

# Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Przykładowy arkusz CKE

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

## Odpowiedzi do zadań zamkniętych

| Zadanie | Odpowiedź                               | Pkt |
|---------|-----------------------------------------|-----|
| 1       | D (15, 24)                              | 1   |
| 2       | C ( $4\sqrt{10}$ )                      | 1   |
| 3       | D ( $4 + 2\sqrt{3}$ )                   | 1   |
| 4       | B ( $9 \cdot \sqrt[4]{3}$ )             | 1   |
| 5       | C ( $x = \log_3 6$ )                    | 1   |
| 6       | A ( $((3 - 3x) \cdot (5 + 3x))$ )       | 1   |
| 7       | D ( $\sqrt[3]{-256} = -\sqrt[3]{256}$ ) | 1   |
| 8       | D ( $(\frac{1}{2}, +\infty)$ )          | 1   |
| 9       | C (20%)                                 | 1   |
| 10      | D (7)                                   | 1   |
| 11      | B ( $f(44)$ )                           | 1   |
| 12      | B (ACS)                                 | 1   |
| 13      | A ( $f(1) = f(9)$ )                     | 1   |
| 14      | C ( $\frac{3}{7}$ )                     | 1   |
| 15      | B (0 oraz $\frac{1}{2}$ )               | 1   |
| 16      | C ( $9x + 12y - 10 = 0$ )               | 1   |
| 17      | D ( $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ )             | 1   |
| 18      | D ( $r = \frac{1}{2}l$ )                | 1   |
| 19      | C (10)                                  | 1   |
| 20      | A (66)                                  | 1   |
| 21      | B (6)                                   | 1   |
| 22      | B (4)                                   | 1   |
| 23      | B ( $2p_6 = p_3$ )                      | 1   |

## Rozwiązania krok po kroku

### Zadanie 1

0-1 pkt

Liczba 15 jest przybliżeniem z niedomiarem liczby  $x$ . Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy 0, 24. Liczba  $x$  to:

**Odpowiedź:** D (15, 24)

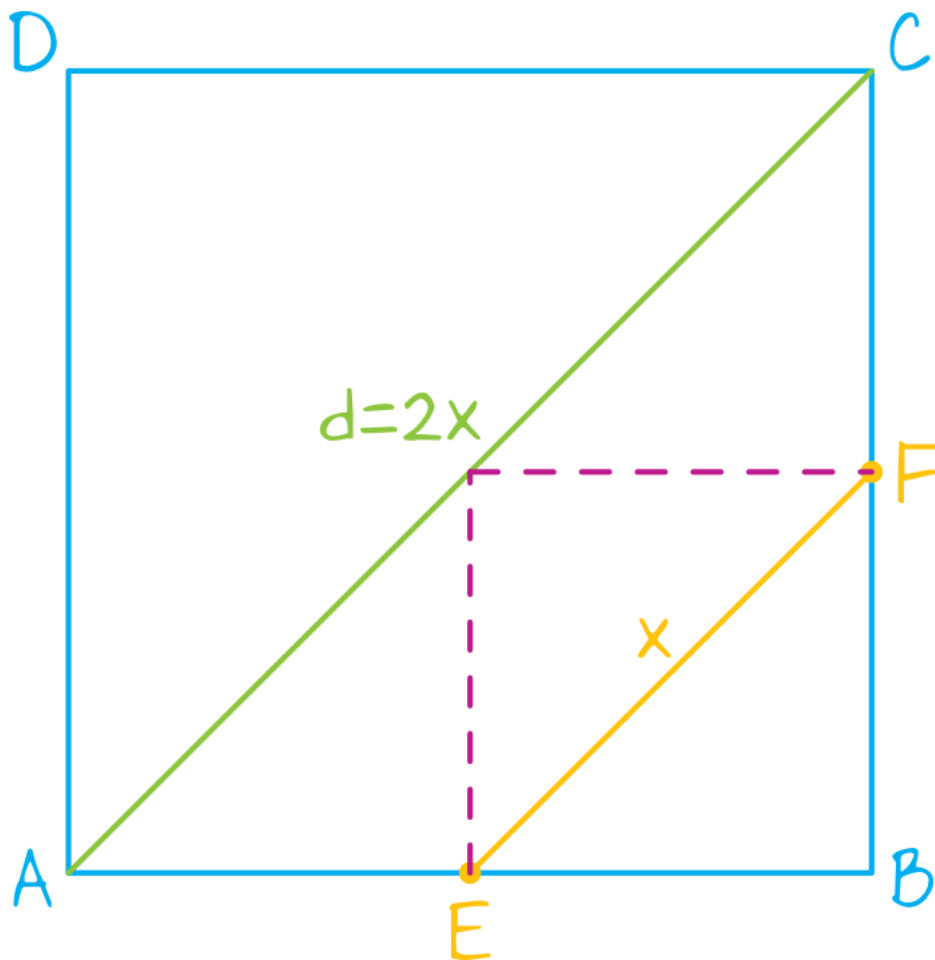
Liczba 15 jest przybliżeniem z niedomiarem, czyli na pewno poszukiwana przez nas liczba  $x$  jest większa od 15. Skoro więc błąd bezwzględny wyniósł 0, 24, to nasza liczba  $x$  jest równa:

$$x = 15 + 0,24 = 15,24$$

**Zadanie 2**

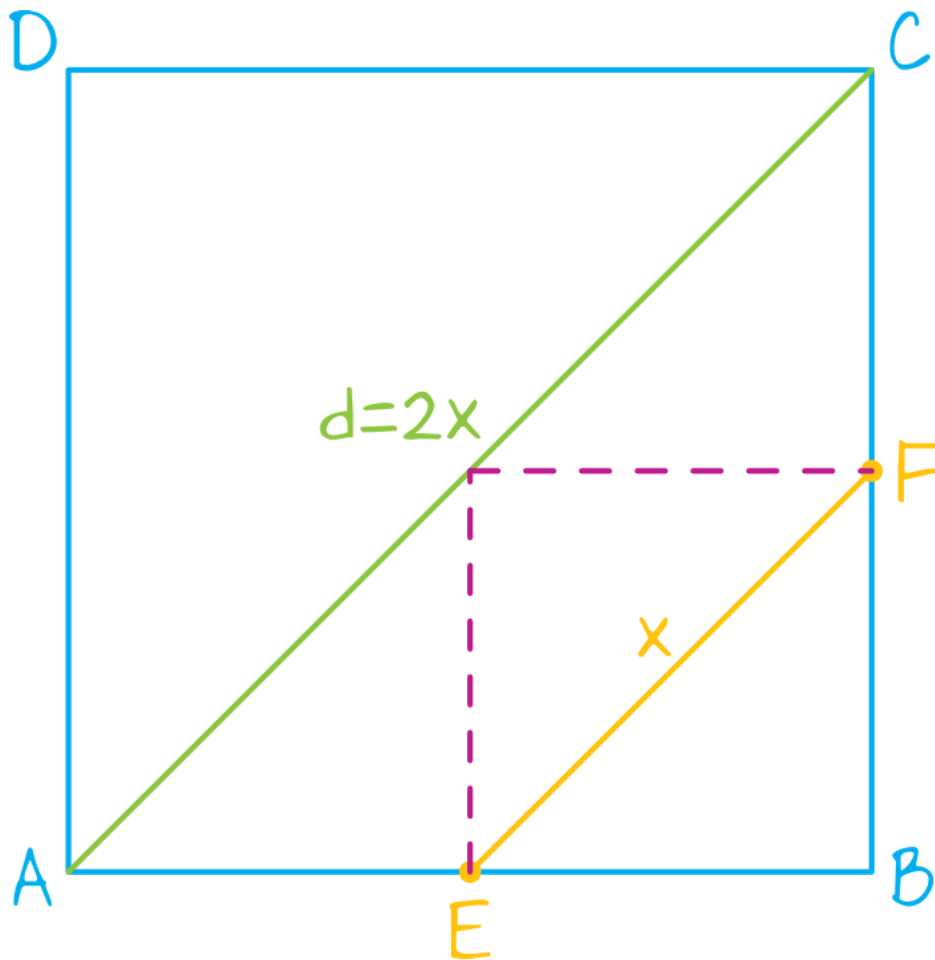
0-1 pkt

Punkty  $E = (7, 1)$  i  $F = (9, 7)$  to środki boków, odpowiednio  $AB$  i  $BC$  kwadratu  $ABCD$ . Przekątna tego kwadratu ma długość:



**Odpowiedź: C** ( $4\sqrt{10}$ )

Krok 1. Sporządzenie rysunku poglądowego.



Z naszego rysunku musimy odczytać bardzo ważną informację (którą zaznaczyłem już na rysunku), czyli że przekątna  $AC$  jest dwa razy większa od przekątnej  $EF$ . Skąd to wiemy? Wynika to z tego, że bok  $AB$  jest dwa razy dłuższy od boku  $EB$  oraz analogicznie bok  $BC$  jest dwa razy dłuższy od boku  $BF$ . Krótko mówiąc - bok  $EF$  jest tak jakby przekątną kwadratu, który ma dwa razy krótszy bok od kwadratu  $ABCD$ . Stąd też przekątna  $EF$  jest dwa razy krótsza od przekątnej  $AC$ .

Skoro tak, to musimy teraz obliczyć długość przekątnej  $EF$  i otrzymany wynik pomnożyć przez dwa - wtedy otrzymamy długość przekątnej  $AC$ .

Krok 2. Obliczenie długości przekątnej  $EF$ .

Skorzystamy ze wzoru na długość odcinka w układzie współrzędnych:

$$|EF| = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}, \quad |EF| = \sqrt{(9 - 7)^2 + (7 - 1)^2}, \quad |EF| = \sqrt{2^2 + 6^2}, \quad |EF| = \sqrt{4 + 36}, \quad |EF| = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$$

Krok 3. Obliczenie długości przekątnej  $AC$ .

Zgodnie z tym co zapisaliśmy wcześniej, przekątna  $AC$  jest dwa razy dłuższa od przekątnej  $EF$ , zatem:

$$|AC| = 2 \cdot 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

#### Zadanie 3

0-1 pkt

Liczba  $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2$  jest równa:

**Odpowiedź: D**  $(4 + 2\sqrt{3})$

Rozwiązanie tego zadania będzie znacznie prostsze, kiedy potęgę znajdującą się na końcu liczby rozpiszemy jako oddzielnie potęgowanie licznika i mianownika:

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2}$$

W liczniku posłużymy się teraz wzorem skróconego mnożenia, zatem całość obliczeń będzie wyglądać następująco:

$$\frac{(3+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{3} = 4+2\sqrt{3}$$

## Zadanie 4

0-1 pkt

Liczba  $3^{\frac{9}{4}}$  jest równa:

**Odpowiedź: B** ( $9 \cdot \sqrt[4]{3}$ )

Przyglądając się odpowiedziom od razu możemy odrzucić odpowiedź  $D$ , bowiem mnożąc dwie liczby o tej samej podstawie potęgi musimy dodać do siebie wykładniki tych potęg. Zatem w odpowiedzi  $D$  otrzymalibyśmy:

$$3^9 \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3^{9+\frac{1}{4}} = 3^{\frac{37}{4}}$$

Po pozostałych odpowiedziach widzimy, że interesuje nas odpowiedź w której pojawi się  $\sqrt[4]{3}$ . Ułamek  $\frac{9}{4}$  możemy zapisać jako  $2\frac{1}{4}$  i taki zapis znacznie nam uprości rozwiązanie tego zadania:

$$3^{\frac{9}{4}} = 3^{2+\frac{1}{4}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 9 \cdot \sqrt[4]{3}$$

## Zadanie 5

0-1 pkt

Funkcja wykładnicza określona wzorem  $f(x) = 3^x$  przyjmuje wartość 6 dla argumentu:

**Odpowiedź: C** ( $x = \log_3 6$ )

Naszym zadaniem jest tak naprawdę rozwiązanie równania  $3^x = 6$ .

Aby rozwiązać to równanie to najprościej będzie posłużyć się definicją logarytmu, którą znajdziemy chociażby w tablicach maturalnych.

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Porównując zapis  $a^c = b$  do zapisu  $3^x = 6$  widzimy, że:  $a = 3$ ,  $b = 6$  oraz  $c = x$ . Podstawiając teraz te symbole do definicji logarytmu otrzymamy, że  $x = \log_3 6$ .

## Zadanie 6

0-1 pkt

Wyrażenie  $16 - (3x + 1)^2$  jest równe:

**Odpowiedź: A** ( $(3 - 3x) \cdot (5 + 3x)$ )

Krok 1. Zapisanie podanego wyrażenia w postaci  $a^2 - b^2$ .

Wbrew pozorom nie jest najlepszym pomysłem wykonanie potęgowania  $(3x + 1)^2$ . Najprościej jest rozwiązać to zadanie zapisując 16 jako  $4^2$ , otrzymamy wtedy:  $4^2 - (3x + 1)^2$ .

Jeśli teraz zauważymy, że  $a = 4$  oraz  $b = 3x + 1$ , to możemy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Krok 2. Wykonanie obliczeń z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.

$$4^2 - (3x + 1)^2 = (4 - (3x + 1)) \cdot (4 + (3x + 1)) = , = (4 - 3x - 1) \cdot (4 + 3x + 1) = (3 - 3x) \cdot (5 + 3x)$$

## Zadanie 7

0-1 pkt

Wskaż równość prawdziwą:

**Odpowiedź: D** ( $\sqrt[3]{-256} = -\sqrt[3]{256}$ )

W tym zadaniu należało przede wszystkim pamiętać o tym, że  $-a^2$  to nie jest to samo, co  $(-a)^2$  oraz o tym, że liczba ujemna podniesiona do potęgi parzystej daje wynik dodatni, a podniesiona do potęgi nieparzystej daje wynik ujemny.

Prawidłową zależnością jest jedynie ta opisana w ostatniej odpowiedzi, czyli  $\sqrt[3]{-256} = -\sqrt[3]{256}$ . Pozostałe są błędne, bo:

$$(-256)^2 = 256^2, (-256)^3 = -256^3, \sqrt{(-256)^2} = 256$$

**Zadanie 8**

0-1 pkt

Zbiorem rozwiązań nierówności  $\frac{2-x}{3} - \frac{2x-1}{2} < x$  jest przedział:

**Odpowiedź: D** ( $(\frac{1}{2}, +\infty)$ )

Na początku rozwiązywania tej nierówności najlepiej będzie pozbyć się ułamków, mnożąc obie strony przez 6. Całość obliczeń wyglądać będzie następująco:

$$\frac{2-x}{3} - \frac{2x-1}{2} < x \quad \Bigg| \cdot 6, \quad 6 \cdot \frac{2-x}{3} - 6 \cdot \frac{2x-1}{2} < 6x, \quad 2 \cdot (2-x) - 3 \cdot (2x-1) < 6x, \quad 4-2x-(6x-3) < 6x, \quad 4-2x-6x+3 < 6x, \quad -8x+7 < 6x$$

Przedział opisujący to rozwiązanie znalazł się w ostatniej odpowiedzi.

**Zadanie 9**

0-1 pkt

W klasie jest cztery razy więcej chłopców niż dziewcząt. Ile procent wszystkich uczniów tej klasy stanowią dziewczęta?

**Odpowiedź: C** (20%)

$x$  - liczba dziewczyn

$4x$  - liczba chłopców

$x + 4x = 5x$  - tyle dzieci jest w klasie

Dziewczyny stanowią  $\frac{x}{5x} = \frac{1}{5} = 20\%$  klasy.

**Zadanie 10**

0-1 pkt

Reszta z dzielenia liczby 55 przez 8 jest równa:

**Odpowiedź: D** (7)

Skoro  $6 \cdot 8 = 48$ , to reszta z dzielenia liczby 55 przez 8 jest równa  $55 - 48 = 7$ .

**Zadanie 11**

0-1 pkt

Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej większej od 1 jej największy dzielnik będący liczbą pierwszą. Spośród liczb:  $f(42)$ ,  $f(44)$ ,  $f(45)$ ,  $f(48)$  największa to:

**Odpowiedź: B** ( $f(44)$ )

Krok 1. Wypisanie dzielników liczb 42, 44, 45 oraz 48.

$$D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}, \quad D_{44} = \{1, 2, 4, 11, 22, 44\}, \quad D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}, \quad D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48\}$$

Krok 2. Wybór największego dzielnika każdej z liczb będącego liczbą pierwszą.

Liczba pierwsza to taka, która dzieli się tylko przez jedynekę oraz przez samą siebie.

Największymi dzielnikami będącymi liczbą pierwszą jest:

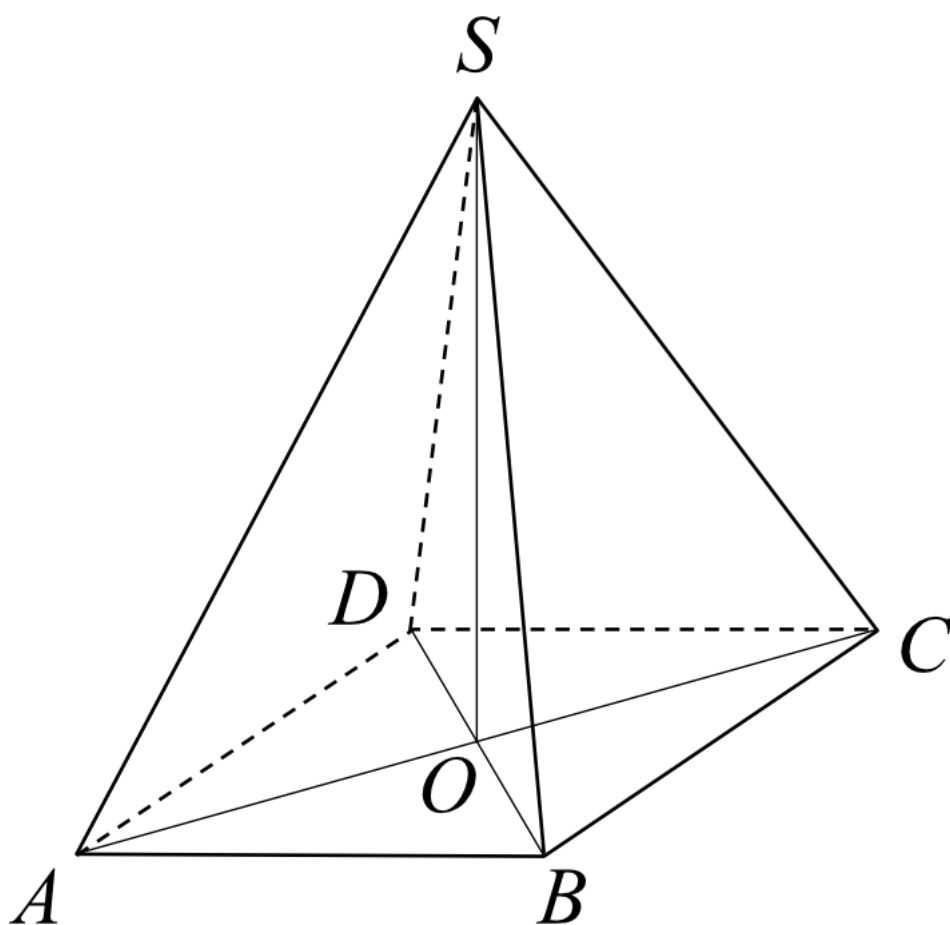
Dla 42 - liczba 7

Dla 44 - liczba 11

Dla 45 - liczba 5

Dla 48 - liczba 3

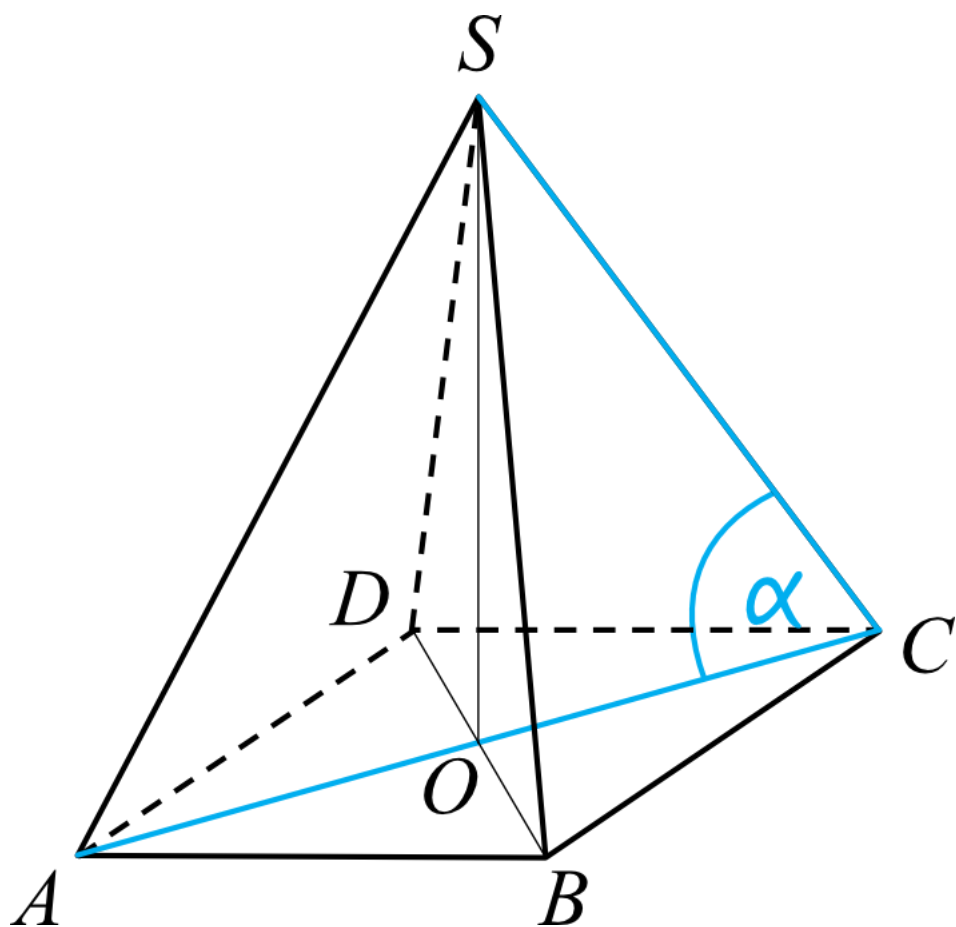
Rysunek przedstawia ostrosłup prawidłowy czworokątny  $ABCD.S$ .



Kątem między krawędzią  $CS$ , a płaszczyzną podstawy tego ostrosłupa, jest kąt:

**Odpowiedź: B ( $ACS$ )**

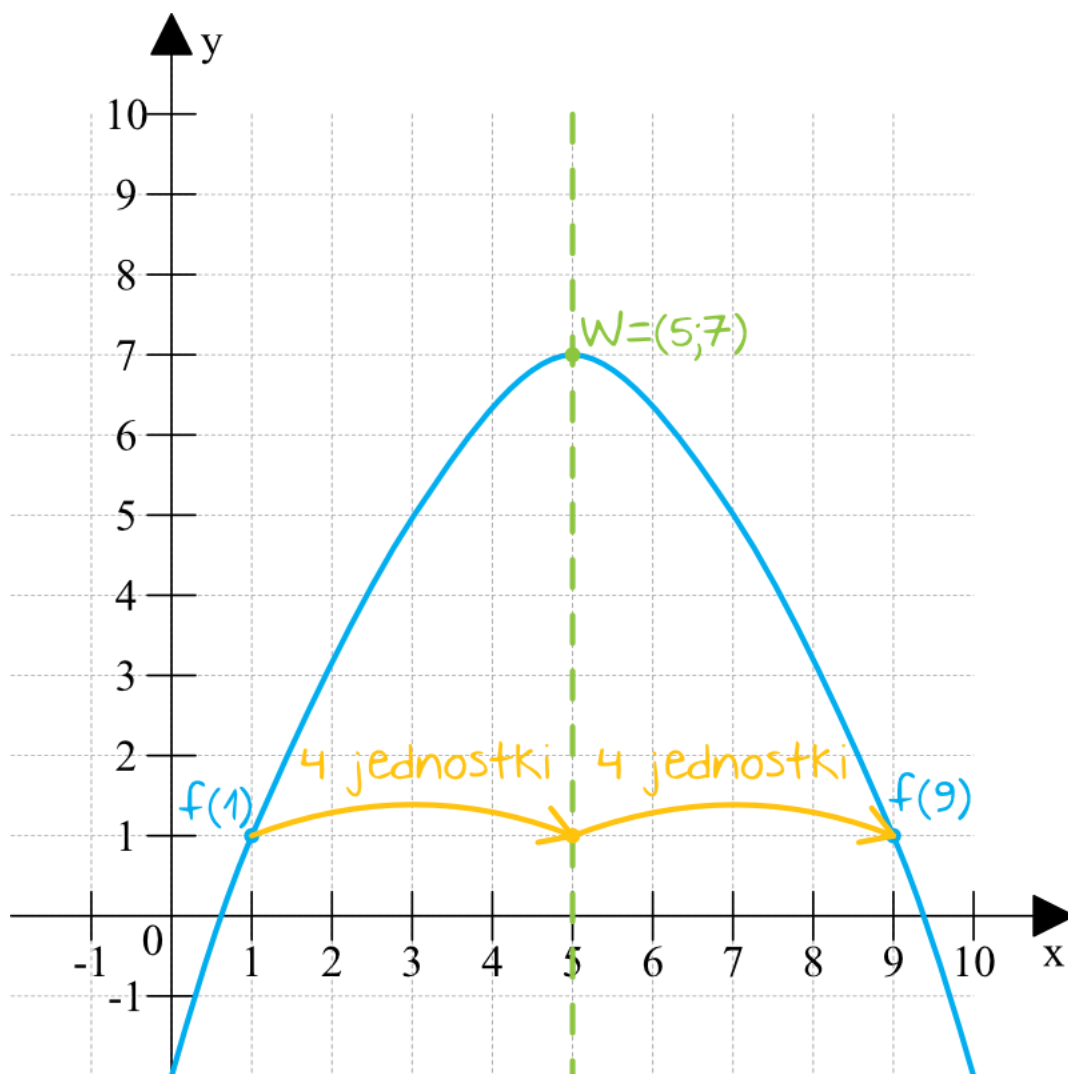
Poszukujemy nazwy następującego kąta:



Należy pamiętać, że środkowa litera w zapisie nazewnictwa kątów oznacza wierzchołek danego kąta.  
Kątem między krawędzią  $CS$ , a płaszczyzną podstawy ostrosłupa będzie więc kąt  $ACS$ .

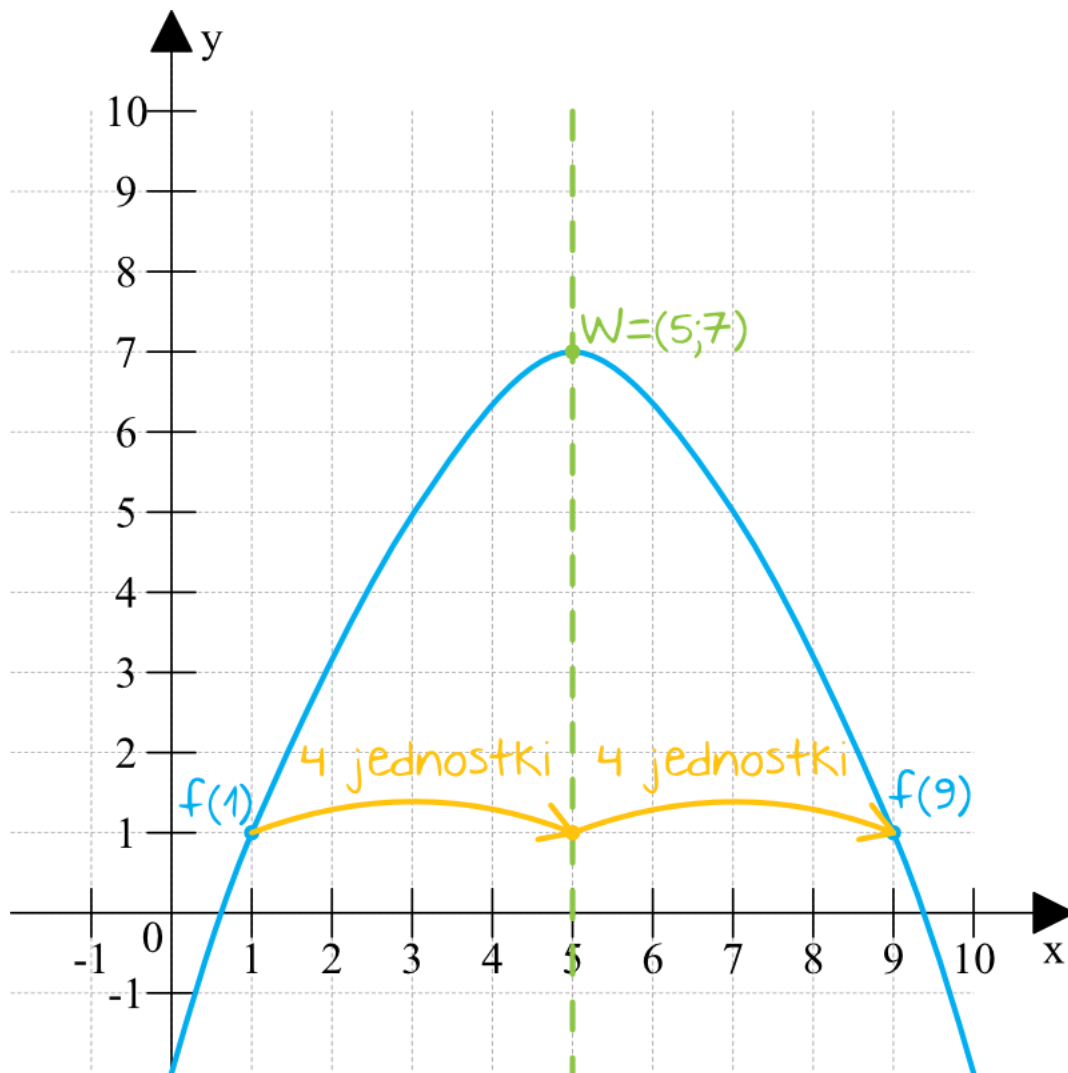
Tak na marginesie, to równie dobrze moglibyśmy napisać, że byłby to kąt  $OCS$ , albo  $SCO$ , ale takich odpowiedzi nie mamy, więc na pewno będzie to  $ACS$ .

Wykresem funkcji kwadratowej  $f$  jest parabola o wierzchołku  $W = (5, 7)$ . Wówczas prawdziwa jest równość:



**Odpowiedź:** A ( $f(1) = f(9)$ )

Nie mamy informacji na temat wzoru tej funkcji, ani na temat tego czy ta funkcja kwadratowa ma ramiona skierowane do góry, czy do dołu, ale to akurat nie jest w tym zadaniu dla nas istotne. Załóżmy sobie, że ma ramiona skierowane do dołu, wtedy wykres będzie wyglądał następująco:



Wykres paraboli jest symetryczny względem prostej przechodzącej dokładnie przez wierzchołek paraboli (patrz rysunek). To oznacza, że wartość równą  $f(1)$  osiągniemy także dla argumentu, którego współrzędna xowa jest oddalona od wierzchołka o tyle samo jednostek co jest oddalona jedynka. Skoro między jedynką i piątką są 4 jednostki, to poszukiwanym argumentem jest  $x = 5 + 4 = 9$ . Zatem  $f(1) = f(9)$ .

Podobnie by było, gdyby ramiona były skierowane do góry, dlatego informacja o tym jak dokładnie wygląda ta funkcja nie była nam potrzebna.

## Zadanie 14

0-1 pkt

Jeżeli kąt  $\alpha$  jest ostry i  $tg\alpha = \frac{3}{4}$ , to  $\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$  równa się:

**Odpowiedź: C ( $\frac{3}{7}$ )**

To zadanie teoretycznie można rozwiązać nie wykonując żadnych obliczeń. Skoro kąt  $\alpha$  jest ostry, to wartość cosinusa kąta  $\alpha$  jest na pewno wartością większą od zera i mniejszą od jedynki. Jeśli do licznika ułamka  $\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$  podstawimy pod  $\cos\alpha$  dowolną dodatnią liczbę mniejszą od jedynki, to wyjdzie nam że w liczniku mamy wartość nieco ponad 1 (nie wiemy ile dokładnie, ale na pewno jest to liczba dodatnia). Analogicznie w mianowniku wyjdzie nam wartość większa od 2 (także nie wiemy jaka, ale znowu jest to liczba dodatnia, w dodatku na pewno jest to liczba większa od tej z licznika). Skoro tak, to już na wstępie możemy odrzucić dwie pierwsze odpowiedzi, bo wartość całego ułamka jest na pewno liczbą dodatnią. Możemy też odrzucić ostatnią odpowiedź, bo wartość tego ułamka jest mniejsza od jednego (gdyż udowodniliśmy, że licznik jest mniejszy od mianownika). Zatem bez obliczeń wiemy, że jedyną możliwą prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź trzecia. Gdybyśmy chcieli to jednak rozwiązać nieco bardziej matematycznie, to należałoby postąpić w następujący sposób:

Krok 1. Zapisanie relacji między sinusem i cosinusem kąta  $\alpha$ .

Funkcję trygonometryczną  $tg\alpha$  możemy zapisać jako  $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ . Zatem:

$$tg\alpha = \frac{3}{4}, \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$$

Mnożąc na krzyż otrzymujemy:

$$4\sin\alpha = 3\cos\alpha$$

Krok 2. Wyznaczenie wartości  $\cos\alpha$ .

Skorzystamy z jedynki trygonometrycznej wyrażonej wzorem  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ . Nas interesuje poznanie wartości  $\cos\alpha$ , dlatego też pod sinusa podstawimy przekształcone równanie wyznaczone w pierwszym kroku:

$$4\sin\alpha = 3\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha$$

Podstawiając tą wartość do jedynki trygonometrycznej otrzymamy:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \left(\frac{3}{4}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1, \quad \frac{9}{16}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Bigg/ \cdot 16, \quad 9\cos^2\alpha + 16\cos^2\alpha = 16, \quad 25\cos^2\alpha = 16 \quad \Bigg/ : 25, \quad \cos^2\alpha = \frac{16}{25}, \quad \cos\alpha =$$

Wartość ujemną odrzucamy, bo mamy podaną informację, że kąt jest ostry, a dla kątów ostrych cosinus jest dodatni. Zatem zostaje nam, że  $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ .

Krok 3. Obliczenie wartości całego wyrażenia.

Na sam koniec musimy już tylko podstawić wyznaczoną wartość cosinusa i obliczyć wartość podanego wyrażenia:

$$\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha} = \frac{2-\frac{4}{5}}{2+\frac{4}{5}} = \frac{1\frac{1}{5}}{2\frac{4}{5}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{14}{5}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

## Zadanie 15

0-1 pkt

Równanie  $(2x-1) \cdot (x-2) = (1-2x) \cdot (x+2)$  ma dwa rozwiązania. Są to liczby:

**Odpowiedź: B (0 oraz  $\frac{1}{2}$ )**

Aby rozwiązać to zadanie musimy najpierw wymnożyć przez siebie poszczególne nawiasy:

$$(2x-1) \cdot (x-2) = (1-2x) \cdot (x+2), \quad 2x^2 - 4x - x + 2 = x + 2 - 2x^2 - 4x, \quad 2x^2 - x = x - 2x^2, \quad 4x^2 - 2x = 0 \quad \Bigg/ : 2, \quad 2x^2 - x = 0, \quad x(2x-1)$$

## Zadanie 16

0-1 pkt

Dane jest równanie  $3x + 4y - 5 = 0$ . Z którym z poniższych równań tworzy ono układ sprzeczny?

**Odpowiedź: C** ( $9x + 12y - 10 = 0$ )

Układ jest sprzeczny, kiedy po rozwiązaniu układu otrzymamy nieprawdziwą równość np.  $1 = 2$ . Równanie z treści zadania stworzy sprzeczny układ jedynie z trzecim równaniem:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5 = 0 \\ 9x + 12y - 10 = 0 \end{cases} \quad \cdot 3 \quad ,$$

$$\begin{cases} 9x + 12y - 15 = 0 \\ 9x + 12y - 10 = 0 \end{cases} \quad ,$$

Odejmując te równania stronami otrzymamy:

$$-15 - (-10) = 0, \quad -15 + 10 = 0, \quad -5 = 0$$

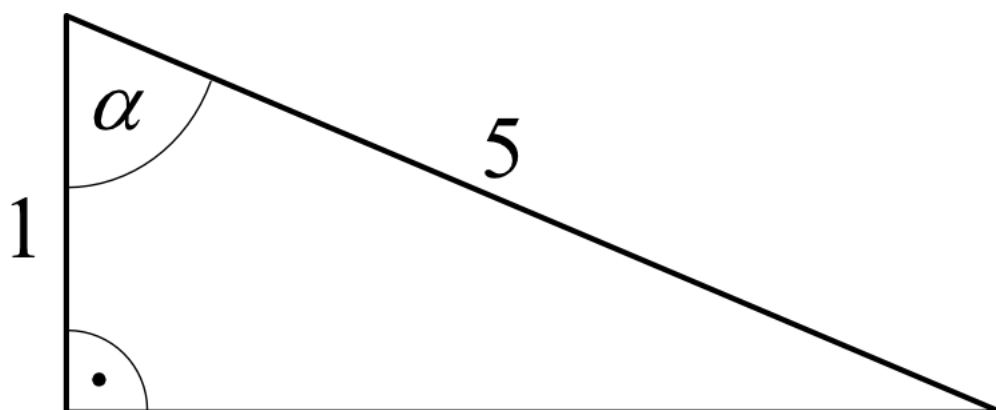
Otrzymany wynik świadczy o sprzeczności układu.

Warto też dodać, że nasze równanie stworzyłoby z równaniem z pierwszej odpowiedzi układ tożsamościowy, czyli taki w którym rozwiązaniem będzie każda liczba rzeczywista.

## Zadanie 17

0-1 pkt

W trójkącie, przedstawionym na rysunku poniżej, sinus kąta ostrego  $\alpha$  jest równy:



**Odpowiedź: D** ( $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ )

Krok 1. Wyznaczenie długości drugiej przyprostokątnej.

