiego boku prostokąta i obliczenie pola powierzchni.

Wyliczyliśmy, że pole powierzchni będzie największe gdy jeden z boków prostokąta będzie miał długość $x = \frac{3}{2}$. Zgodnie z treścią zadania, musimy je

To oznacza, że pole naszego prostokąta będzie równe: