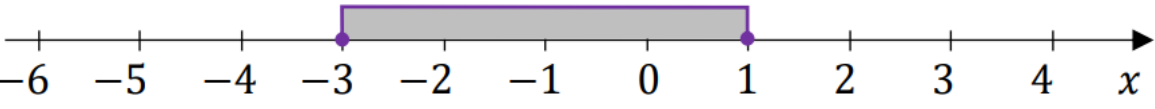
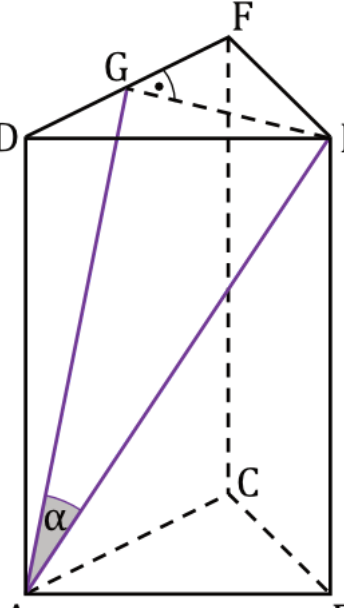


Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	B (6^{101})	1
2	B (2)	1
3	C (648)	1
4	C ($48a$)	1
6	B (4)	1
7	A (dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 2$)	1
8		1
11	B ($a > 0 \wedge b < 0$)	1
12	B ($Q = -3P + 27$)	1
14	D ($20000 \cdot (1,03)^2$)	1
17	A ($((x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9)$)	1
20	B ($2\sqrt{13}$)	1
21	A (30°)	1
22	A ($\frac{3}{4}$)	1
24	D (38°)	1
25	D (2)	1
26	C (1 : 8)	1
27	$\alpha = \angle EAG$ 	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Wartość wyrażenia $6^{100} + 6^{100} + 6^{100} + 6^{100} + 6^{100}$ jest równa:

Odpowiedź: B (6^{101})

Nasze wyrażenie jest tak naprawdę sześciokrotnym dodaniem tej samej wartości, czyli 6^{100} . Korzystając z działań na potęgach, całość możemy zapisać jako:

$$6 \cdot 6^{100} = 6^1 \cdot 6^{100} = 6^{1+100} = 6^{101}$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Wartość wyrażenia $\log_7 98 - \log_7 2$ jest równa:

Odpowiedź: B (2)

Korzystając z działań na logarytmach możemy zapisać, że:

$$\log_7 98 - \log_7 2 = \log_7 \left(\frac{98}{2} \right) = \log_7 49 = 2$$

Zadanie 3

0-1 pkt

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, w których zapisie dziesiętnym nie występuje cyfra 2, jest:

Odpowiedź: C (648)

Do zadania możemy podejść na różne sposoby, ale najprościej będzie wykorzystać tutaj regułę mnożenia. Rozpiszmy zatem jakie cyfry pasują nam do rzędu setek, dziesiątek oraz jedności:

- W rzędzie setek może znaleźć się dowolna liczba od 1 do 9, ale oprócz 2. To oznacza, że pasuje nam tutaj 8 różnych możliwości.
- W rzędzie dziesiątek może znaleźć się dowolna liczba od 0 do 9, ale oprócz 2. To oznacza, że pasuje nam tutaj 9 różnych możliwości.
- W rzędzie jedności może znaleźć się dowolna liczba od 0 do 9, ale oprócz 2. To oznacza, że pasuje nam tutaj 9 różnych możliwości.

Korzystając zatem z reguły mnożenia możemy zapisać, że interesujących nas liczb będzie:

$$8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$$

Zadanie 4

0-1 pkt

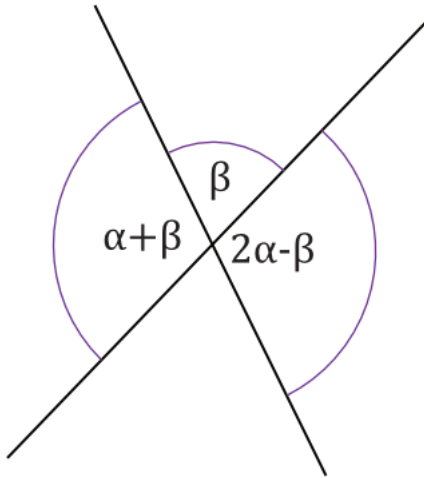
Dla każdej liczby rzeczywistej a wartość wyrażenia $(3 + 4a)^2 - (3 - 4a)^2$ jest równa:

Odpowiedź: C ($48a$)

W tym zadaniu musimy skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ oraz $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Po poprawnym wykonaniu potęgowania, cały zapis będziemy musieli jeszcze uporządkować:

$$(3 + 4a)^2 - (3 - 4a)^2 = , = 9 + 24a + 16a^2 - (9 - 24a + 16a^2) = , = 9 + 24a + 16a^2 - 9 + 24a - 16a^2 = 48a$$

Dane są dwie przecinające się proste. Miary kątów utworzonych przez te proste zapisano za pomocą wyrażeń algebraicznych (zobacz rysunek).



Układem równań, w którym zapisano prawidłowe zależności między miarami kątów utworzonych przez te proste, jest układ:

A. $\begin{cases} (\alpha + \beta) + \beta = 90^\circ \\ \alpha + \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$,

B. $\begin{cases} (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ \\ \alpha + \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$,

C. $\begin{cases} (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ \\ \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$,

D. $\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$,

E. $\begin{cases} \alpha + \beta = 2\alpha - \beta \\ 180^\circ - (2\alpha - \beta) = \beta \end{cases}$,

F. $\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 360^\circ \\ 2\alpha - \beta = 2\beta \end{cases}$,

Odpowiedź: B oraz E

Równania pojawiające się w układach opisują różne zależności, dlatego przeanalizujemy osobno poprawność poszczególnych odpowiedzi.

Odp. A. - tutaj pierwsze równanie jest nieprawidłowe, bo suma tych kątów powinna być równa 180° .

Odp. B. - ten układ równań jest prawidłowy. W pierwszym równaniu mamy sumę kątów przyległych równą 180° , a w drugim mamy informację o tym, że kąty wierzchołkowe mają jednakową miarę.

Odp. C. - tutaj drugie równanie jest nieprawidłowe, te dwa kąty nie mają jednakowej miary.

Odp. D. - tutaj nieprawidłowe jest i pierwsze i drugie równanie.

Odp. E. - ten układ jest prawidłowy. W pierwszym równaniu mamy wykorzystaną własność kątów wierzchołkowych, a w drugim kątów przyległych.

Odp. F. - ten układ jest nieprawidłowy, ponieważ drugie równanie jest błędne.

Prawidłowe układy równań znalazły się więc w odpowiedzi B oraz E.

Zadanie 6

0-1 pkt

Dany jest wielomian $W(x) = 3x^3 + kx^2 - 12x - 7k + 12$, gdzie k jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiadomo, że liczba (-2) jest pierwiastkiem tego wielomianu. Liczba k jest równa:

Odpowiedź: B (4)

Jeżeli liczba -2 jest pierwiastkiem tego wielomianu, to znaczy, że podstawiając $x = -2$, wartość tego wielomianu powinna wyjść równa 0. Skoro tak, to:

$$3 \cdot (-2)^3 + k \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) - 7k + 12 = 0, \quad 3 \cdot (-8) + k \cdot 4 - (-24) - 7k + 12 = 0, \quad -24 + 4k + 24 - 7k + 12 = 0, \quad -3k + 12 = 0, \quad -3k = -12$$

Zadanie 7

0-1 pkt

Równanie $\frac{(4x-6)(x-2)^2}{2x(x-1,5)(x+6)} = 0$ ma w zbiorze liczb rzeczywistych:

Odpowiedź: A (dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 2$)

Krok 1. Zapisanie założeń.

Zanim zaczniemy cokolwiek obliczać, musimy zapisać założenia do równania. Na matematyce dzielenie przez zero nie istnieje, więc i wartość mianownika musi być różna od zera. W mianowniku mamy równanie zapisane w postaci iloczynowej, zatem wystarczy przyrównać każdy z czynników do zera, czyli:

$$2x \neq 0 \quad \wedge \quad x - 1,5 \neq 0 \quad \wedge \quad x + 6 \neq 0, \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 1,5 \quad \wedge \quad x \neq -6$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.

Teraz możemy przystąpić do rozwiązywania równania. Zaczynając od wymnożenia obu stron przez wartość w mianowniku, otrzymamy:

$$\frac{(4x-6)(x-2)^2}{2x(x-1,5)(x+6)} = 0 \quad \Bigg/ \cdot 2x(x-1,5)(x+6), \quad (4x-6)(x-2)^2 = 0, \quad 4x-6 = 0 \quad \vee \quad x-2 = 0, \quad 4x = 6 \quad \vee \quad x = 2, \quad x = 1,5 \quad \vee \quad x = 2$$

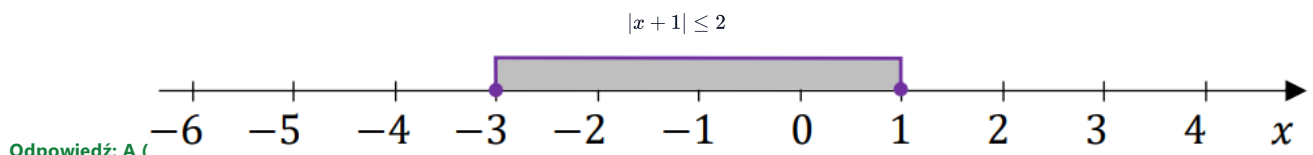
Krok 3. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Otrzymane wyniki musimy jeszcze zweryfikować z naszymi założeniami. Okazuje się, że rozwiązanie $x = 1,5$ musimy odrzucić, bo dla tej wartości otrzymamy zero w mianowniku. To oznacza, że jedynym rozwiązaniem będzie $x = 2$.

Zadanie 8

0-1 pkt

Spośród rysunków A-D wybierz ten, na którym prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność:



Aby rozwiązać nierówność z wartością bezwzględną, musimy ułożyć dwie nierówności liniowe bez tej wartości, z czego druga nierówność będzie mieć zmieniony znak nierówności i liczbę stojącą po prawej stronie na przeciwną:

$$x+1 \leq 2 \quad x+1 \geq -2, \quad x \leq 1 \quad x \geq -3$$

Wyszło nam więc, że x jest większy lub równy -3 oraz mniejszy lub równy 1 , czyli $x \in \langle -3; 1 \rangle$, a taka sytuacja została przedstawiona na pierwszym rysunku.

Zadanie 9

0-2 pkt

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej n liczba $n^2 + 2023$ jest podzielna przez 8.

Odpowiedź: Udowodniono, korzyst

Jeżeli przyjmiemy, że k jest liczbą całkowitą, to liczbę nieparzystą możemy zapisać jako $2k + 1$. Podstawiając teraz tę wartość pod n , otrzymamy:

$$(2k+1)^2 + 2023 = , \quad = 4k^2 + 4k + 1 + 2023 = , \quad = 4k^2 + 4k + 2024 = , \quad = 4k(k+1) + 2024$$

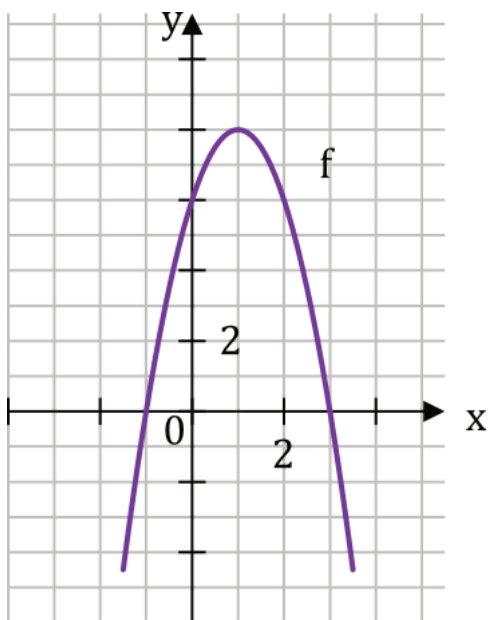
Przeanalizujmy teraz podaną sytuację, zaczynając od wyrażenia $k(k+1)$. Jeżeli k jest całkowitą liczbą parzystą, to $k+1$ jest liczbą nieparzystą, a iloczyn liczby parzystej i nieparzystej daje wynik parzysty. Analogicznie, gdy k jest liczbą nieparzystą, to $k+1$ będzie parzyste, czyli tutaj także iloczyn tych dwóch liczb będzie parzysty.

Możemy więc powiedzieć, że mnożymy 4 przez liczbę, która jest na pewno parzysta, a do tego dodajemy 2024, które możemy rozpisać jako $8 \cdot 253$. Pomnożenie 4 przez liczbę parzystą zawsze daje wynik podzielny przez 8, zatem liczba $4k(k+1) + 2024$ jest tak naprawdę sumą dwóch liczb podzielnych przez 8, co sprawia, że cała liczba też jest podzielna przez 8, co należało udowodnić.

Zadanie 10

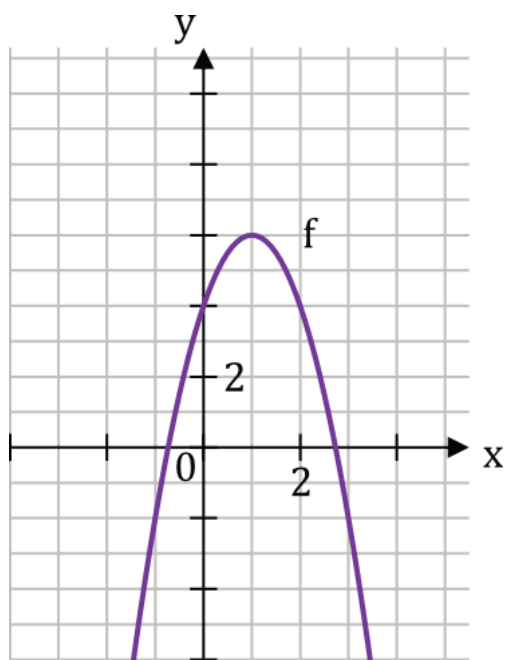
0–5 pkt

Dana jest funkcja kwadratowa f , której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f , oraz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych mają współrzędne całkowite.

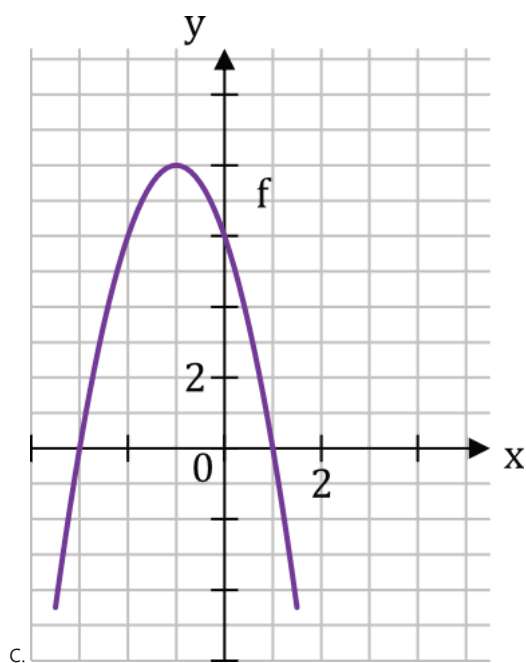
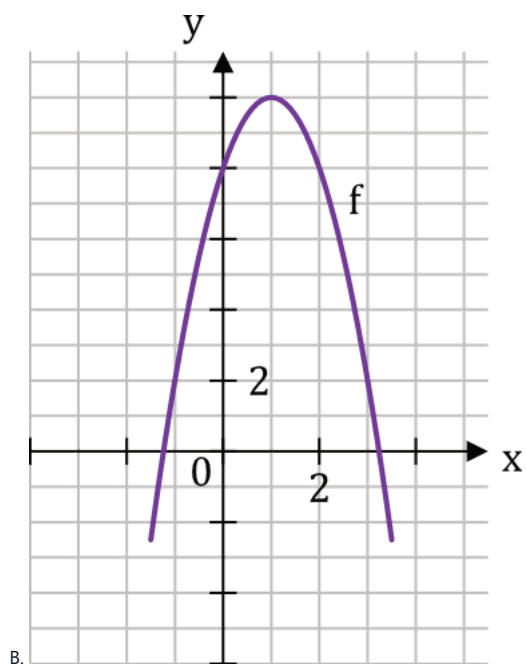


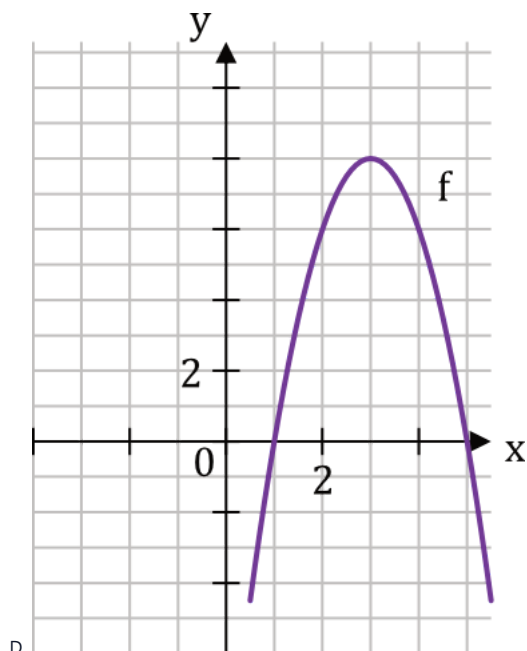
Zadanie 1.

Funkcja g jest określona za pomocą funkcji f następująco: $g(x) = f(x - 2)$. Wykres funkcji g przedstawiono na rysunku:



A.





D.

Zadanie 2.

Wyznacz i zapisz w miejscu wy kropkowanym poniżej zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $f(x) \leq 0$.

.....

Zadanie 3.

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: 1. D. 2. $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Zadanie 1.

Zapis $g(x) = f(x - 2)$ oznacza, że funkcja $g(x)$ powstała w wyniku przesunięcia funkcji $f(x)$ o 2 jednostki w prawo. Patrząc na miejsca zerowe i na wierzchołek paraboli, widzimy, że takie przesunięcie znalazło się na czwartym rysunku.