Do wyznaczenia wartości sinusa kąta ostrego  $\alpha$  potrzebujemy znać długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta. Tą długość wyznaczymy z Twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad 1^2 + b^2 = 5^2, \quad 1 + b^2 = 25, \quad b^2 = 24, \quad b = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$$

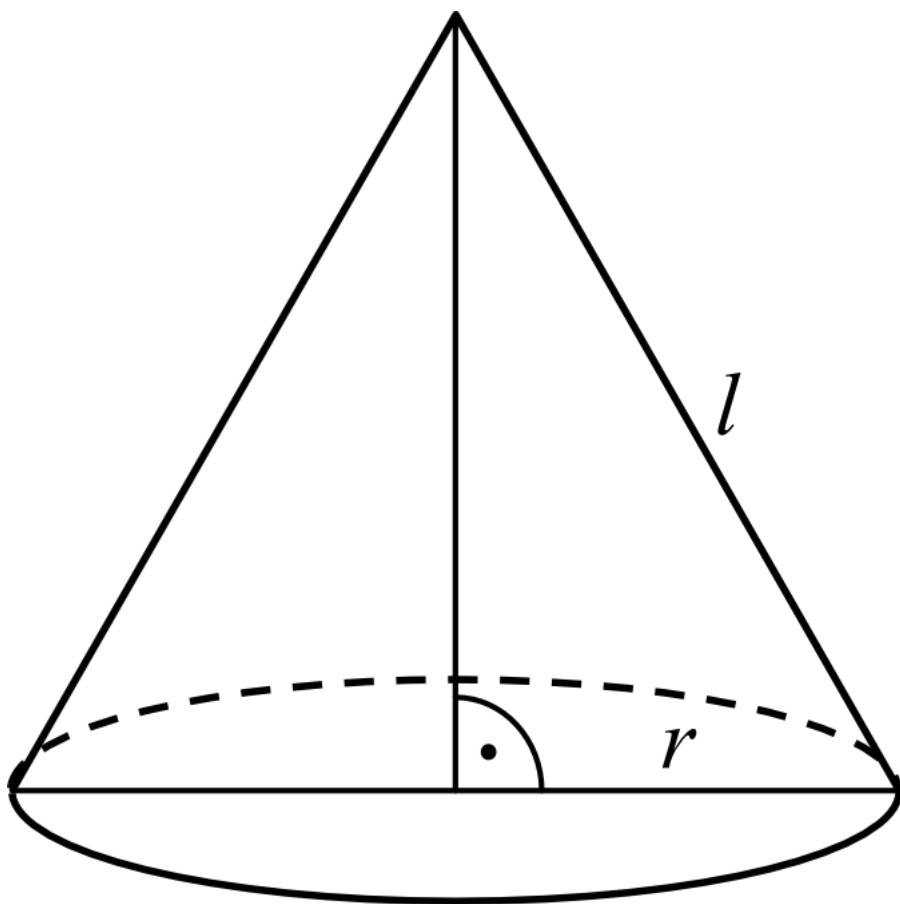
Krok 2. Obliczenie wartości sinusa kąta  $\alpha$ .

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

## Zadanie 18

0-1 pkt

Tworząca stożka ma długość  $l$ , a promień jego podstawy jest równy  $r$ .



Powierzchnia boczna tego stożka jest 2 razy większa od pola jego podstawy. Wówczas:

**Odpowiedź: D** ( $r = \frac{1}{2}l$ )

Krok 1. Ułożenie poprawnego równania na podstawie danych z treści zadania.

Skoro powierzchnia boczna stożka (określana wzorem  $\pi r l$ ) jest 2 razy większa od pola podstawy (określonego wzorem  $\pi r^2$ ), to znaczy że prawdziwe jest równanie:

$$\pi r l = 2 \cdot \pi r^2$$

(Mnożymy przez 2 pole podstawy by było one równe polu ściany bocznej.)

Krok 2. Wyznaczenie wartości  $r$ .

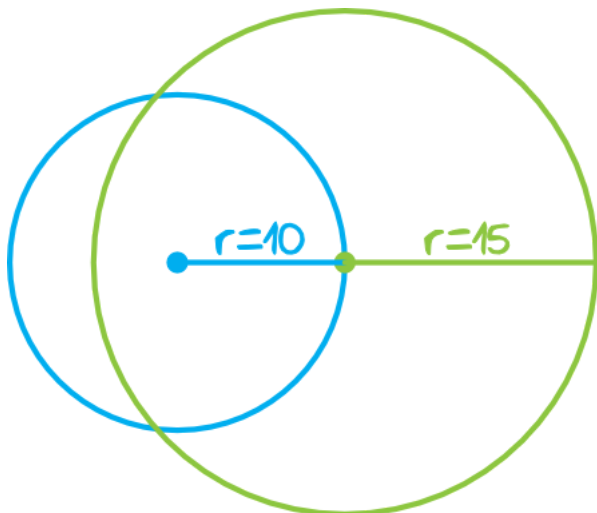
Na podstawie zapisanego równania możemy wyznaczyć długość promienia  $r$ , zatem:

$$\pi r l = 2 \cdot \pi r^2 \quad / : \pi, \quad r l = 2 r^2 \quad / : r, \quad l = 2 r, \quad r = \frac{1}{2} l$$

## Zadanie 19

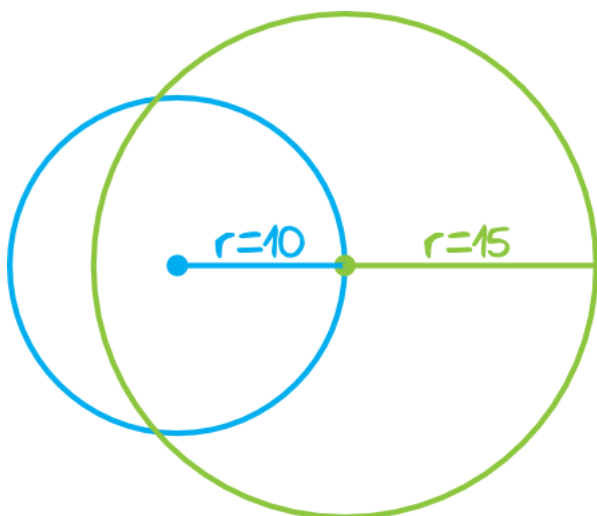
0-1 pkt

Dane są dwa okręgi o promieniach 10 i 15. Mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego okręgu. Odległość między środkami tych okręgów jest równa:



**Odpowiedź: C (10)**

Kluczem do sukcesu w tym zadaniu jest sporządzenie poprawnego rysunku szkicowego.



Szukamy długości między środkami tych okręgów. Z rysunku wynika, że ta odległość jest równa 10 i taka też jest nasza odpowiedź na to zadanie.

## Zadanie 20

0-1 pkt

Każdy uczestnik spotkania dwunastoosobowej grupy przyjaciół uściśnął dłoń każdemu z pozostałych członków tej grupy. Liczba wszystkich uścisków dłoni była równa:

**Odpowiedź: A (66)**

Mamy 12 osób, a każda z nich może uściśnąć rękę z 11 innymi osobami (no bo nie uściśnie ręki sama z sobą). To oznacza, że zgodnie z regułą mnożenia wszystkich możliwych par mamy  $12 \cdot 11 = 132$ .

Musimy jednak nanieść na nasze obliczenia pewną poprawkę, bo policzyliśmy podwójnie każdy uścisk - np. oprócz uścisku dłoni między osobą *A* oraz *B* policzyliśmy oddzielnie uścisk osoby *B* oraz *A*. Zatem otrzymany wynik musimy jeszcze podzielić przez dwa. To oznacza, że liczba wszystkich uścisków dłoni była równa:

$$132 : 2 = 66$$

W dziewięciowyrazowym ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich pierwszy wyraz jest równy 3, a ostatni wyraz jest równy 12. Piąty wyraz tego ciągu jest równy:

**Odpowiedź: B (6)**

Krok 1. Wypisanie danych z treści zadania.

$$a_1 = 3, a_9 = 12, a_5 = ?$$

Korzystając ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego możemy rozpisać czym jest piąty i dziewiąty wyraz tego ciągu:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, a_5 = a_1 \cdot q^4, a_9 = a_1 \cdot q^8$$

Krok 2. Obliczenie wartości  $q^4$ .

Do wyznaczenia wartości piątego wyrazu brakuje nam znajomości wartości  $q^4$  (lub też samego  $q$ , gdyby była taka możliwość). Spróbujmy wyznaczyć to brakujące  $q^4$  z wartości dziewiątego wyrazu, którą przecież znamy:

$$a_9 = a_1 \cdot q^8, 12 = 3 \cdot q^8 \quad \bigg/ : 3, 4 = q^8 \quad \bigg/ \sqrt{\phantom{x}}, q^4 = 2 \quad \vee \quad q^4 = -2$$

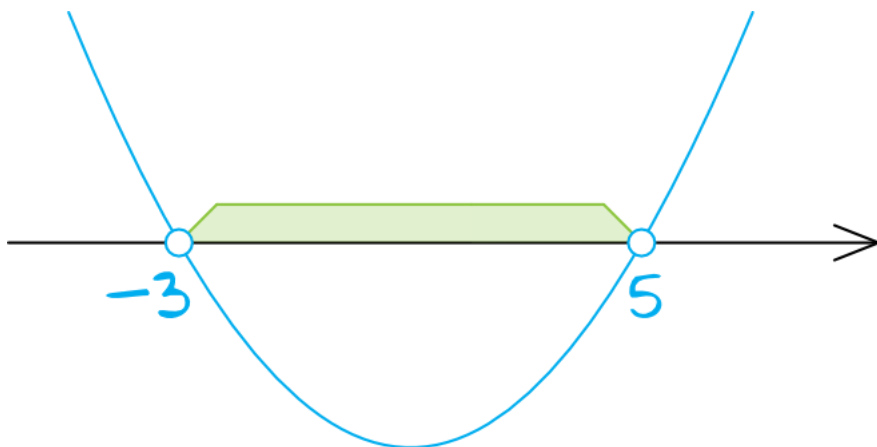
Skoro wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie, to  $q^4 = 2$  (odrzucaamy więc ujemne rozwiązanie).

Krok 3. Obliczenie wartości piątego wyrazu.

Znając wartość  $q^4 = 2$  bez problemu obliczymy już wartość piątego wyrazu:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4, a_5 = 3 \cdot 2, a_5 = 6$$

Ciąg  $(a_n)$  jest określony wzorem  $a_n = (n + 3)(n - 5)$  dla  $n \geq 1$ . Liczba ujemnych wyrazów tego ciągu jest równa:



**Odpowiedź: B (4)**

Krok 1. Zapisanie i rozwiązanie nierówności kwadratowej.

Chcąc sprawdzić dla jakich wartości  $n$  ciąg przyjmuje wartości ujemne musimy rozwiązać następującą nierówność kwadratową:

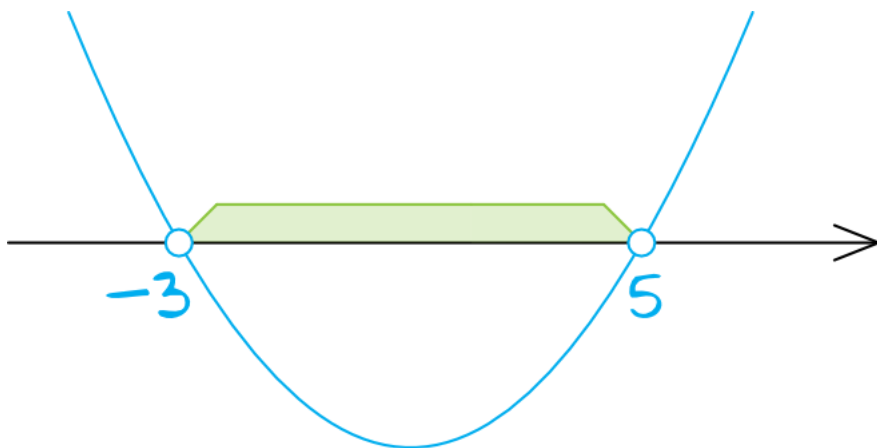
$$(n + 3)(n - 5) < 0$$

Ta nierówność jest zapisana w postaci iloczynowej, zatem w bardzo łatwy sposób wyznaczymy jej miejsca zerowe - wystarczy przyrównać wartość każdego z nawiasów do zera:

$$n + 3 = 0 \quad \vee \quad n - 5 = 0, \quad n = -3 \quad \vee \quad n = 5$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Ramiona paraboli będą skierowane do góry, bo przed  $n$  nie stoi żaden znak minusa. Zaznaczamy wyznaczone przed chwilą miejsca zerowe (kropki będą niezamalowane, bo w nierówności wystąpił znak  $<$ ) i szkicujemy wykres paraboli.



Krok 3. Odczytanie rozwiązania nierówności i interpretacja otrzymanego wyniku.

