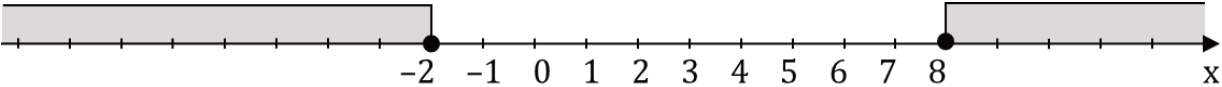


Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Informator maturalny CKE 2023

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D (2023)	1
2	A ()	1
3	B (34%)	1
9	C (1000)	1
10	B (7)	1
17	B ($b = 7$)	1
32	C (50°)	1
42	A ($\frac{5}{2}$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Wartość wyrażenia $2021 : \left(1 - \frac{1}{2022}\right) - \left(1 - \frac{2022}{2021}\right) : \frac{1}{2021}$ jest równa:

Odpowiedź: D (2023)

Pamiętaj, że liczbę 1 możemy zapisać jako ułamek, w którym licznik i mianownik są jednakowe. W tym zadaniu przyda nam się zamiana $1 = \frac{2021}{2021}$ oraz $1 = \frac{2021}{2021}$. Teraz korzystając z działań na ułamkach, możemy zapisać, że:

$2021 : \left(1 - \frac{1}{2022}\right) - \left(1 - \frac{2022}{2021}\right) : \frac{1}{2021} = , = 2021 : \left(\frac{2022}{2022} - \frac{1}{2022}\right) - \left(\frac{2021}{2021} - \frac{2022}{2021}\right) : \frac{1}{2021} = , = 2021 : \frac{2021}{2022} - \left(-\frac{1}{2021}\right) : \frac{1}{2021} =$

Zadanie 2

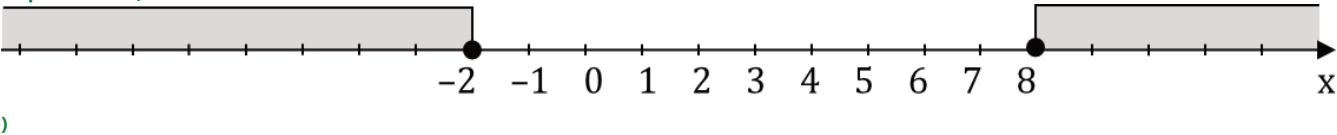
0-1 pkt

Dana jest nierówność:

$|x - 3| \geq 5$

Na którym rysunku prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających powyższą nierówność?

Odpowiedź: A (



Krok 1. Rozwiązanie podanej nierówności.

Dana jest nierówność z wartością bezwzględną. Aby ją rozwiązać, będziemy musieli ułożyć dwie nierówności - pierwsza będzie taka, jakby tej wartości bezwzględnej w ogóle nie było, a druga będzie identyczna, tylko ze zmienionym znakiem i liczbą przeciwną po prawej stronie. Całość będzie wyglądać następująco:

$x - 3 \geq 5 \quad \vee \quad x - 3 \leq -5, \quad x \geq 8 \quad \vee \quad x \leq -2$

Krok 2. Wybór właściwego rysunku.

Rozwiązaniem tej nierówności są więc wszystkie liczby mniejsze lub równe -2 lub większe lub równe 8 , a takie przedziały zostały zaznaczone na pierwszym rysunku.

Zadanie 3

0-1 pkt

Oprocentowanie na długoterminowej lokacie w pewnym banku wynosi 3% w skali roku (już po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnego kapitału znajdującego się na lokacie - zgodnie z procentem składanym.

Po 10 latach oszczędzania w tym banku (i bez wypłacania kapitału ani odsetek w tym okresie) kwota na lokacie będzie większa od kwoty wpłaconej na samym początku o (w zaokrągleniu do 1%):

Odpowiedź: B (34%)

W tym zadaniu skorzystamy ze wzoru na procent składany:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

gdzie:

K_n - kapitał zgromadzony po n okresach kapitalizacji

K - kapitał początkowy

n - liczba okresów kapitalizacji

p - wysokość oprocentowania (po uwzględnieniu liczby kapitalizacji)

Jednak zanim przystąpimy do obliczeń, to ustalmy kluczowe parametry, czyli n oraz p . Lokata jest na 10 lat, a kapitalizacja jest roczna. W związku z tym $n = 10$ (bo odsetki zostaną dopisane dziesięć razy), a $p = 3$. Podstawiając te dane do wzoru, otrzymamy:

$$K_{10} = K \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{10}, K_{10} = K \cdot (1,03)^{10}, K_{10} \approx K \cdot 1,3439, K_{10} \approx 1,34K$$

Skoro włożyliśmy na lokatę K złotych, a po dziesięciu latach mamy $1,34K$, to znaczy, że kwota wzrosła o 34%.

Zadanie 4

0-2 pkt

Dane są dwie liczby x i y , takie, że iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x+y}{x}$. Wynik podaj bez niewymierności w mianowniku.

Odpowiedź: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Zwróćmy uwagę, że $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$. Znamy wartość $\frac{x}{y}$, a widzimy, że potrzebujemy jej odwrotności, czyli $\frac{y}{x}$. Odwrotnością ułamka $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest oczywiście $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$. Skoro tak, to całość obliczeń będzie wyglądać następująco:

$$\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

Aby móc kontynuować obliczenia, musimy pozbyć się niewymierności z mianownika. W tym celu musimy pomnożyć licznik oraz mianownik ułamka przez $1 - \sqrt{5}$, dzięki czemu będziemy mogli skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, zatem:

$$1 + \frac{2 \cdot (1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})} = 1 + \frac{2 - 2\sqrt{5}}{1 - 5} = 1 + \frac{2 - 2\sqrt{5}}{-4} = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Zadanie 5

0-2 pkt

Dane są liczby $a = \sqrt{5} - 2$ oraz $b = \sqrt{5} + 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ dla podanych a i b .

Odpowiedź: 1

Krok 1. Uproszczenie zapisu.

Zanim podstawimy liczby do naszego wyrażenia, to najprościej będzie najpierw uprościć cały zapis i skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, zatem:

$$\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(a \cdot b) \cdot (a - b)}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{(a \cdot b) \cdot (a - b)}{a - b} = a \cdot b$$

Krok 2. Obliczenie wartości $a \cdot b$.

Podstawiając liczby z treści zadania do wyznaczonej przed chwilą postaci, otrzymamy:

$$a \cdot b = (\sqrt{5} - 2) \cdot (\sqrt{5} + 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

Zadanie 6

0-2 pkt

Dana jest liczba $x = a - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, gdzie a należy do zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych. W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ są niewymierne. Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe. Liczba x jest wymierna dla:

A. $a = 5$

B. $a = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$

C. $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 0,3$

D. $a = 6$

E. $a = -2\sqrt{6} + 12,5$

F. $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$

G. $a = -\sqrt{6}$

Odpowiedź: C oraz EKrok 1. Obliczenie wartości liczby x .Spróbujmy obliczyć wartość liczby x wykonując występujące w niej potęgowanie. Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia możemy zapisać, że:

$$x = a - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2, \quad x = a - (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2, \quad x = a - (3 - 2\sqrt{6} + 2), \quad x = a - (5 - 2\sqrt{6}), \quad x = a - 5 + 2\sqrt{6}$$

Krok 2. Ustalenie, kiedy liczba x jest wymierna.Musimy się teraz zastanowić, kiedy $a - 5 + 2\sqrt{6}$ da wynik wymierny. Aby tak się stało, to w wartości liczby a musi się pojawić $-2\sqrt{6}$ (wtedy te pierwiastki się "zniosą") i w zapisie tej liczby nie mogą nam oczywiście pojawić się inne nowe pierwiastki.Od razu możemy stwierdzić, że poprawna jest odpowiedź E, czyli $a = -2\sqrt{6} + 12,5$, bowiem to jest dokładnie to, czego szukamy. Musimy jeszcze wybrać drugą odpowiedź. Na pewno nie będzie to A, B, D oraz G (bo brakuje tu wartości $-2\sqrt{6}$). Do rozpatrzenia zostaje nam C oraz F. Rozpiszmy sobie każdy z tych wariantów:

Odp. C. $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 0,3 = 2 - 2\sqrt{6} + 3 + 0,3 = 5,3 - 2\sqrt{6}$

Ta odpowiedź nam pasuje.

Odp. F. $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6} = 2 - 2\sqrt{6} + 3 - 2\sqrt{6} = 5 - 4\sqrt{6}$

Ta odpowiedź nam nie pasuje, bo jest tutaj $-4\sqrt{6}$.

Podsumowując, pasującymi odpowiedziami będą C oraz E.

Zadanie 7

0-2 pkt

Rozwiąż równanie:

$$\frac{(4x+1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)} = 0$$

Odpowiedź: $x = -\frac{1}{4}$

Krok 1. Zapisanie założeń.

Mamy równanie, w którym niewiadoma x pojawia się w mianowniku ułamka. Zanim więc zaczniemy cokolwiek obliczać, musimy zapisać stosowne założenia, ponieważ wartość mianownika nie może być równa 0 (gdyż na matematyce nie istnieje dzielenie przez 0). Skoro tak, to:

$$(2x-10)(x+3) \neq 0$$

Mamy postać iloczynową równania kwadratowego, zatem każdy z nawiasów musi być różny od zera, czyli:

$$2x-10 \neq 0 \quad \vee \quad x+3 \neq 0, \quad 2x \neq 10 \quad \vee \quad x \neq -3, \quad x \neq 5 \quad \vee \quad x \neq -3$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.

Aby rozwiązać podane równanie, musimy oboje strony pomnożyć przez wartość w mianowniku, zatem:

$$\frac{(4x+1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)} = 0 \quad \Bigg/ \cdot (2x-10)(x+3), \quad (4x+1)(x-5) = 0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe w postaci iloczynowej, zatem przyrównujemy wartości w nawiasach do zera:

$$4x+1=0 \quad \vee \quad x-5=0, \quad 4x=-1 \quad \vee \quad x=5, \quad x=-\frac{1}{4} \quad \vee \quad x=5$$

Krok 3. Weryfikacja otrzymanych wyników.

Na koniec musimy zweryfikować otrzymane wyniki z zapisanymi założeniami. Widzimy, że rozwiązanie $x=5$ musimy odrzucić, bo dla tej wartości mianownik był równy 0. Skoro tak, to jedynym rozwiązaniem tego zadania będzie $x=-\frac{1}{4}$.

Zadanie 8

0-2 pkt

Pensja pana X jest o 50% wyższa od średniej krajowej, a pensja pana Y jest o 40% niższa od średniej krajowej.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

1. Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y :

- A. o 40% pensji pana Y .
- B. o 90% pensji pana Y .
- C. o 150% pensji pana Y .
- D. o 275% pensji pana Y .

2. Pensja pana Y jest niższa od pensji pana X :

- E. o 60% pensji pana X .
- F. o 73% pensji pana X .
- G. o 90% pensji pana X .
- H. o 150% pensji pana X .

Odpowiedź: C oraz E

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

Wprowadźmy do naszego zadania następujące oznaczenia:

- s - średnia pensja krajowa
- $1,5s$ - średnia pensja Pana X
- $0,6s$ - średnia pensja Pana Y

Od razu możemy też zapisać, że Pan X zarabia o $1,5s - 0,6s = 0,9s$ więcej niż Pan Y .

Krok 2. Obliczenie procentowej różnicy wynagrodzenia.

Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y o:

$$\frac{0,9s}{0,6s} = 1,5 = 150\%$$

Pensja pana Y jest mniejsza od pensji pana X o:

$$\frac{0,9s}{1,5s} = 0,6 = 60\%$$

Zadanie 9

0-1 pkt

Na wykresie przedstawiono zależność $\log K(t)$, gdzie $K(t)$ jest liczbą bakterii w próbce po czasie t wyrażonym w godzinach, jaki upłynął od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji. Gdy upłynęły dokładnie trzy godziny od chwili $t = 0$, liczba K bakterii była równa:

Odpowiedź: C (1000)

W tym zadaniu musimy pamiętać, że kiedy przy podstawie logarytmu nie mamy zapisanej żadnej liczby, to domyślnie ta podstawa jest równa 10. Mówiąc wprost, $\log K$ to po prostu $\log_{10} K$.

Z wykresu odczytujemy, że po trzech godzinach $\log_{10} K$ ma być równe 3, zatem:

$$\log_{10} K = 3 \iff 10^3 = K$$

To oznacza, że $K = 10^3 = 1000$.

Zadanie 10

0-1 pkt

Liczba $\log_2 \left[(\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot (\sqrt{2})^8 \right]$ jest równa:

Odpowiedź: B (7)

Powinniśmy zauważyć, że:

$$(\sqrt{2})^2 = (2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 2^1, \quad (\sqrt{2})^4 = (2^{\frac{1}{2}})^4 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 4} = 2^2 = 4, \quad (\sqrt{2})^8 = (2^{\frac{1}{2}})^8 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 8} = 2^4 = 16$$

Skoro tak, to podstawiając te dane do naszego logarytmu, otrzymamy:

$$\log_2 \left[(\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot (\sqrt{2})^8 \right] = \dots = \log_2(2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^4) = \dots = \log_2(2^{1+2+4}) = \log_2 2^7 = 7$$

Zadanie 11

0-3 pkt

Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b , które spełniają warunki:

$$a \neq 0, b \neq 0 \text{ oraz } a^3 + b^3 = (a + b)^3$$

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b , spełniających powyższe warunki.

Odpowiedź: -1

Krok 1. Rozpisanie podanego równania.

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, możemy zapisać, że:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3, \quad a^3 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad 0 = 3a^2b + 3ab^2, \quad 3ab \cdot (a + b) = 0 \quad \Bigg/ : 3, \quad ab \cdot (a + b) = 0$$

Otrzymaliśmy tak naprawdę równanie kwadratowe. Aby je rozwiązać musimy przyrównać ab oraz $a + b$ do zera, zatem:

$$ab = 0 \quad \vee \quad a + b = 0$$

Krok 2. Analiza otrzymanych wyników i obliczenie wartości liczbowej wyrażenia.

Przeanalizujmy teraz to, co otrzymaliśmy. Zacznijmy od $ab = 0$. Aby iloczyn $a \cdot b$ był równy 0, to któraś z liczb musiałaby być równa 0, a z treści zadania wiemy, że $a \neq 0$ oraz $b \neq 0$. To oznacza, że to pierwsze równanie nie spełnia w ogóle naszych założeń.

To teraz spójrzmy na drugie równanie, czyli $a + b = 0$. Na jego podstawie możemy zapisać, że $a = -b$. Naszym celem jest poznanie wartości liczbowej wyrażenia $\frac{a}{b}$, a skoro $a = -b$, to:

$$\frac{a}{b} = \frac{-b}{b} = \frac{-1 \cdot b}{b} = -1$$

Zadanie 12

0-1 pkt

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right)$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F - jeśli jest fałszywe. Wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.

Wyrażenie $W(x)$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{2x}{x^2 - 1}$.

Wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.

Prawda

Fałsz

Wyrażenie $W(x)$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{2x}{x^2 - 1}$.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Wartości mianowników muszą być różne od zera, zatem $x - 1 \neq 0$ oraz $x + 1 \neq 0$. Z pierwszego równania otrzymamy $x \neq 1$, a z drugiego $x \neq -1$. Pierwsze zdanie j

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Naszym celem jest uproszczenie podanego wyrażenia. Jak dodać do siebie dwa ułamki, które znajdują się w nawiasach? Musimy sprowadzić je do wspólnego mianownika licznik oraz mianownik drugiego ułamka przez $x - 1$. Całość będzie wyglądać następująco:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) = , = \frac{1}{2} \left(\frac{(x+1) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} - \frac{(x-1) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x+1)} \right) = , = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \right) = , = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 1} \right)$$

Zdanie jest więc prawdą.

Rozwiąż równanie $(x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 6 = 0$

Odpowiedź: $x = \sqrt{2} + 1$ i $x = -\sqrt{2} + 1$

Krok 1. Zapisanie równania kwadratowego.

Aby rozwiązać tego typu równanie czwartego stopnia, musimy zapisać, że $t = (x-1)^2$. Dzięki temu będziemy mogli zapisać równanie z treści zadania jako równanie

$$(x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 6 = 0, ((x-1)^2)^2 - 5(x-1)^2 + 6 = 0, t^2 - 5t + 6 = 0$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Powstało nam równanie kwadratowe, które musimy teraz rozwiązać. Równanie jest zapisane w postaci ogólnej, zatem z pomocą przyjdzie nam delta:

Współczynniki: $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1, \sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2, t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Krok 3. Rozwiązanie równania.

W pierwszym kroku zapisaliśmy sobie, że $t = (x-1)^2$. Wiemy już, że $t = 2$ lub $t = 3$, a skoro tak, to:

$$(x-1)^2 = 2 \quad \vee \quad (x-1)^2 = 3$$

Otrzymaliśmy dwa równania kwadratowe, w których po prawej stronie nie mamy zera (nie możemy więc przyrównać wartości w nawiasach do zera). Możemy je oczywiście rozwiązać. Tego typu równania najprościej będzie rozwiązać korzystając z wartości bezwzględnej. Pierwiastkując obydwie strony równań, możemy zapisać, że

$$|x-1| = \sqrt{2} \quad \vee \quad |x-1| = \sqrt{3}, x-1 = \sqrt{2} \quad \vee \quad x-1 = -\sqrt{2} \quad \vee \quad x-1 = \sqrt{3} \quad \vee \quad x-1 = -\sqrt{3}, x = \sqrt{2} + 1$$

Zadanie 14

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $20n^2 + 30n + 7$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Odpowiedź: Udowodniono wyłączając

Kluczem do rozwiązania tego typu zadań jest umiejętne wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias. Haczyk polega na tym, że aby tego dokonać, musimy liczbę 7

$$20n^2 + 30n + 7 = 20n^2 + 30n + 5 + 2 = 5 \cdot (4n^2 + 6n + 1) + 2$$

Mówiąc wprost - otrzymany zapis mówi nam, że nasza liczba dzieli się przez 5, dając wynik równy $4n^2 + 6n + 1$ i resztę równą 2. Warto też dodać, że wartość $4n^2 + 6n + 1$ dla naturalnych n daje na pewno liczbę naturalną.

Zadanie 15

Rozważmy dwie kolejne liczby naturalne a i b takie, że obie są niepodzielne przez 3.

Udowodnij, że liczba $a^3 + b^3$ jest podzielna przez 9.

Odpowiedź: Udowodniono wykorzystując

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

Jeżeli przyjmiemy, że k jest liczbą całkowitą nieujemną, to liczbę niepodzielną przez 3 możemy zapisać jako $3k + 1$. Przykładowo, gdy $k = 4$, to otrzymamy $3 \cdot 4 + 1$ liczbę jako a , czyli $a = 3k + 1$. Liczba b musi być o 1 większa (bo z treści zadania wynika, że a i b są kolejnymi liczbami naturalnymi), więc $b = 3k + 2$.