Zadanie 2.

Skoro wartości funkcji $f(x)$ mają być mniejsze lub równe 0, to musimy spojrzeć na te fragmenty wykresu, które znalazły się pod osią OX . Widzimy wyraźnie, że rozwiązaniem tego zadania będzie suma przedziałów $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Zadanie 3.

Do wyznaczenia wzoru w postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$ potrzebujemy współrzędnej wierzchołka $W = (p; q)$. Z wykresu odczytujemy, że $W = (1; 8)$, zatem:

$$y = a(x - 1)^2 + 8$$

Do poznania pełnego wzoru brakuje nam jeszcze znajomości współczynnika a . Aby poznać tę wartość, musimy podstawić współrzędne jednego ze znanych punktów, który należy do wykresu tej funkcji. Najprościej będzie wziąć jedno z miejsc zerowych, czyli np. $A = (-1; 0)$. Podstawiając współrzędne tego punktu do wyznaczonego przed chwilą wzoru, otrzymamy:

$$0 = a \cdot (-1 - 1)^2 + 8, 0 = a \cdot (-2)^2 + 8, 0 = 4a + 8, a = -2$$

Przy okazji warto zauważyć, że współczynnik a wyszedł ujemny, co sugerowałoby, że ramiona paraboli będą skierowane do dołu, tak jak na wykresie. Dzięki takiej obserwacji możemy w prosty sposób zweryfikować poprawność rozwiązania.

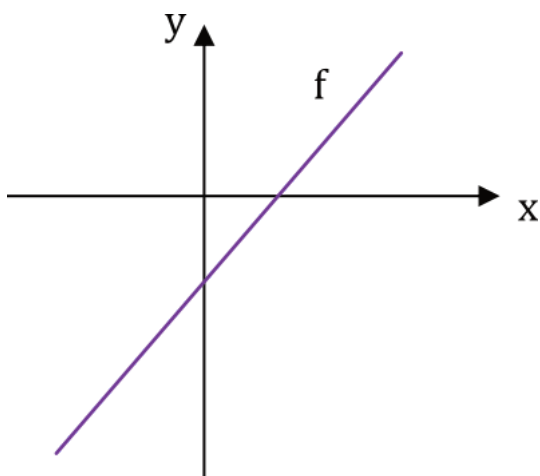
Otrzymany wynik oznacza, że wzorem tej funkcji w postaci kanonicznej jest:

$$y = -2(x - 1)^2 + 8$$

Zadanie 11

0-1 pkt

Dana jest funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = ax + b$ gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi. Wykres funkcji f przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.



Współczynniki a i b we wzorze funkcji f spełniają warunki:

Odpowiedź: B ($a > 0$ i $b < 0$)

Współczynnik a informuje nas o monotoniczności funkcji (czyli o tym, czy funkcja jest rosnąca, malejąca czy też może stała). Z rysunku wynika, że funkcja jest rosnąca, więc współczynnik $a > 0$.

Współczynnik b informuje nas o miejscu przecięcia się wykresu funkcji z osią OY . W przypadku tej funkcji przecięcie następuje pod osią OX (czyli dla ujemnej wartości y), stąd też $b < 0$.

Zadanie 12

0-1 pkt

Firma przeprowadziła badania rynkowe dotyczące wpływu zmiany ceny P swojego produktu na liczbę Q kupujących ten produkt. Z badań wynika, że każdorazowe zwiększenie ceny o 1 jednostkę powoduje spadek liczby kupujących o 3 jednostki. Ponadto przy cenie równej 5 jednostek liczba kupujących jest równa 12 jednostek.

Funkcja, która opisuje zależność liczby kupujących ten produkt od jego ceny, ma wzór:

Odpowiedź: B ($Q = -3P + 27$)

Na początku ustalmy, czy w omawianej sytuacji będziemy mieć funkcję liniową, czy kwadratową (bo takie i takie znajdują się w odpowiedziach). Z treści zadania wynika, że każdy spadek ceny o 1 jednostkę powoduje spadek liczby kupujących o 3 jednostki. Zależność jest więc liniowa (jak cena spadnie o jedną jednostkę więcej, to liczba kupujących spadnie o kolejne trzy jednostki itd.). Tym samym możemy od razu odrzucić odpowiedzi A oraz C, które zawierają wzory funkcji kwadratowych.

Jak teraz ustalić, czy poprawny jest wzór z odpowiedzi B czy D? Można podejść do tego na różne sposoby, ale najprościej będzie wykorzystać informację z treści zadania. Dla $P = 5$ wartość funkcji musi być równa $Q = 12$. Podstawmy zatem $P = 5$ dla wzoru z odpowiedzi B oraz D:

Odp. B.:

$$Q = -3P + 27, \quad Q = -3 \cdot 5 + 27, \quad Q = -15 + 27, \quad Q = 12$$

Odp. D.:

$$5 = -3Q + 27, \quad -22 = -3Q, \quad Q = 7\frac{1}{3}$$

Widzimy wyraźnie, że pasuje nam jedynie wzór z odpowiedzi B.

Zadanie 13

0-4 pkt

Czas T półtrwania leku w organizmie to czas, po którym masa leku w organizmie zmniejsza się o połowę – po przyjęciu jednorazowej dawki. Przyjmij, że po przyjęciu jednej dawki masa m leku w organizmie zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie:

m_0 – masa przyjętej dawki leku

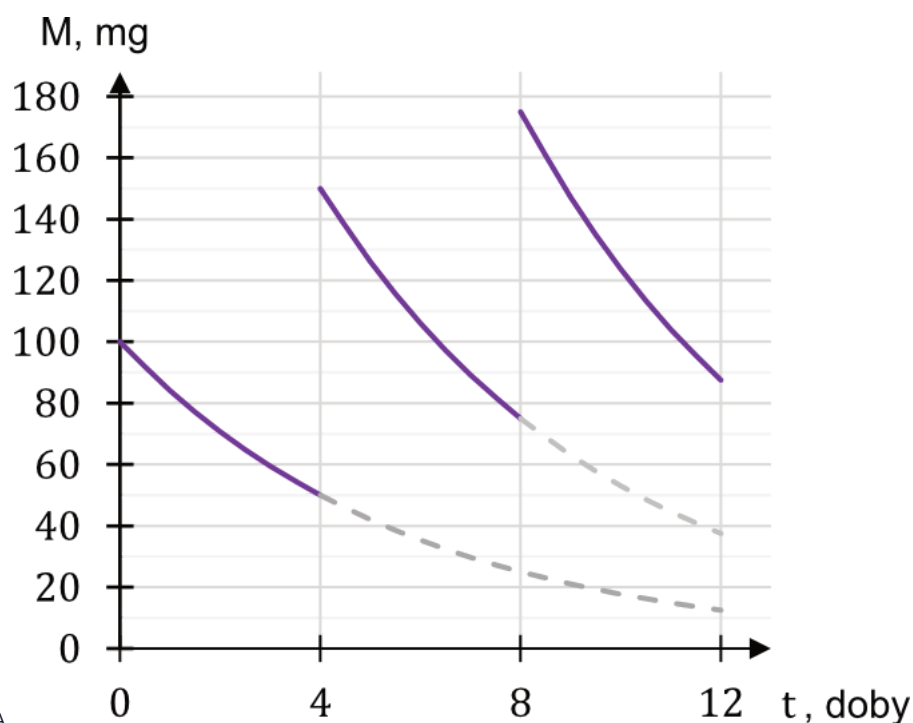
T – czas półtrwania leku

t – czas liczony od momentu przyjęcia dawki.