Interesują nas wartości ujemne, czyli znajdujące się pod osią, a więc rozwiązaniem naszej nierówności jest przedział  $x \in (-3; 5)$ .

Teraz musimy się zastanowić co ten wynik oznacza i jaka jest odpowiedź na nasze zadanie, bowiem pytają nas o to ile jest wyrazów ujemnych w tym ciągu. Musimy więc w otrzymanym rozwiązaniu uwzględnić jeszcze założenie wynikające z własności ciągów, czyli że  $n$  jest liczbą naturalną dodatnią. W związku z tym rozwiązaniami które nas interesują są jedynie:

$$x \in \{1, 2, 3, 4\}$$

(Piątki nie uwzględniamy, bo nawias nie był domknięty).

To oznacza, że są tylko cztery wyrazy tego ciągu, które przyjmują ujemną wartość.

## Zadanie 23

0-1 pkt

Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech  $p_i$  oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek podzielnej przez  $i$ . Wtedy:

**Odpowiedź:** B ( $2p_6 = p_3$ )

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Skoro rzucamy jeden raz sześcienną kostką, to znaczy że możemy otrzymać zawsze jeden z sześciu wyników, zatem:  $|\Omega| = 6$ .

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Patrząc na odpowiedzi potrzebujemy wyznaczyć jedynie  $p_2, p_3, p_4, p_6$ , zatem poszukujemy jedynie  $A_2, A_3, A_4, A_6$ :

Gdy  $i = 2$ :  $A_2 = 3$  (bo trzy liczby (2, 4, 6) są podzielne przez 2)

Gdy  $i = 3$ :  $A_3 = 2$  (bo dwie liczby (3, 6) są podzielne przez 3)

Gdy  $i = 4$ :  $A_4 = 1$  (bo jedna liczba (4) jest podzielna przez 4)

Gdy  $i = 6$ :  $A_6 = 1$  (bo jedna liczba (6) jest podzielna przez 6)

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

$$p_2 = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, p_3 = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, p_4 = \frac{|A_4|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}, p_6 = \frac{|A_6|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$$

Teraz patrząc na podane odpowiedzi widzimy, że prawidłowa równość zaszła jedynie w drugiej odpowiedzi, bowiem:

$$2p_6 = p_3, 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, L = P$$

## Zadanie 24

0-2 pkt

Zbiorem rozwiązań nierówności  $ax + 4 \geq 0$  z niewiadomą  $x$  jest przedział  $(-\infty, 2)$ . Wyznacz  $a$ .

**Odpowiedź:**  $a = -2$

Krok 1. Rozpatrzenie nierówności, gdy  $a = 0$ .

Chcąc rozwiązać nierówność  $ax + 4 \geq 0$  nie możemy ot tak podzielić obu stron przez  $a$ , bo nie wiemy czy przypadkiem  $a$  nie jest równe zero, a przecież w matematyce nie można wykonywać dzielenia przez zero.

Zatem gdy  $a = 0$ , to otrzymamy nierówność:

$$0 \cdot x + 4 \geq 0, 4 \geq 0$$

To oznacza, że gdy  $a = 0$  to nierówność jest spełniona dla  $x \in \mathbb{R}$ , a więc to na pewno nie jest poprawna odpowiedź, gdyż my wiemy, że rozwiązaniem tej nierówności musi być przedział  $(-\infty; 2)$ .

Krok 2. Rozpatrzenie nierówności, gdy  $a > 0$ .

Wiemy już, że na pewno  $a$  nie jest równe zero, ale to w dalszym ciągu nie ułatwia nam zadania, bo nie wiemy czy  $a$  jest liczbą dodatnią, czy ujemną. Gdyby była to liczba ujemna, to przy dzieleniu musimy zmienić znak nierówności. Zobaczymy więc co nam wyjdzie z tej nierówności przy założeniu, że  $a > 0$ .

$$ax + 4 \geq 0 \quad \left/ -4, ax \geq -4 \quad \left/ : a, x \geq -\frac{4}{a} \right.$$

To oznacza, że nasza nierówność dla  $a > 0$  przyjmuje rozwiązania dla  $x \in (-\frac{4}{a}; +\infty)$ , co także nie pasuje nam do przedziału z treści zadania.

Krok 3. Rozpatrzenie nierówności, gdy  $a < 0$ .

Sprawdźmy zatem jak będzie wyglądać sytuacja, gdy  $a$  jest mniejsze od zera. To oznacza, że teraz dzieląc przez  $a$  musimy zmienić znak nierówności na przeciwny:

$$ax + 4 \geq 0 \quad \left/ -4, ax \geq -4 \quad \left/ : a, x \leq -\frac{4}{a} \right.$$

(Zwróć uwagę na zmianę znaku w ostatniej linijce. Dzielimy przez liczbę ujemną, więc zmienia się znak nierówności).

Otrzymaliśmy tym razem informację, że rozwiązaniem jest przedział  $(-\infty; -\frac{4}{a})$  i taki przedział jest zbieżny z tym co mamy podane w treści zadania. Dzięki tej informacji możemy wyznaczyć  $a$ , wystarczy przyrównać 2 do wyrażenia  $-\frac{4}{a}$ . Zatem:

$$2 = -\frac{4}{a}, 2a = -4, a = -2$$

## Zadanie 25

0-2 pkt

Rozwiąż równanie  $\frac{x(x+1)}{x-1} = 5x - 4$ , dla  $x \neq 1$ .

**Odpowiedź:**  $x = \frac{1}{2}$  or

Krok 1. Rozwiązanie równania.

Rozwiązanie tego równania najlepiej jest rozpocząć od wymnożenia obydwu stron przez  $(x - 1)$ . Możemy to zrobić, bo wiemy że  $x \neq 1$ , zatem:

$$\frac{x(x+1)}{x-1} = 5x - 4 \quad / \cdot (x-1), \quad x(x+1) = (5x-4) \cdot (x-1), \quad x^2 + x = 5x^2 - 5x - 4x + 4, \quad 4x^2 - 10x + 4 = 0 \quad / : 2, \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

W ostatnim kroku zostało wykonane dzielenie przez 2, tak aby uprościć zapis i by wykonywać działania na mniejszych liczbach. Nie jest to działanie niezbędne do otrzymania prawidłowego wyniku.

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

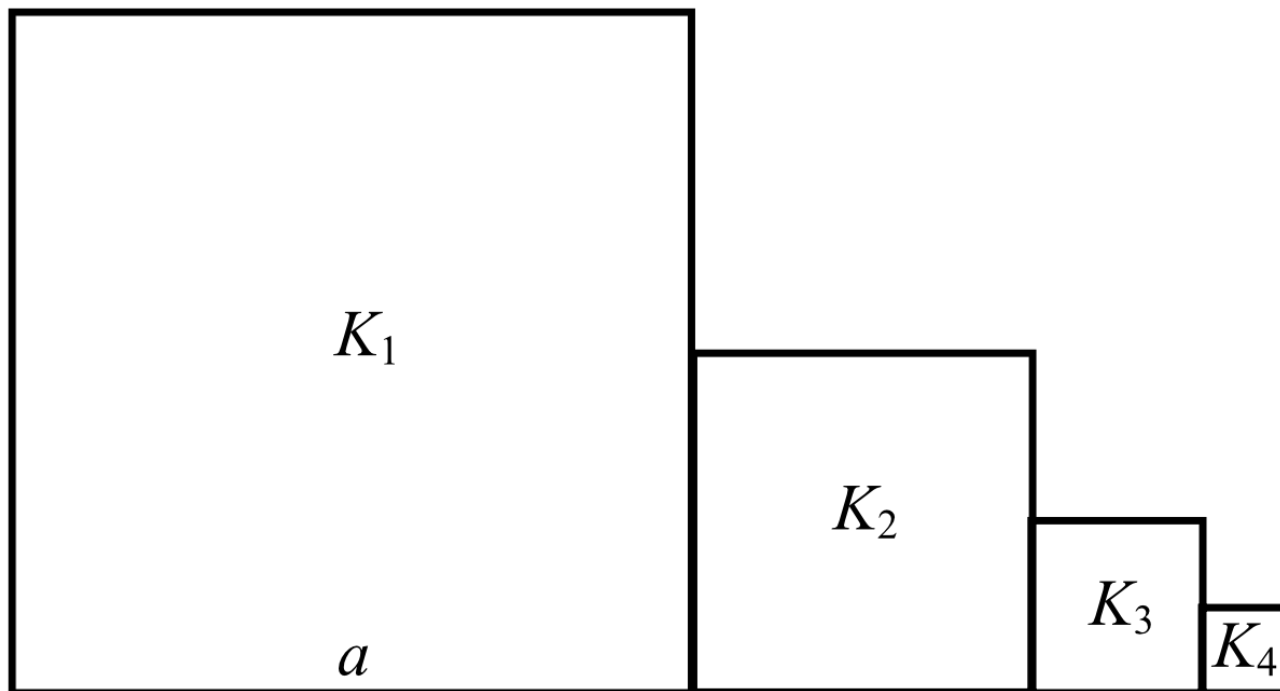
Współczynniki:  $a = 2$ ,  $b = -5$ ,  $c = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - 3}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + 3}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Żadne z rozwiązań nie wyklucza się z założeniami, zatem to równanie ma dwa rozwiązania:  $x = \frac{1}{2}$  oraz  $x = 2$ .

Kwadrat  $K_1$  ma bok długości  $a$ . Obok niego rysujemy kolejno kwadraty  $K_2, K_3, K_4, \dots$  takie, że kolejny kwadrat ma bok połowę mniejszy od boku poprzedniego kwadratu (zobacz rysunek).



Wyznacz pole kwadratu  $K_{12}$ .

**Odpowiedź:**  $P = \frac{a^2}{2^{22}}$

Krok 1. Wyznaczenie długości boku kwadratu  $K_{12}$ .

Pierwszy kwadrat ma długość boku równą  $a$ .

Drugi kwadrat ma długość boku równą  $\frac{a}{2}$ .

Trzeci kwadrat ma długość boku równą  $\frac{a}{2^2}$ .

Czwarty kwadrat ma długość boku równą  $\frac{a}{2^3}$ .

...

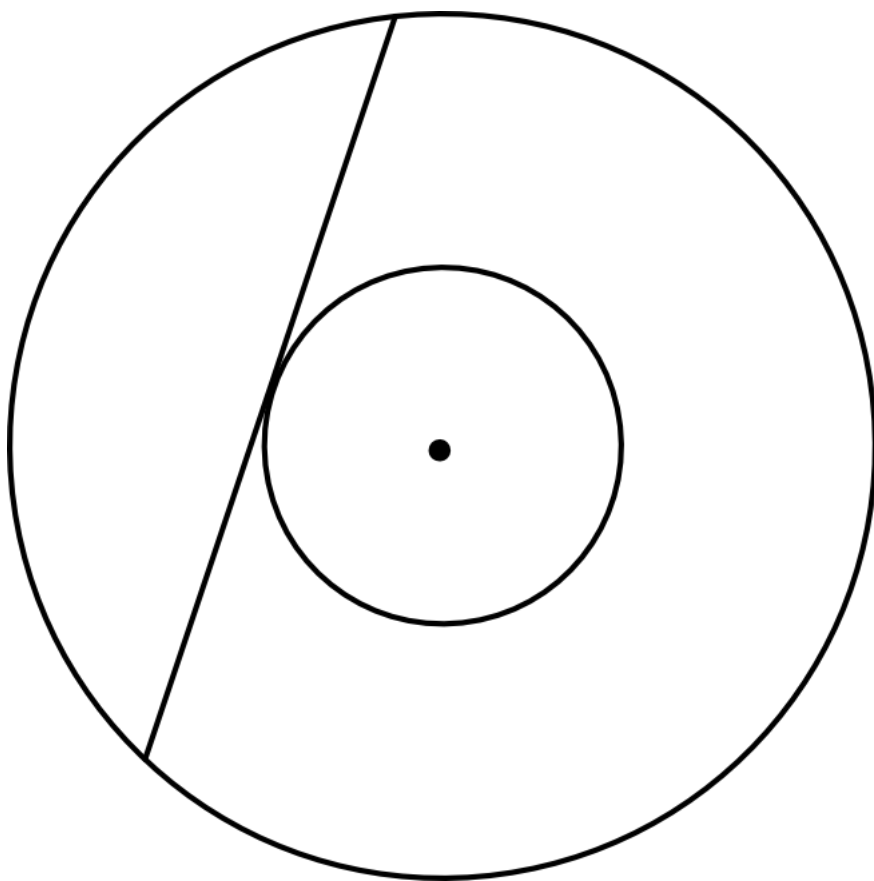
Dwunasty kwadrat ma długość boku równą  $\frac{a}{2^{11}}$ .

Krok 2. Obliczenie pola kwadratu  $K_{12}$ .

Podstawiając do wzoru na pole kwadratu długość boku równą  $\frac{a}{2^{11}}$  otrzymamy:

$$P = \left( \frac{a}{2^{11}} \right)^2 = \frac{a^2}{2^{22}}$$

W pierścieniu kołowym cięciwa zewnętrznego okręgu ma długość 10 i jest styczna do wewnętrznego okręgu (zobacz rysunek).