Krok 2. Rozpisanie podanej liczby

Musimy teraz podstawić do zapisu $a^3 + b^3$ wartości $a = 3k + 1$ oraz $b = 3k + 2$ i skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia:

$$(3k + 1)^3 + (3k + 2)^3 = , = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 = , = 54k^3 + 81k^2 + 45k + 9$$

Krok 3. Zakończenie dowodzenia.

Aby udowodnić, że otrzymane $54k^3 + 81k^2 + 45k + 9$ jest podzielne przez 9, wystarczy wyłączyć dziewiątkę przed nawias, otrzymując:

$$9 \cdot (6k^3 + 9k^2 + 5k + 1)$$

Wartość $6k^3 + 9k^2 + 5k + 1$ jest na pewno liczbą całkowitą, bo $6k^3$, $9k^2$, $5k$ oraz 1 to liczby całkowite. Otrzymaliśmy więc wynik z którego wynika, że liczba $a^3 + b^3$ jest podzielna przez 9.

Zadanie 16

Dany jest wielomian $W(x) = 3x^3 + mx^2 + 3x - 2$, gdzie m jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiadomo, że ten wielomian można zapisać w postaci iloczynowej $W(x) = Q(x)$ oraz obliczyć wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x)$.

Odpowiedź: $\{x = -2\}$

Krok 1. Rozpisanie wielomianu $W(x)$.

Na początku ustalmy o co chodzi w zapisie $W(x) = (x + 2)Q(x)$. Mówiąc wprost - jeżeli podzielimy wielomian $W(x)$ przez $x + 2$, to otrzymamy wielomian $Q(x)$.

Do zadania można podejść na różne sposoby, ale najprościej będzie skorzystać z informacji, że wielomian $Q(x)$ jest trójmianem kwadratowym, co oznacza, że możemy

$$W(x) = (x + 2)Q(x), \quad W(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c), \quad W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c, \quad W(x) = ax^3 + 2ax^2 + bx^2 +$$

Krok 2. Wyznaczenie wartości wszystkich współczynników.

Z treści zadania wiemy, że wielomian $W(x)$ jest równy $3x^3 + mx^2 + 3x - 2$. Musimy więc przyrównać to do otrzymanej postaci $ax^3 + (2a + b)x^2 + (2b + c)x +$

$$ax^3 + (2a + b)x^2 + (2b + c)x + 2c, \quad 3x^3 + mx^2 + 3x - 2$$

Wynika z tego, że:

$$a = 3, \quad 2a + b = m, \quad 2b + c = 3, \quad 2c = -2 \Rightarrow c = -1$$

Z powyższej rozpiski wiemy już, że $a = 3$ oraz $c = -1$. Jak spojrzymy na trzecie równanie, to będziemy mogli teraz obliczyć wartość b , zatem:

$$2b + c = 3, \quad 2b - 1 = 3, \quad 2b = 4, \quad b = 2$$

I teraz wracamy do drugiego równania, otrzymując:

$$2a + b = m, \quad 2 \cdot 3 + 2 = m, \quad m = 8$$

Mamy więc komplet informacji: $a = 3, b = 2, c = -1$ oraz $m = 8$, zatem $W(x) = 3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$ oraz $Q(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

Krok 3. Wyznaczenie pierwiastków wielomianu $W(x)$.

Musimy jeszcze wyznaczyć wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$, czyli mówiąc wprost - musimy ustalić kiedy $3x^3 + 8x^2 + 3x - 2$ będzie równe 0. Jest to wielomian $W(x) = (x + 2)Q(x)$, czyli tym samym $W(x) = (x + 2)(3x^2 + 2x - 1)$. Skoro tak, to pierwiastki wyznaczymy w następujący sposób:

$$(x + 2)(3x^2 + 2x - 1) = 0, \quad x + 2 = 0 \quad \vee \quad 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

Z pierwszego równania widzimy, że otrzymamy $x = -2$. Drugie równanie jest równaniem kwadratowym zapisanym w postaci ogólnej, zatem z pomocą przyjdzie nam Współczynniki: $a = 3, b = 2, c = -1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 - (-12) = 16, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} =$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 4}{2 \cdot 3} = \frac{-6}{6} = -1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 4}{2 \cdot 3} =$$

Skoro tak, to pierwiastkami wielomianu będą:

$$x = -2 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad \frac{1}{3}$$

Zadanie 17

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^3 - b - 5\sqrt{2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Miejscem zerowym funkcji f jest $x = \sqrt{2} + 1$.

Współczynnik b we wzorze funkcji f jest równy:

Odpowiedź: B ($b = 7$)

Miejsce zerowe to taki argument x , dla którego funkcja przyjmuje wartość równą 0. Skoro tak, to:

$$0 = (\sqrt{2} + 1)^3 - b - 5\sqrt{2}, \quad 0 = (\sqrt{2})^3 + 3 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 1 + 3\sqrt{2} \cdot 1^2 + 1^3 - b - 5\sqrt{2}, \quad 0 = 2\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} - b - 5\sqrt{2}$$

Zadanie 18

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = 3x^2 + bx - 5$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Współczynnik b jest liczbą rzeczywistą mniejszą od zera.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja f :

- A. ma dwa rzeczywiste miejsca zerowe,
- B. ma jedno rzeczywiste miejsce zerowe,
- C. nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,

ponieważ

- 1. $b^2 + 60 > 0$
- 2. $b^2 + 60 = 0$
- 3. $b^2 + 60 < 0$

Odpowiedź: A., ponieważ 1.

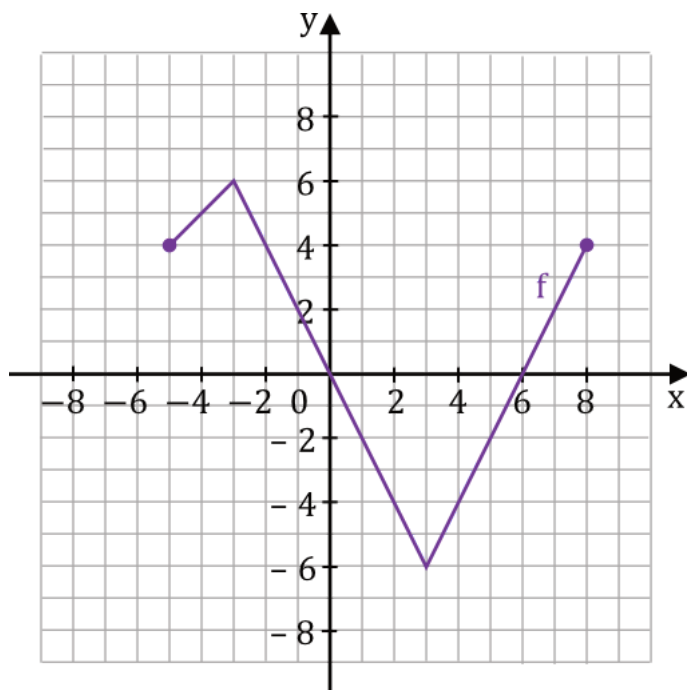
O tym, ile miejsc zerowych ma dana funkcja, decyduje tak zwana delta, którą obliczamy rozwiązując równania kwadratowe. Wypiszmy zatem współczynniki funkcji f :
Współczynniki: $a = 3$, $b = b$, $c = -5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = b^2 - (-60) = b^2 + 60$$

Z treści zadania wynika, że b jest liczbą mniejszą od zera. Taka liczba, podniesiona do kwadratu, daje wynik dodatni. W związku z tym cała delta zapisana jako $b^2 + 60$ funkcja ma dwa miejsca zerowe, ponieważ $b^2 + 60 > 0$.

Zadanie 19

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok. Ta funkcja jest określona dla każdej liczby



Zadanie 1.

Zapisz w miejscu wy kropkowanym poniżej zbiór rozwiązań nierówności: $f(x) > 2$

.....

Zadanie 2.

Zapisz w miejscu wy kropkowanym poniżej maksymalny przedział lub maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

Zadanie 3.

Największa wartość funkcji f jest równa liczbie, a najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie

Odpowiedź: 1. $\langle x \in]-5; -$

Zadanie 1.

Z wykresu musimy odczytać, kiedy nasza funkcja przyjmuje wartości większe od 2. Widzimy, że tak się stanie dla dwóch przedziałów: od $x = -5$ aż do $x = -1$ oraz $x = -5$ oraz $x = 8$ mamy zamalowane kropki, więc nawiasy muszą być domknięte. Matematyczny zapis wyglądałby więc następująco:

$$x \in \langle -5; -1 \rangle \cup \langle 7; 8 \rangle$$

Zadanie 2.

Spoglądamy na wykres funkcji i szukamy fragmentu, w którym funkcja "kieruje się w dół". Widzimy, że mamy tylko jeden taki przedział, funkcja maleje od $x = -3$ aż do $x = 3$ (stała) używamy zwyczajowo nawiasów domkniętych, stąd też:

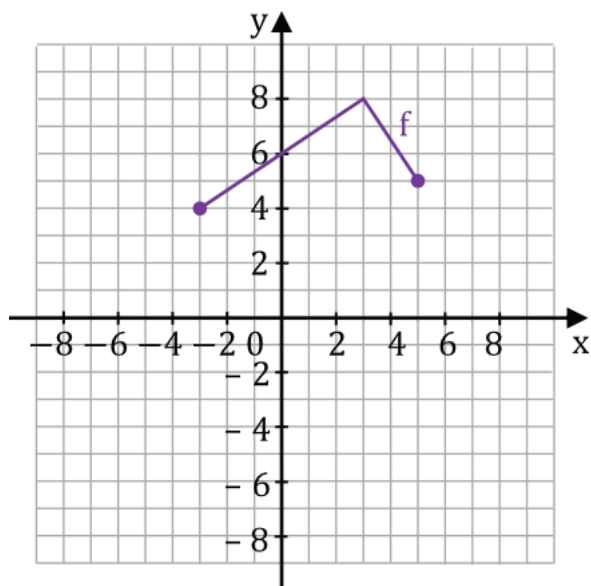
$$x \in \langle -3; 3 \rangle$$

Zadanie 3.

Spoglądamy na naszą funkcję i sprawdzamy, jakie są największe i najmniejsze wartości przez nią przyjmowane. Widzimy, że największą przyjmowaną wartością jest y :

Zadanie 20

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.



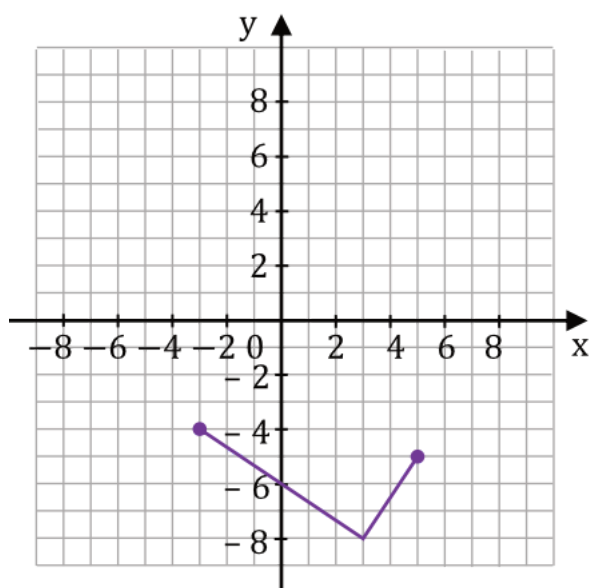
Ta funkcja jest określona dla $x \in \langle -3, 5 \rangle$. Funkcje g oraz h są określone za pomocą funkcji f następująco:

$$y = g(x) = f(x + 2) \qquad y = h(x) = f(-x)$$

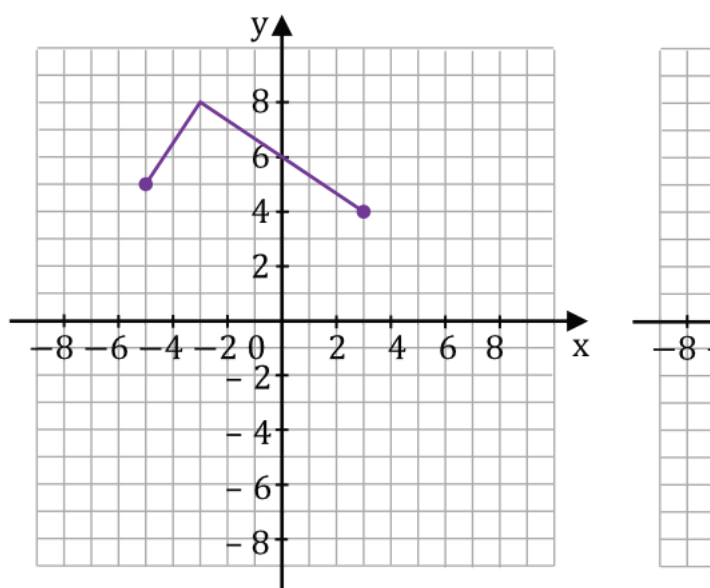
Na rysunkach A-F przedstawiono wykresy różnych funkcji - w tym wykresy funkcji g oraz h . Każdej z funkcji $y = g(x)$ oraz $y = h(x)$ przyporządkuj jej wykres. Wpisz:

Zadanie	Funkcja	Rysunek
1.	$y = g(x)$	
2.	$y = h(x)$	

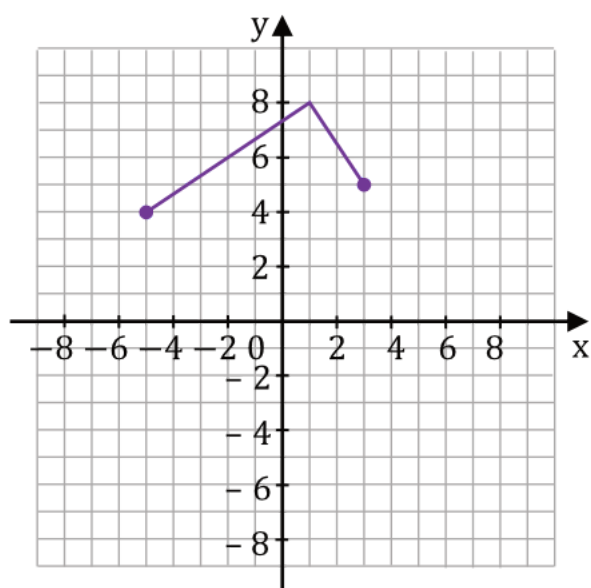
A.



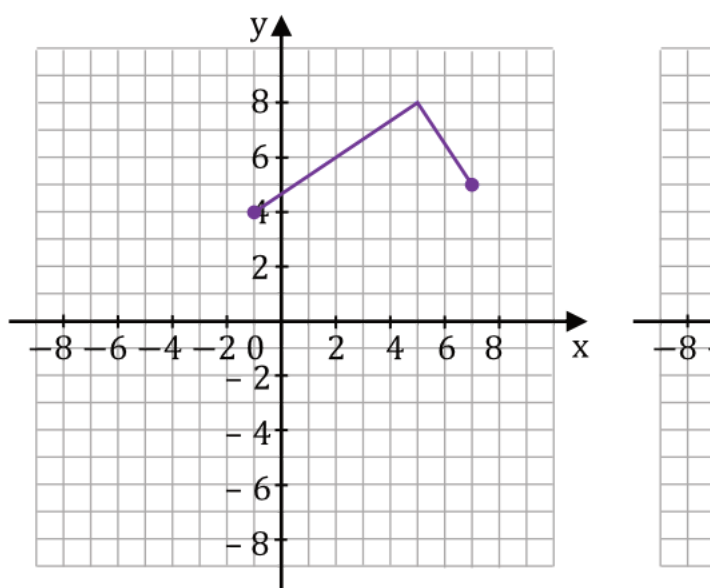
B.



D.



E.



Odpowiedź: 1. D 2. B

Zapis $g(x) = f(x + 2)$ oznacza, że funkcja $g(x)$ jest wynikiem przesunięcia funkcji $f(x)$ o dwie jednostki w lewo. Taką sytuację mamy na rysunku D.

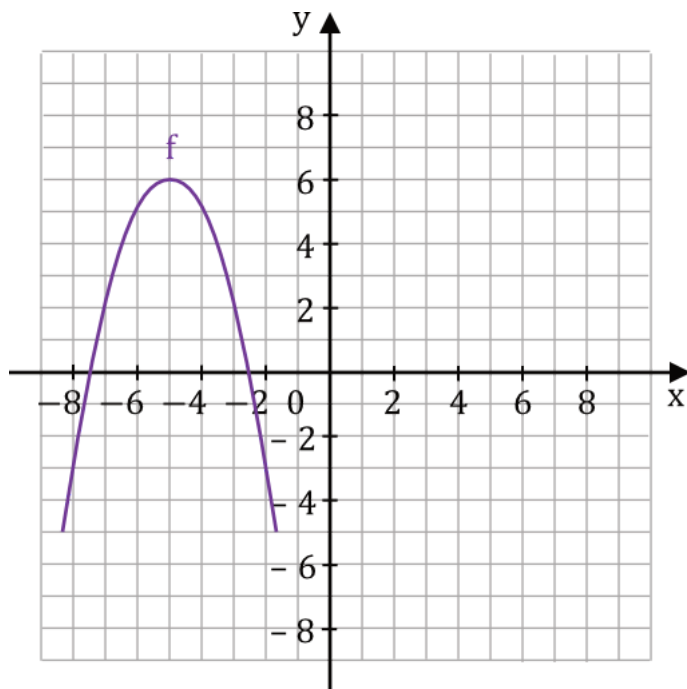
Zapis $h(x) = f(-x)$ oznacza, że funkcja $h(x)$ jest wynikiem przekształcenia funkcji $f(x)$ względem osi OY (czyli takim odbiciem lustrzanym względem osi OX). Tak

Zadanie 21

Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w postaci ogólnej, kanonicznej lub iloczynowej (o ile istnieje).

Zadanie 1.

Dana jest funkcja kwadratowa $y = f(x)$, której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych, jeżeli wiadomo, że jeden ze wzorów podanych w odpowiedziach A-D to wzór funkcji f .

Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ jest określona wzorem:

A. $y = -(x + 5)^2 - 6$

B. $y = -(x + 5)^2 + 6$

C. $y = -(x - 5)^2 - 6$

D. $y = -(x - 5)^2 + 6$

Zadanie 2.

Do wykresu pewnej funkcji kwadratowej $y = g(x)$ należy punkt o współrzędnych $P = (2, -6)$. Oś symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x = 3$, a jed

Wyznacz i zapisz wzór funkcji $y = g(x)$ w postaci iloczynowej.

Odpowiedź: 1. B 2. $y = 2(x-1)($

Zadanie 1.