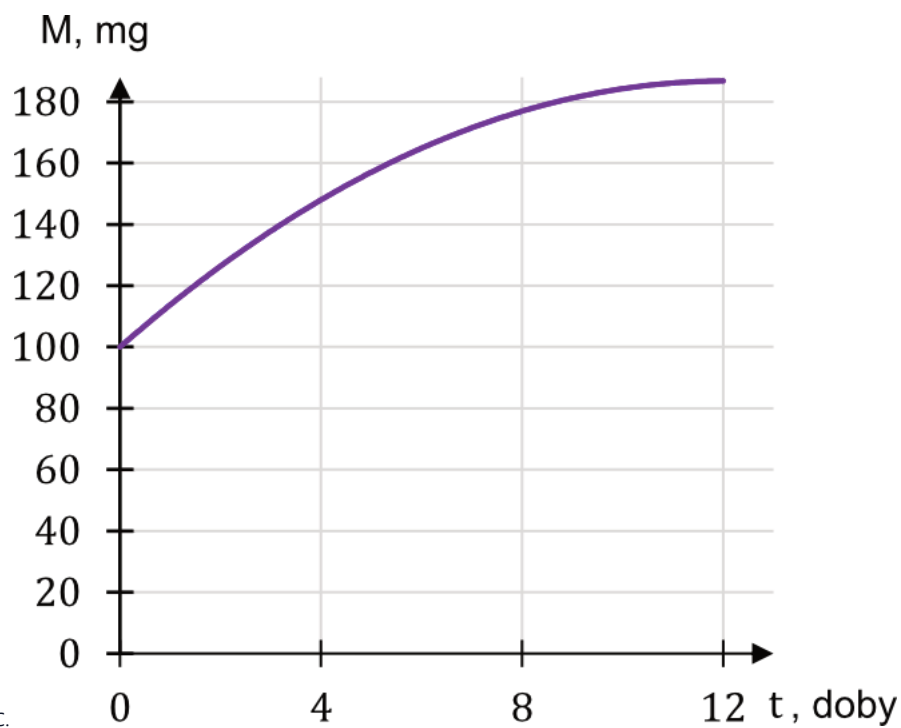
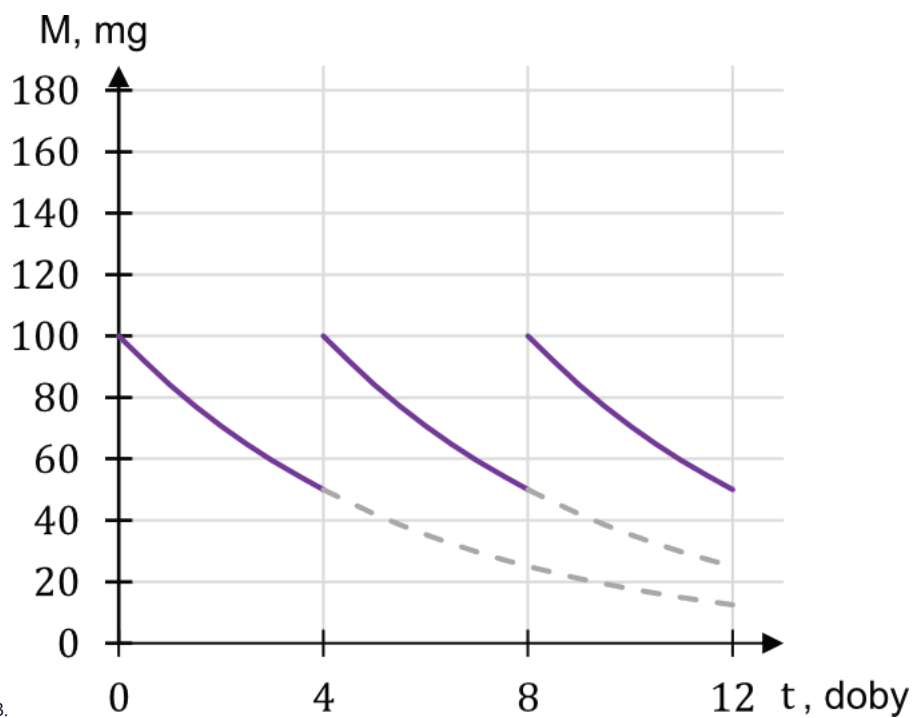
W przypadku przyjęcia kilku(nastu) dawek powyższa zależność pozwala obliczyć, ile leku pozostało w danym momencie w organizmie z każdej poprzednio przyjętej dawki. W ten sposób obliczone masy leku z przyjętych poprzednich dawek sumują się i dają informację o całkowitej aktualnej masie leku w organizmie. Pacjent otrzymuje co 4 dni o tej samej godzinie dawkę $m_0 = 100\text{mg}$ leku L . Czas półtrwania tego leku w organizmie jest równy $T = 4$ doby.

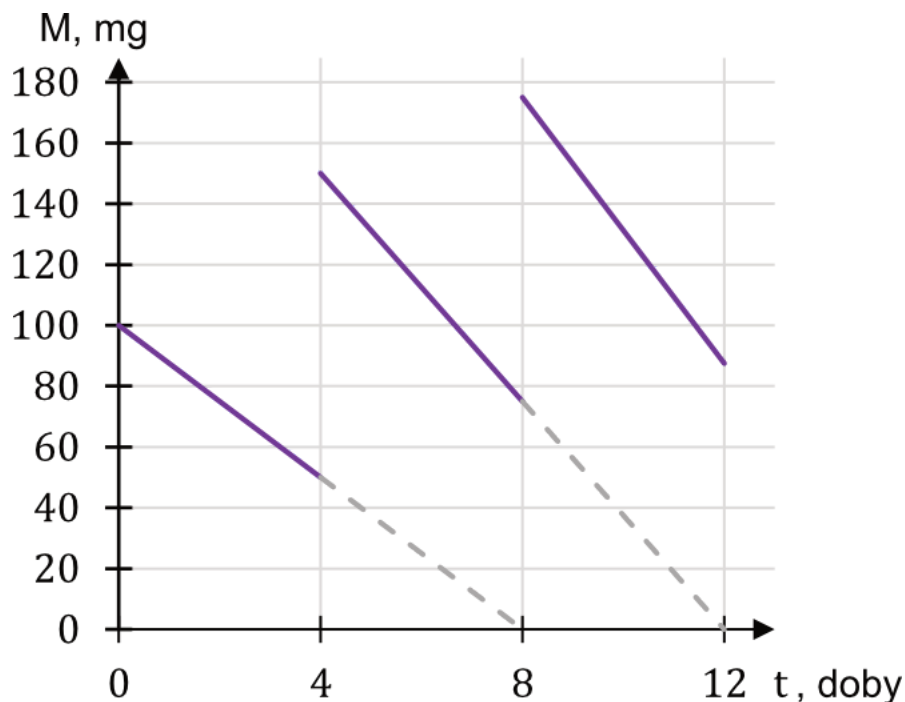
Zadanie 1.

Wykres zależności masy M leku L w organizmie tego pacjenta od czasu t , liczonego od momentu przyjęcia przez pacjenta pierwszej dawki, przedstawiono na rysunku:



A.





D.

Zadanie 2.

Oblicz masę leku L w organizmie tego pacjenta tuż przed przyjęciem jedenastej dawki tego leku. Wynik podaj w zaokrągleniu do $0,1\text{mg}$. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: 1. A. 2. ok. \99,9

Zadanie 1.

Poprawnym wykresem będzie ten z odpowiedzi A. Powiedzmy sobie może jeszcze dlaczego to jest akurat ten wykres. Aby dojść do tej odpowiedzi, musimy zrozumieć istotę samego zadania.

Mamy pacjenta, który przyjmuje dawkę omawianego leku i zgodnie ze wzorem, z czasem tego leku jest coraz mniej. Ze wzoru wynika, że spadek ten jest wykładniczy (a nie liniowy, jak odpowiedzi D). W grę wchodzi więc już tylko dwie odpowiedzi - A oraz B (odpowiedź C odrzucamy, ponieważ w odpowiedzi C mamy funkcję rosnącą). No i teraz najważniejsze pytanie - skąd się biorą trzy fragmenty wykresu? Wynika to z faktu dodawania kolejnej dawki leku, co tym samym powoduje skokowe zwiększenie dawki leku w organizmie. Jeżeli więc pacjent po 4 dobach ma w swoim organizmie 50mg leku i dostaje kolejną dawkę 100mg , to w czwartej dobie wartość ta skacze mu do 150mg , dokładnie tak jak na wykresie z odpowiedzi A.

Zadanie 2.

Krok 1. Analiza ilości leku w organizmie pacjenta.

Musimy sobie uzmysłowić, że przed przyjęciem jedenastej dawki tego leku, pacjent będzie miał śladowe ilości pierwszej dawki (śladowe, bo wraz z upływem czasu tego leku w organizmie jest coraz mniej), nieco większe drugiej dawki i całkiem spore wartości dziewiątej czy też dziesiątej dawki. Musimy też dostrzec, że termin "przed przyjęciem jedenastej dawki" oznacza, że od pierwszej dawki upłynęło $t = 40$ dni, a od dawki dziesiątej upłynęły raptem $t = 4$ dni. Zapiszmy zatem ile każdej z dawek zostało temu pacjentowi w organizmie, zaczynając może od najnowszej, czyli dziesiątej dawki.

Pacjent otrzyma jedenastą dawkę leku po upływie 4 dni od przyjęcia dziesiątej dawki. To oznacza, że z dziesiątej dawki w organizmie zostanie:

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{4}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 50$$

W organizmie pacjenta jest jeszcze np. lek z dziewiątej dawki, który był podany 8 dni wcześniej. Tego leku w organizmie pacjenta będzie:

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{4}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25$$

Z ósmej dawki zostanie:

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{4}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 100 \cdot \frac{1}{8} = 12,5$$

I tak analogicznie możemy rozpisywać kolejne dawki, aż dojdziemy do pierwszej, która była 40 dni wcześniej, zatem z tej dawki zostało:

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{4}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Krok 2. Obliczenie sumy wszystkich dawek leku.

Naszym celem jest teraz zsumowanie tych wszystkich dawek. Widzimy wyraźnie, że kolejne dawki leku tworzą ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 50$ oraz $q = \frac{1}{2}$.

Korzystając zatem ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, możemy zapisać, że:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, S_{10} = 50 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}}, S_{10} = 50 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}}, S_{10} = 50 \cdot \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}}, S_{10} = 50 \cdot \frac{1023}{1024} : \frac{1}{2}, S_{10} = \frac{51150}{1024} : \frac{1}{2}, S_{10} = \frac{51150}{1024} \cdot 2, S_{10} = \frac{51150}{512}$$

To oznacza, że przed przyjęciem jedenastej dawki nasz pacjent ma w organizmie około 99,9 mg leku.