Wykaż, że pole tego pierścienia można wyrazić wzorem, w którym nie występują promienie wyznaczających go okręgów.

**Odpowiedź: Udowodniono wykorzys**

Krok 1. Zapisanie wzoru na pole pierścienia.

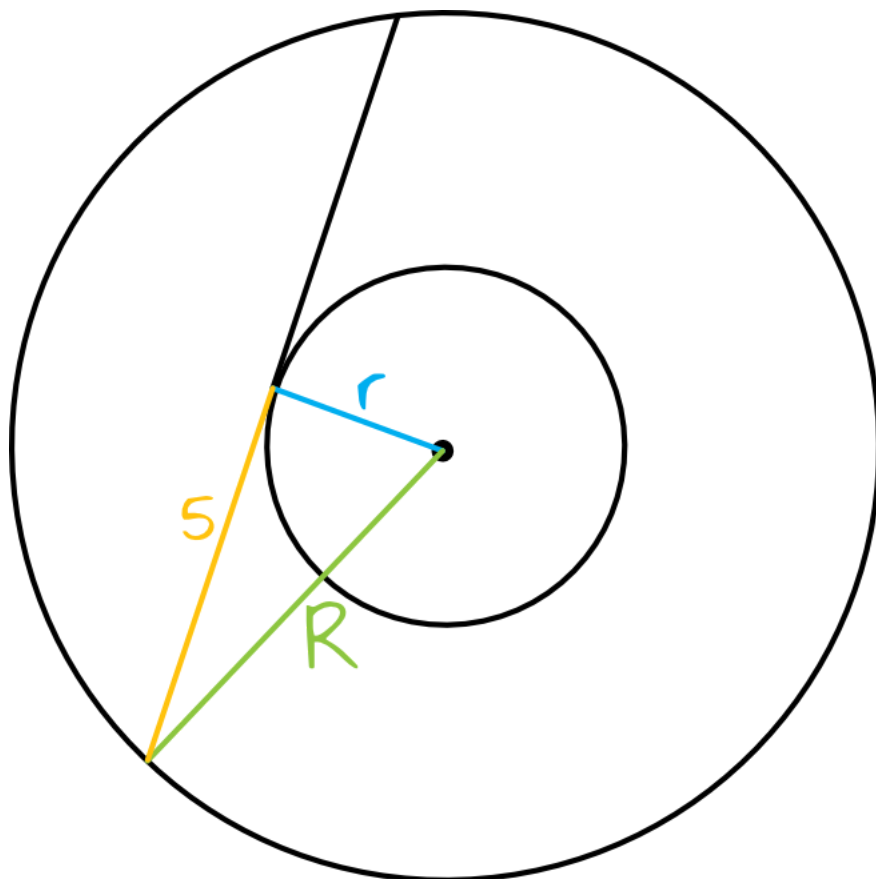
Pole pierścienia możemy zapisać jako różnicę między polem powierzchni dużego koła (o promieniu duże  $R$ ) i małego (o promieniu małe  $r$ ), zatem:

$$P = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

No i teraz naszym zadaniem jest doprowadzenie do sytuacji w której pozbędziemy się wartości promieni.

Krok 2. Sporządzenie rysunku poglądowego.

Wiedząc, że styczna jest zawsze prostopadła do promienia okręgu, możemy stworzyć następujący trójkąt prostokątny:



Krok 3. Wyznaczenie wartości wyrażenia  $R^2 - r^2$  z Twierdzenia Pitagorasa.

Podstawiając do Twierdzenia Pitagorasa dane i oznaczenia z naszego rysunku otrzymamy:

$$r^2 + 5^2 = R^2, \quad r^2 + 25 = R^2, \quad 25 = R^2 - r^2$$

Krok 4. Zakończenie dowodzenia.

Podstawiając wartość  $R^2 - r^2$  do wzoru na pole pierścienia otrzymamy, że:

$$P = \pi(R^2 - r^2), \quad P = 25\pi$$

I taki zapis kończy nasze dowodzenie, bo udało nam się określić wzór na pole pierścienia bez występowania długości promieni.

#### Zadanie 28

0-2 pkt

Uzasadnij, że liczba  $4^{12} + 4^{13} + 4^{14}$  jest podzielna przez 42.

**Odpowiedź: Udowodniono wyłączaj**

Aby udowodnić, że ta liczba jest podzielna przez 42 musimy zapisać to dodawanie w postaci mnożenia, wyłączając przed nawias odpowiednie czynniki. Jeśli uda nam się doprowadzić do sytuacji, w której jednym z czynników będzie liczba 42 lub jej wielokrotność, to dowód będziemy mogli uznać za zakończony.

Wyłączając przed nawias wartość  $4^{11}$  otrzymamy:

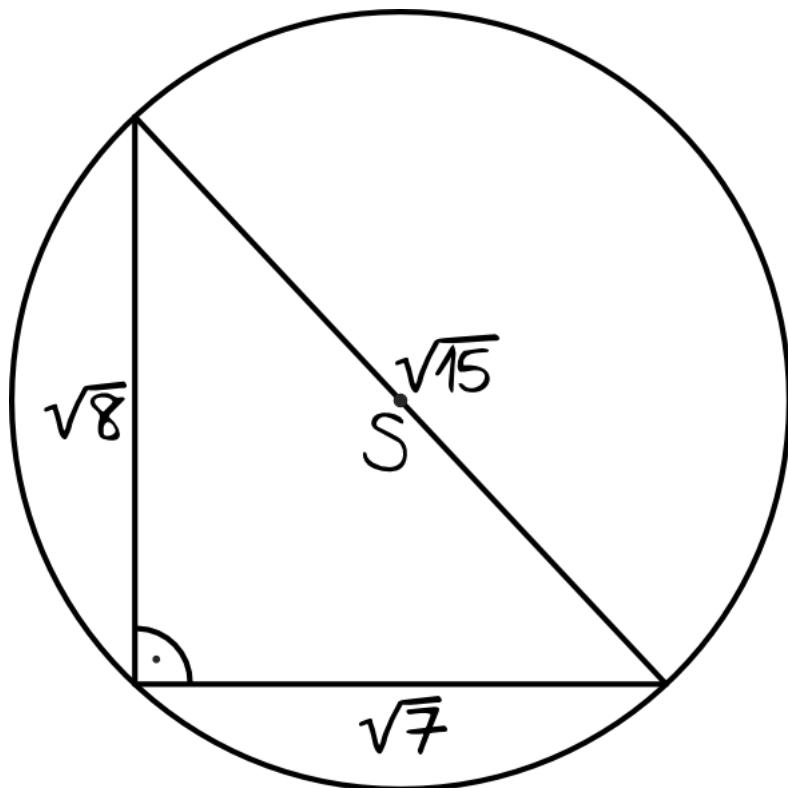
$$4^{12} + 4^{13} + 4^{14} = 4^{11} \cdot (4 + 4^2 + 4^3) = , \quad = 4^{11} \cdot (4 + 16 + 64) = 4^{11} \cdot 84 = 4^{11} \cdot 2 \cdot 42$$

Doprowadzając liczbę do takiej postaci możemy uznać dowód za zakończony.

## Zadanie 29

0-2 pkt

Na trójkącie o bokach długości  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{15}$  opisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu.



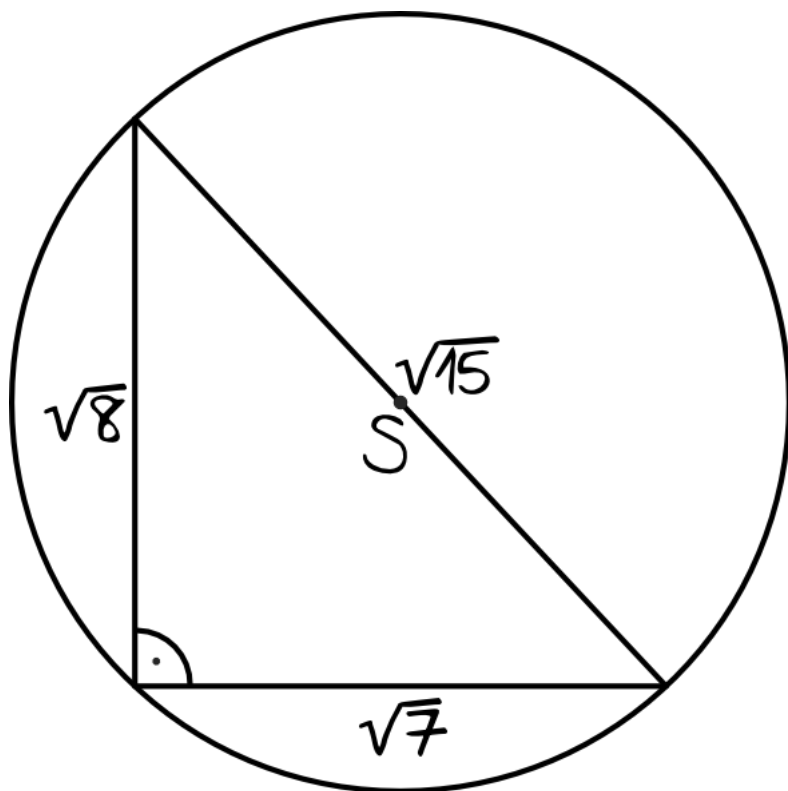
**Odpowiedź:**  $\left(r = \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

Krok 1. Dostrzeżenie tego, że jest to trójkąt prostokątny.

Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy udowodnić, że ten trójkąt jest prostokątny:

$$a^2 + b^2 = c^2, (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{8})^2 = (\sqrt{15})^2, 7 + 8 = 15, L = P$$

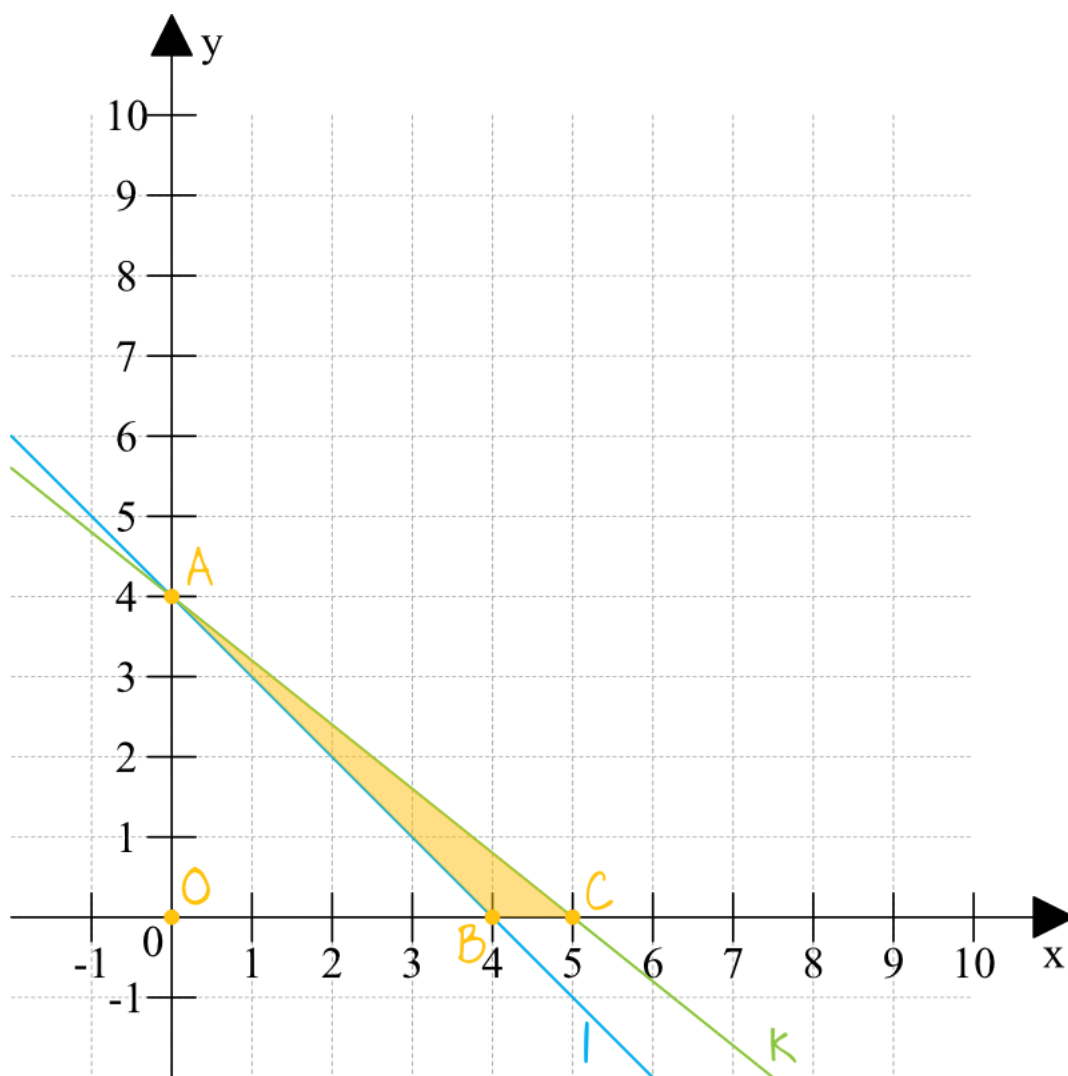
Krok 2. Skorzystanie z własności okręgów opisanych na trójkątach prostokątnych.



