

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2013/2014**

**MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY**

**ROZWIĄZANIA ZADAŃ
I SCHEMAT PUNKTOWANIA**

MAJ 2014

Zadanie 1. (0–1)

Obszar standardów	Opis wymagań	Poprawna odpowiedź (1 pkt)	
		Wersja arkusza A	Wersja arkusza B
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Interpretacja geometryczna układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (II.8.d)	A	C

Zadanie 2. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Stosowanie pojęcia procentu w obliczeniach (II.1.d)	B	C
---	---	---	---

Zadanie 3. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posługiwanie się wzorami skróconego mnożenia (II.2.a)	C	A
---	---	---	---

Zadanie 4. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znajomość definicji logarytmu (II.1.h)	D	C
---	--	---	---

Zadanie 5. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie prostych równań wymiernych (II.3.e)	C	B
---	---	---	---

Zadanie 6. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (II.4.g)	B	D
---	--	---	---

Zadanie 7. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie zadań prowadzących do badania funkcji kwadratowej (II.4.1)	D	A
---	--	---	---

Zadanie 8. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie równoległości prostych na podstawie ich równań kierunkowych (II.8.c)	D	A
---	--	----------	----------

Zadanie 9. (0–1)

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej (IV.1.f)	D	B
------------------------------	--	----------	----------

Zadanie 10. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie miejsca zerowego funkcji kwadratowej (I.4.j)	B	D
--------------------------------------	--	----------	----------

Zadanie 11. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym (II.5.a)	A	D
---	---	----------	----------

Zadanie 12. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (II.7.b)	C	B
---	---	----------	----------

Zadanie 13. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie, czy dany ciąg jest geometryczny (II.5.b)	D	A
---	---	----------	----------

Zadanie 14. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Stosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (I.6.c)	A	B
--------------------------------------	---	----------	----------

Zadanie 15. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posługiwanie się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (II.8.g)	B	C
---	--	----------	----------

Zadanie 16. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich, w tym z zastosowaniem trygonometrii (II.7.c)	B	C
---	--	----------	----------

Zadanie 17. (0–1)

Użycie i tworzenie strategii	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7.c)	A	D
------------------------------	---	----------	----------

Zadanie 18. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie wartości liczbowej wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej (II.2.e)	A	B
---	---	----------	----------

Zadanie 19. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach (III.9.b)	A	D
--------------------------	--	----------	----------

Zadanie 20. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Wyznaczanie związków miarowych w bryłach obrotowych (III.9.b)	C	B
--------------------------	---	----------	----------

Zadanie 21. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie potęgi o wykładniku wymiernym oraz stosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (II.1.g)	C	B
---	--	----------	----------

Zadanie 22. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie potęgi o wykładniku wymiernym (II.1.g)	B	A
---	---	----------	----------

Zadanie 23. (0–1)

Rozumowanie i argumentacja	Wykorzystanie sumy, iloczynu i różnicy zdarzeń do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (V.10.c)	A	D
----------------------------	---	----------	----------

Zadanie 24. (0–1)

Użycie i tworzenie strategii	Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych (IV.10.b)	C	C
------------------------------	--	----------	----------

Zadanie 25. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Obliczanie mediany danych (III.2.e)	D	A
--------------------------	-------------------------------------	----------	----------

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx + c$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W = (4, 0)$. Oblicz wartości współczynników b i c .

Użycie i tworzenie strategii

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej (IV.4.i)

Rozwiązanie (I sposób)

Ze wzorów $x_w = -\frac{b}{2a}$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$ na współrzędne wierzchołka paraboli otrzymujemy:

$$-\frac{b}{2 \cdot 2} = 4 \text{ i } -\frac{\Delta}{4 \cdot 2} = 0, \text{ więc } b = -16 \text{ i } \Delta = 0.$$

Stąd $(-16)^2 - 4 \cdot 2 \cdot c = 0$, czyli $c = 32$.

Rozwiązanie (II sposób)

Wzór funkcji f doprowadzamy do postaci kanonicznej

$$f(x) = 2\left(x^2 + \frac{b}{2}x\right) + c = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{4}x + \frac{b^2}{16}\right) + c - \frac{b^2}{8} = 2\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + c - \frac{b^2}{8}.$$

Wierzchołek wykresu funkcji f ma zatem współrzędne $\left(-\frac{b}{4}, c - \frac{b^2}{8}\right)$. Otrzymujemy układ równań

$$-\frac{b}{4} = 4 \text{ i } c - \frac{b^2}{8} = 0.$$

Stąd $b = -16$ i $c = \frac{b^2}{8} = \frac{16^2}{8} = 32$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy:

- obliczy współczynnik b : $b = -16$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy albo

- zapisze układ dwóch równań z niewiadomymi b i c , np.: $-\frac{b}{4} = 4$ i $c - \frac{b^2}{8} = 0$,

i nie rozwiąże go lub rozwiąże go z błędem.

Zdający otrzymuje2 pkt
gdy obliczy współczynniki b i c : $b = -16$, $c = 32$.