Musimy podać wzór funkcji w postaci kanonicznej, czyli postaci typu $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie p oraz q to współrzędne wierzchołka paraboli. Z rysunku odczytujemy Skoro tak, to wzorem naszej funkcji będzie:

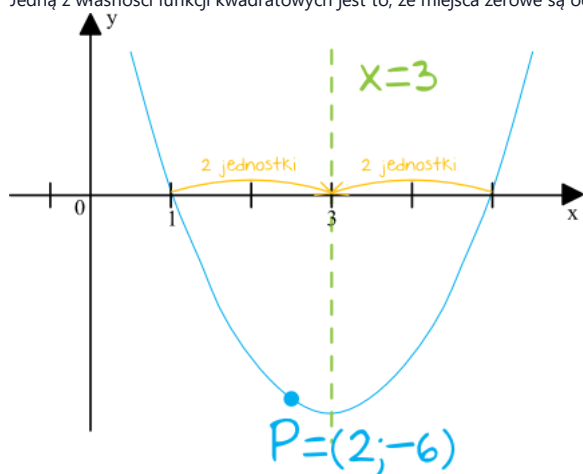
$$y = a(x - (-5))^2 + 6, \quad y = a(x + 5)^2 + 6$$

Teoretycznie powinniśmy jeszcze wyznaczyć wartość współczynnika a , choć widzimy, że w każdej z proponowanych odpowiedzi jest on równy -1. Ujemna wartość ws dołu. Stąd też odpowiedzią do tego zadania będzie $y = -(x + 5)^2 + 6$.

Zadanie 2.

Krok 1. Wyznaczenie miejsc zerowych funkcji.

Jedną z własności funkcji kwadratowych jest to, że miejsca zerowe są oddalone od osi symetrii o jednakową liczbę jednostek. Mówiąc bardzo obrazowo, sytuacja z tre



Z rysunku pomocniczego wynika wprost, że miejscami zerowymi są $x = 1$ oraz $x = 5$.

Krok 2. Zapisanie wzoru w postaci iloczynowej.

Znajomość miejsc zerowych pozwala nam zapisać wzór funkcji w postaci iloczynowej, zatem:

$$y = a(x - 1)(x - 5)$$

Do poznania pełnego wzoru brakuje nam jeszcze znajomości współczynnika a . Poznamy go, podstawiając do wyznaczonej przed chwilą postaci współrzędne punktu .

$$-6 = a(2 - 1)(2 - 5), \quad -6 = a \cdot 1 \cdot (-3), \quad -3a = -6, \quad a = 2$$

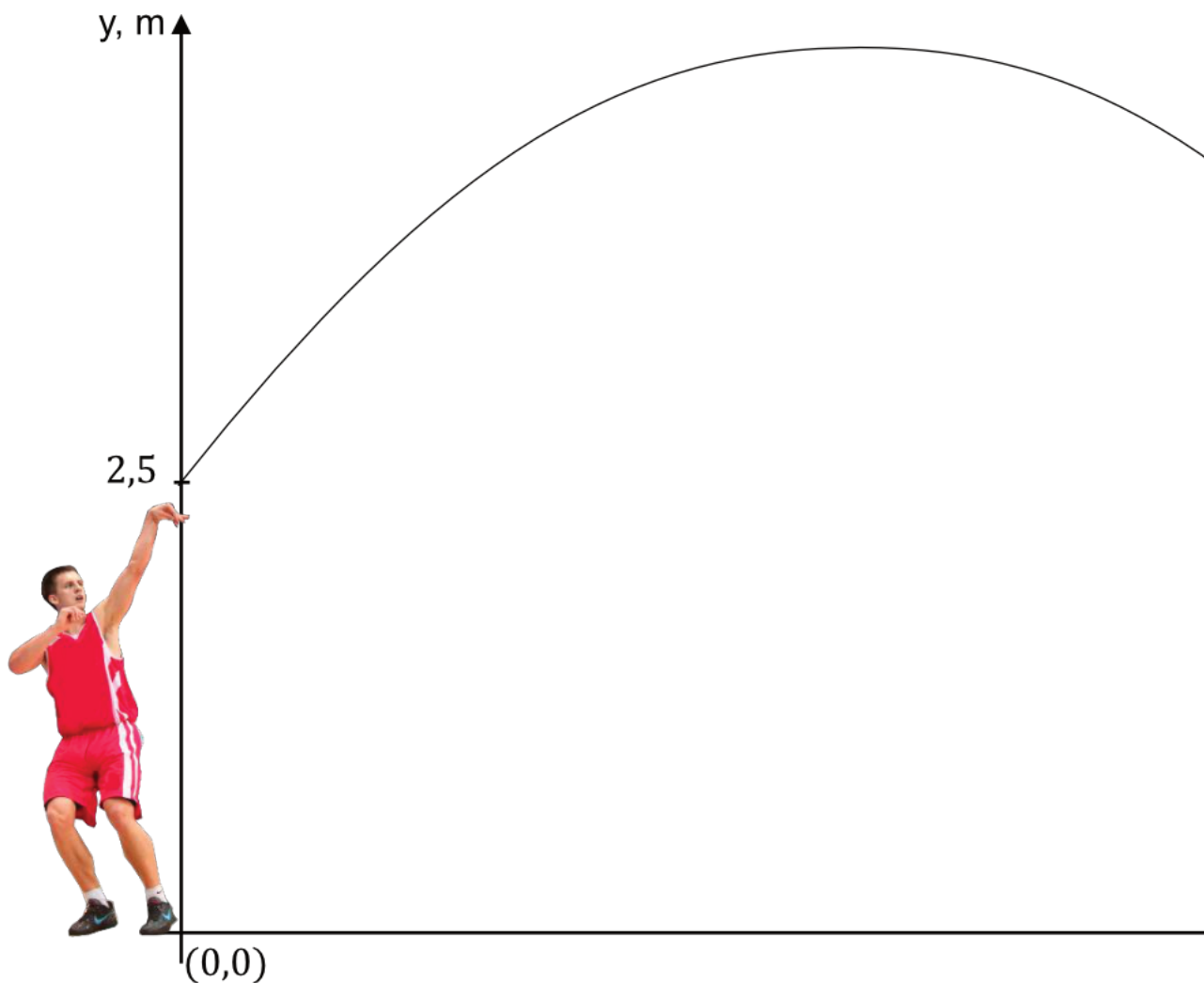
To oznacza, że pełnym wzorem naszej funkcji będzie $y = 2(x - 1)(x - 5)$.

Zadanie 22

Na podstawie zasad dynamiki można udowodnić, że torem rzutu - przy pominięciu oporów powietrza - jest fragment paraboli. Koszykarz wykonał rzut do kosza z opisu toru ruchu przyjmijmy układ współrzędnych, w którym środek piłki w chwili początkowej znajdował się w punkcie $x_0 = 0$, $y_0 = 2,50m$. Środek piłki podczas

$$y = -0,174x^2 + 1,3x + 2,5$$

Rzut okazał się udany, a środek piłki przeszedł dokładnie przez środek kołowej obręczy kosza. Na rysunku poniżej przedstawiono tę sytuację oraz tor ruchu piłki w ul



Zadanie 1.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych. Obręcz kosza znajduje się na wysokości (podanej w zaokrągleniu z dokładnością do 0,01m)

- A. 3,04m
- B. 3,06m
- C. 3,80m
- D. 4,93m

Zadanie 2.

Oblicz wysokość maksymalną, na jaką wzniesie się środek piłki podczas opisanego rzutu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zadanie 3.

W opisanym rzucie piłka przeleciała swobodnie przez obręcz kosza i upadła na parkiet. Przyjmij, że obręcz kosza nie miała siatki, a na drodze rzutu nie było żadnej pr. momencie, w którym piłka dotknęła parkietu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Odpowiedź: 1. B 2. ok. 4,93m

Zadanie 1.

Naszym zadaniem jest poznanie wartości funkcji $y = -0,174x^2 + 1,3x + 2,5$ dla $x = 7,01$ (bowiem na odległości $x = 7,01$ jest ustawiony kosz). W związku z tym

$$y = -0,174 \cdot (7,01)^2 + 1,3 \cdot 7,01 + 2,5, \quad y = -0,174 \cdot 49,1401 + 9,113 + 2,5, \quad y = -8,5503774 + 9$$

To oznacza, że obręcz jest zawieszona na wysokości ok. 3,06m.

Zadanie 2.

Maksymalna wysokość paraboli osiągnięta jest w jej wierzchołku. Interesuje nas więc poznanie współrzędnej q wierzchołka paraboli $W = (p; q)$. W tym celu możemy :

$$q = \frac{-\Delta}{4a}$$

Widzimy, że do tego wzoru musimy podstawić deltę (to jest dokładnie ta sama delta, którą obliczamy w równaniach kwadratowych), zatem wypiszmy współczynniki i
Współczynniki: $a = -0,174$, $b = 1,3$, $c = 2,5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1,3)^2 - 4 \cdot (-0,174) \cdot 2,5 = 1,69 - (-1,74) = 3,43$$

W związku z tym:

$$q = \frac{-3,43}{4 \cdot (-0,174)}, \quad q = \frac{-3,43}{0,696}, \quad q \approx 4,93$$

To oznacza, że maksymalną wysokością na jaką wzniesie się środek piłki będzie ok. 4,93m.

Zadanie 3.

Musimy sprawdzić, kiedy nasza funkcja $y = -0,174x^2 + 1,3x + 2,5$ przyjmie wartość 0,12, zatem:

$$0,12 = -0,174x^2 + 1,3x + 2,5, \quad 0,174x^2 - 1,3x - 2,38 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe w postaci ogólnej, zatem z pomocą przyjdzie nam delta:

Współczynniki: $a = 0,174$, $b = -1,3$, $c = -2,38$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1,3)^2 - 4 \cdot 0,174 \cdot (-2,38) = 1,69 - (-1,65648) = 3,34648, \quad \sqrt{\Delta} =$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1,3) - 1,8293}{2 \cdot 0,174} = \frac{1,3 - 1,8293}{0,348} = \frac{-0,5293}{0,348} \approx -1,52, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1,3) + 1,8293}{2 \cdot 0,174} =$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, bo nasza współrzędna x nie może być ujemna. To oznacza, że poszukiwaną współrzędną x punktu środka piłki jest $x \approx 8,99m$

Zadanie 23

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym: $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n + 4 \end{cases}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

Odpowiedź: $S_4 = 36$

Krok 1. Obliczenie wartości drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu.

Wartość pierwszego wyrazu już znamy, widzimy że $a_1 = -2$. Korzystając z drugiej części wzoru rekurencyjnego, musimy obliczyć wartości drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu.

$$a_2 = a_{1+1} = 1 \cdot a_1 + 4 = 1 \cdot (-2) + 4 = -2 + 4 = 2, \quad a_3 = a_{2+1} = 2 \cdot a_2 + 4 = 2 \cdot 2 + 4 = 4 + 4 = 8, \quad a_4 = a_{3+1} = 3 \cdot a_3 + 4 = 3 \cdot 8 + 4 = 24 + 4 = 28$$

Krok 2. Obliczenie sumy czterech początkowych wyrazów ciągu.

Korzystając z obliczeń z poprzedniego kroku, możemy zapisać, że suma czterech początkowych wyrazów będzie równa:

$$S_4 = -2 + 2 + 8 + 28 = 36$$

Zadanie 24

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym: $a_n = 4n - 9$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Odpowiedź: Wykazano obliczając

Krok 1. Obliczenie wartości a_{n+1} oraz a_{n+2} .

Chcąc udowodnić, że dany ciąg jest arytmetyczny, możemy skorzystać z własności związanej z trzema kolejnymi wyrazami ciągu, czyli $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$. Oczywiście nie możemy przeprowadzić poprawnego dowodzenia, musimy obliczyć np. wartości a_{n+1} oraz a_{n+2} , zatem:

$$a_{n+1} = 4(n+1) - 9, \quad a_{n+1} = 4n + 4 - 9, \quad a_{n+1} = 4n - 5$$

$$a_{n+2} = 4(n+2) - 9, \quad a_{n+2} = 4n + 8 - 9, \quad a_{n+2} = 4n - 1$$

Krok 2. Zakończenie dowodzenia.

Mamy wyrażenia opisujące trzy kolejne wyrazy ciągu, czyli a_n , a_{n+1} oraz a_{n+2} . Środkowym z tych trzech wyrazów jest a_{n+1} , zatem:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \quad 4n - 5 = \frac{4n - 9 + 4n - 1}{2}, \quad 4n - 5 = \frac{8n - 10}{2}, \quad 4n - 5 = 4n - 5$$

W ten sposób udało się udowodnić, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Zadanie 25

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest

- A. rosnący,
- B. malejący,
- C. stały,

ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$

- 1. różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą ujemną
- 2. różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa zero
- 3. różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą dodatnią

Odpowiedź: A. oraz 3.

Krok 1. Obliczenie wartości a_{n+1} .

Widzimy, że musimy obliczyć wartość a_{n+1} , zatem:

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1), \quad a_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - n - 1, \quad a_{n+1} = n^2 + n$$

Krok 2. Obliczenie wartości $a_{n+1} - a_n$.

Znamy wartość a_{n+1} , znamy też a_n , zatem:

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + n - (n^2 - n), \quad a_{n+1} - a_n = n^2 + n - n^2 + n, \quad a_{n+1} - a_n = 2n$$

Krok 3. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Wiemy, że n jest liczbą naturalną większą lub równą 1. To pozwala nam stwierdzić, że w takim razie otrzymane $2n$ jest dodatnią liczbą naturalną. To oznacza, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Zadanie 26

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

Oblicz wartość m , dla której liczby $f(m)$, $f(1)$, $f(2)$ są - odpowiednio - pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego.

Odpowiedź: $m = \frac{1}{2}$

Krok 1. Obliczenie wartości $f(m)$, $f(1)$, $f(2)$.

Podstawiając do wzoru funkcji wartości m , 1 oraz 2, otrzymamy:

$$f(m) = \frac{1}{m}, \quad f(1) = \frac{1}{1} = 1, \quad f(2) = \frac{1}{2}$$

Krok 2. Wyznaczenie wartości m .

Chcemy, by obliczone przed chwilą liczby tworzyły ciąg geometryczny. Z własności ciągów geometrycznych wiemy, że dla trzech kolejnych wyrazów takiego ciągu musi zachodzić:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

W naszym przypadku $a_1 = \frac{1}{m}$, $a_2 = 1$ oraz $a_3 = \frac{1}{2}$, zatem:

$$1^2 = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2}, \quad 1 = \frac{1}{2m} \quad \left| \cdot 2m \right., \quad 2m = 1, \quad m = \frac{1}{2}$$

Zadanie 27

Czas T połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas, po którym liczba jąder danego izotopu (a zatem i masa tego izotopu) zmniejsza się o połowę - t promieniotwórczego pozostających w próbce po czasie t , licząc od chwili $t_0 = 0$, wyraża się zależnością wykładniczą:

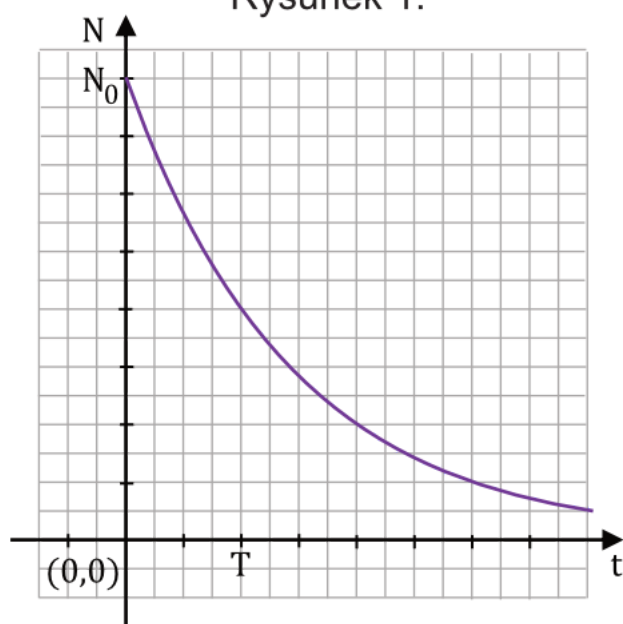
$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie N_0 jest liczbą jąder izotopu promieniotwórczego w chwili początkowej $t_0 = 0$.

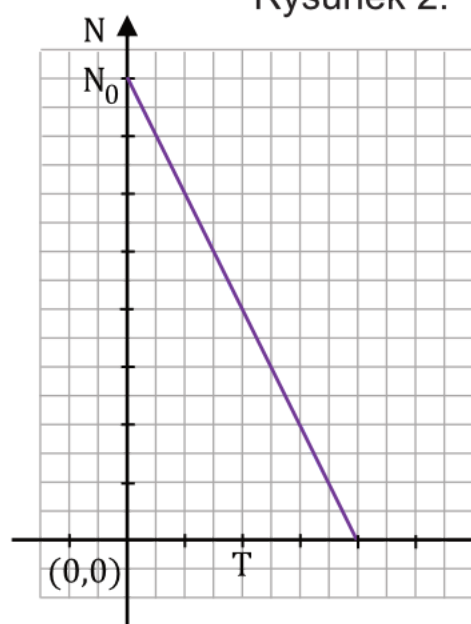
Zadanie 1.

Na poniższych rysunkach 1.-4. przedstawiono wykresy różnych zależności.

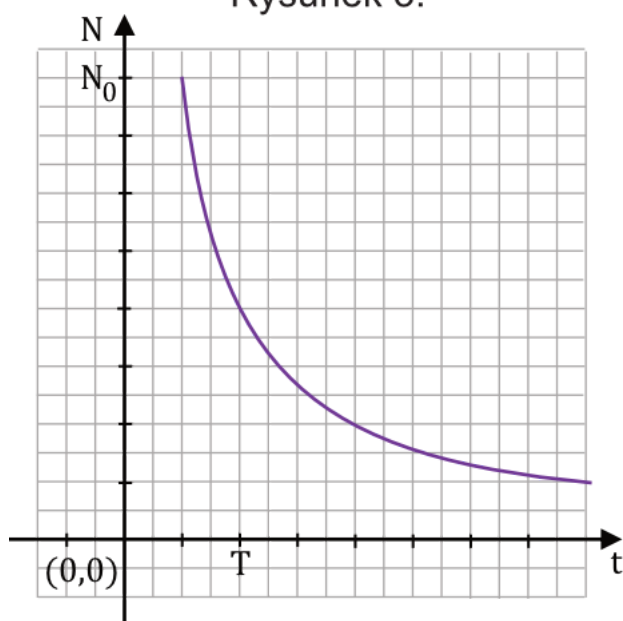
Rysunek 1.



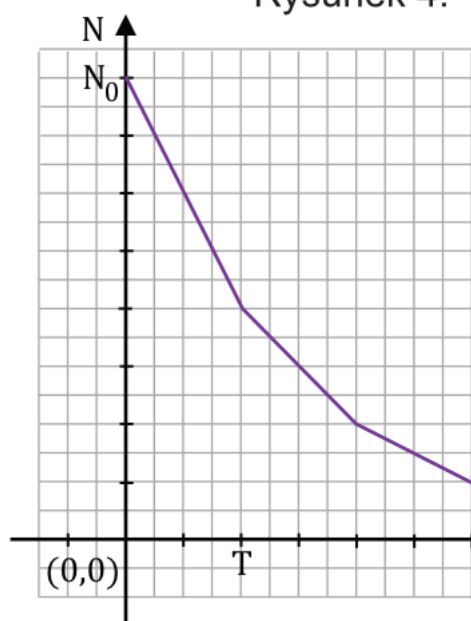
Rysunek 2.