Jeśli okrąg jest opisany na trójkącie prostokątny, to długość średnicy tego okręgu jest równa długości przeciwprostokątnej trójkąta. W związku z tym średnica tego okręgu ma długość  $\sqrt{15}$ . Nas jednak interesuje długość promienia okręgu, a nie średnicy, zatem:

$$r = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

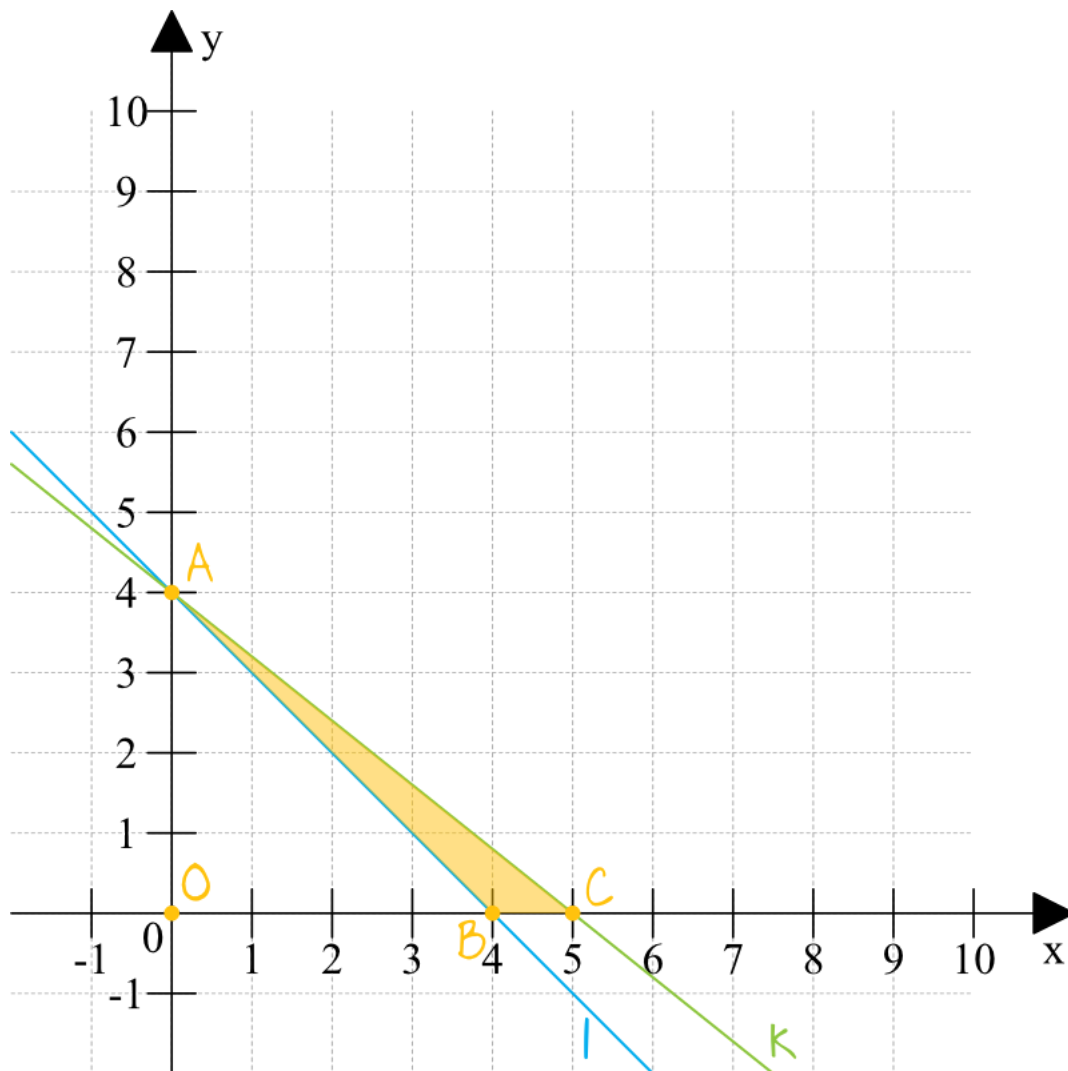
Proste  $l$  i  $k$  przecinają się w punkcie  $A = (0, 4)$ . Prosta  $l$  wyznacza wraz z dodatnimi półosią układu współrzędnych trójkąt o polu 8, zaś prosta  $k$  – trójkąt o polu 10. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są: punkt  $A$  oraz punkty przecięcia prostych  $l$  i  $k$  z osią  $Ox$ .



**Odpowiedź:**  $P_{ABC} = 2$

Krok 1. Sporządzenie rysunku poglądowego.

Spróbujmy naszkicować sobie powyższą sytuację, co jak się za chwilę okaże będzie kluczem do rozwiązania tego zadania.



Dodatkowo oznaczyłem sobie początek układu współrzędnych jako punkt  $O$ , tak aby móc dokładnie nazywać poszczególne trójkąty które będziemy sobie za chwilę rozpatrywać.

Krok 2. Obliczenie pola trójkąta  $ABC$ .

Naszym zadaniem zgodnie z treścią zadania jest tak naprawdę obliczenie pola trójkąta  $ABC$ . Jego pole powierzchni jest różnicą między polami trójkątów  $OCA$  oraz  $OBA$ , zatem:

$$P_{ABC} = P_{OCA} - P_{OBA}$$

Z treści zadania wynika, że  $P_{OCA} = 10$  oraz  $P_{OBA} = 8$ , zatem:

$$P_{ABC} = 10 - 8, P_{ABC} = 2$$

Ala jeździ do szkoły rowerem, a Ola skuterem. Obie pokonują tę samą drogę. Ala wyjechała do szkoły o godzinie 7:00 i pokonała całą drogę w ciągu 40 minut. Ola wyjechała 10 minut później niż Ala, a pokonanie całej drogi zajęło jej tylko 20 minut. Oblicz, o której godzinie Ola wyprzedziła Alę.

**Odpowiedź: Ola wyprzedziła Alę**

Krok 1. Wypisanie informacji z treści zadania.

Oznaczmy sobie następujące oznaczenia:

$t$  - czas w minutach liczony od godziny 7:00

$s$  - odległość do pokonania

$v_O$  - prędkość Oli

$v_A$  - prędkość Ali

Z treści zadania wynika też, że Ola jest dwa razy szybsza od Ali (bo Ola jechała 20 minut, a Ala 40 minut). Zatem prawdziwa będzie też równość:

$$v_O = 2v_A$$

Krok 2. Utworzenie i rozwiązanie równania.

Obie dziewczyny pokonały ten sam dystans. Skoro tak, to posłużmy się wzorem  $s = vt$  i zapiszmy w formie równania trasę każdej z dziewczyn:

$$v_A \cdot t = v_O \cdot (t - 10)$$

(Odejmujemy u Oli 10 minut, bo wyruszyła 10 minut później, a zgodnie z naszymi oznaczeniami  $t$  symbolizuje czas liczony od 7:00)

Podstawiając do tego równania zależność  $v_O = 2v_A$  otrzymamy:

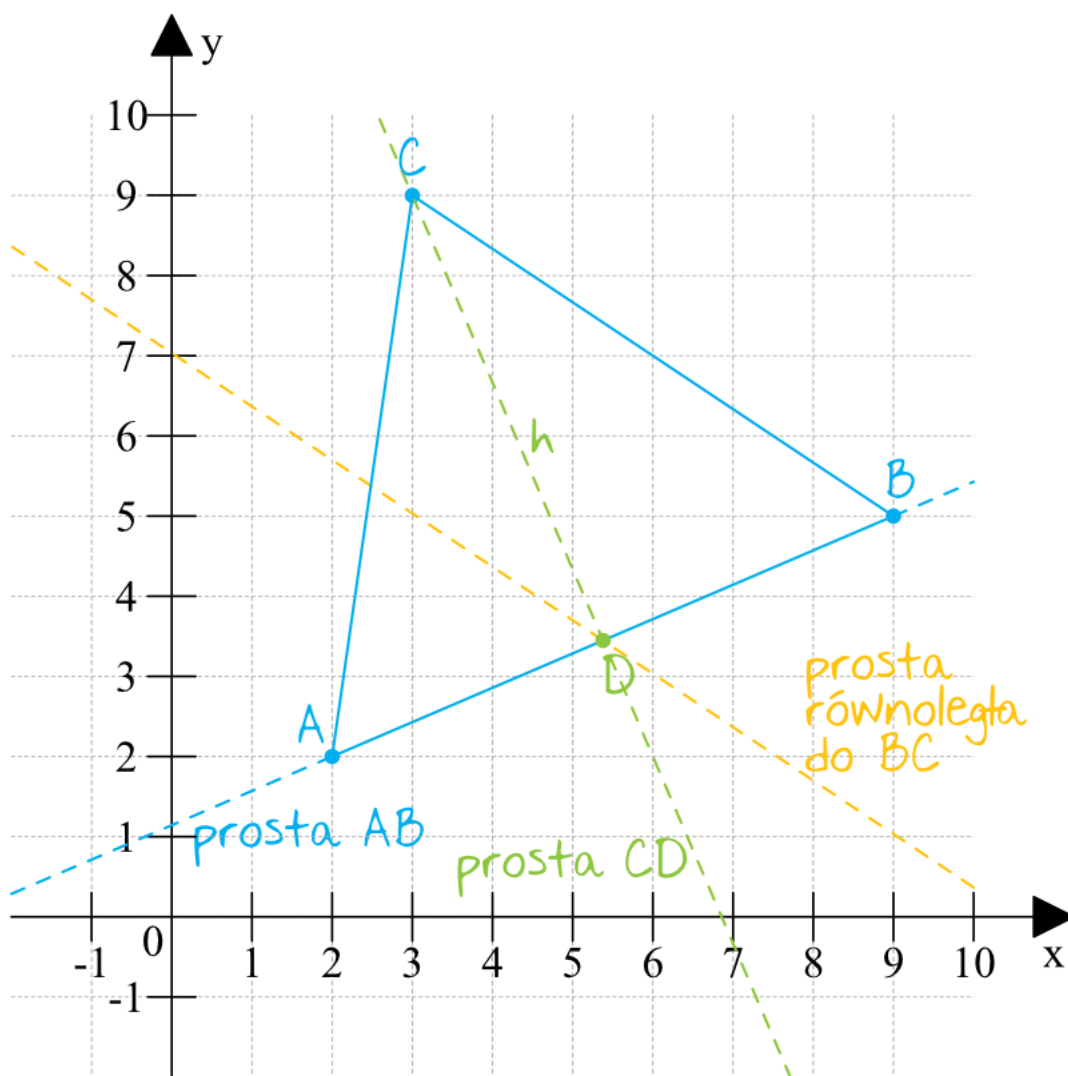
$$v_A \cdot t = 2v_A \cdot (t - 10) \quad / : v_A, \quad t = 2 \cdot (t - 10), \quad t = 2t - 20, \quad -t = -20, \quad t = 20$$

Skoro  $t$  jest czasem liczonym w minutach od godziny 7:00, to znaczy że Ola wyprzedziła Alę o godzinie 7:20.