Rozwiązanie (III sposób)

Ponieważ $x_w = 4$ oraz $y_w = 0$, więc parabola ma z osią Ox dokładnie jeden punkt wspólny, zatem wzór funkcji można zapisać w postaci kanonicznej $f(x) = 2(x - 4)^2$.

Stąd $f(x) = 2x^2 - 16x + 32$, zatem $b = -16$ i $c = 32$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy zapisze, że $f(x) = 2(x-4)^2$.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy współczynniki b i c : $b = -16$, $c = 32$.

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8 = 0$.

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązywanie równań wielomianowych metodą rozkładu na czynniki (I.3.d)
--------------------------------------	---

Rozwiązanie (I sposób – metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynu, stosując metodę grupowania

wyrazów $9x^2(x+2) - 4(x+2) = 0$ lub $x(9x^2 - 4) + 2(9x^2 - 4) = 0$, stąd

$$(x+2)(9x^2 - 4) = 0.$$

$$\text{Zatem } x = -2 \text{ lub } x = -\frac{2}{3} \text{ lub } x = \frac{2}{3}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu, np.: $(x+2)(9x^2 - 4)$, i na tym

poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x = -2$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$.

Rozwiązanie (II sposób – metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$. Dzielimy ten wielomian przez dwumian $(x+2)$ i otrzymujemy iloraz $(9x^2 - 4)$. Obliczamy

$$\text{pierwiastki trójmianu } (9x^2 - 4): x_1 = -\frac{2}{3} \text{ oraz } x_2 = \frac{2}{3}. \text{ Zatem } x = -2 \text{ lub } x = -\frac{2}{3} \text{ lub } x = \frac{2}{3}.$$

albo

Stwierdzamy, że liczba $-\frac{2}{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$. Dzielimy

ten wielomian przez dwumian $\left(x + \frac{2}{3}\right)$ i otrzymujemy iloraz $(9x^2 + 12x - 12)$. Obliczamy

wyróżnik trójmianu $(9x^2 + 12x - 12)$: $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-12) = 576$. Stąd pierwiastkami

trójkątnemu są liczby $x_1 = \frac{-12-24}{18} = -2$ oraz $x_2 = \frac{-12+24}{18} = \frac{2}{3}$. Zatem $x = -2$ lub $x = -\frac{2}{3}$
lub $x = \frac{2}{3}$.

albo

Stwierdzamy, że liczba $\frac{2}{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$. Dzielimy ten wielomian przez dwumian $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ i otrzymujemy iloraz $(9x^2 + 24x + 12)$. Obliczamy wyróżnik trójkątnemu: $\Delta = 24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 12 = 144$. Stąd pierwiastkami trójkątnemu są liczby $x_1 = \frac{-24-12}{18} = -2$ oraz $x_2 = \frac{-24+12}{18} = -\frac{2}{3}$. Zatem $x = -2$ lub $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy:

- podzieli wielomian $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$ przez dwumian $(x + 2)$, otrzyma iloraz $(9x^2 - 4)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$ przez dwumian $\left(x - \frac{2}{3}\right)$, otrzyma iloraz $(9x^2 + 24x + 12)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8$ przez dwumian $\left(x + \frac{2}{3}\right)$, otrzyma iloraz $(9x^2 + 12x - 12)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$ przez trójkątnemu kwadratowy, np. $(9x^2 - 4)$, i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $-2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$.

Uwaga

Jeżeli w zapisie rozwiązania występuje jedna usterka, to za takie rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)

Udowodnij, że każda liczba całkowita k , która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia (V.2.a)
----------------------------	--

I sposób rozwiązania

Ponieważ liczba całkowita k przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, więc $k = 7m + 2$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Wtedy

$$3k^2 = 3(7m + 2)^2 = 3(49m^2 + 28m + 4) = 3 \cdot 49m^2 + 3 \cdot 28m + 12 = 7(3 \cdot 7m^2 + 3 \cdot 4m + 1) + 5.$$

Dwa pierwsze składniki tej sumy są podzielne przez 7, natomiast $12 = 7 + 5$. To oznacza, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5. To kończy dowód.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy zapisze wyrażenie w postaci: $3(7m + 2)^2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, które nie przekreślają poprawności rozumowania.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy uzasadni tezę, np. zapisze wyrażenie w postaci $7(3 \cdot 7m^2 + 3 \cdot 4m + 1) + 5$.

II sposób rozwiązania

Ponieważ liczba całkowita k przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, więc $k \equiv 2 \pmod{7}$.

Stąd wynika, że $k^2 \equiv 4 \pmod{7}$. Ponadto $3 \equiv 3 \pmod{7}$, więc z własności kongruencji

$$3k^2 \equiv 3 \cdot 4 \pmod{7} \equiv 12 \pmod{7} \equiv 5. \text{ To kończy dowód.}$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy zapisze że $k^2 \equiv 4 \pmod{7}$.