Rysunek 3.



Rysunek 4.



Wykres zależności wykładniczej $N(t)$ - opisanej we wstępie do zadania - przedstawiono na

- A. rysunku 1
- B. rysunku 2
- C. rysunku 3
- D. rysunku 4

Zadanie 2.

Czas połowicznego rozpadu węgla ^{14}C to około 5700 lat. Naukowcy oszacowali za pomocą datowania radiowęglowego, że masa izotopu węgla ^{14}C w pewnym organizmie żyła.

Oblicz, ile lat ma opisane znalezisko archeologiczne. Wynik podaj z dokładnością do stu lat.

Odpowiedź: 1. A 2. 22800 l

Zadanie 1.

Naszym zadaniem jest poprawne dopasowanie wykresu funkcji wykładniczej. I tu od razu nasz wzrok musimy kierować w stronę rysunku 1 oraz 3 - bowiem tak właśnie przypadek $a = \frac{1}{2}$.

Ustalmy zatem teraz, który z tych wykresów jest prawidłowy. Widzimy wyraźnie, że sytuacja z trzeciego rysunku musi zostać przez nas odrzucona, ponieważ nasz wyrostkowy liczbę jąder naszego izotopu. Na trzecim wykresie funkcja ta jest nieco przesunięta w prawo, przez co początkowa liczba jąder izotopu przypada na czas $t > 0$.

W związku z tym poprawnym wykresem jest jedynie ten z pierwszej odpowiedzi. Możemy to jeszcze sobie zweryfikować, widząc że dla czasu T nasza funkcja przyjmuje

Zadanie 2.

Do zadania można podejść na różne sposoby, ale najprościej będzie zapisać to w następujący sposób:

m - początkowa masa izotopu węgla

$\frac{1}{2}m$ - masa izotopu węgla po upływie $1T$, czyli 5700 lat

$\frac{1}{4}m$ - masa izotopu węgla po upływie $2T$, czyli 11400 lat

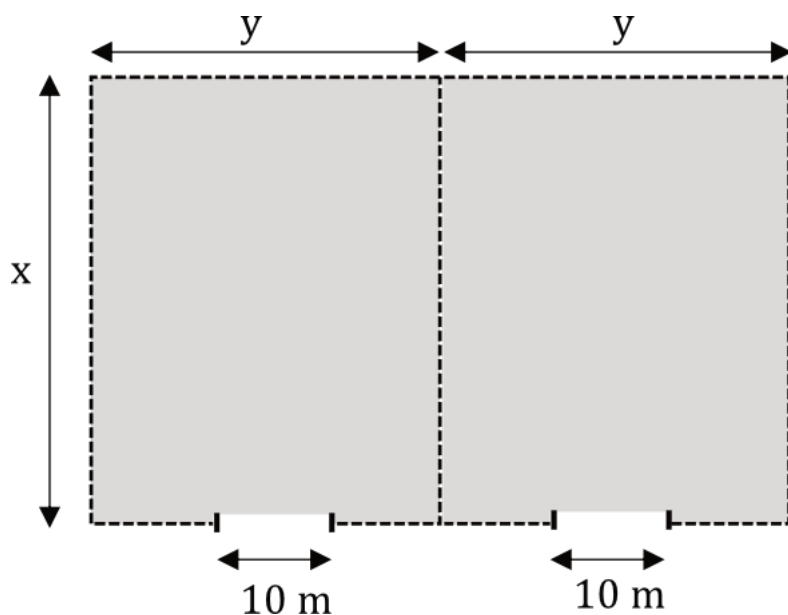
$\frac{1}{8}m$ - masa izotopu węgla po upływie $3T$, czyli 17100 lat

$\frac{1}{16}m$ - masa izotopu węgla po upływie $4T$, czyli 22800 lat

To oznacza, że znalezisko archeologiczne ma 22800 lat.

Zadanie 28

Powierzchnia magazynowa będzie się składała z dwóch identycznych prostokątnych działek połączonych wspólnym bokiem. Całość ma być ogrodzona płotem, przy bramy wjazdowe, każda o szerokości 10m (zobacz rysunek poniżej). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego obie działki wyniesie 580 metrów, przy



Oblicz wymiary x i y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.

Odpowiedź: $x = 100$ oraz $y = 7$

Krok 1. Zapisanie równań.

Wiemy, że długość płotu wynosi 580m. Jak spojrzemy na rysunek, to zauważymy, że ten płot musi znaleźć się na trzech odcinkach o długości x (dwie granice zewnętrzne dwukrotnie o 10m. To oznacza, że możemy zapisać następujące równanie:

$$3x + 4y - 20 = 580, \quad 3x + 4y = 600$$

Dodatkowo wiemy, że pole powierzchni obliczamy ze wzoru $P = ab$, co po podstawianiu danych z rysunku możemy zapisać jako:

$$P = x \cdot 2y$$

Krok 2. Zapisanie wzoru funkcji $P(x)$.

Kluczem do sukcesu będzie zapisanie pola powierzchni w postaci funkcji z jedną zmienną, czyli zmienną x . Aby tego dokonać, wyznaczmy wartość y z równania $3x +$

$$3x + 4y = 600, \quad 4y = 600 - 3x, \quad y = 150 - \frac{3}{4}x$$

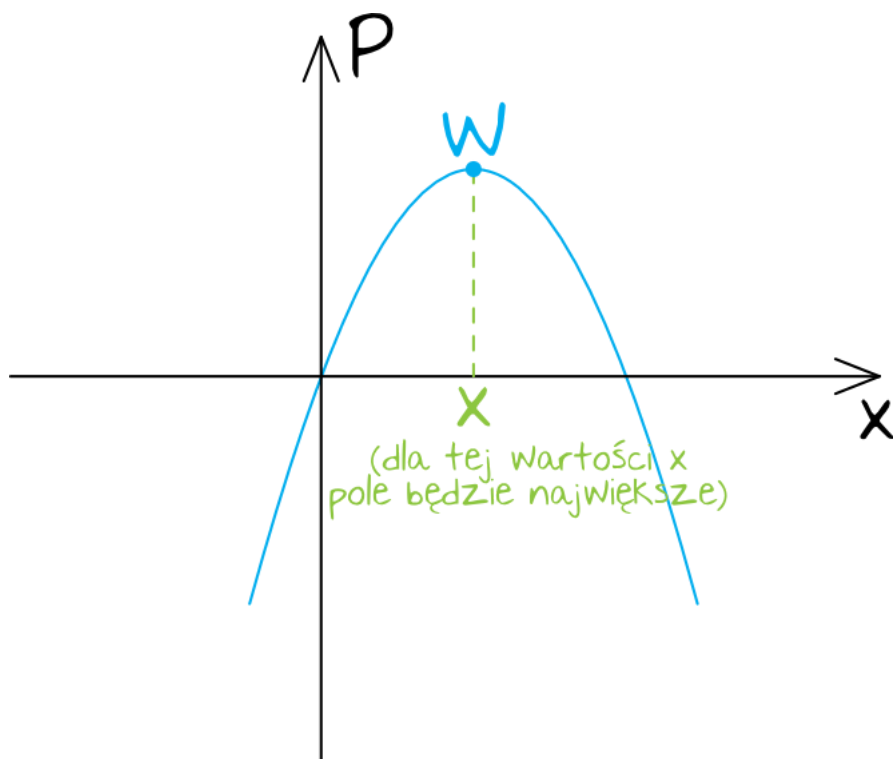
Podstawiając teraz $y = 150 - \frac{3}{4}x$ do równania $P = x \cdot 2y$ otrzymamy:

$$P = x \cdot 2 \cdot \left(150 - \frac{3}{4}x\right), \quad P = 2x \cdot \left(150 - \frac{3}{4}x\right), \quad P = 300x - \frac{6}{4}x^2, \quad P = -$$

Otrzymaliśmy informację, że pole powierzchni działki można opisać wzorem $-\frac{6}{4}x^2 + 300x$. Całość możemy potraktować tak jak funkcję kwadratową (dla jakiejś wart

Krok 3. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola, a tutaj ta parabola będzie mieć ramiona skierowane do dołu (bo współczynnik $a = -\frac{6}{4}$). Sytuacja będzie więc wyglądać



Chcemy się dowiedzieć, dla jakiego x ta pole P będzie największe, a wiemy, że parabola skierowana ramionami do dołu osiągnie swoją największą wartość w wierzchołku. Pomoże nam w tym wzór na współrzędną x_W wierzchołka paraboli:

$$x_W = \frac{-b}{2a}, \quad x_W = \frac{-300}{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}, \quad x_W = \frac{-300}{-3}, \quad x_W = 100$$

Wiemy już, że największa wartość jest przyjmowana, gdy $x = 100$. Gdybyśmy chcieli obliczyć ile wynosi ta największa wartość, to moglibyśmy skorzystać ze wzoru q równania $y = 150 - \frac{3}{4}x$ i podstawiając teraz $x = 100$, otrzymamy:

$$y = 150 - \frac{3}{4}x, \quad y = 150 - \frac{3}{4} \cdot 100, \quad y = 150 - 75, \quad y = 75$$

To oznacza, że powierzchnia magazynu będzie największa wtedy, gdy $x = 100$ oraz $y = 75$.

Zadanie 29

Dany jest kąt o mierze α taki, że $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ oraz $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F - jeśli jest fałszywe. Dla kąta α spełnione jest równanie $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$
 Dla kąta α spełnione jest równanie $|\operatorname{tg} \alpha| = \frac{3}{4}$

Dla kąta α spełnione jest równanie $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

Prawda

Fałsz

Dla kąta α spełnione jest równanie $|\operatorname{tg} \alpha| = \frac{3}{4}$

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Korzystając z jedynki trygonometrycznej możemy zapisać, że:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \frac{16}{25} + \cos^2 \alpha = 1, \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}, \cos \alpha = \frac{3}{5} \vee \cos \alpha = -$$

Z treści zadania wynika, że kąt α jest kątem rozwartym. Cosinus dla takich kątów przyjmuje wartości ujemne, stąd też rozwiązanie $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ musimy odrzucić. Zosta

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Z treści zadania wiemy, że $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Dodatkowo obliczyliśmy sobie przed chwilą, że $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. Korzystając zatem ze wzoru na tangens, możemy zapisać, że:

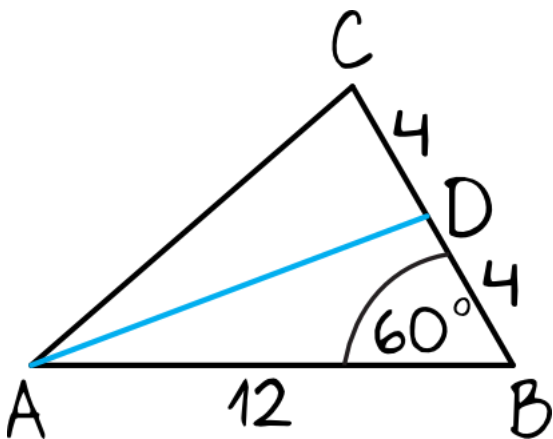
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right), \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$$

To oznacza, że $|\operatorname{tg} \alpha| = \frac{4}{3}$, więc zdanie jest fałszem.

Zadanie 30

W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków $|AB| = 12$, $|BC| = 8$ oraz miara kąta $|\angle ABC| = 60^\circ$.

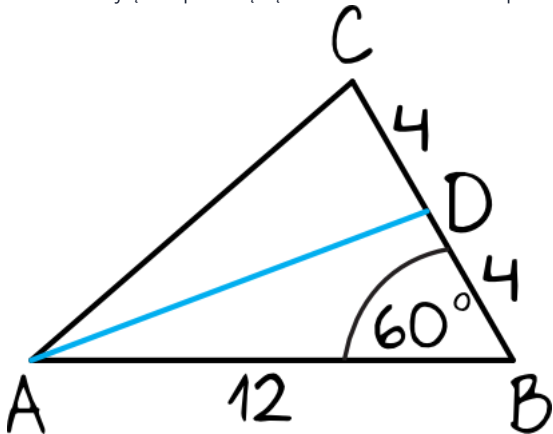
Oblicz długość środkowej tego trójkąta, poprowadzonej z wierzchołka A .



Odpowiedź: $|AD| = 4\sqrt{7}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Środkowa trójkąta to prosta łącząca wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku tego trójkąta. Sytuacja z treści zadania będzie więc wyglądać następująco:



Krok 2. Obliczenie długości środkowej tego trójkąta.

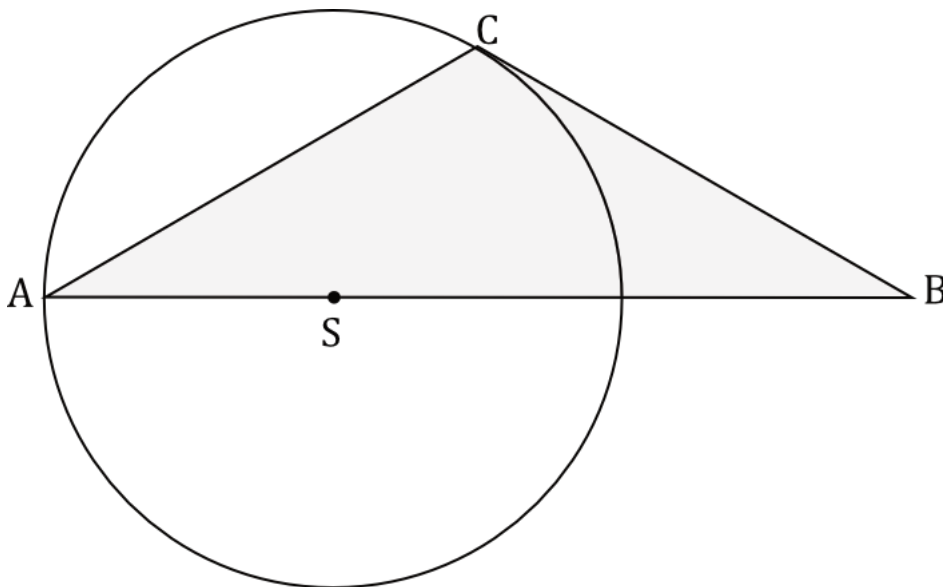
Spójrzmy na trójkąt ABD . Znamy długości dwóch boków tego trójkąta i miarę kąta między tymi bokami. Chcąc więc poznać długość boku AD (czyli boku naprzeciwko kąta 60°), możemy skorzystać z twierdzenia cosinusów:

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos 60^\circ, \quad |AD|^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}, \quad |AD|^2 = 112, \quad |AD| = \sqrt{112}.$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy (bo długość boku nie może być ujemna), zatem zostaje nam $|AD| = \sqrt{112}$, co możemy jeszcze rozisać jako $|AD| = \sqrt{16 \cdot 7} = 4\sqrt{7}$.

Zadanie 31

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r . Środek S tego okręgu leży na boku AB tego trójkąta (zobacz rysunek poniżej). Długości boków AC

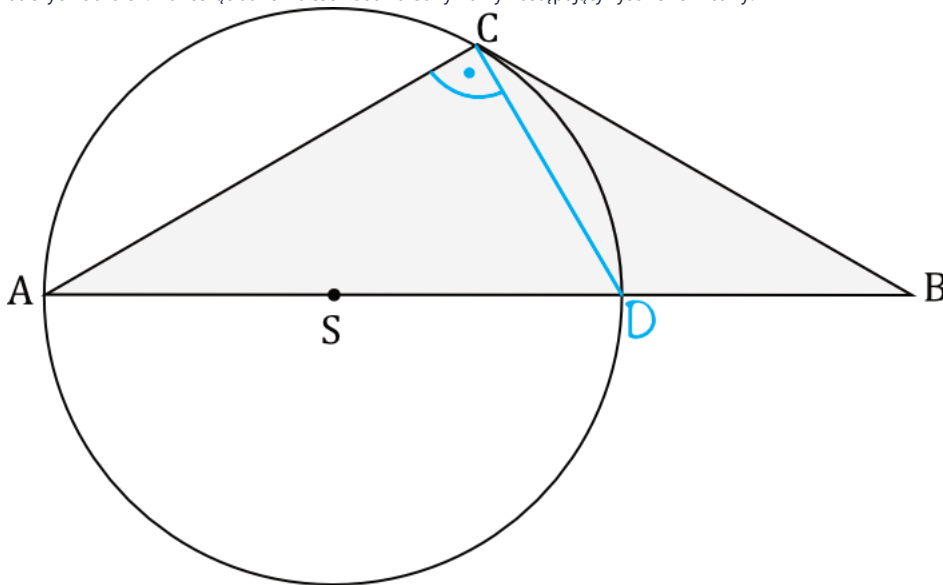


Oblicz miary wszystkich kątów trójkąta ABC .

Odpowiedź: $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zwróćmy uwagę, że z wierzchołka C możemy dorysować bok w taki sposób, że otrzymamy trójkąt oparty na średnicy okręgu. Z własności trójkątów wiemy, że tak dalszych obliczeń. Nanosząc dane z treści zadania otrzymamy następujący rysunek szkicowy:



Ustalmy jeszcze skąd wiemy, że odcinek DB ma długość r . Z treści zadania wynika, że $|AB| = 3r$, a skoro odcinek AS ma długość r oraz SD ma długość r , to c

Krok 2. Obliczenie długości odcinka CD .

Skoro trójkąt ACD jest prostokątny, to możemy skorzystać z Twierdzenia Pitagorasa.

$$|AC|^2 + |CD|^2 = |AD|^2, (\sqrt{3}r)^2 + |CD|^2 = (2r)^2, 3r^2 + |CD|^2 = 4r^2, |CD|^2 = r^2, |CD| = r.$$

Ujemną długość oczywiście odrzucamy, zatem $|CD| = r$.

Krok 3. Dostrzeżenie trójkąta o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Powinniśmy zauważyć, że trójkąt ADC jest trójkątem o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Wynika to wprost z własności trójkąta, gdyż jedna przyprostokątna ma długość r , a przyprostokątna jest $\sqrt{3}$ razy większa od pierwszej. To wszystko to cechy charakterystyczne właśnie dla trójkątów o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

W związku z tym $|\angle CAD| = 30^\circ$ oraz $|\angle ADC| = 60^\circ$.