Zadanie 14

0-1 pkt

Klient wpłacił do banku 20000 zł na lokatę dwuletnią. Po każdym rocznym okresie oszczędzania bank dolicza odsetki w wysokości 3% od kwoty bieżącego kapitału znajdującego się na lokacie. Po 2 latach oszczędzania w tym banku kwota na lokacie (bez uwzględniania podatków) jest równa:

Odpowiedź: D ($20000 \cdot (1,03)^2$)

W tym zadaniu skorzystamy ze wzoru na kapitalizację odsetek:

$$K_n = K \cdot (1 + p)^n$$

K_n to kwota po naliczeniu odsetek

K to kapitał początkowy

p to oprocentowanie w okresie pojedynczej kapitalizacji

n to liczba kapitalizacji

Z treści zadania wynika, że:

$$K = 20000$$

$$p = 0,03$$

$$n = 2$$

Dlaczego $p = 0,03$?

Oprocentowanie lokaty w skali roku wynosi 3%, czyli 0,03, a lokata jest kapitalizowana raz do roku.

Dlaczego $n = 2$?

Lokata jest na 2 lata, a odsetki naliczane są co rok. W związku z tym w trakcie całej lokaty odsetki będą naliczone $2 \cdot 1 = 2$ razy.

Nie pozostaje nam nic innego jak podstawić poszczególne dane do wzoru:

$$K_n = 20000 \cdot (1 + 0,03)^2, K_n = 20000 \cdot (1,03)^2$$

Zadanie 15

0-1 pkt

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = -3n + 5$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Liczby 2, (-1) , (-4) są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu (a_n) .

(a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy równej 5.

Liczby 2, (-1) , (-4) są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu (a_n) .

Prawda

Fałsz

(a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy równej 5.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Chcąc obliczyć wartości trzech początkowych wyrazów, wystarczy podstawić $n = 1$, $n = 2$ oraz $n = 3$ do wzoru ciągu, zatem:

$$a_1 = -3 \cdot 1 + 5 = -3 + 5 = 2, \quad a_2 = -3 \cdot 2 + 5 = -6 + 5 = -1, \quad a_3 = -3 \cdot 3 + 5 = -9 + 5 = -4$$

Zdanie jest więc prawdą, bo 2, (-1) , (-4) są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami tego ciągu.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Już po samym wzorze powinniśmy dostrzec, że jest to ciąg arytmetyczny i w dodatku od ręki powinniśmy stwierdzić, że różnica tego ciągu to $r = -3$ (bo taka też wartość różnicy jest dla każdego wyrazu).

Gdybyśmy jednak nie mieli takiej pewności, to możemy sobie z tym zadaniem poradzić nieco inaczej. W tym celu wystarczy sprawdzić o ile różnią się sąsiadujące ze sobą wyrazy, czy jest to w ogóle ciąg arytmetyczny, no i poznamy przy okazji ewentualną różnicę tego ciągu. Korzystając z wartości wyrazów obliczonych w poprzednim kroku:

$$a_2 - a_1 = -1 - 2 = -3, \quad a_3 - a_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$

Zarówno z obliczeń jak i obserwacji wynika wyraźnie, że każdy kolejny wyraz jest o 3 mniejszy od poprzedniego, zatem owszem, ten ciąg jest arytmetyczny, ale jego różnica jest -3 , a nie 5 . Zdanie jest więc fałszem.

Zadanie 16

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 6$, $|BC| = 5$, $|AC| = 10$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Cosinus kąta ABC jest równy $(-0,65)$.
Trójkąt ABC jest rozwartokątny.

Cosinus kąta ABC jest równy $(-0,65)$.

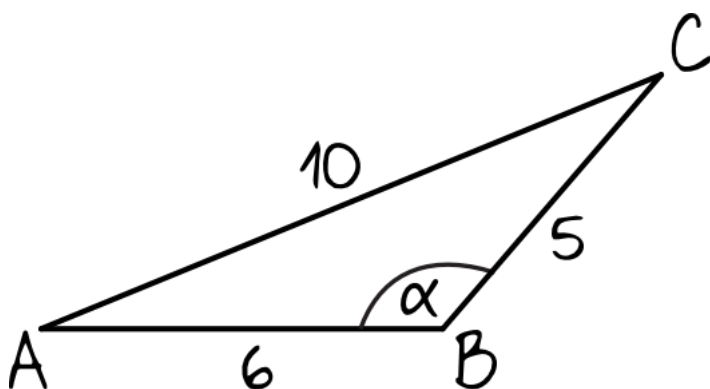
Prawda

Fałsz

Trójkąt ABC jest rozwartokątny.

Prawda

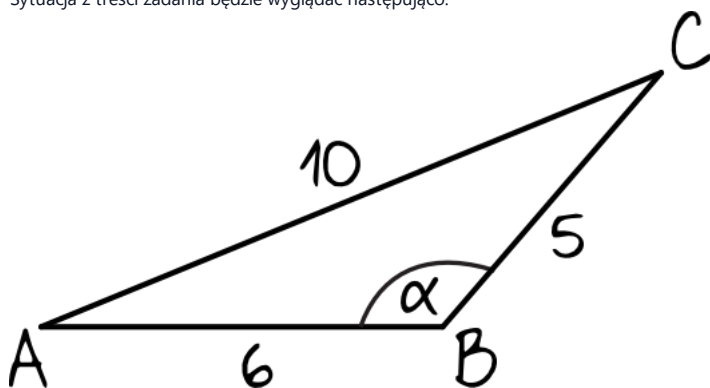
Fałsz



Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Sytuacja z treści zadania będzie wyglądać następująco:



Krok 2. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Korzystając z twierdzenia cosinusów możemy zapisać, że:

$$10^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos \alpha, \quad 100 = 36 + 25 - 60 \cos \alpha, \quad 100 = 61 - 60 \cos \alpha, \quad 39 = -60 \cos \alpha, \quad \cos \alpha = -0,65$$

Zdanie jest więc prawdą.

Krok 3. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wiemy, że gdy $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt jest prostokątny. Rozwinięciem tego twierdzenia jest informacja, że jeżeli jest ostrokątny, natomiast gdy $a^2 + b^2 < c^2$, to trójkąt jest rozwartokątny. W naszym przypadku $a = 6$, $b = 5$ oraz $c = 10$, zatem:

$$a^2 + b^2 = 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61, \quad c^2 = 10^2 = 100$$

Widzimy więc, że $a^2 + b^2$ jest mniejsze od c^2 , zatem jest to trójkąt rozwartokątny. Zdanie jest więc prawdą.

Zadanie 17

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest okrąg o środku $S = (2, -5)$ i promieniu $r = 3$. Równanie tego okręgu ma postać:

Odpowiedź: A $((x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9)$

Równanie okręgu o środku $S = (a; b)$ i promieniu r zapisujemy jako:

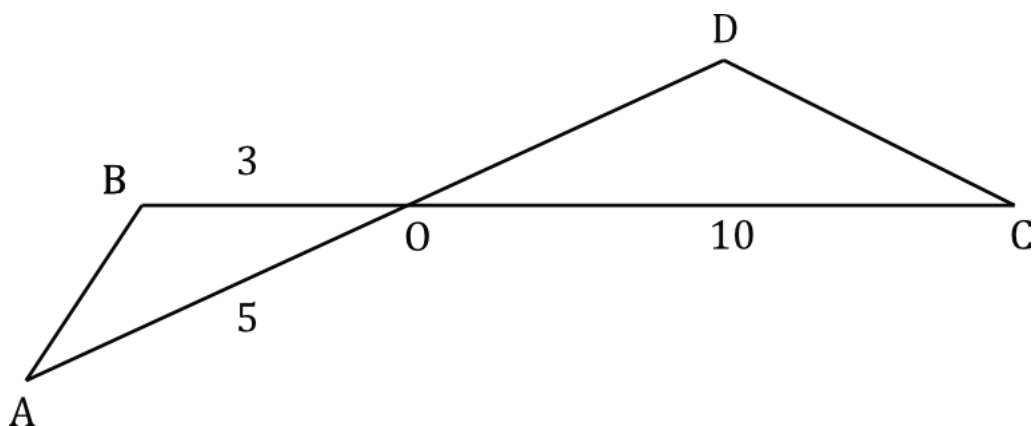
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Z treści zadania wynika, że $a = 2$ oraz $b = -5$, natomiast $r = 3$. Skoro tak, to równanie tego okręgu ma postać:

$$(x - 2)^2 + (y - (-5))^2 = 3^2, (x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$$

Zadanie 18

Odcinki AD i BC przecinają się w punkcie O . W trójkątach ABO i ODC zachodzą związki: $|AO| = 5$, $|BO| = 3$, $|OC| = 10$, $|\angle OAB| = |\angle OCD|$ (zobacz rysunek).



Oblicz długość boku OD trójkąta ODC . Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $|OD| = 6$

Krok 1. Dostrzeżenie podobieństwa trójkątów.

Kąty przy wierzchołku O (czyli $|\angle AOB|$ oraz $|\angle DOC|$) są tak zwanymi kątami wierzchołkowymi, a z własności takich kątów wynika, że mają one jednakową miarę. Wiemy też, że kąty OAB oraz OCD także mają jednakową miarę. To oznacza, że w tym momencie trójkąty ABO i ODC mają już dwie pary jednakowych kątów, w tych trójkątach muszą mieć jednakową miarę. To prowadzi nas do wniosku, że te dwa trójkąty są podobne (cecha kąt-kąt-kąt).