Uwaga

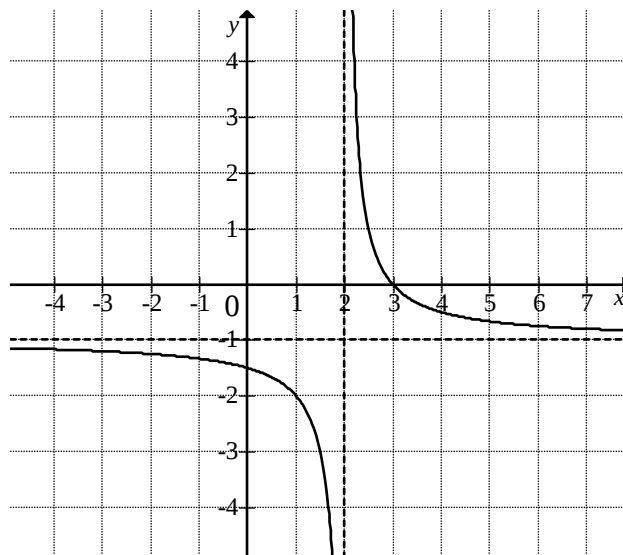
Zdający nie musi używać formalnego zapisu relacji kongruencji. Wystarczy wniosek: jeśli liczba k przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 7 daje resztę 4.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy zapisze $3k^2 \equiv 3 \cdot 4 \pmod{7} \equiv 12 \pmod{7} \equiv 5$.

Zadanie 29. (0–2)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f , który powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji określonej wzorem $y = \frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.



- Odczytaj z wykresu i zapisz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od 0.
- Podaj miejsce zerowe funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(x-3)$.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytywanie z wykresu funkcji jej własności; szkicowanie na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ wykresów funkcji $y = f(x+a)$, $y = f(x-a)$, $y = f(x)+a$, $y = f(x)-a$ (IV.4.b,d)
---	---

Rozwiązanie

- Zapisujemy zbiór wszystkich argumentów, dla których $f(x) > 0 : (2, 3)$.
- Z rysunku wynika, że miejscem zerowym funkcji f jest liczba 3. Zatem miejscem zerowym funkcji g jest liczba $3+3=6$, ponieważ wykres funkcji g otrzymujemy przesuwając wykres funkcji f o 3 jednostki w prawo.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy:

- zapisze zbiór wszystkich argumentów, dla których $f(x) > 0 : (2, 3)$ lub $2 < x < 3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze miejsce zerowe funkcji g

albo

- poprawnie zapisze miejsce zerowe funkcji g : $x = 6$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór argumentów, dla których $f(x) > 0$.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy zapisze zbiór wszystkich argumentów, dla których $f(x) > 0 : (2, 3)$ i zapisze miejsce zerowe funkcji g : $x = 6$.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

W rozwiązaniu podpunktu a) akceptujemy zapisy: $(3, 2)$, $x \in (3, 2)$.

Zadanie 30. (0–2)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A , polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.

Modelowanie matematyczne	Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych; stosowanie twierdzenia znanego jako <i>klasyczna definicja prawdopodobieństwa</i> do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (III.10.b,d)
--------------------------	--

Rozwiązanie I sposób „metoda klasyczna”

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a, b) liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$. Wypisujemy zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia A , polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6 i zliczamy je:

$$A = \{(5, 1), (6, 2), (7, 1), (7, 3), (8, 2), (8, 4)\}$$

Zatem $|A| = 6$.

Zapisujemy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A : $P(A) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

Rozwiązanie II sposób „metoda tabeli”

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a, b) liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Budujemy tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu.

$\begin{smallmatrix} 2. \\ 1. \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5	X							
6		X						
7	X		X					
8		X		X				

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$. Zliczamy, oznaczone krzyżykami, zdarzenia elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia A , polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6: $|A| = 6$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A : $P(A) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 8 \cdot 8 = 64$

albo

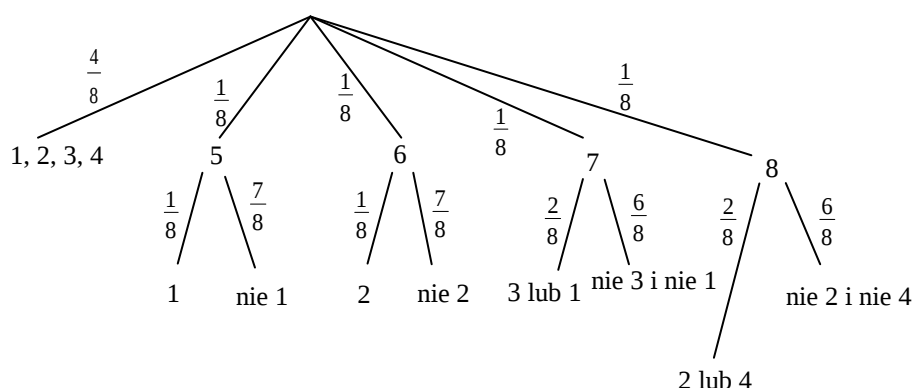
- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , polegającemu na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6: $|A| = 6$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy zapisze, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{3}{32}$.