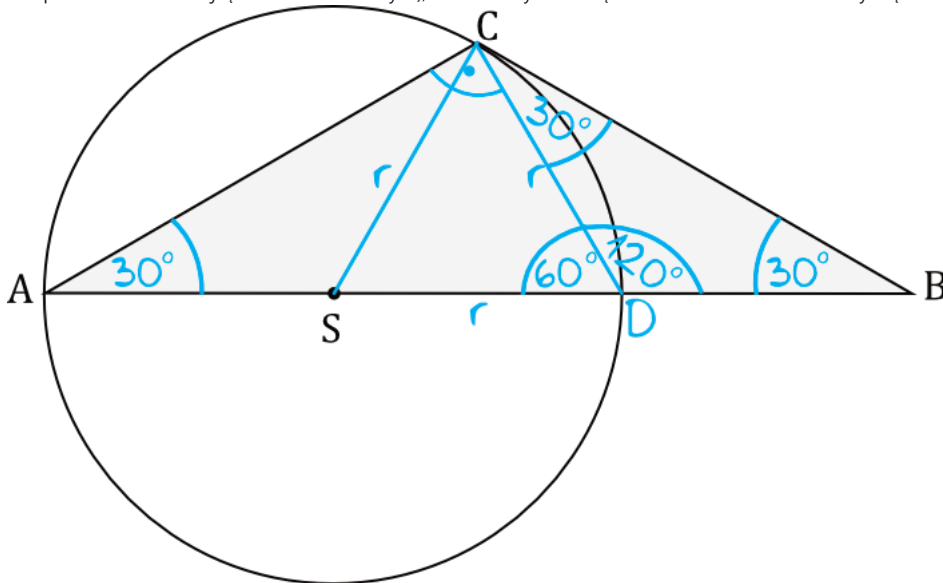
Krok 4. Obliczenie miary kąta CDB .

Spójrzmy na kąt CBD . Jest to kąt przyległy do kąta o mierze 60° , a wiemy, że suma miar kątów przyległych jest zawsze równa 180° . Skoro tak, to:

$$|\angle CDB| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Krok 5. Obliczenie pozostałych miar kątów trójkąta DBC oraz ABC .

Wiemy już, że trójkąt DBC jest trójkątem równoramiennym (ramiona o długości r). Kąt między tymi ramionami ma miarę 120° , a więc na dwa pozostałe kąty zostaje wprost z własności trójkątów równoramiennych), zatem każdy z nich będzie miał $60^\circ : 2 = 30^\circ$. Mamy więc następującą sytuację:



Zadanie polega na podaniu miar kątów trójkąta ABC , a więc:

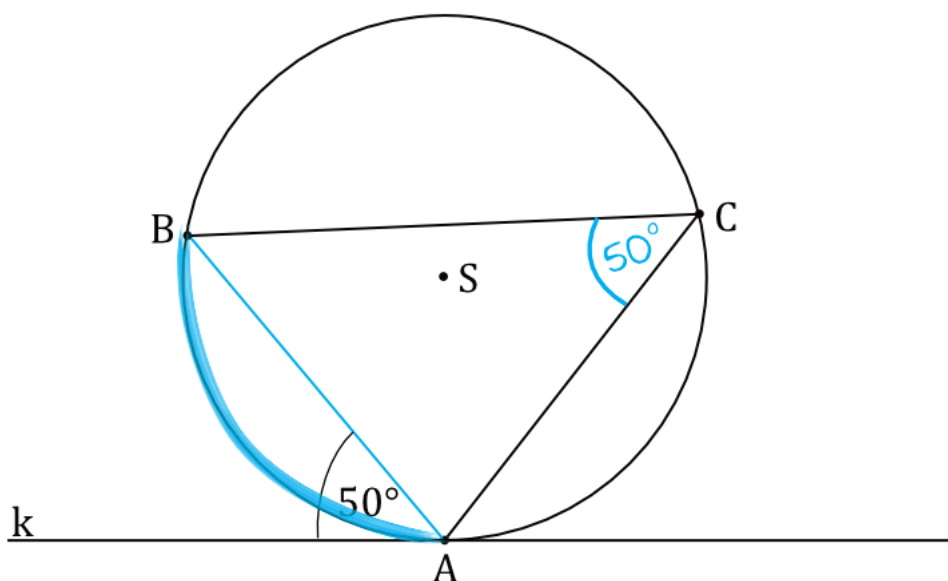
$$|\angle CAB| = 30^\circ, |\angle ABC| = 30^\circ, |\angle BCA| = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

Σ Matematix.pl | Ten arkusz możesz zrobić online na stronie: <https://matematix.pl/>

A circle with center S is shown. A horizontal line k is tangent to the circle at point A . Points B and C are on the circle. Line segments AB and AC are drawn. The angle BAC is labeled as 50° .

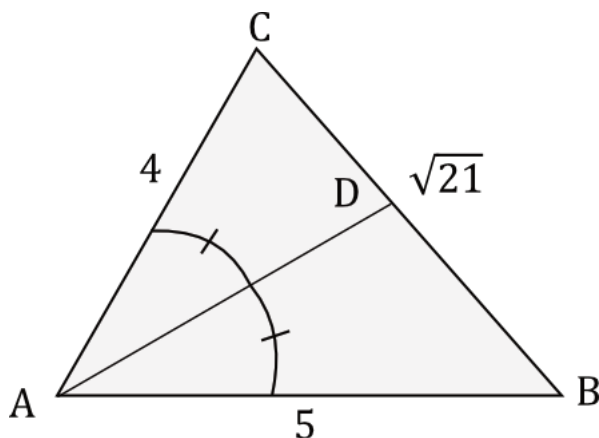
Odpowiedź: C (50°)

Z rysunku wynika, że styczna tworzy z cięciwą AB kąt 50° . Kąt BCA jest kątem wpisanym w okrąg, który oparty jest właśnie na cięciwie AB . Taka sytuacja oznac



Zadanie 33

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 5$, $|BC| = \sqrt{21}$, $|AC| = 4$. Dwusieczna kąta $\sphericalangle CAB$ przecina bok BC w punkcie D (zobacz rysunek poniżej).



Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A , B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Długość odcinka BD jest równa:

- A. $|BD| = \frac{1}{2}\sqrt{21}$
- B. $|BD| = \frac{5}{9}\sqrt{21}$
- C. $|BD| = \frac{4}{5}\sqrt{21}$

ponieważ z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że:

1. $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|BD|}$
2. $|BD| = |DC|$
3. $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$

Odpowiedź: B, ponieważ 3.

Z twierdzenia o dwusiecznej kąta, wynika, że stosunek długości jednego ramienia (czyli AB) względem drugiego ramienia (czyli AC), musi być taki sam jak stosunek następująco:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$$

Podstawiając do tego równania dane z rysunku, otrzymamy:

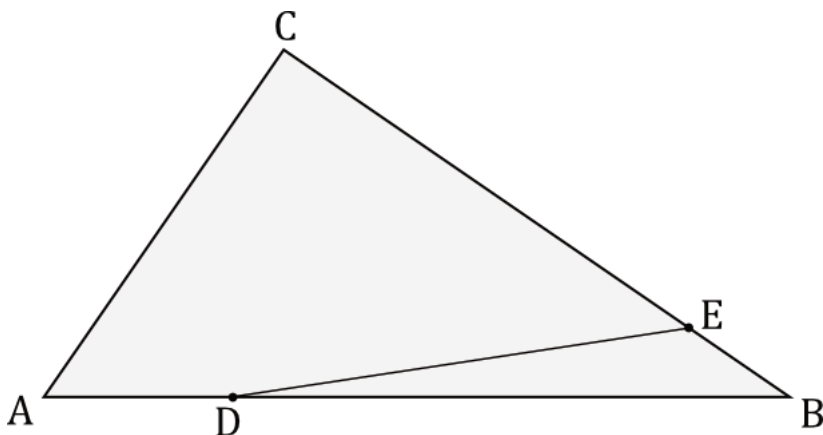
$$\frac{5}{4} = \frac{|BD|}{|DC|}, \quad |BD| = \frac{5}{4}|DC|$$

Odcinek $|DC|$ ma miarę $\sqrt{21} - |BD|$, zatem:

$$|BD| = \frac{5}{4} \cdot (\sqrt{21} - |BD|), \quad |BD| = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{21} - \frac{5}{4}|BD|, \quad \frac{9}{4}|BD| = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{21} \quad \left/ \cdot \frac{4}{9} \right.$$

Zadanie 34

Dany jest trójkąt ABC . Na boku AB tego trójkąta wybrano punkt D , taki, że $|AD| = \frac{1}{4}|AB|$, a na boku BC wybrano taki punkt E , że $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$ (zobacz



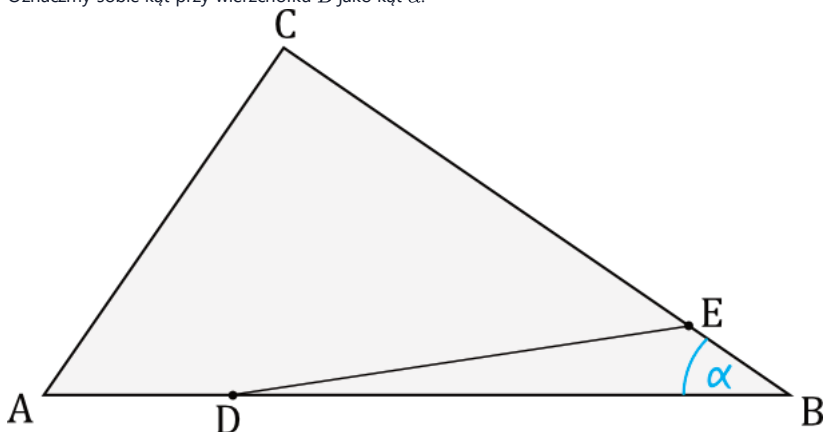
Oblicz pole trójkąta DBE .

Odpowiedź: $P_{DBE} = 3$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Do zadania można podejść na różne sposoby, ale najprostszą metodą wydaje się być wykorzystanie tak zwanego "wzoru na pole trójkąta z sinusem", czyli wzoru I

Oznaczmy sobie kąt przy wierzchołku B jako kąt α .



Krok 2. Zapisanie wzorów na pole trójkąta ABC oraz DBE .

Wiemy, że pole trójkąta ABC jest równe 20. Rozpiszmy sobie zatem ten trójkąt przy wykorzystaniu wzoru na pole z sinusem:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \alpha, \quad 20 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \alpha, \quad |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \alpha = 40.$$

Teraz rozpiszmy w identyczny sposób pole trójkąta DBE :

$$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |BE| \cdot \sin \alpha$$

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni trójkąta DBE .

Z treści zadania wiemy, że $|AD| = \frac{1}{4}|AB|$, czyli tym samym $|DB| = \frac{3}{4}|AB|$. Dodatkowo wiemy, że $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$. Podstawiając te dane do powyższego wzoru

$$P_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}|AB| \cdot \frac{1}{5}|BC| \cdot \sin \alpha, \quad P_{DBE} = \frac{3}{40} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \alpha$$

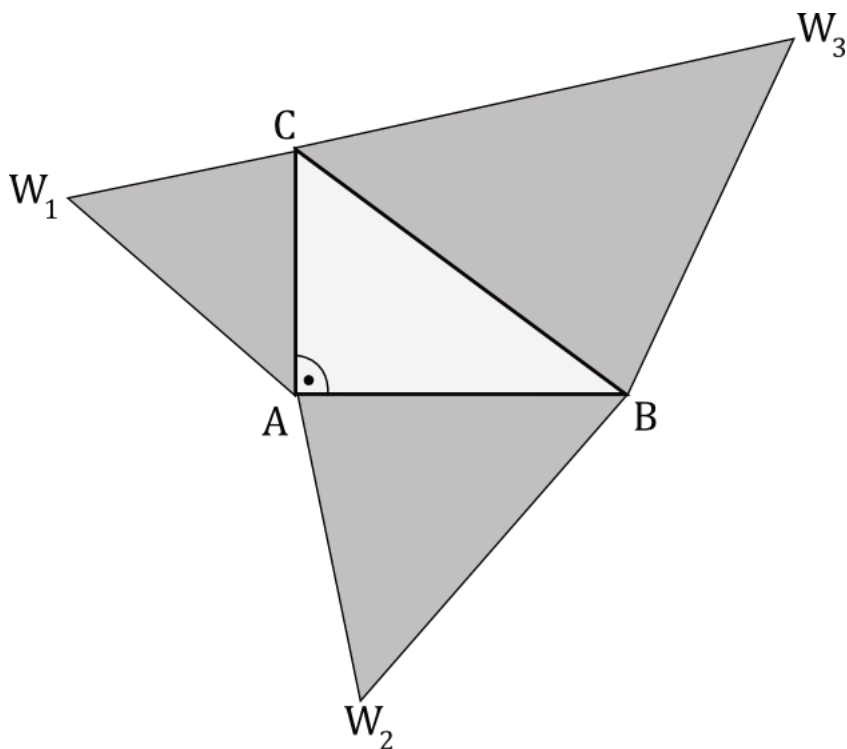
W poprzednim kroku obliczyliśmy, że $|AB| \cdot |BC| \cdot \sin \alpha = 40$, zatem:

$$P_{DBE} = \frac{3}{40} \cdot 40, \quad P_{DBE} = 3$$

Zadanie 35

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa można udowodnić bardziej ogólną własność niż ta, o której mówi samo to twierdzenie.

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Niech każdy z boków tego trójkąta: CA , AB , BC będzie podstawą trójkątów podobnych równych miarach, odpowiednio przy wierzchołkach: W_1 , W_2 , W_3 .



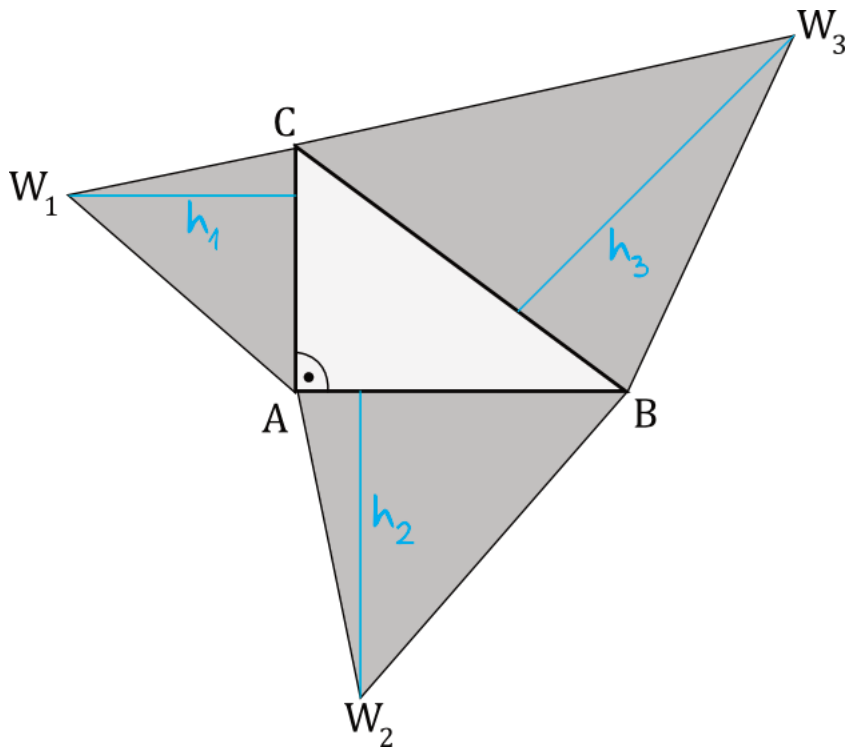
Pola trójkątów CAW_1 , ABW_2 , CBW_3 oznaczmy odpowiednio jako P_1 , P_2 , P_3 .

Udowodnij, że: $P_3 = P_1 + P_2$.

Odpowiedź: Udowodniono wykorzys

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Wprowadźmy sobie do zadania proste oznaczenie wysokości trójkątów, które są opuszczone z wierzchołków W_1 , W_2 oraz W_3 i niech to będą odpowiednio: h_1 , h_2



Możemy zapisać, że w takim razie:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_1, P_2 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_2, P_3 = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h_3$$

Krok 2. Wykorzystanie własności trójkątów podobnych.

Wiemy, że trójkąty z zadania są podobne. Możemy więc zapisać, że przykładowo stosunek wysokości drugiego trójkąta względem pierwszego musi być taki sam jak stosunek boków, więc:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \Bigg/ \cdot h_1, \quad h_2 = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot h_1$$

I analogicznie możemy zapisać, że:

$$\frac{h_3}{h_1} = \frac{|BC|}{|AC|} \quad \Bigg/ \cdot h_1, \quad h_3 = \frac{|BC|}{|AC|} \cdot h_1$$

Krok 3. Rozpisanie P_1 , P_2 oraz P_3 i zakończenie dowodzenia.

Wracamy do wzorów na pole trójkąta P_2 oraz P_3 , które zapisaliśmy w pierwszym kroku. Podstawiając wyznaczone przed chwilą wartości h_2 oraz h_3 , otrzymamy:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \frac{|AB|}{|AC|} \cdot h_1, \quad P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|^2}{|AC|} \cdot h_1$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot \frac{|BC|}{|AC|} \cdot h_1, \quad P_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|BC|^2}{|AC|} \cdot h_1$$

To oznacza, że suma $P_1 + P_2$ będzie równa:

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|^2}{|AC|} \cdot h_1, \quad P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \left(|AC| + \frac{|AB|^2}{|AC|} \right), \quad P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \left(\frac{|AC|^2 + |AB|^2}{|AC|} \right)$$

Z Twierdzenia Pitagorasa wiemy, że:

$$|AC|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$$

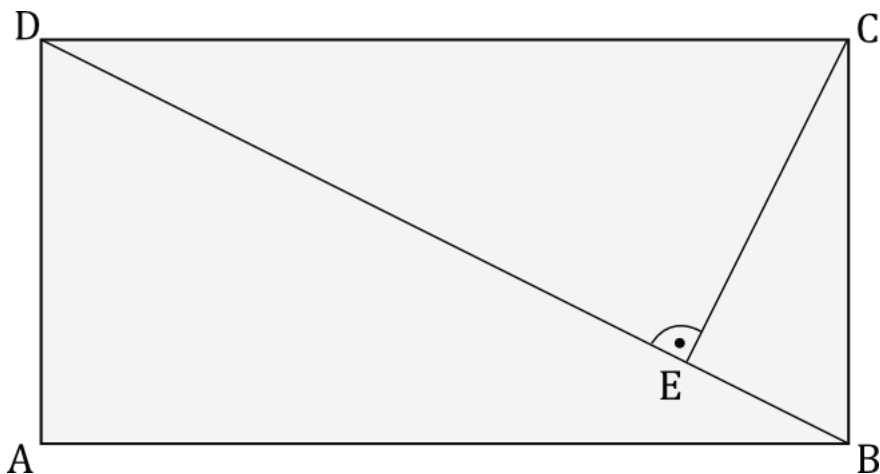
Skoro tak, to:

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot \left(\frac{|BC|^2}{|AC|} \right)$$

Wyrażenie po prawej stronie jest dokładnie takie samo jak nasze P_3 , stąd też $P_1 + P_2 = P_3$ i na tym możemy zakończyć dowodzenie.