Krok 2. Obliczenie skali podobieństwa.

Przyjmijmy, że trójkąt ABO jest trójkątem podstawowym, a trójkąt ODC jest trójkątem podobnym. Aby obliczyć skalę podobieństwa, musimy najpierw odnaleźć odpowiadających. W trójkącie ABO naprzeciwko kąta rozwartego jest bok o długości 5, a w trójkącie ODC mamy bok o długości 10. To oznacza, że skala podob

$$k = \frac{10}{5}, k = 2$$

Krok 3. Obliczenie długości boku OD .

Bokiem odpowiadającym do boku OD będzie bok BO o długości 3. Skoro skala podobieństwa jest równa $k = 2$, to bok OD będzie dwa razy większy od boku B

$$|OD| = 2 \cdot 3, |OD| = 6$$

Zadanie 19

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dana jest prosta k o równaniu $y = -3x + 1$.

Zadanie 1.

Jedną z prostych równoległych do prostej k jest prosta o równaniu:

A. $y = 3x + 2$

B. $y = -3x + 2$

C. $y = \frac{1}{3}x + 1$

D. $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Zadanie 2.

Jedną z prostych prostopadłych do prostej k jest prosta o równaniu:

E. $y = \frac{1}{3}x + 2$

F. $y = -\frac{1}{3}x + 2$

G. $y = 3x + 1$

H. $y = -3x + 1$

Odpowiedź: B oraz E

Aby dwie proste były względem siebie równoległe, muszą mieć jednakowy współczynnik kierunkowy a . Skoro więc prosta k ma ten współczynnik równy $a = -3$, to równoległa też musi mieć współczynnik $a = -3$. Z proponowanych odpowiedzi tylko ta druga spełnia nasz warunek, zatem poprawną odpowiedzią będzie $y = -$

Dwie proste są względem siebie prostopadłe tylko wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1 . Skoro więc nasza prosta k ma współczynnik do niej prostopadła musi mieć ten współczynnik równy $\frac{1}{3}$, bo $\frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$. Z podanych odpowiedzi tylko ta pierwsza spełnia ten warunek, zatem prostą prostą $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Zadanie 20

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest kwadrat $ABCD$. Wierzchołki $A = (-2, 1)$ i $C = (4, 5)$ są końcami przekątnej tego kwadratu. Długość $ABCD$ jest równa:

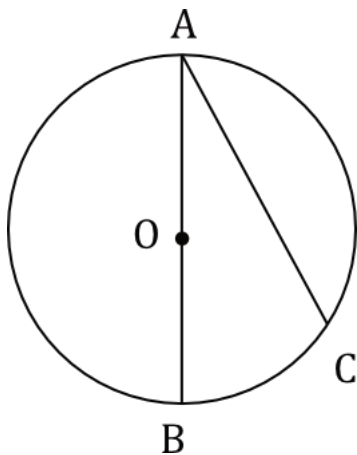
Odpowiedź: B ($2\sqrt{13}$)

Korzystając ze wzoru na długość odcinka, możemy zapisać, że:

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, |AC| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (5 - 1)^2}, |AC| = \sqrt{(4 + 2)^2 + 4^2}, |AC| = \sqrt{6^2 + 4^2}, |AC| = \sqrt{36 + 16}, |AC| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Zadanie 21

Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku w punkcie O i promieniu $r = 8$ (zobacz rysunek). Cięciwa AC ma długość $8\sqrt{3}$.



Miara kąta BAC jest równa:

Odpowiedź: A (30°)

Jeżeli odcinek AB jest średnicą okręgu, to wierzchołki ABC tworzą trójkąt prostokątny (kąt prosty jest przy wierzchołku C).

Odcinek AC jest dłuższą przyprostokątną tego trójkąta i ma on długość $|AC| = 8\sqrt{3}$. W prosty sposób możemy poznać też długość przeciwprostokątnej - skoro okręgu o promieniu $r = 8$, to $|AB| = 2 \cdot 8 = 16$. Podane długości (i tak naprawdę proponowane odpowiedzi) powinny nam już zasugerować, że to będzie trójkąt $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, w którym mamy boki o długości $8, 8\sqrt{3}$ oraz 16 . W takiej sytuacji kąt BAC ma na pewno miarę 30° , gdyż jest to kąt ostry leżący przy dłuższej pr.

Gdybyśmy jednak tego nie dostrzegli, to miarę kąta BAC moglibyśmy poznać chociażby korzystając z funkcji trygonometrycznych. Z pomocą przyjdzie nam cosinus możemy zapisać, że:

$$\cos \alpha = \frac{8\sqrt{3}}{16}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Z tablic trygonometrycznych odczytujemy teraz, że cosinus przyjmuje wartość $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dla kąta o mierze 30° .

Zadanie 22

Kąt α jest ostry oraz $4\operatorname{tg} \alpha = 3\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha$. Tangens kąta α jest równy:

Odpowiedź: A ($\frac{3}{4}$)

Kluczem do sukcesu będzie wyłączenie trójki przed nawias i dostrzeżenie jedynki trygonometrycznej $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Całość obliczeń będzie wyglądać następująco:

$$4\operatorname{tg} \alpha = 3\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha, 4\operatorname{tg} \alpha = 3 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha), 4\operatorname{tg} \alpha = 3 \cdot 1, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Zadanie 23

Dane są dwa trójkąty podobne ABC i KLM o polach równych – odpowiednio – P oraz $2P$. Obwód trójkąta ABC jest równy x .

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Obwód trójkąta KLM jest równy:

A. $\sqrt{2} \cdot x$,

B. $2x$,

ponieważ stosunek obwodów trójkątów podobnych jest równy

1. kwadratowi stosunku pól tych trójkątów.

2. pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku pól tych trójkątów.

3. stosunkowi pól tych trójkątów.

Odpowiedź: A., ponieważ 2.

Z własności figur podobnych wynika, że gdy skala podobieństwa jest równa k , to obwód figury podobnej jest k razy większy od figury podstawowej, a pole jest k^2

W przypadku naszego zadania widzimy, że pole figury podobnej jest 2 razy większe, zatem:

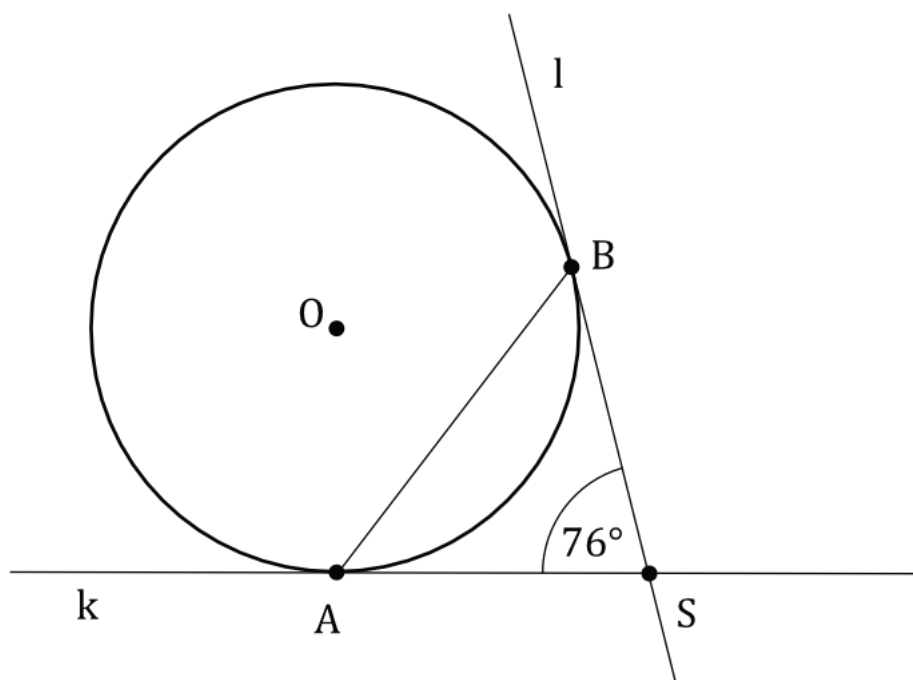
$$k^2 = 2, \quad k = \sqrt{2} \quad \vee \quad k = -\sqrt{2}$$

Ujemną wartość odrzucamy, bo skala podobieństwa jest zawsze dodatnia, zatem $k = \sqrt{2}$. Jeżeli więc obwód trójkąta ABC jest równy x , to obwód trójkąta KLM większy, czyli będzie równy $\sqrt{2} \cdot x$.

Odpowiedzią do tego zadania będzie więc " $\sqrt{2} \cdot x$, ponieważ stosunek obwodów trójkątów podobnych jest równy pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku pól

Zadanie 24

Punkty A oraz B leżą na okręgu o środku O . Proste k i l są styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – A i B . Te proste przecinają się w punkcie S i tworzą kąt 76° (zobacz rysunek).