III sposób rozwiązania „metoda drzewka”

Rysujemy drzewo, z uwzględnieniem wszystkich gałęzi, które prowadzą do sytuacji sprzyjającej zdarzeniu A .



Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A :

$$P(A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy narysuje drzewko uwzględniające wszystkie gałęzie, prowadzące do sytuacji sprzyjających zdarzeniu A i przynajmniej przy jednej gałęzi zapisze poprawne prawdopodobieństwo.

Zdający otrzymuje 2 pkt

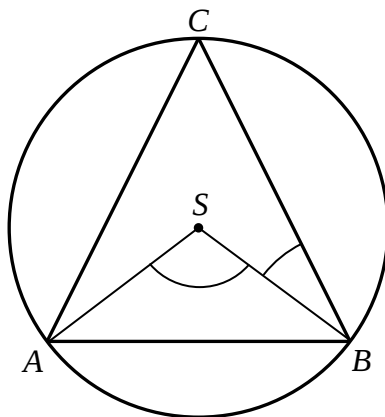
gdy zapisze, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

Uwagi

1. Akceptujemy przybliżenia dziesiętne otrzymanego wyniku, o ile są wykonane poprawnie oraz wynik zapisany w postaci 9,375%.
2. Jeżeli otrzymany wynik końcowy jest liczbą większą od 1, to zdający otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający stosuje różne modele probabilistyczne do obliczenia $|\Omega|$ i $|A|$, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Akceptujemy sytuację, gdy zdający zapisuje liczby z losowania w odwrotnej kolejności konsekwentnie w całym swoim rozwiązaniu. Wtedy za całe rozwiązanie może otrzymać **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający zapisze tylko odpowiedź $P(A) = \frac{6}{64}$, to otrzymuje **2 punkty**, jeśli natomiast zapisze tylko odpowiedź $P(A) = \frac{3}{32}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 31. (0–2)

Środek S okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC , o ramionach AC i BC , leży wewnątrz tego trójkąta (zobacz rysunek).



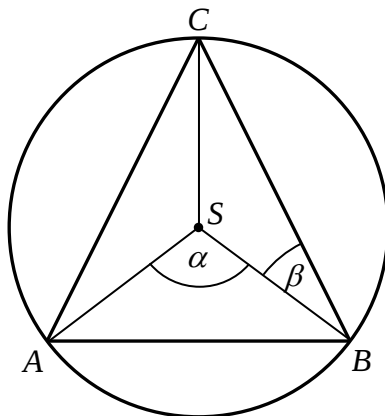
Wykaż, że miara kąta wypukłego ASB jest cztery razy większa od miary kąta wypukłego SBC .

Rozumowanie i argumentacja

Przeprowadzenie dowodu geometrycznego, z wykorzystaniem związków miarowych w figurach płaskich (V.7.c)

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku i poprowadźmy promień SC okręgu.



Z założenia wynika, że kąt wpisany ACB oraz kąt środkowy ASB leżą po tej samej stronie cięciwy AB .

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika, że $|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} \alpha$. Trójkąt ABC jest równoramienny (ramionami są AC i BC), więc prosta CS

zawiera dwusieczną kąta ACB , zatem $|\sphericalangle SCB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \alpha \right) = \frac{1}{4} \alpha$. Odcinki SC i SB

to promienie okręgu, więc trójkąt BCS jest równoramienny. Stąd wynika, że $\beta = |\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB| = \frac{1}{4} \alpha$, co kończy dowód.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy

- wykorzysta twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym oraz wykorzysta równość kątów SBC i SCB lub równość kątów SCA i SAC i nie uzasadni tezy

albo

- wykorzysta twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym oraz uzasadni równość kątów SBC i SAC , korzystając z równoramienności trójkątów ABC i ABS , i nie uzasadni tezy.

Zdający otrzymuje2 pkt
gdy uzasadni, że kąt ASB jest cztery razy większy od kąta SBC .

Uwaga

Jeżeli zdający w przedstawionym rozumowaniu rozważy wyłącznie szczególny przypadek, np. trójkąt równoboczny, to otrzymuje **0 punktów**.

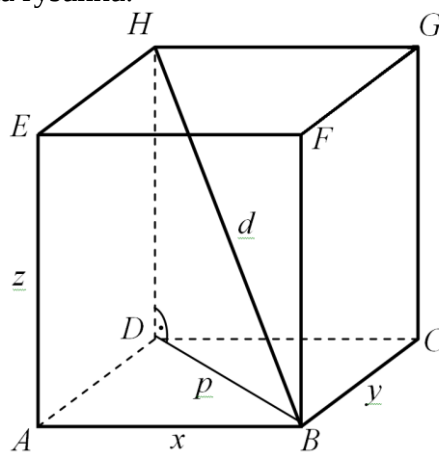
Zadanie 32. (0–4)