Zadanie 36

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 2$. Kąt BDA ma miarę α , taką, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Przekątna BD i prosta przechodząca przez wierzchołek C prostopadłe

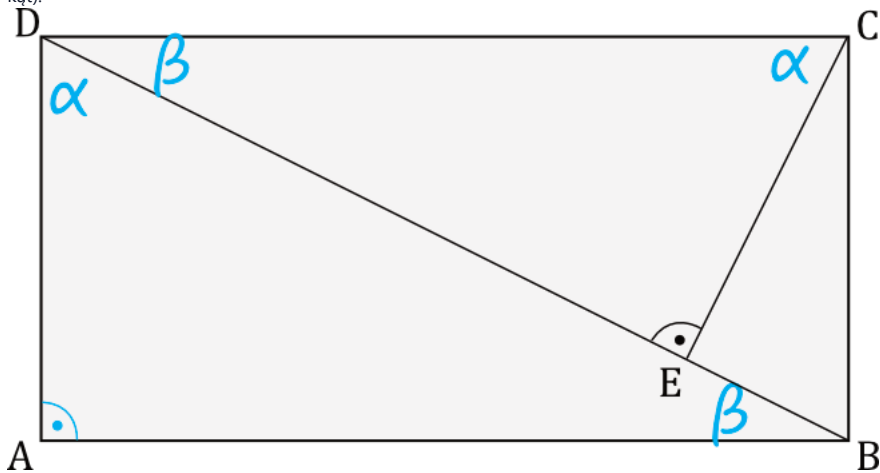


Oblicz długość odcinka $|CE|$.

Odpowiedź: $|CE| = \frac{4}{\sqrt{5}}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Na początek oznacmy kąt BDA jako α (zgodnie z treścią zadania) oraz ABD jako β . W tym momencie powinniśmy dostrzec, że kąt DBC jest kątem naprzemiłym do kąta ABD oraz DEC mają już dwa kąty o jednakowej mierze (kąt β oraz kąt prosty). To z kolei prowadzi nas do wniosku, że w takim razie kąt ECD musi mieć miarę 90° .



Krok 2. Obliczenie długości odcinków AB oraz CD .

Z treści zadania wiemy, że $|AD| = 2$. Wiemy też, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Skoro tak, to korzystając z funkcji trygonometrycznych możemy zapisać, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AB|}{|AD|}, \quad 2 = \frac{|AB|}{2}, \quad |AB| = 4$$

Wyszło nam, że $|AB| = 4$, a skoro figura $ABCD$ jest prostokątem to i analogicznie $|CD| = 4$.

Krok 3. Obliczenie długości odcinka BD .

Spójrzmy na trójkąt prostokątny ABD . Znamy długości przyprostokątnych tego trójkąta, zatem do wyznaczenia przeciwprostokątnej BD możemy wykorzystać Twierdzenie Pitagorasa:

$$2^2 + 4^2 = |BD|^2, \quad 4 + 16 = |BD|^2, \quad |BD|^2 = 20, \quad |BD| = \sqrt{20} \quad \vee \quad |BD| = -\sqrt{20}$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $|BD| = \sqrt{20}$. Teoretycznie moglibyśmy jeszcze wyłączyć czynnik przed znak pierwiastka (otrzymując postać $|BD| = 2\sqrt{5}$).

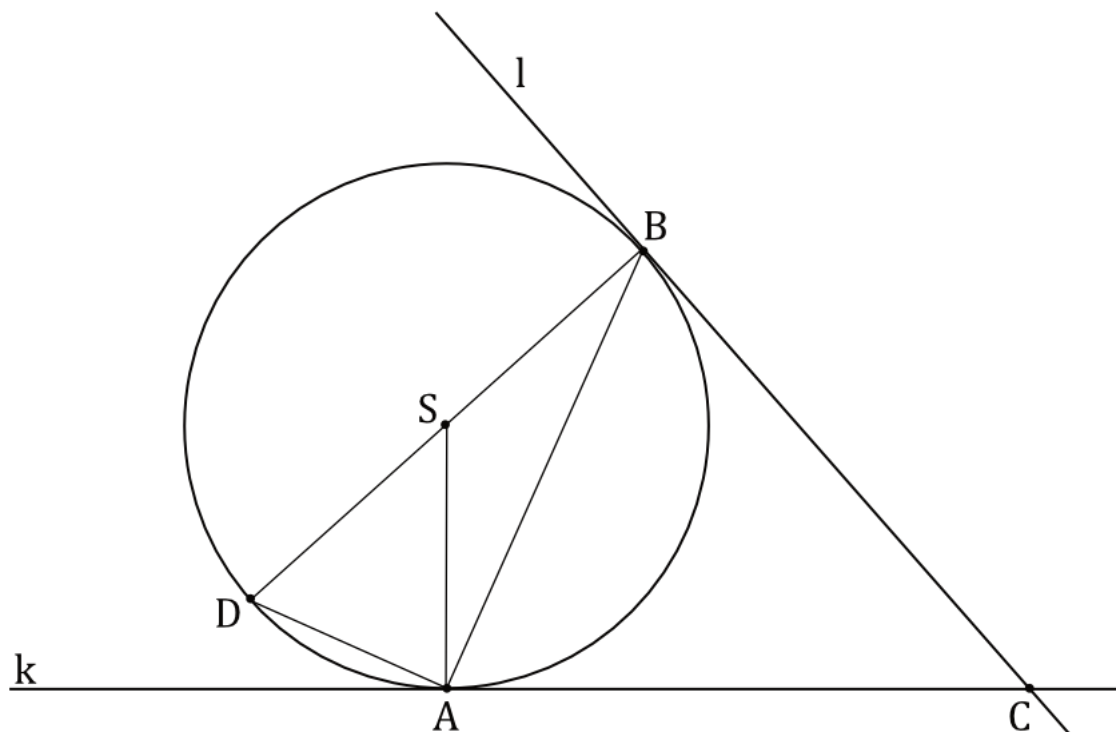
Krok 4. Obliczenie długości odcinka CE .

Ustaliliśmy już, że trójkąty ABD oraz DEC są trójkątami podobnymi. Skoro tak, to:

Σ Matematix.pl | Ten arkusz możesz zrobić online na stronie: <https://matematix.pl/>

Zadanie 37

Trzy różne punkty A , B i D leżą na okręgu o środku w punkcie S . Odcinek BD jest średnicą tego okręgu. Styczne k i l do tego okręgu, odpowiednio w punktach



Wykaż, że trójkąty ACB i ADE są podobne.

Odpowiedź: Udowodniono wykorzystać

Krok 1. Dostrzeżenie trójkątów równoramiennych.

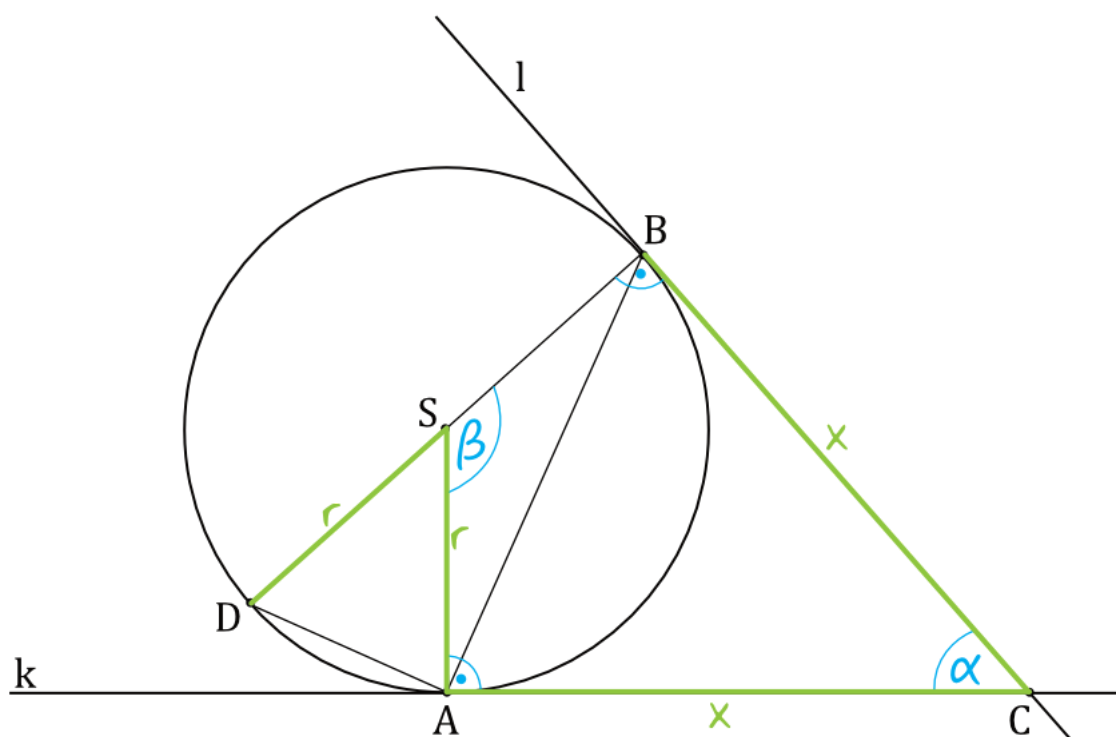
Z własności stycznych do okręgu wynika, że odcinki AC oraz BE mają jednakową miarę, a skoro tak, to trójkąt ACB jest równoramienny.

Równoramienny będzie także trójkąt ADE , ponieważ odcinki SA oraz SD są promieniami okręgu.

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Oznaczmy kąt ACB jako α i spojrzymy na czworokąt $ACBS$. W tym czworokącie mamy nasz kąt α oraz dwa kąty proste (kąty SAC oraz SBE muszą być proste, ponieważ styczne są prostopadłe do promieni), a skoro tak, to kąt ASB ma miarę:

$$\beta = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \alpha, \quad \beta = 180^\circ - \alpha$$



Krok 3. Wyznaczenie miary kąta α .

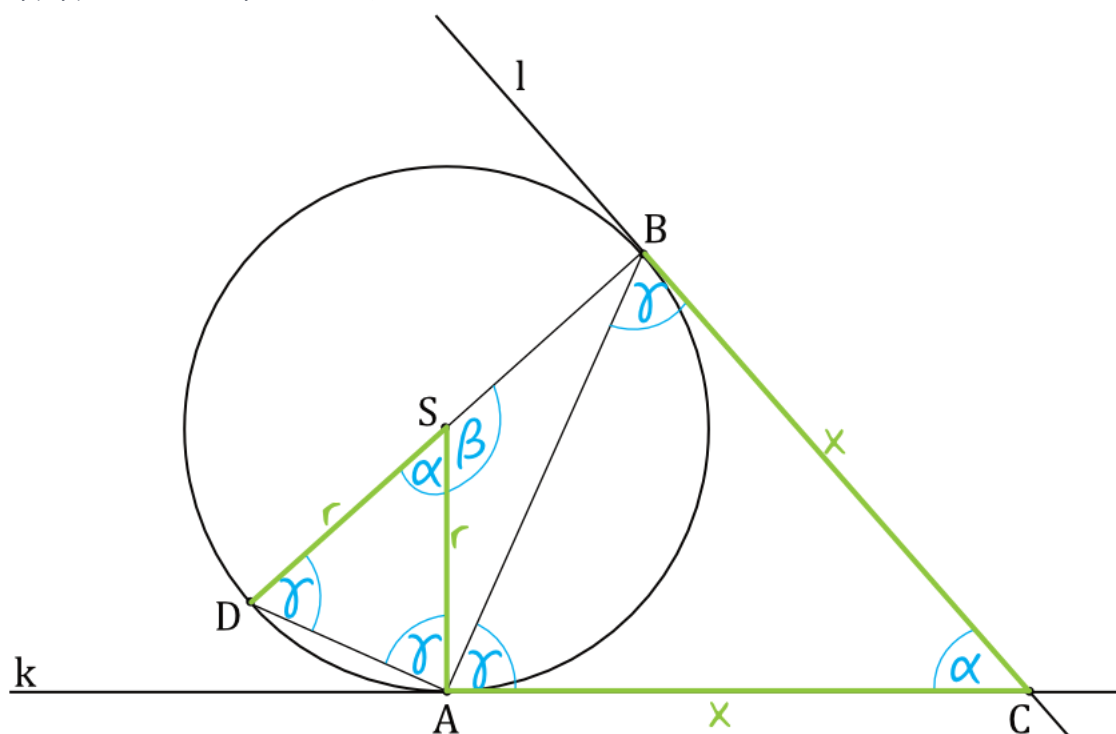
Kąt DSA jest kątem przyległym do naszego kąta β . Suma miar kątów przyległych jest równa 180° , a skoro tak, to:

$$|\angle DSA| = 180^\circ - \beta, |\angle DSA| = 180^\circ - (180^\circ - \alpha), |\angle DSA| = 180^\circ - 180^\circ + \alpha$$

Krok 4. Zakończenie dowodzenia.

Z własności trójkątów równoramiennych wiemy, że kąty przy podstawie mają jednakową miarę. Spójrzmy zatem najpierw na trójkąt ABC . Tutaj podstawą trójkąta niech to będzie γ . Możemy sobie nawet zapisać, że miara takiego kąta γ będzie równa $\frac{180^\circ - \alpha}{2}$.

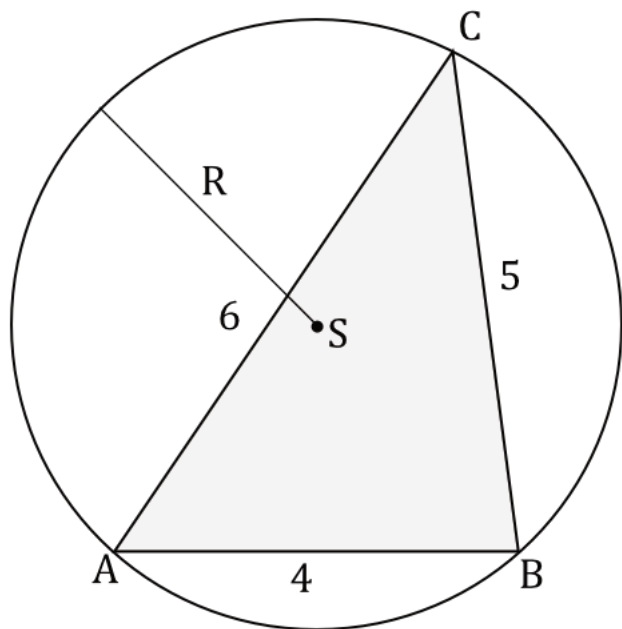
Analogiczna sytuacja jest w trójkącie ASD . Tutaj podstawą trójkąta jest bok AD i to tutaj także kąty przy podstawie będą miały jednakową miarę. Skoro kąt między kątami przy podstawie będą miały miarę równą γ .



W ten sposób udowodniliśmy, że kąty w trójkątach ABC oraz ASD są jednakowej miary, a to oznacza, że te trójkąty są podobne na podstawie cechy kąt-kąt-kąt.

Zadanie 38

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$. Na tym trójkącie opisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu R .



Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Odpowiedź: $R = \frac{8\sqrt{7}}{5}$

Krok 1. Wyznaczenie wartości $\cos\alpha$.

Chcielibyśmy na pewno skorzystać z twierdzenia sinusów, ale nie znamy miary żadnego z kątów, przez co nie mamy dobrego punktu zaczepienia. Możemy jednak kąt przy wierzchołku A jako α , to zgodnie z twierdzeniem cosinusów będziemy mogli zapisać, że:

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos\alpha$$

Podstawiając dane z treści zadania, otrzymamy:

$$5^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos\alpha, \quad 25 = 36 + 16 - 48 \cdot \cos\alpha, \quad 25 = 52 - 48 \cdot \cos\alpha, \quad -27 = -48$$

Krok 2. Wyznaczenie wartości $\sin\alpha$.

Korzystając z jedynki trygonometrycznej możemy teraz zapisać, że:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \sin^2\alpha + \left(\frac{9}{16}\right) = 1, \quad \sin^2\alpha + \frac{81}{256} = 1, \quad \sin^2\alpha = \frac{175}{256}, \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{175}{256}}$$

Nasz kąt α jest kątem ostrym, a dla takich kątów sinus przyjmuje jedynie dodatnie wartości. Stąd też zostaje nam jedynie $\sin\alpha = \sqrt{\frac{175}{256}}$, co możemy jeszcze rozp

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{175}{256}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 7}}{16} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

Krok 3. Obliczenie długości promienia R .

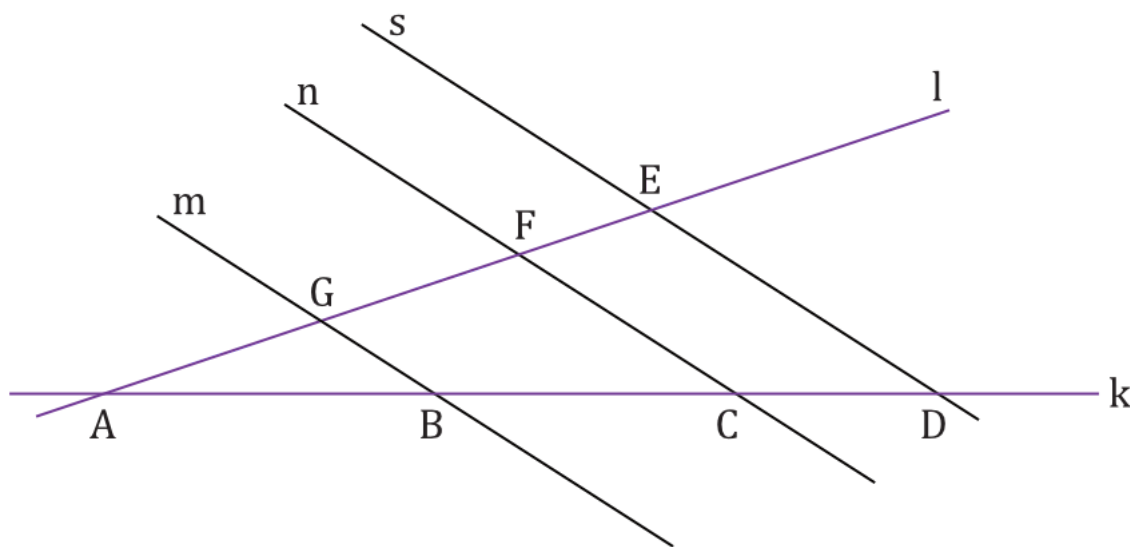
Teraz możemy przystąpić do działania, które planowaliśmy od samego początku, czyli do wykorzystania twierdzenia sinusów. Możemy zapisać, że:

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha} = 2R, \quad \frac{5}{\frac{5\sqrt{7}}{16}} = 2R, \quad 2R = 5 \cdot \frac{16}{5\sqrt{7}}, \quad 2R = \frac{16}{\sqrt{7}}, \quad R = \frac{8}{\sqrt{7}}, \quad R = \frac{8 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}$$

Zadanie 39

Proste k i l przecinają się w punkcie A . Proste m , n i s są do siebie równoległe i przecinają obie proste k i l w punktach B, C, D, E, F, G (zobacz rysunek poniżej)

$$|BC| = 30, |CD| = 20, |GF| = 21$$



Oblicz długość odcinka FE .

Odpowiedź: $|FE| = 14$

Korzystając z Twierdzenia Talesa możemy zapisać, że:

$$\frac{|GF|}{|BC|} = \frac{|FE|}{|CD|}$$

Podstawiając dane z treści zadania, otrzymamy:

$$\frac{21}{30} = \frac{|FE|}{20}, |FE| = 14$$

Zadanie 40

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest okrąg O określony równaniem:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

Zadanie 1.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-G.