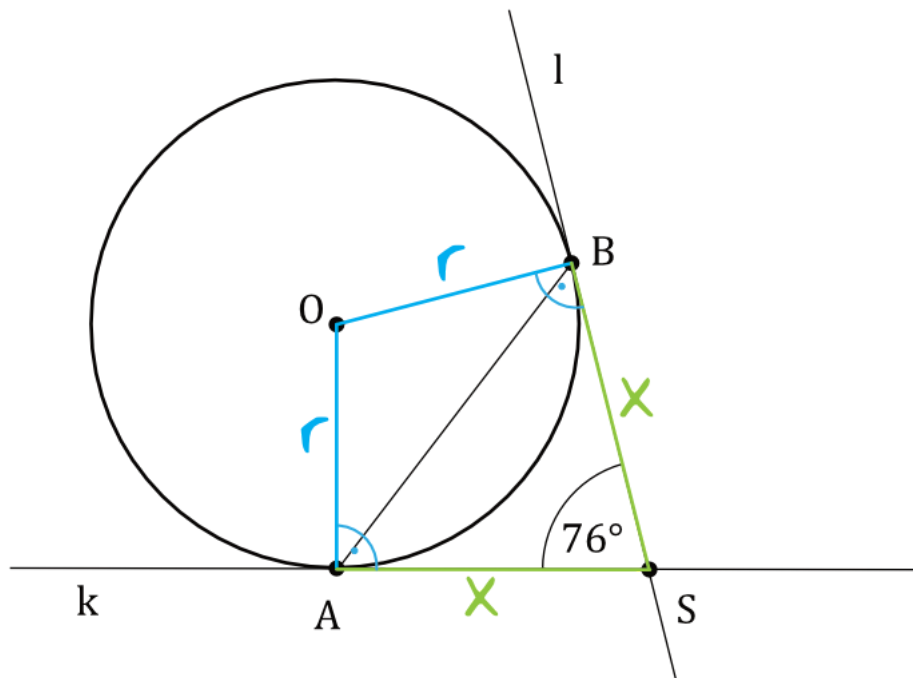
Miara kąta OBA jest równa:

Odpowiedź: D (38°)

Z własności stycznych do okręgu wynika, że odcinki AS oraz BS mają jednakową miarę. Skoro tak, to trójkąt ASB jest równoramienny, czyli kąty przy podstawie mają jednakową miarę. Skoro więc kąt ASB ma miarę 76° , to na dwa pozostałe trójkąty zostaje nam $180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$. To oznacza, że kąty BAS oraz ABS będą:

$$104^\circ : 2 = 52^\circ$$

Drugą kluczową własnością stycznych do okręgu jest fakt, iż styczna tworzy z promieniem okręgu kąt prosty. Skoro tak, to otrzymamy taką oto sytuację:

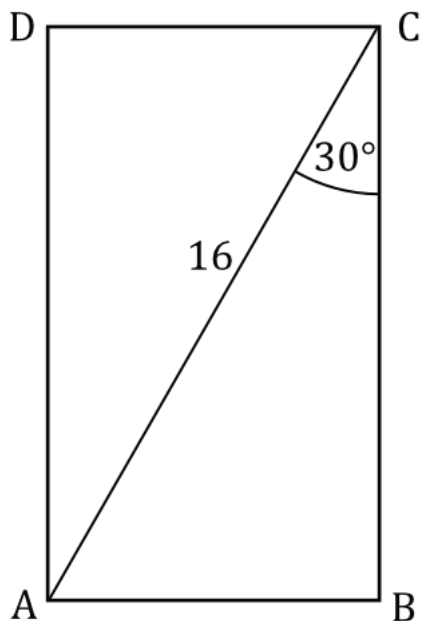


W związku z tym miara kąta OBA jest równa:

$$|\angle OBA| = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$$

Zadanie 25

Powierzchnię boczną graniastopu prawidłowego czworokątnego rozcięto wzdłuż krawędzi bocznej graniastopu i rozłożono na płaszczyźnie. Otrzymano w ten sposób prostokąt $ABCD$, w którym bok BC odpowiada krawędzi rozcięcia (wysokości graniastopu). Przekątna AC tego prostokąta ma długość 16 i tworzy z bokiem BC kąt o miarze 30° (patrz rysunek).



Długość krawędzi podstawy tego graniastopu jest równa:

Odpowiedź: D (2)

Krok 1. Obliczenie długości odcinka AB .

Spójrzmy na trójkąt ABC . Korzystając z własności trójkątów o kątach 30° , 60° , 90° wiemy, że długość krótszej przyprostokątnej (czyli właśnie boku AB) będzie równa połowie długości przeciwprostokątnej AC . Skoro tak, to:

$$|AB| = 16 : 2, \quad |AB| = 8$$

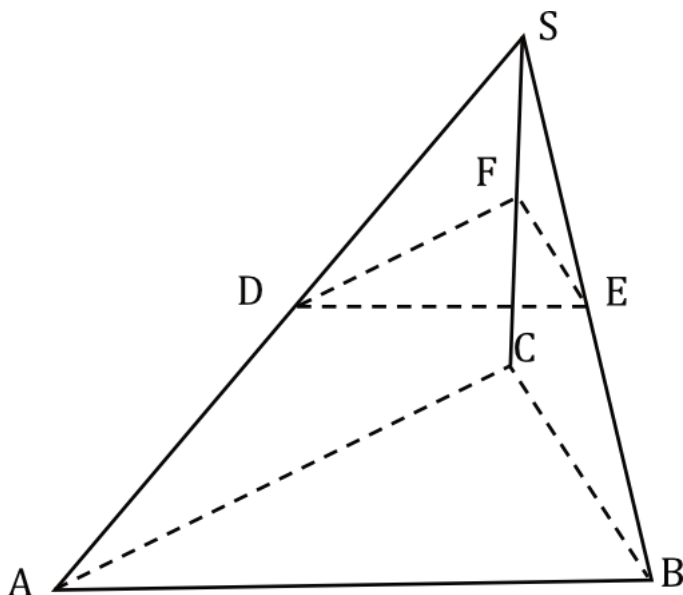
Krok 2. Obliczenie długości krawędzi podstawy tego graniastopu.

Musimy zrozumieć, co tak naprawdę policzyliśmy przed chwilą. Prostokąt z treści zadania to rozłożona siatka powierzchni bocznej graniastopu (czyli ten prostokąt składa się z czterech ścian bocznych). Bok AB jest więc tak naprawdę obwodem naszej bryły, a celem zadania jest obliczenie długości krawędzi graniastopu. Graniastop jest czworokątny, więc ta krawędź będzie cztery razy krótsza od tego boku, czyli:

$$a = 8 : 4, \quad a = 2$$

Zadanie 26

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCS$ o podstawie ABC . Punkty D , E i F są środkami – odpowiednio – krawędzi bocznych AS , BS i CS (zobacz ry.



Stosunek objętości ostrosłupa $DEFS$ do objętości ostrosłupa $ABCS$ jest równy:

Odpowiedź: C (1 : 8)

Krok 1. Obliczenie skali podobieństwa.

Nasz ostrosłup jest prawidłowy, więc skoro podane punkty D , E i F są środkami wskazanych boków, to możemy wywnioskować, że każda krawędź mniejszego ostrosłupa jest połową długości krawędzi większego ostrosłupa $ABCS$. Jeżeli więc przyjmiemy, że ostrosłup $ABCS$ jest podstawowy, a $DEFS$ jest podobny, to skala podobieństwa wynosi

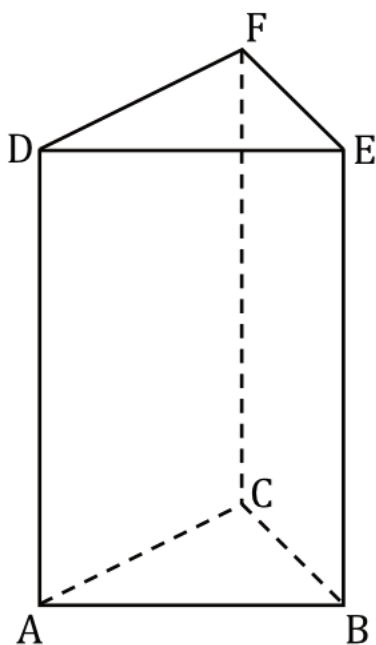
Z własności brył podobnych wynika, że gdy przy skali podobieństwa równej k , objętość bryły podobnej stanowi k^3 bryły podstawowej. Jeżeli więc w naszym przypadku ostrosłup $ABCS$ jest równy V , to objętość bryły $DEFS$ będzie równa $k^3 \cdot V$, czyli:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V = \frac{1}{8} V$$

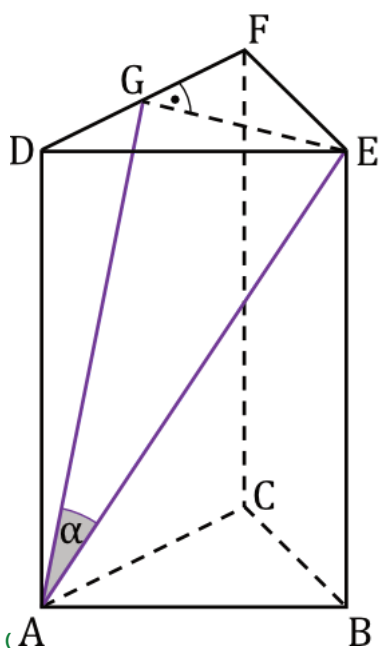
Stosunek objętości ostrosłupa $DEFS$ do objętości ostrosłupa $ABCS$ jest zatem równy 1 : 8.