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 198. Stosunki długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka prostopadłościanu to $1 : 2 : 3$. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach (IV.9.b)
------------------------------	---

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole P_c powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe $P_c = 2xy + 2xz + 2yz$. Możemy przyjąć, że $x : y : z = 1 : 2 : 3$. Wtedy $y = 2x$ oraz $z = 3x$. Zatem

$$P_c(x) = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 3x + 2 \cdot 2x \cdot 3x = 4x^2 + 6x^2 + 12x^2 = 22x^2.$$

Ponieważ $P_c = 198$, więc otrzymujemy równanie

$$22x^2 = 198.$$

Stąd $x^2 = 9$, więc $x = 3$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów ABD i BDH otrzymujemy

$$p^2 = x^2 + y^2 \text{ oraz } d^2 = p^2 + z^2.$$

Stąd

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Zatem

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (2x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{14x^2} = x\sqrt{14} = 3\sqrt{14}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Zdający

- zapisze długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka w zależności od jednej zmiennej, np.: x , $2x$, $3x$

albo

- zapisze długość przekątnej prostopadłościanu w zależności od długości jego krawędzi:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zdający

- zapisze pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję jednej zmiennej, np.: $P_c(x) = 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 3x + 2 \cdot 2x \cdot 3x$

albo

- zapisze długość przekątnej prostopadłościanu jako funkcję jednej zmiennej, np.:

$$d = \sqrt{x^2 + (2x)^2 + (3x)^2}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zdający obliczy długość jednej z krawędzi prostopadłościanu, np.: $x = 3$.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Zdający obliczy długość przekątnej prostopadłościanu: $d = 3\sqrt{14}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający odgadnie długość jednej z krawędzi prostopadłościanu i obliczy długość przekątnej tego prostopadłościanu, to otrzymuje maksymalnie **2 punkty**.

2. Jeżeli zdający błędnie uzależni długości krawędzi od jednej zmiennej, przyjmując: x , $\frac{1}{2}x$,

$\frac{1}{3}x$, i konsekwentnie oblicza długość przekątnej tego prostopadłościanu, to otrzymuje maksymalnie **3 punkty**. Inne, niepoprawne interpretacje stosunków długości krawędzi, stanowią podstawę do przyznania za rozwiązanie **0 punktów**.

Zadanie 33. (0–5)

Turysta zwiedzał zamek stojący na wzgórzu. Droga łącząca parking z zamkiem ma długość 2,1 km. Łączny czas wędrowki turysty z parkingu do zamku i z powrotem, nie licząc czasu poświęconego na zwiedzanie, był równy 1 godzinę i 4 minuty. Oblicz, z jaką średnią prędkością turysta wchodził na wzgórze, jeżeli prędkość ta była o 1 km/h mniejsza od średniej prędkości, z jaką schodził ze wzgórza.

Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie zadań umieszczonych w kontekście praktycznym prowadzących do równań kwadratowych (III.3.b)
--------------------------	--

Rozwiązanie (I sposób)

Niech v oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką turysta schodził ze wzgórza, a t czas wyrażony w godzinach, w jakim zszedł ze wzgórza. Wówczas zależność między tą prędkością, czasem i przebytą drogą możemy zapisać w postaci

$$v \cdot t = 2,1.$$

Średnia prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze, jest zatem równa $v - 1$, natomiast czas, w jakim wszedł, jest równy $1\frac{4}{60} - t = 1\frac{1}{15} - t$. Możemy więc zapisać drugie równanie

$$(v - 1) \cdot \left(\frac{16}{15} - t \right) = 2,1.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{16}{15}v - v \cdot t - \frac{16}{15} + t = \frac{21}{10}.$$

Po podstawieniu $v \cdot t = \frac{21}{10}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{16}{15}v - \frac{21}{10} - \frac{16}{15} + t &= \frac{21}{10}, \\ t &= \frac{79}{15} - \frac{16}{15}v. \end{aligned}$$

Podstawiając $t = \frac{79}{15} - \frac{16}{15}v$ w równaniu $v \cdot t = \frac{21}{10}$, otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą v

$$\begin{aligned} v \left(\frac{79}{15} - \frac{16}{15}v \right) &= \frac{21}{10}, \\ \frac{16}{15}v^2 - \frac{79}{15}v + \frac{21}{10} &= 0, \\ 32v^2 - 158v + 63 &= 0, \\ \Delta &= (-158)^2 - 4 \cdot 32 \cdot 63 = 16900, \sqrt{\Delta} = \sqrt{16900} = 130 \\ v_1 &= \frac{158 - 130}{2 \cdot 32} = \frac{28}{2 \cdot 32} = \frac{7}{16}, \quad v_2 = \frac{158 + 130}{2 \cdot 32} = \frac{288}{2 \cdot 32} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy prędkość, z jaką turysta wchodziłby na wzgórze, byłaby ujemna, a to niemożliwe. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania, gdyż wtedy $v - 1 = 4,5 - 1 = 3,5$.

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze jest równa 3,5 km/h.