1. Środek S okręgu O ma współrzędne:

A. $S = (2, -3)$

B. $S = (-2, -3)$

C. $S = (-2, 3)$

D. $S = (-2, 3)$

2. Promień r okręgu O jest równy:

E. $r = 16$

F. $r = 4$

G. $r = 5$

Zadanie 2.

Oblicz współrzędne x punktów przecięcia okręgu O z osią Ox .

Odpowiedź: 1. A. oraz F. 2. \{

Zadanie 1.

Krok 1. Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu.

Równanie okręgu opisujemy w następujący sposób:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Wartości a oraz b to współrzędne środka okręgu $S = (a; b)$, natomiast r to promień tego okręgu. Na początek wyznaczmy współrzędne tego środka. W tym celu być minusy!), zatem:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16, (x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 16$$

To oznacza, że $S = (2; -3)$.

Krok 2. Wyznaczenie długości promienia okręgu.

Widzimy, że po prawej stronie równania mamy 16, a zgodnie z równaniem okręgu jest to wartość r^2 , zatem:

$$r^2 = 16, r = 4 \quad \vee \quad r = -4$$

Ujemny wynik odrzucamy, bo promień okręgu musi mieć dodatnią długość. Zostaje nam zatem $r = 4$.

Zadanie 2.

Chcemy sprawdzić kiedy okrąg przetnie się z osią Ox , czyli chcemy sprawdzić, dla jakich argumentów x otrzymamy wartość $y = 0$. Skoro tak, to podstawiając $y =$

$$(x - 2)^2 + (0 + 3)^2 = 16, (x - 2)^2 + 3^2 = 16, (x - 2)^2 + 9 = 16, (x -$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które musimy teraz rozwiązać. Nie jest to postać iloczynowa, ponieważ po prawej stronie nie mamy zera, więc nie możemy przenieść wyrazu na lewą stronę i rozłożyć na czynniki. Zostaje nam zatem rozwiązać równanie kwadratowe z wartością bezwzględną:

$$|x - 2| = \sqrt{7}, x - 2 = \sqrt{7} \quad \vee \quad x - 2 = -\sqrt{7}, x = 2 + \sqrt{7} \quad \vee \quad x =$$

Jeżeli nie dostrzeżliśmy takiej możliwości, to śmiało można całość rozpisać, doprowadzić do postaci ogólnej i policzyć wszystko deltą:

$$x^2 - 4x + 4 = 7, x^2 - 4x - 3 = 0$$

Współczynniki: $a = 1, b = -4, c = -3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 - (-12) = 28, \sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = \sqrt{4}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - 2\sqrt{7}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + 2\sqrt{7}}{2 \cdot 1}$$

To oznacza, że okrąg przecina się z osią Ox wtedy, gdy $x = 2 - \sqrt{7}$ oraz $x = 2 + \sqrt{7}$.

Zadanie 41

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dane są okrąg O o środku w punkcie $S = (3, -4)$ i prosta k o równaniu $2x - y - 11 = 0$.

Okrąg O jest styczny do prostej k w punkcie P .

Zadanie 1.

Wyznacz i zapisz równanie okręgu O .

Zadanie 2.

Oblicz współrzędne punktu P , w którym okrąg O jest styczny do prostej k .

Odpowiedź: 1. $\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}$

Zadanie 1.

Krok 1. Obliczenie długości promienia.

Do zapisania równania okręgu potrzebujemy długości promienia. Długość promienia będzie równa odległości punktu S od prostej k , zatem z pomocą przyjdzie nam

$$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

A , B oraz C , pojawiające się we wzorze, to współczynniki równania prostej zapisanego w postaci ogólnej. Zatem u nas $A = 2$, $B = -1$ oraz $C = -11$. Skoro tak

$$r = \frac{|2 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) - 11|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}, \quad r = \frac{|6 - (-4) - 11|}{\sqrt{4 + 1}}, \quad r = \frac{|6 + 4 - 11|}{\sqrt{5}}, \quad r = \frac{|-1|}{\sqrt{5}}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Krok 2. Zapisanie równania okręgu.

Wiemy już, że $r = \frac{\sqrt{5}}{5}$. W treści zadania mamy podane współrzędne środka okręgu, czyli $S = (3, -4)$. Podstawiając te dane do równania okręgu, otrzymamy:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad (x - 3)^2 + (y - (-4))^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2, \quad (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = \frac{1}{5}$$

Zadanie 2.

Krok 1. Zbudowanie układu równań.

Z poprzedniego punktu wiemy, że nasz okrąg wyraża się równaniem $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = \frac{1}{5}$. Naszym zadaniem jest poznanie współrzędnych punktu, który tak równa:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = \frac{1}{5} \\ y = 2x - 11 \end{cases}$$

Podstawiając drugie równanie do pierwszego, otrzymamy:

$$(x - 3)^2 + (2x - 11 + 4)^2 = \frac{1}{5}, \quad (x - 3)^2 + (2x - 7)^2 = \frac{1}{5}, \quad x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 28x + 49 = \frac{1}{5}, \quad 5x^2 - 34x + 58 = \frac{1}{5}$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które musimy teraz rozwiązać. Z pomocą przyjdzie nam oczywiście delta:

Współczynniki: $a = 5$, $b = -34$, $c = \frac{289}{5}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-34)^2 - 4 \cdot 5 \cdot \frac{289}{5} = 1156 - 1156 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-34)}{2 \cdot 5} = \frac{34}{10} = 3 \frac{2}{5}$$

Krok 3. Zapisanie współrzędnych punktu P .

Wiemy już, że współrzędna $x = 3\frac{2}{5}$. Potrzebujemy jeszcze współrzędnej y , a obliczymy ją, podstawiając $x = 3\frac{2}{5}$ do jednego z równań z układu (np. równania $y =$

$$y = 2x - 11, \quad y = 2 \cdot 3\frac{2}{5} - 11, \quad y = -4\frac{1}{5}$$

To oznacza, że $P = (3\frac{2}{5}; -4\frac{1}{5})$.

Zadanie 42

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dane są punkty $A = (1, 2)$ oraz $B = (3, 7)$. Punkty A_0 oraz B_0 są odpowiednio obrazami punkt

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A_0 i B_0 jest równy:

Odpowiedź: A ($\frac{5}{2}$)

Krok 1. Zapisanie współrzędnych punktów A_0 oraz B_0 .

Symetria względem punktu $O = (0, 0)$ oznacza, że każdy przekształcony punkt zmienia wartości obydwu współrzędnych na liczby przeciwne. W związku z tym:

$$A_0 = (-1, -2)$$

$$B_0 = (-3, -7)$$

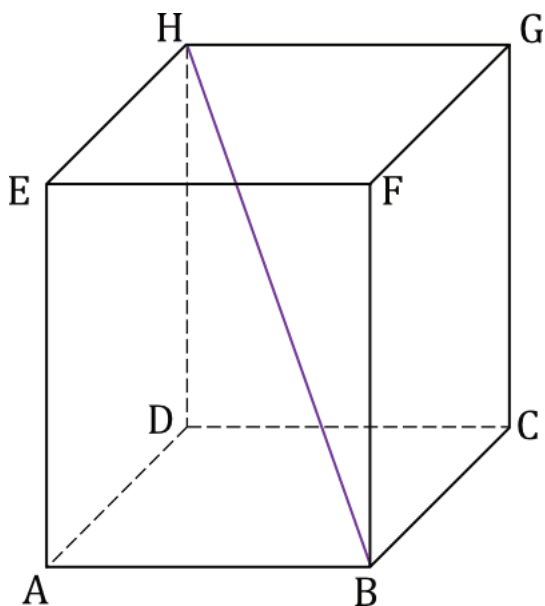
Krok 2. Obliczenie współczynnika kierunkowego.

Chcąc obliczyć współczynnik a wystarczy skorzystać z następującego wzoru z tablic maturalnych:

$$a = \frac{y_{B_0} - y_{A_0}}{x_{B_0} - x_{A_0}}, \quad a = \frac{-7 - (-2)}{-3 - (-1)}, \quad a = \frac{-7 + 2}{-3 + 1}, \quad a = \frac{-5}{-2}, \quad a = \frac{5}{2}$$

Zadanie 43

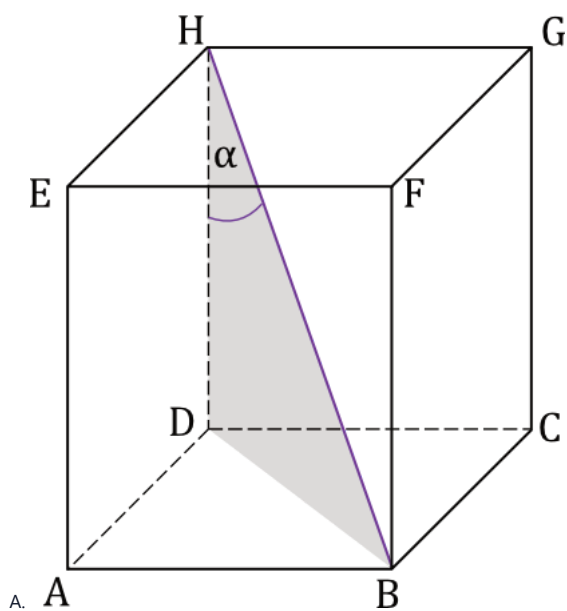
Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$, w którym prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są jego podstawami. Odcinek BH jest przekątną tego prostopadłościanu.



Zadanie 1.

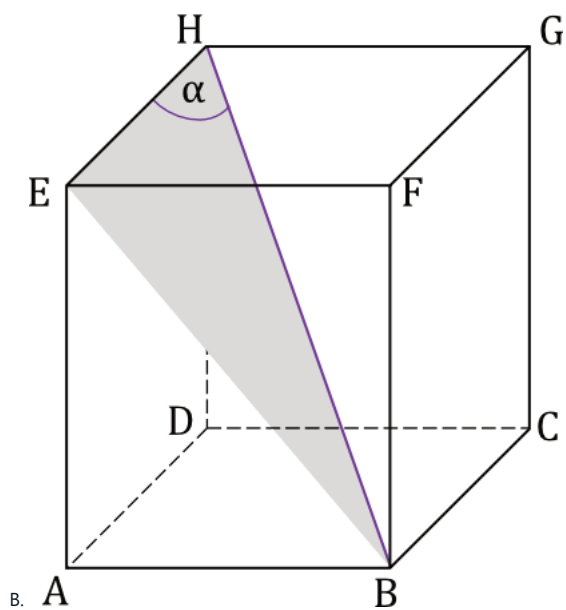
Na którym rysunku prawidłowo narysowano, oznaczono i podpisano kąt α pomiędzy przekątną BH prostopadłościanu a jego ścianą boczną $ADHE$? Zaznacz w

$$\alpha = \sphericalangle BHD$$

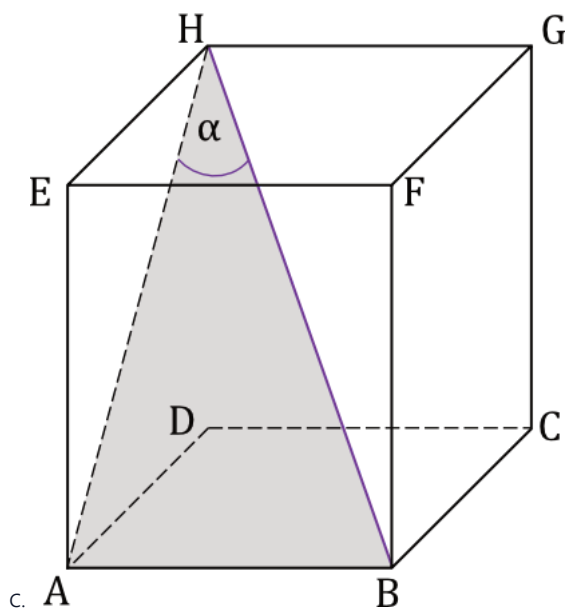


A.

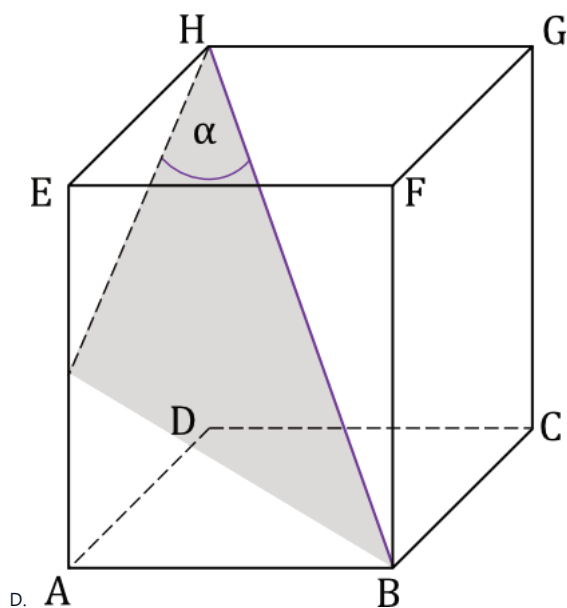
$$\alpha = \angle BHE$$



$$\alpha = \angle BHA$$



$$\alpha = \angle BHK$$



Zadanie 2.

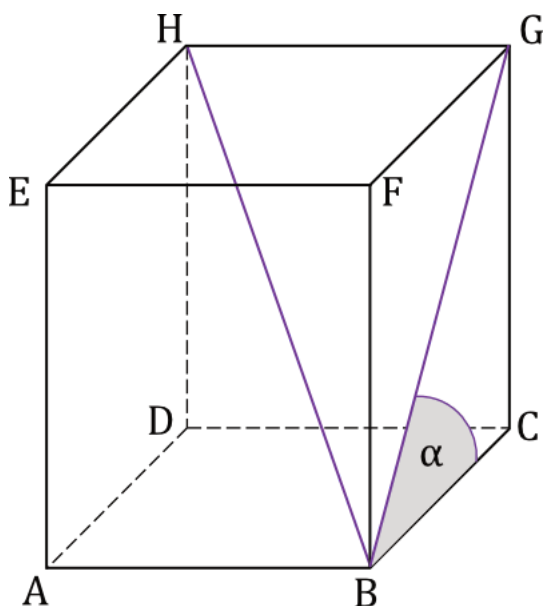
W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ dane są:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{9}{7}$$

$$|BG| = 2 \cdot \sqrt{130}$$

$$|BH| = 2 \cdot \sqrt{194}$$

gdzie odcinek BH jest przekątną prostopadłościanu, odcinek BG jest przekątną ściany bocznej $BCGF$, β jest miarą kąta $\angle GBC$. Sytuację ilustruje rysunek poniżej.



Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$.

Odpowiedź: 1. C. 2. $\sqrt{P_c}=15$

Zadanie 1.

Kąt między przekątną prostopadłościanu i ścianą boczną został oznaczony na trzecim rysunku.

Zadanie 2.

Krok 1. Obliczenie długości krawędzi CG oraz BC .

Spójrzmy na trójkąt BCG . Z treści zadania wiemy, że $\tan \beta = \frac{9}{7}$. Nie możemy zapisać, że w takim razie bok CG jest równy 7, a BC ma długość 9 (bo równie dobrze $|BC| = 9x$. Dodatkowo wiemy, że odcinek BG ma długość $2 \cdot \sqrt{130}$. Skoro tak, to korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$(7x)^2 + (9x)^2 = (2\sqrt{130})^2, 49x^2 + 81x^2 = 4 \cdot 130, 130x^2 = 520, x^2 = 4, x = 2$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $x = 2$. Skoro tak, to długości krawędzi CG oraz BC są następujące:

$$|CG| = 7x = 7 \cdot 2 = 14, |BC| = 9x = 9 \cdot 2 = 18$$

Krok 2. Obliczenie długości krawędzi GH (oraz AB).

Do obliczenia pola powierzchni całkowitej brakuje nam jeszcze znajomości długości krawędzi AB . Będzie ona taka sama jak krawędź GH , a tę będziemy mogli wy-

Okazuje się, że trójkąt BGH jest trójkątem prostokątnym (kąt prosty jest przy wierzchołku G). Z treści zadania znamy długość $BG = 2 \cdot \sqrt{130}$ oraz $|BH| = 2 \cdot$

$$|GH|^2 + (2\sqrt{130})^2 = (2\sqrt{194})^2, |GH|^2 + 4 \cdot 130 = 4 \cdot 194, |GH|^2 + 520 = 776, |GH|^2 = 256,$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $|GH| = 16$.

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni całkowitej.

Na sam koniec musimy obliczyć pole powierzchni całkowitej. Korzystając ze wzoru z tablic możemy zapisać, że:

$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac, P_c = 2 \cdot 16 \cdot 14 + 2 \cdot 14 \cdot 18 + 2 \cdot 16 \cdot 18, P_c = 448 + 504 +$$

Zadanie 44

Dane są dwa prostopadłościany podobne: B_1 oraz B_2 . Objętość prostopadłościanu B_1 jest równa V , a objętość prostopadłościanu B_2 jest równa $27V$. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu B_2 jest równe:

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu B_2 jest równe:

A. $27P$

B. $9P$

C. $3\sqrt{3}P$

ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy

1. stosunkowi objętości tych prostopadłościanów
2. pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku objętości tych prostopadłościanów.
3. kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.

Odpowiedź: B., ponieważ 3.

Krok 1. Obliczenie skali podobieństwa.