Zadanie 27

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ (zobacz rysunek obok). Na którym z rysunków prawidłowo narysowano, oznaczono i podpisano kąt α przy bocznej $ACFD$ i przekątną AE ściany bocznej $ABED$ tego graniastosłupa?



$$\alpha = \angle EAG$$



Odpowiedź: A (A)

Zadanie 28

W pojemniku znajdują się losy loterii fantowej ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi od 1000 do 9999. Każdy los, którego numer jest liczbą o sumie cyfr wygrywający. Uczestnicy loterii losują z pojemnika po jednym losie. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że pierwszy los wyciągnięty z pojemnika wygrywający.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{900}$

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Zdarzeń elementarnych będzie tyle, ile jest liczb naturalnych od 1000 do 9999. Takich liczb jest łącznie 9000.

Uwaga - bardzo częstym błędem jest zapisywanie, że takich liczb jest $9999 - 1000 = 8999$. Przykładowo, liczb od 1000 do 1002 mamy dokładnie 3, a nie 1002 - 1000 = 2.

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Musimy ustalić, ile jest losów wygrywających. Wbrew pozorom nie będzie ich wcale tak dużo. Na pewno odpadają wszystkie losy, mające przynajmniej jedną cyfrę 0 (nie zbudujemy liczby, której suma cyfr jest równa 3). Dodatkowo warto zauważyć, że jest tylko jedna liczba mająca cyfrę 3, która będzie liczbą sprzyjającą - 1003. Bazując na tych obserwacjach, spróbujmy wypisać wszystkie interesujące nas liczby:

1011, 1101, 1110, 1002, 1020, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000

Takich liczb mamy 10, a to oznacza, że $|A| = 10$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{9000} = \frac{1}{900}$$

Zadanie 29

Rozważamy wszystkie równoległoboki o obwodzie równym 200 i kącie ostrym o mierze 30° . Podaj wzór i dziedzinę funkcji opisującej zależność pola takiego równoległoboku od boku a równoległoboku. Oblicz wymiary tego z rozważanych równoległoboków, który ma największe pole, i oblicz to największe pole.

Odpowiedź: 50×50 oraz

Krok 1. Zapisanie zależności między bokami równoległoboku.

Równoległobok ma dwie pary boków jednakowej długości. Skoro więc obwód ten jest równy 200, to możemy zapisać, że:

$$2a + 2b = 200, \quad a + b = 100, \quad b = 100 - a$$

Dodatkowo powinniśmy dostrzec, że długość boku b musi być dodatnia, stąd też:

$$100 - a > 0, \quad -a > -100, \quad a < 100$$

Krok 2. Zapisanie zależności między polem powierzchni i długością boku a .

$$P = a \cdot b \cdot \sin 30^\circ, \quad P = a \cdot (100 - a) \cdot \frac{1}{2}, \quad P = (100a - a^2) \cdot \frac{1}{2}, \quad P = -\frac{1}{2}a^2 + 50a$$

Krok 3. Obliczenie współrzędnej p wierzchołka paraboli.

$$p = \frac{-b}{2a}, \quad p = \frac{-50}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}, \quad p = \frac{-50}{-1}, \quad p = 50$$

Otrzymany wynik oznacza, że funkcja osiąga więc największą wartość dla argumentu równego 50, co w naszym przypadku oznacza, że $a = 50$.

Krok 4. Obliczenie długości b .

Skoro $a = 50$, to zgodnie z zapisami z pierwszego kroku, długość drugiego boku tej figury będzie równa:

$$b = 100 - a, \quad b = 100 - 50, \quad b = 50$$

To w praktyce oznacza, że poszukiwanym równoległobokiem będzie tak naprawdę romb o boku 50.

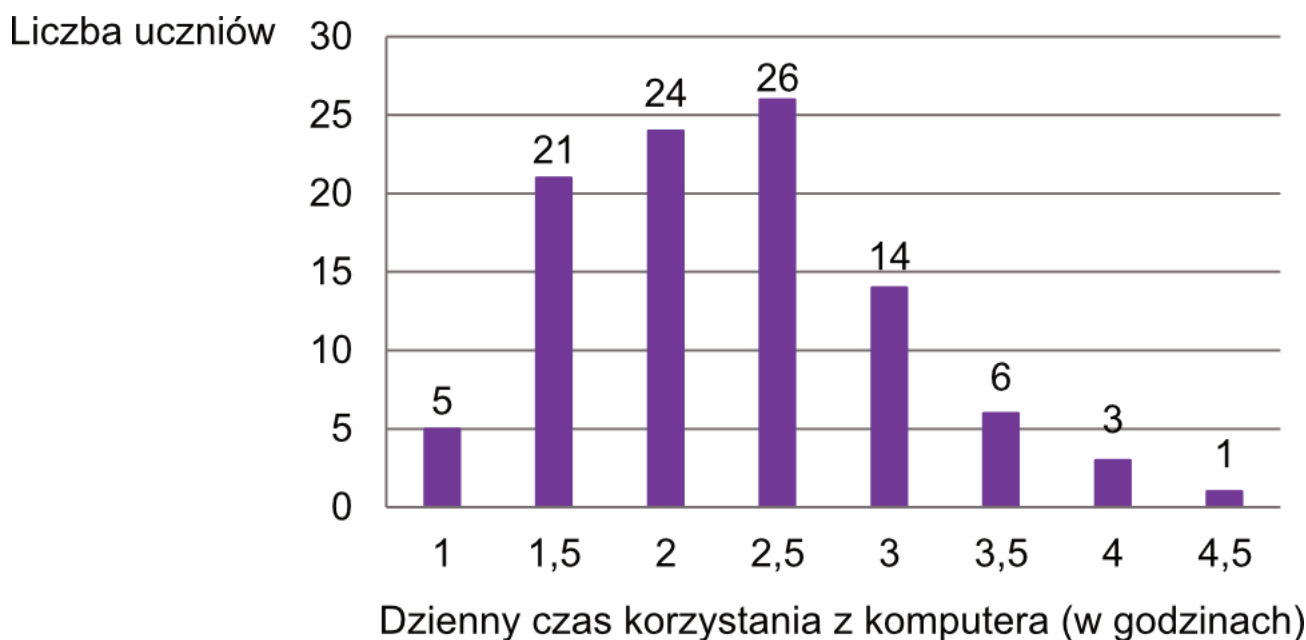
Krok 5. Obliczenie pola równoległoboku.

Musimy jeszcze obliczyć pole tego równoległoboku, zatem:

$$P = a \cdot b \cdot \sin 30^\circ, \quad P = 50 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2}, \quad P = 2500 \cdot \frac{1}{2}, \quad P = 1250$$

Zadanie 30

W pewnej grupie 100 uczniów przeprowadzono sondaż dotyczący dziennego czasu korzystania z komputera. Wyniki sondażu przedstawia poniższy diagram. Na oś wyrażony w godzinach – dzienny czas korzystania przez ucznia z komputera. Na osi pionowej przedstawiono liczbę uczniów, którzy dziennie korzystają z komputera



Zadanie 1.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Mediana dziennego czasu korzystania przez ucznia z komputera jest równa 2, 25 godziny. P/F

Połowa z tej grupy uczniów korzysta dziennie z komputera przez mniej niż 2, 5 godziny. P/F

Zadanie 2.

Dominanta dziennego czasu korzystania przez ucznia z komputera jest równa:

A. 2, 25 godziny

B. 2, 50 godziny

C. 2, 75 godziny

D. 1, 50 godziny

Odpowiedź: 1. P oraz P 2. B.

Zadanie 1.

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Z wykresu wynika, że liczba uczniów wynosi:

$$5 + 21 + 24 + 26 + 14 + 6 + 3 + 1 = 100$$

Liczba uczniów jest parzysta, zatem medianą będzie średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów. W tym przypadku środkowymi wyrazami będzie wyraz nu

Obliczając medianę zawsze musimy mieć uporządkowany ciąg liczb w porządku niemalejącym (czyli od najmniejszej do największej). Oczywiście nie będziemy tutaj ciągu liczb, tylko analizując wykres, spróbujemy określić który to wyraz jest tym o numerze 50 i 51. Widzimy, że uczniów korzystających z komputera przez 1 lub 1 łącznie $5 + 21 + 24 = 50$ osób. To oznacza, że wyraz numer 50 jest równy 2, a wyraz numer 51 jest równy 2, 5. To oznacza, że mediana będzie równa:

$$m = \frac{2 + 2,5}{2}, m = \frac{4,5}{2}, m = 2,25$$

Pierwsze zdanie jest więc prawdą.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Ustaliliśmy już, że w sondażu wzięło udział 100 uczniów, z czego 50 z nich spędza przed komputerem 1 lub 1,5 lub 2 godziny. To oznacza, że faktycznie połowa uczniów spędza przed komputerem mniej niż 2,5 godziny, zatem zdanie jest prawdą.

Zadanie 2.

Dominanta to wynik, który pojawia się najczęściej. Z wykresu wynika jasno, że najczęstszym wskazaniem były 2,5 godziny.