Rozwiązanie (II sposób)

Niech v oznacza średnią prędkość, wyrażoną w km/h, z jaką turysta schodził ze wzgórza.

Wówczas czas, w jakim zszedł ze wzgórza, wyrażony w godzinach jest równy $\frac{2,1}{v}$. Ponieważ

łączny czas wejścia i zejścia był równy 1 godzinę i 4 minuty, czyli $1\frac{4}{60} = 1\frac{1}{15} = \frac{16}{15}$ godziny,

więc czas, w jakim wchodził, był równy $\frac{16}{15} - \frac{2,1}{v}$ godziny. Stąd z kolei wynika, że średnia

prędkość, z jaką wchodził, była równa $\frac{2,1}{\frac{16}{15} - \frac{2,1}{v}}$ km/h. Otrzymujemy w ten sposób równanie

z niewiadomą v

$$\frac{2,1}{\frac{16}{15} - \frac{2,1}{v}} = v - 1,$$

$$\frac{21}{10} \cdot \frac{30v}{32v - 63} = v - 1,$$

$$\frac{63v}{32v - 63} = v - 1,$$

$$63v = (v - 1)(32v - 63),$$

$$63v = 32v^2 - 95v + 63,$$

$$32v^2 - 158v + 63 = 0,$$

$$\Delta = (-158)^2 - 4 \cdot 32 \cdot 63 = 16900, \sqrt{\Delta} = \sqrt{16900} = 130$$

$$v_1 = \frac{158 - 130}{2 \cdot 32} = \frac{28}{2 \cdot 32} = \frac{7}{16}, \quad v_2 = \frac{158 + 130}{2 \cdot 32} = \frac{288}{2 \cdot 32} = \frac{9}{2}.$$

Pierwsze z rozwiązań równania nie spełnia warunków zadania, gdyż wtedy prędkość, z jaką turysta wchodziłby na wzgórze, byłaby ujemna. Drugie rozwiązanie spełnia warunki zadania, gdyż wtedy $v - 1 = 4,5 - 1 = 3,5$.

Odpowiedź: Średnia prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze jest równa 3,5 km/h.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Zdający

- oznaczy prędkość średnią, wyrażoną w km/h, z jaką turysta schodził ze wzgórza oraz czas wyrażony w godzinach, w jakim schodził ze wzgórza, i zapisze zależność między średnią prędkością i czasem, w jakim turysta wchodził na wzgórze, np.:
 v – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza
 t – czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza

$$(v - 1) \cdot \left(\frac{16}{15} - t \right) = 2,1$$

albo

- oznaczy prędkość średnią, wyrażoną w km/h, z jaką turysta wchodził na wzgórze oraz czas wyrażony w godzinach, w jakim wchodził na wzgórze, i zapisze zależność między średnią prędkością i czasem, w jakim turysta schodził ze wzgórza, np.:

v – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze

t – czas (w h), w jakim turysta wchodził na wzgórze

$$(v+1) \cdot \left(\frac{16}{15} - t \right) = 2,1$$

Uwaga

Zdający nie otrzymuje punktu, jeśli zapisze jedynie $v \cdot t = 2,1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zdający

- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi v , t – odpowiednio prędkość i czas schodzenia turysty ze wzgórza, np.;

$$\begin{cases} (v-1) \cdot \left(\frac{16}{15} - t \right) = 2,1 \\ v \cdot t = 2,1 \end{cases}$$

albo

- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi v , t – odpowiednio prędkość i czas wchodzenia turysty na wzgórze, np.;

$$\begin{cases} (v+1) \cdot \left(\frac{16}{15} - t \right) = 2,1 \\ v \cdot t = 2,1 \end{cases}$$

albo

- oznaczy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze, oraz czas, w jakim turysta wchodził na wzgórze, np.:

v – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza

$v-1$ to średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze

$\frac{2,1}{v-1}$ to czas (w h), w jakim turysta wchodził na wzgórze

albo

- oznaczy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza, oraz czas, w jakim turysta wchodził na wzgórze, np.:

v – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza

$\frac{2,1}{v}$ to czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza

$\frac{16}{15} - \frac{2,1}{v}$ to czas (w h), w jakim turysta wchodził na wzgórze

albo

- oznaczy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze, oraz czas, w jakim turysta schodził ze wzgórza, np.:

v – średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza

$v-1$ to średnia prędkość (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze

$\frac{2,1}{v}$ to czas (w h), w jakim turysta schodził ze wzgórza.