## Zadanie 32

0-5 pkt

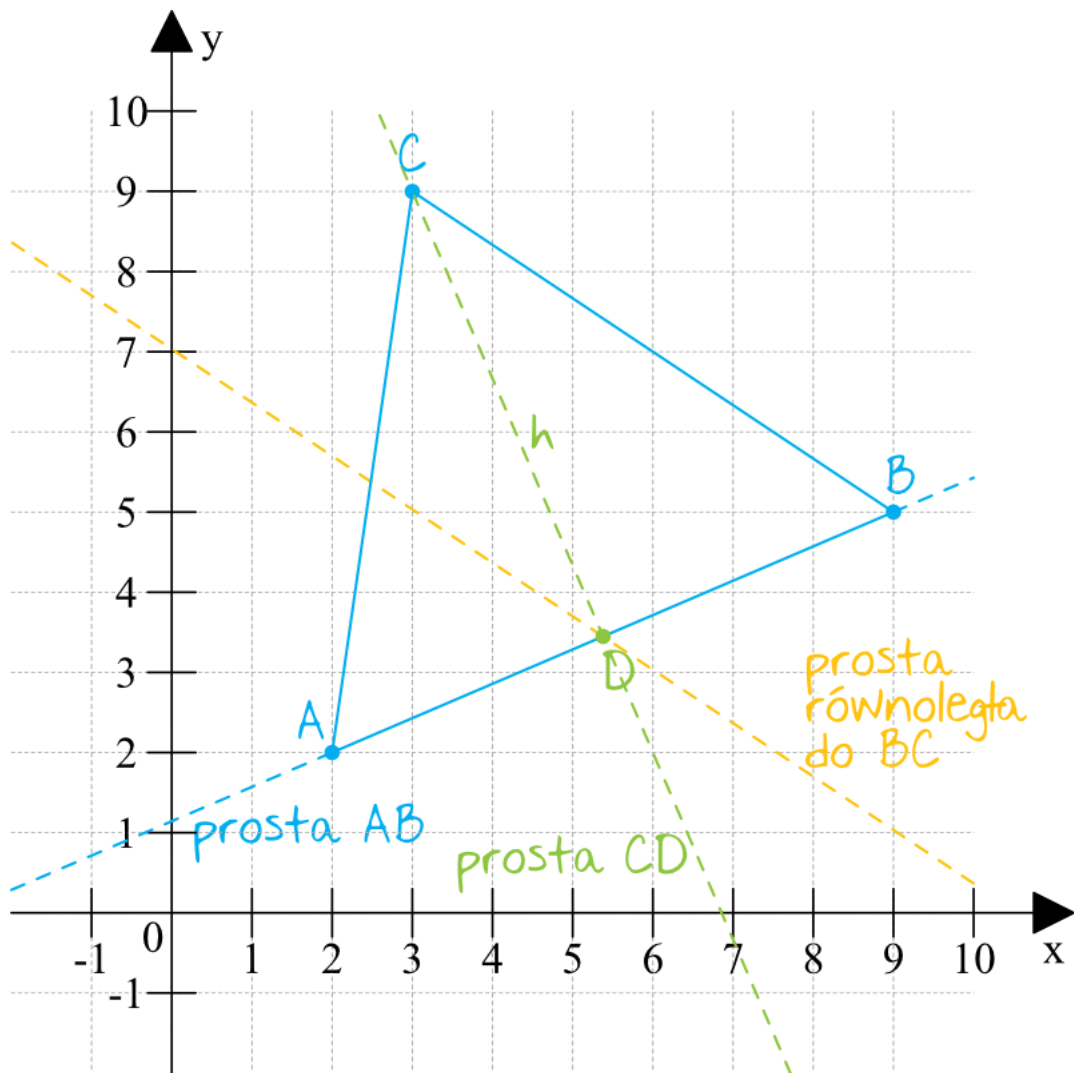
Dane są wierzchołki trójkąta  $ABC$ :  $A = (2, 2)$ ,  $B = (9, 5)$  i  $C = (3, 9)$ . Z wierzchołka  $C$  poprowadzono wysokość tego trójkąta, która przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ . Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $D$  i równoległej do boku  $BC$ .



Odpowiedź:  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku poglądowego.

Spróbujmy zobrazować tę sytuację, zaznaczając poszczególne punkty w układzie współrzędnych.



Ustalmy teraz co musimy obliczyć. Chcemy przede wszystkim wyznaczyć współrzędne punktu  $D$ . Jednak żeby to zrobić, to musimy najpierw wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty  $AB$ , a następnie musimy znaleźć prostą prostopadłą do tej prostej, która przechodzi przez punkt  $C$ . Punkt  $D$  będzie miejscem przecięcia się tych dwóch prostych. Na sam koniec musimy jeszcze wyznaczyć prostą równoległą do boku  $BC$ , która przejdzie przez punkt  $D$ . No to po kolei:

Krok 2. Wyznaczenie równania prostej  $AB$ .

Możemy albo skorzystać ze wzoru na prostą przechodzącą przez punkty  $AB$ , albo ułożyć i rozwiązać układ równań w którym do wzoru ogólnego  $y = ax + b$  podstawimy raz współrzędne punktu  $A$ , a drugi raz współrzędne punktu  $B$ .

$$\begin{cases} 2 = 2a + b \\ 5 = 9a + b \end{cases}$$

Odejmując to równanie stronami otrzymamy:

$$-3 = -7a, \quad a = \frac{3}{7}$$

Znając współczynnik  $a$  możemy z dowolnego równania wyznaczyć także współczynnik  $b$ :

$$2 = 2 \cdot \frac{3}{7} + b, \quad 2 = \frac{6}{7} + b, \quad b = \frac{8}{7}$$

To oznacza, że prosta  $AB$  jest opisana równaniem  $y = \frac{3}{7}x + \frac{8}{7}$ .

Krok 3. Wyznaczenie równania prostej  $CD$ .

Skoro prosta  $CD$  jest ma być prostopadła do prostej  $AB$ , a to znaczy że iloczyn ich współczynników kierunkowych musi być równy  $-1$ . Skoro prosta  $AB$  ma współczynnik  $a = \frac{3}{7}$ , to prosta  $CD$  ma współczynnik  $a$  równy:

$$a \cdot \frac{3}{7} = -1, \quad a = -\frac{7}{3}$$

Wiemy już, że nasza prosta musi się wyrażać wzorem  $y = -\frac{7}{3}x + b$ . Brakuje nam jeszcze współczynnika  $b$ , ale skoro prosta przechodzi przez punkt  $C$  o znanych nam współrzędnych, to podstawiając te współrzędne do wzoru bez problemu obliczymy brakujący współczynnik:

$$y = -\frac{7}{3}x + b, 9 = -\frac{7}{3} \cdot 3 + b, 9 = -7 + b, b = 16$$

To oznacza, że prosta  $CD$  jest opisana równaniem  $y = -\frac{7}{3}x + 16$ .

Krok 4. Wyznaczenie współrzędnych punktu  $D$ .

Zgodnie z geometryczną interpretacją układu równań, rozwiązanie układu równań dwóch prostych da wynik będący miejscem przecięcia się tych prostych, czyli w naszym przypadku otrzymamy współrzędne punktu  $D$ .

$$\begin{cases} y = \frac{3}{7}x + \frac{8}{7} \\ y = -\frac{7}{3}x + 16 \end{cases}$$

Podstawiając wartość  $y$  z pierwszej funkcji do drugiej otrzymamy:

$$\frac{3}{7}x + \frac{8}{7} = -\frac{7}{3}x + 16 \quad \Bigg/ \cdot 21, 9x + 24 = -49x + 336, 58x = 312, x = \frac{312}{58} = \frac{156}{29}$$

Podstawiając wartość  $x = \frac{156}{29}$  do dowolnego z równań zapisanego wcześniej układu (do drugiego będzie chyba łatwiej, bo tam mamy tylko jeden ułamek) wyznaczmy współrzędną  $y$ :

$$y = -\frac{7}{3} \cdot \frac{156}{29} + 16, y = -\frac{1092}{87} + 16, y = -\frac{364}{29} + 16, y = -\frac{364}{29} + \frac{464}{29}, y = \frac{100}{29}$$

Zatem  $D = \left(\frac{156}{29}; \frac{100}{29}\right)$ .

Krok 5. Wyznaczenie równania prostej  $BC$ .

Zanim wyznaczymy prostą równoległą do prostej  $BC$ , to musimy poznać równanie tej prostej  $BC$ . Wyznamy je dokładnie w ten sam sposób co równanie prostej  $AB$  z kroku drugiego.

$$\begin{cases} 5 = 9a + b \\ 9 = 3a + b \end{cases}$$

Odejmujemy równanie stronami i otrzymujemy:

$$-4 = 6a, a = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

I w zasadzie tyle nam wystarczy, nie potrzebujemy już obliczać współczynnika  $b$ . Wystarczy nam sam współczynnik  $a$  bo to właśnie on jest potrzebny do wyznaczenia prostej równoległej.

Krok 6. Wyznaczenie równania prostej równoległej przechodzącej przez punkt  $D$ .

I to jest już ostatnia rzecz którą musimy zrobić - czyli wyznaczyć wzór prostej równoległej do  $BC$ , która przechodzi przez punkt  $D$ . Aby dwie proste były względem siebie równoległe to muszą mieć jednakowy współczynnik  $a$ . My w poprzednim punkcie ten współczynnik sobie wyznaczyliśmy, zatem wiemy już, że ta poszukiwana prosta równoległa będzie opisana wzorem:

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

Brakuje nam współczynnika  $b$ , ale bez problemu go wyznaczymy podstawiając do tej prostej współrzędne punktu  $D$ , które wyliczyliśmy w czwartym kroku, zatem:

$$\frac{100}{29} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{156}{29} + b, \frac{100}{29} = -\frac{312}{87} + b, \frac{100}{29} = -\frac{104}{29} + b, b = \frac{204}{29}$$

Szukana prosta równoległa ma więc równanie:  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{204}{29}$ .

Jacek bawi się sześciennymi klockami o krawędzi  $2\text{cm}$ . Zbudował z nich jeden duży sześcian o krawędzi  $8\text{cm}$  i wykorzystał do tego wszystkie swoje klocki. Następnie zburzył budowlę i ułożył z tych klocków drugą bryłę – graniastosłup prawidłowy czworokątny. Wtedy okazało się, że został mu dokładnie jeden klocek, którego nie było gdzie dołożyć. Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej pierwszej ułożonej bryły do pola powierzchni całkowitej drugiej bryły i wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

**Odpowiedź:**  $\frac{P_1}{P_2}$

Krok 1. Wyznaczenie liczby klocków, którymi bawi się Jacek.  
Najpierw obliczmy objętość pojedynczego klocka, będzie to:

$$V = (2\text{cm})^3 = 8\text{cm}^3$$

Teraz obliczmy objętość pierwszej bryły jaką ułożył Jacek, czyli sześciokąta o boku długości  $8\text{cm}$ :

$$V = (8\text{cm})^3 = 512\text{cm}^3$$

Skoro do ułożenia tego sześciokąta Jacek wykorzystał wszystkie swoje klocki, to znaczy że tych klocków ma:

$$512\text{cm}^3 : 8\text{cm}^3 = 64$$

Krok 2. Wyznaczenie wymiarów graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

Z treści zadania wynika, że Jacek do budowy graniastosłupa użył 63 klocków (bo jeden klocek został mu wolny).

Skoro Jacek ułożył graniastosłup prawidłowy czworokątny, to znaczy że ułożył bryłę która ma w podstawie kwadrat. Krótko mówiąc, podstawa (czyli tak jakby pierwsza warstwa bryły) musi wyglądać w taki sposób, że mamy np. 2 na 2 klocki, albo 5 na 5 klocków itd. W związku z tym do ułożenia samej podstawy Jacek musiał użyć np. 1, 4, 9, 16, 25, 36 lub 49 klocków. Innych możliwości nie ma, bo musi to być kwadrat liczby naturalnej.

W zasadzie możemy odrzucić wariant, w którym w podstawie jest jeden klocek (czyli byłaby to wieża wysoka na 63 klocki), bo gdyby tak wyglądała ta bryła, to przecież nie byłoby problemu dostawić także 64-ty klocek na samą górę.

Musimy więc teraz sprawdzić, która z liczb 4, 9, 16, 25, 36 czy 49 jest dzielnikiem liczby 63. Taką liczbą jest jedynie 9, a więc wiemy już, że graniastosłup ma w podstawie  $3 \times 3$  klocki i jest wysoki na 7 klocków.

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni całkowitej sześcianu i graniastosłupa.

Z treści zadania wiemy, że sześcian ma długość  $8\text{cm}$ , zatem skoro każda ściana sześcianu ma powierzchnię  $P = 8\text{cm} \cdot 8\text{cm}$  i takich ścian mamy 6, to pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe:

$$P_S = 6 \cdot 8^2, P_S = 6 \cdot 64, P_S = 384[\text{cm}^2]$$

Teraz musimy ustalić wymiary graniastosłupa. Skoro wymiary w klockach możemy wyrazić jako  $3 \times 3 \times 7$  klocków, a każdy klocek ma  $2\text{cm}$ , to wymiary graniastosłupa w centymetrach będą następujące:  $6\text{cm} \times 6\text{cm} \times 14\text{cm}$ . Czyli mamy dwie podstawy o powierzchni  $P_p = 6\text{cm} \cdot 6\text{cm}$  oraz cztery ściany boczne o powierzchni  $P_b = 6\text{cm} \cdot 14\text{cm}$ . To oznacza, że pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe:

$$P_G = 2P_p + 4P_b, P_G = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot (6 \cdot 14), P_G = 2 \cdot 36 + 4 \cdot 84, P_G = 72 + 336, P_G = 408[\text{cm}^2]$$

Krok 4. Wyznaczenie stosunku pola powierzchni całkowitej pierwszej bryły względem drugiej.

Na sam koniec musimy jeszcze obliczyć stosunek tych pól powierzchni:

$$\frac{P_S}{P_G} = \frac{384\text{cm}^2}{408\text{cm}^2} = \frac{16}{17}$$