Uwaga

Jeśli zdający wprowadza tylko jedną niewiadomą na oznaczenie jednej z czterech wielkości: czas wchodzenia, czas schodzenia, prędkość wchodzenia, prędkość schodzenia, to **2 punkty** otrzymuje wtedy, gdy uzależni od wprowadzonej zmiennej dwie z pozostałych trzech wielkości.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, gdy v, t – odpowiednio prędkość i czas schodzenia turysty ze wzgórza, np.;

$$v \left(\frac{79}{15} - \frac{16}{15} v \right) = 2,1$$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, gdy v, t – odpowiednio prędkość i czas wchodzenia turysty na wzgórze, np.;

$$v \left(\frac{16}{15} v - \frac{47}{15} \right) = 2,1$$

albo

- oznaczy prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta schodził ze wzgórza, i uzależni od tej wielkości prędkość średnią (w km/h), z jaką turysta wchodził na wzgórze, oraz czas, w jakim turysta wchodził na wzgórze i zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\frac{2,1}{v-1} + \frac{2,1}{v} = \frac{16}{15}$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Zdający

- rozwiąże równanie z niewiadomą inną niż średnia prędkość schodzenia bezbłędnie i nie obliczy średniej prędkości schodzenia

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą v (średnia prędkość schodzenia) z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Zdający obliczy średnią prędkość wchodzenia turysty na wzgórze: 3,5 km/h

Uwagi

1. Zdający może pominąć jednostki, o ile ustalił je w toku rozwiązania i stosuje je konsekwentnie.

2. Jeżeli zdający oznaczy przez v prędkość, z jaką turysta wchodził na wzgórze i zapisze, że $v - 1$ oznacza prędkość, z jaką turysta schodził ze wzgórza i konsekwentnie do przyjętych oznaczeń rozwiąże zadanie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Przykład 1.

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość, z jaką turysta schodził ze wzgórza, t - czas, w którym turysta schodził ze wzgórza i zapisze:

$$v - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t}$$

$$\begin{cases} v \cdot t = 2,1 \\ (v - 1) \frac{16}{15} - t = 2,1 \end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia $\frac{16}{15} - t$ w nawias. Zapis równania $v - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t}$ wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

Przykład 2.

Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość, z jaką turysta schodził ze wzgórza, t - czas, w którym turysta schodził ze wzgórza i zapisze:

$$v - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t} \quad \begin{cases} v = \frac{2,1}{t} \\ v - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t} \end{cases} \quad \frac{2,1}{t} - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t}, \quad \frac{2,1}{t} - 1 = \frac{2,1}{-t}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty**, mimo że w równaniu $\frac{2,1}{t} - 1 = \frac{2,1}{\frac{16}{15} - t}$ zdający

przestawił liczby w liczniku i mianowniku ułamka $\frac{16}{15}$ lub nawet pominął ten ułamek.

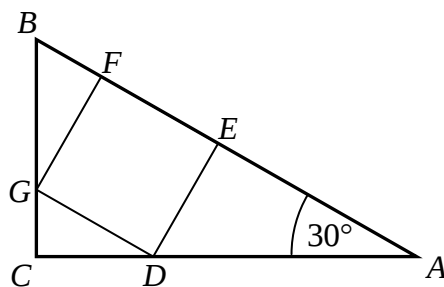
Przykład 3.

Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np. $-32v^2 + 158v + 63 = 0$ zamiast równania $32v^2 - 158v + 63 = 0$ (np. w wyniku złego przepisania znaku), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci rozwiązanie niespełniające

warunków zadania i pozostawi wynik, który może być realną prędkością poruszania się turysty, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.

Zadanie 34. (0–4)

Kąt CAB trójkąta prostokątnego ACB ma miarę 30° . Pole kwadratu $DEFG$ wpisanego w ten trójkąt (zobacz rysunek) jest równe 4. Oblicz pole trójkąta ACB .



Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie własności figur podobnych w zadaniach (IV.7.b)
------------------------------	--

I sposób rozwiązania

Niech a oznacza długość boku kwadratu $DEFG$. Zatem $a = 2$.

Trójkąt ADE to „połowa trójkąta równobocznego” o boku AD i wysokości AE , więc

$$|AD| = 2a = 4 \text{ oraz } |AE| = \frac{|AD|\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Trójkąt GBF to „połowa trójkąta równobocznego” o boku BG i wysokości FG , więc

$$|BG| = 2|BF| \text{ oraz } |FG| = \frac{|BG|\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem $2 = \frac{|BG|\sqrt{3}}{2}$, więc $|BG| = \frac{4}{\sqrt{3}}$ oraz $|BF| = \frac{1}{2}|BG| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Trójkąt ACB jest „połową trójkąta równobocznego” o boku AB . Obliczamy

$$|AB| = |AE| + |EF| + |BF| = 2\sqrt{3} + 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2.$$

Pole trójkąta ACB jest więc równe

$$P_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{8}{3}\sqrt{3} + 2 \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{64}{3} + \frac{32}{3}\sqrt{3} + 4 \right) = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4.$$

Uwaga

Podany sposób rozwiązania polega na rozwiązaniu trójkątów prostokątnych ADE i BGF . Tak samo możemy postąpić rozwiązując inną parę trójkątów prostokątnych: ADE i DCG lub DCG i BGF .

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Zdający obliczy długość boku kwadratu: 2.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zdający skorzysta z własności trójkąta $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ albo z funkcji trygonometrycznych

i poprawnie obliczy długość jednego z odcinków: $|AD| = 4$, $|AE| = 2\sqrt{3}$, $|BG| = \frac{4}{\sqrt{3}}$,

$$|BF| = \frac{2}{\sqrt{3}}, |CD| = \sqrt{3}, |CG| = 1.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zdający poprawnie obliczy długość jednego z boków trójkąta ACB :

$$|AB| = \frac{8}{3}\sqrt{3} + 2 \text{ lub } |BC| = \frac{4}{\sqrt{3}} + 1 \text{ lub } |AC| = \sqrt{3} + 4.$$

Rozwiązanie pełne4 pkt

Zdający obliczy pole trójkąta ACB : $P_{ACB} = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4$.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze wynik w innej, równoważnej postaci, to otrzymuje **4 punkty**, np.:

$$P_{ACB} = \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{8}{3}\sqrt{3} + 2 \right)^2, P_{ACB} = \frac{1}{2} (4 + \sqrt{3}) \cdot \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \right).$$

II sposób rozwiązania

Niech a oznacza długość boku kwadratu $DEFG$. Zatem $a = 2$.

Trójkąt ADE to „połowa trójkąta równobocznego” o boku AD , więc $|AD| = 2a = 4$. Zatem pole tego trójkąta jest równe

$$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AD|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{8} = 2\sqrt{3}.$$

Trójkąt GBF to także „połowa trójkąta równobocznego” o boku BG , więc $|BG| = 2|BF|$

Zatem $2 = \frac{|BG|\sqrt{3}}{2}$, więc $|BG| = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Pole trójkąta GBF jest więc równe

$$P_{GBF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|BG|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2 \sqrt{3}}{8} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Trójkąt DGC również jest „połową trójkąta równobocznego” o boku DG . Ponieważ

$|DG| = a = 2$, więc pole tego trójkąta jest równe

$$P_{DCG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|DG|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Obliczamy pole trójkąta ACB

$$P_{ACB} = P_{ADE} + P_{GBF} + P_{DCG} + P_{DEFG} = 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego

rozwiązania1 pkt

Zdający obliczy długość boku kwadratu: 2.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zdający obliczy pole jednego z trójkątów ADE , GBF , DCG :

$$P_{ADE} = 2\sqrt{3}, P_{GBF} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, P_{DCG} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zdający obliczy pole każdego z trójkątów ADE , GBF , DCG :

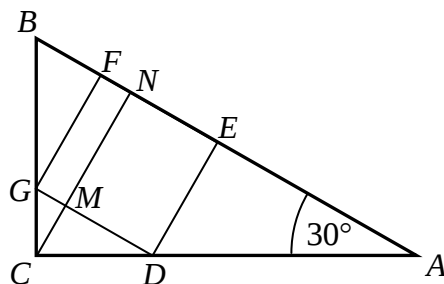
$$P_{ADE} = 2\sqrt{3}, P_{GBF} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, P_{DCG} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rozwiązanie pełne4 pkt

Zdający obliczy pole trójkąta ACB : $P_{ACB} = \frac{19}{6}\sqrt{3} + 4$.

III sposób rozwiązania

Niech a oznacza długość boku kwadratu $DEFG$. Zatem $a = 2$. Zauważmy, że trójkąt ACB jest podobny do trójkąta DCG



Trójkąt DCG to „połowa trójkąta równobocznego” o boku DG długości 2, więc jego pole jest równe

$$P_{DCG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|DG|^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wysokość CM tego trójkąta obliczymy wykorzystując wzór na jego pole

$$P_{DCG} = \frac{1}{2} \cdot |DG| \cdot |CM| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |CM| = |CM|,$$

więc $|CM| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem wysokość CN trójkąta ACB opuszczona na AB jest równa

$$|CN| = |CM| + |MN| = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2.$$

Skala podobieństwa trójkąta ACB do trójkąta DCG jest więc równa

$$\frac{|CN|}{|CM|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Ponieważ stosunek pól figur podobnych równy jest kwadratowi skali ich podobieństwa, więc

$$\frac{P_{ACB}}{P_{DCG}} = \left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{3} = \frac{19}{3} + \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Stąd i z obliczonego wcześniej pola trójkąta DCG otrzymujemy

$$P_{ACB} = \left(\frac{19}{3} + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) P_{DCG} = \left(\frac{19}{3} + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19}{6} \sqrt{3} + 4.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Zdający obliczy długość boku kwadratu: 2.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zdający obliczy pole jednego z trójkątów ADE , GFB , DCG :

$$P_{ADE} = 2\sqrt{3}, \quad P_{GBF} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad P_{DCG} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zdający obliczy skalę podobieństwa trójkąta ACB do jednego z trójkątów ADE , GFB , DCG i wykorzysta twierdzenie o stosunku pól figur podobnych, np.:

$$\frac{|CN|}{|CM|} = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \frac{P_{ACB}}{P_{DCG}} = \left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2.$$

Rozwiązanie pełne4 pkt

Zdający obliczy pole trójkąta ACB : $P_{ABC} = \frac{19}{6} \sqrt{3} + 4.$