Z własności brył podobnych wiemy, że jeżeli skala podobieństwa brył jest równa k , to bryła podobna ma k^3 razy większą objętość. Widzimy, że drugi prostopadłościan jest podobny do pierwszego z skalą podobieństwa k , więc

$$k^3 = 27, \quad k = 3$$

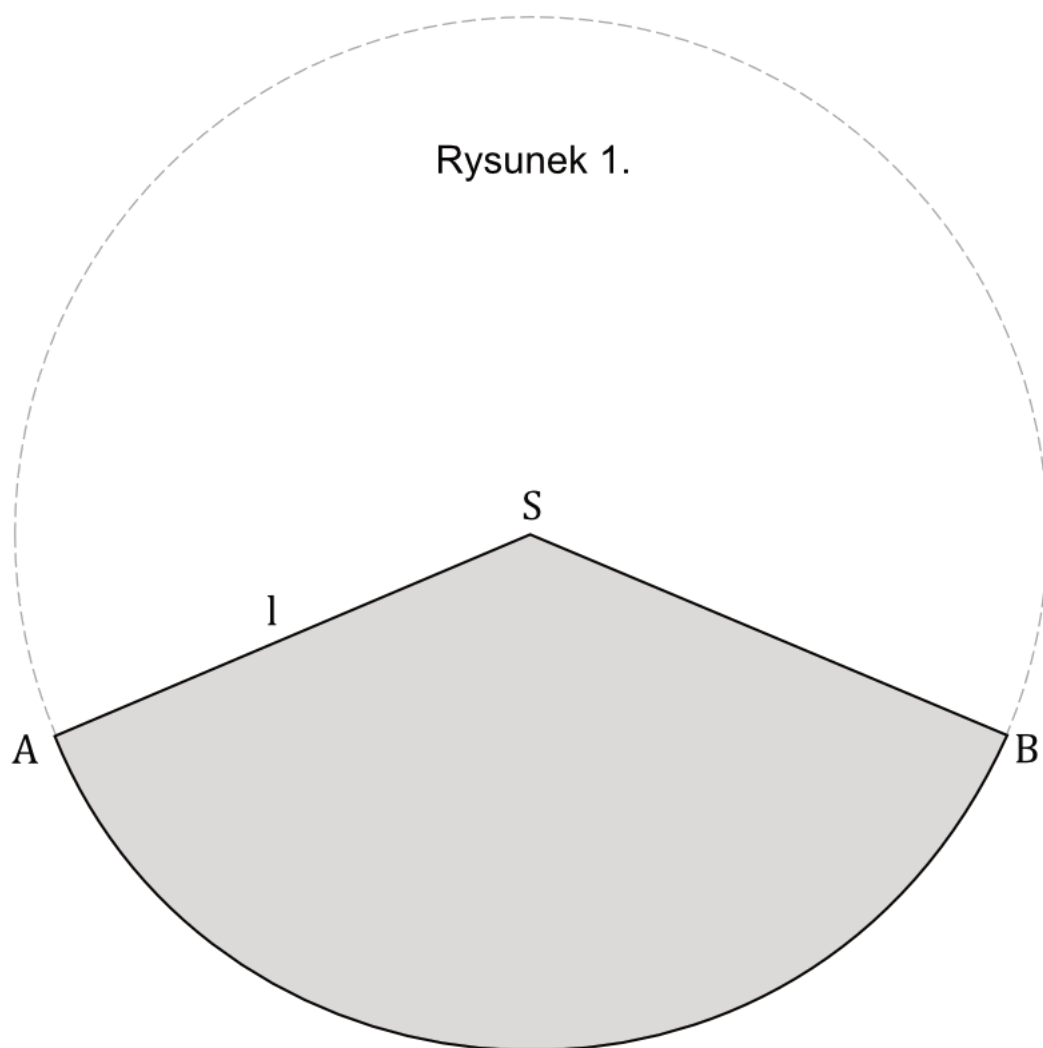
Krok 2. Obliczenie pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu B_2 .

Z własności figur podobnych wiemy, że jeżeli skala podobieństwa jest równa k , to pole powierzchni figury podobnej jest k^2 razy większe. W naszym przypadku $k = 3$, więc

To oznacza, że pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu B_2 jest równe $9P$, ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy kwadratowi stosunku ich długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.

Zadanie 45

Hania zaprojektowała i wykonała czapeczkę na bal urodzinowy młodszego brata. Czapeczka miała kształt powierzchni bocznej stożka o średnicy podstawy $d = 20$ narysowała na kartonie figurę płaską ABS o kształcie wycinka koła o promieniu l i środku S (zobacz rysunek 1.). Następnie wycięła tę figurę z kartonu, odpowied obliczeń przyjmij, że rzeczywiste figury są idealne.



Zadanie 1.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych. Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnią boczną jest czapeczka, ma miarę (w zaokrągleniu do

A. 44°

B. 136°

C. 22°

D. 68°

Zadanie 2.

Oblicz miarę kąta $\sphericalangle BSA$ wycinka koła, z którego powstała powierzchnia boczna stożka opisanego we wstępie do zadania. Miarę kąta $\sphericalangle BSA$ podaj w zaokrąglen

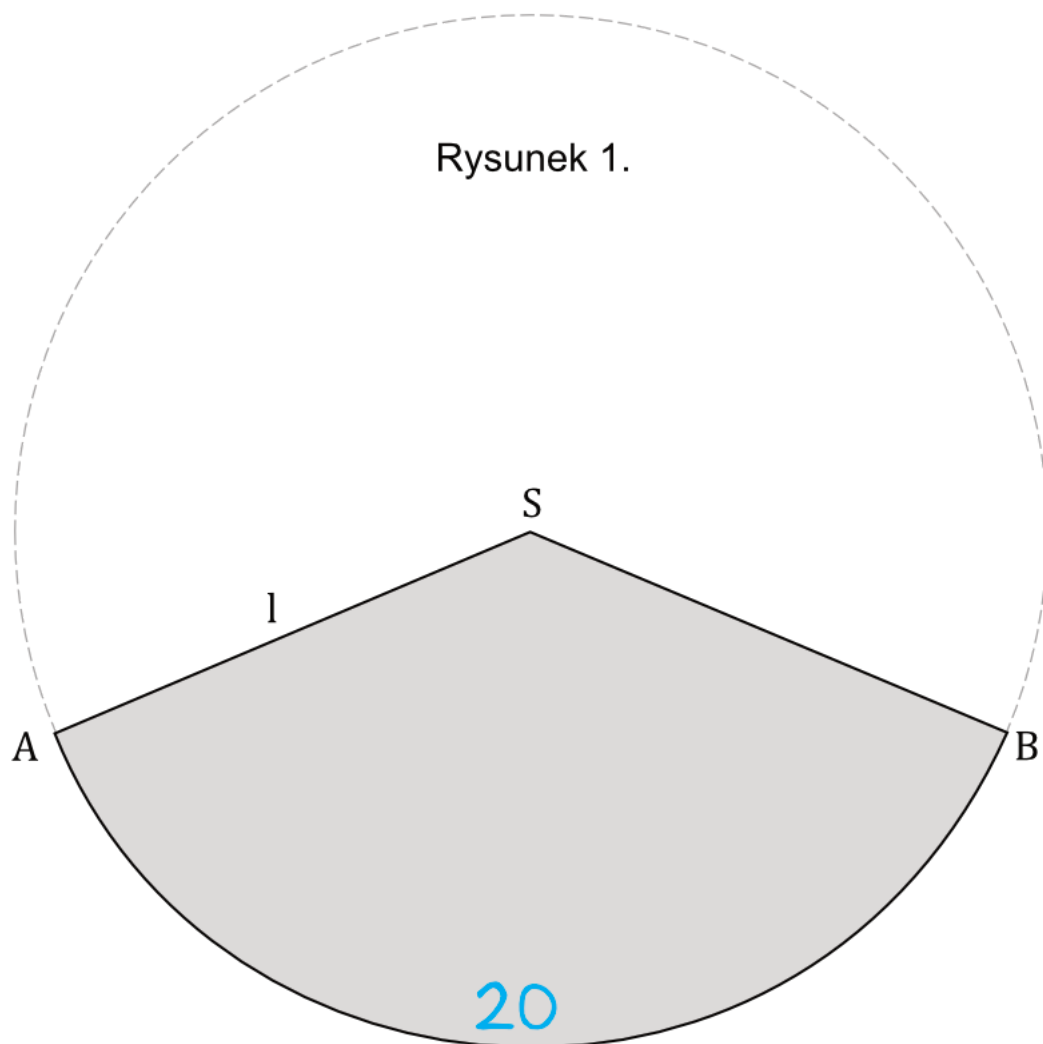
Odpowiedź: 1. A 2. $\sphericalangle$

Zadanie 1.

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanosząc na rysunek dane z treści zadania, otrzymamy następującą sytuację:

Rysunek 1.



Krok 2. Obliczenie miary kąta α .

Korzystając z funkcji trygonometrycznych (a dokładniej rzecz ujmując - z tangensa), możemy zapisać, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{H}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{25}, \operatorname{tg} \alpha = 0,4$$

Z tablic trygonometrycznych odczytujemy, że sinus przyjmuje wartość 0,4 dla kąta o mierze około 22° .

Krok 3. Obliczenie kąta rozwarcia stożka.

Kąt rozwarcia stożka będzie dwa razy większy od kąta α , zatem będzie miał on miarę $2 \cdot 22^\circ = 44^\circ$.

Zadanie 2.

Krok 1. Obliczenie długości tworzącej stożka.

Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$10^2 + 25^2 = l^2, 100 + 625 = l^2, l^2 = 725, l = \sqrt{725} \quad \vee \quad l = -\sqrt{725}$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $l = \sqrt{725}$, co w sumie możemy (choć nie musimy) jeszcze rozpiszać jako $l = \sqrt{25 \cdot 29} = 5\sqrt{29}$.

Krok 2. Obliczenie obwodu podstawy stożka.

Obliczmy teraz obwód podstawy stożka, korzystając ze wzoru $Obw = 2\pi r$. W podstawie mamy koło, którego średnica ma długość $d = 20$, a nam do obwodu pc

$$Obw = 2\pi r, Obw = 2\pi \cdot 10, Obw = 20\pi$$

Krok 3. Obliczenie obwodu całego koła, z którego wzięto wycinek.

Obliczmy teraz obwód koła, z którego wzięto wycinek do budowy stożka. Z rysunku widzimy, że to będzie koło, którego promień ma długość l . W pierwszym krok

$$Obw = 2\pi r, Obw = 2\pi \cdot 5\sqrt{29}, Obw = 10\sqrt{29}\pi$$

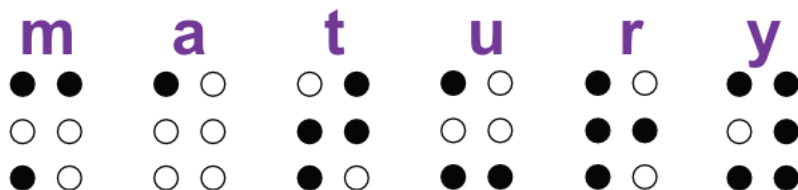
Krok 4. Obliczenie miary kąta BSA .

Wiemy, że całe koło to 360° . Miara naszego kąta BSA będzie stanowiła pewną część tych 360° . Ta część będzie dokładnie taka sama jak stosunek długości łuku

$$\alpha = \frac{20\pi}{10\sqrt{29}\pi} \cdot 360^\circ, \alpha = \frac{20}{10\sqrt{29}} \cdot 360^\circ, \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot 360^\circ, \alpha \approx \frac{2}{5,3852} \cdot 360^\circ, \alpha \approx 132,2^\circ$$

Zadanie 46

Pojedynczy znak w piśmie Braille'a dla niewidomych jest kombinacją od 1 do 6 wypukłych punktów, które mogą zajmować miejsca ułożone w dwóch kolumnach po trzy punkty. Czarne kropki w znaku oznaczają wypukłość, a białe kropki oznaczają brak wypukłości. Pojedynczy znak w piśmie Braille'a musi zawierać co najmniej jeden punkt w



Oblicz, ile różnych pojedynczych znaków można zapisać w piśmie Braille'a.

Odpowiedź: 63

Każdy punkt może być "zapełniony" na jeden z dwóch sposobów (może być wypukły lub nie). Zgodnie z regułą mnożenia to oznacza, że wszystkich możliwości utworzenia znaku jest

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

Ale to nie koniec. Pod koniec treści zadania mamy uwagę, że każdy znak w piśmie Braille'a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły. To oznacza, że spośród wszystkich znaków będziemy mieć:

$$64 - 1 = 63$$

Zadanie 47

Andrzej ma w szafie 4 koszule: czerwoną, żółtą, zieloną i niebieską; 3 pary spodni: niebieskie, czarne i szare; oraz 5 par butów: czarne, szare, zielone, czerwone i niebieskie. Zestawy ubrania wybierane przez Andrzeja określimy jako różne, gdy będą różniły się kolorem chociaż jednego rodzaju elementu ubioru w zestawie.

Zadanie 1.

Liczba wszystkich możliwych, różnych zestawów ubrania, jakie może wybrać Andrzej, jest równa:

- A. 12
- B. 72
- C. 60
- D. 720

Zadanie 2.

Oblicz, na ile sposobów można wybrać taki zestaw, w którym dokładnie jeden element ubioru będzie niebieski.

Zadanie 1.

Zgodnie z regułą mnożenia, wszystkich możliwych zestawów będziemy mogli ułożyć:

$$4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Zadanie 2.

Krok 1. Rozpisanie zestawów, które spełniają warunki zadania.

Aby rozwiązać to zadanie, musimy podzielić całość na trzy różne warianty:

I wariant - niebieska będzie koszula:

Koszula będzie niebieska, więc tutaj mamy 1 możliwość ubioru.

Spodnie mogą być czarne albo szare, więc tutaj mamy 2 możliwości ubioru.

Buty mogą być czarne, szare, zielone lub czerwone, więc tutaj mamy 4 możliwości ubioru.

To oznacza, że w tym wariantcie wszystkich interesujących nas możliwości będziemy mieć:

$$1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$$

II wariant - niebieskie będą spodnie:

Koszula może być czerwona, żółta lub zielona, więc tutaj mamy 3 możliwości ubioru.

Spodnie będą niebieskie, więc tutaj mamy 1 możliwość ubioru.

Buty mogą być czarne, szare, zielone lub czerwone, więc tutaj mamy 4 możliwości ubioru.

To oznacza, że w tym wariantcie wszystkich interesujących nas możliwości będziemy mieć:

$$3 \cdot 1 \cdot 4 = 12$$

III wariant - niebieskie będą buty:

Koszula może być czerwona, żółta lub zielona, więc tutaj mamy 3 możliwości ubioru.

Spodnie mogą być czarne albo szare, więc tutaj mamy 2 możliwości ubioru.

Buty będą niebieskie, więc tutaj mamy 1 możliwość ubioru.

To oznacza, że w tym wariantcie wszystkich interesujących nas możliwości będziemy mieć:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Krok 2. Obliczenie sumy wszystkich sposobów wyboru pasującego zestawu.

Korzystając z reguły dodawania musimy zsumować wszystkie interesujące nas warianty. To oznacza, że pasujących zestawów będziemy mieć:

$$8 + 12 + 6 = 26$$

Zadanie 48

Spośród wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowaną dokładnie jedna cyfra 3.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{25}$

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Rozpiszmy sobie liczbę czterocyfrową jako ■ ■ ■ ■ i zastanówmy się, na ile sposobów możemy uzupełnić każdą z liczb.

- Cyfrą tysięcy może być jedna z dziewięciu cyfr (od 1 do 9, bez 0), zatem mamy tutaj 9 możliwości wyboru.
- Cyfrą setek może być jedna z dziesięciu cyfr (od 0 do 9), zatem mamy tutaj 10 możliwości wyboru.
- Cyfrą dziesiątek może być jedna z dziesięciu cyfr (od 0 do 9), zatem mamy tutaj 10 możliwości wyboru.
- Cyfrą jednostki może być jedna z dziesięciu cyfr (od 0 do 9), zatem mamy tutaj 10 możliwości wyboru.

To oznacza, że wszystkich zdarzeń elementarnych (czyli wszystkich liczb czterocyfrowych) będziemy mieć zgodnie z regułą mnożenia:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$$

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Zdarzeniem sprzyjającym jest sytuacja, w której w liczbie wystąpi dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3, a dodatkowo cała liczba będzie parzysta. Jest to warianty:

I wariant - 23 ■ ■

- Cyfrą dziesiątek może być jedna z ośmiu cyfr (od 0 do 9, bez 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 8 możliwości.
- Cyfrą jednostki może być jedna z czterech cyfr (0, 4, 6, 8, bo liczba ma być parzysta i nie może tu być 2), zatem mamy tutaj 4 możliwości.

To oznacza, że takich liczb jesteśmy w stanie ułożyć $8 \cdot 4 = 32$.

II wariant - 2 ■ 3 ■

- Cyfrą setek może być jedna z ośmiu cyfr (od 0 do 9, bez 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 8 możliwości.
- Cyfrą jednostki może być jedna z czterech cyfr (0, 4, 6, 8, bo liczba ma być parzysta i nie może tu być 2), zatem mamy tutaj 4 możliwości.

To oznacza, że takich liczb jesteśmy w stanie ułożyć $8 \cdot 4 = 32$.

III wariant - ■ 23 ■

- Cyfrą tysięcy może być jedna z siedmiu cyfr (od 1 do 9, bez 0, 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 7 możliwości.
- Cyfrą jednostki może być jedna z czterech cyfr (0, 4, 6, 8, bo liczba ma być parzysta i nie może tu być 2), zatem mamy tutaj 4 możliwości.

To oznacza, że takich liczb jesteśmy w stanie ułożyć $7 \cdot 4 = 28$.

IV wariant - 32 ■ ■

- Cyfrą dziesiątek może być jedna z ośmiu cyfr (od 0 do 9, bez 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 8 możliwości.
- Cyfrą jednostki może być jedna z czterech cyfr (0, 4, 6, 8, bo liczba ma być parzysta i nie może tu być 2), zatem mamy tutaj 4 możliwości.

To oznacza, że takich liczb jesteśmy w stanie ułożyć $8 \cdot 4 = 32$.

V wariant - 3 ■ 2 ■

- Cyfrą setek może być jedna z ośmiu cyfr (od 0 do 9, bez 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 8 możliwości.
- Cyfrą jednostki może być jedna z czterech cyfr (0, 4, 6, 8, bo liczba ma być parzysta i nie może tu być 2), zatem mamy tutaj 4 możliwości.

To oznacza, że takich liczb jesteśmy w stanie ułożyć $8 \cdot 4 = 32$.

VI wariant - 3 ■ ■ 2

- Cyfrą setek może być jedna z ośmiu cyfr (od 0 do 9, bez 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 8 możliwości.
- Cyfrą dziesiątek może być jedna z ośmiu cyfr (od 0 do 9, bez 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 8 możliwości.

To oznacza, że takich liczb jesteśmy w stanie ułożyć $8 \cdot 8 = 64$.

VII wariant - ■ 32 ■

- Cyfrą tysięcy może być jedna z siedmiu cyfr (od 1 do 9, bez 0, 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 7 możliwości.
- Cyfrą jednostki może być jedna z czterech cyfr (0, 4, 6, 8, bo liczba ma być parzysta i nie może tu być 2), zatem mamy tutaj 4 możliwości.

To oznacza, że takich liczb jesteśmy w stanie ułożyć $7 \cdot 4 = 28$.

VIII wariant - ■ 3 ■ 2

- Cyfrą tysięcy może być jedna z siedmiu cyfr (od 1 do 9, bez 0, 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 7 możliwości.
- Cyfrą dziesiątek może być jedna z ośmiu cyfr (od 0 do 9, bez 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 8 możliwości.

To oznacza, że takich liczb jesteśmy w stanie ułożyć $7 \cdot 8 = 56$.

IX wariant - ■ ■ 32

- Cyfrą tysięcy może być jedna z siedmiu cyfr (od 1 do 9, bez 0, 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 7 możliwości.
- Cyfrą setek może być jedna z ośmiu cyfr (od 0 do 9, bez 2 oraz 3), zatem mamy tutaj 8 możliwości.

To oznacza, że takich liczb jesteśmy w stanie ułożyć $7 \cdot 8 = 56$.

Teraz korzystając z reguły dodawania musimy zsumować wszystkie interesujące możliwości:

$$|A| = 32 + 32 + 28 + 32 + 32 + 64 + 28 + 56 + 56 = 360$$

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{360}{9000} = \frac{1}{25}$$

Zadanie 49

Paweł i Grzegorz postanowili zagrać w grę losową. Ich wspólny kolega będzie kolejno rzucał sześcienną symetryczną kostką do gry, której ścianki są oznaczone od 10 żetonów, a gdy na kostce wypadnie liczba oczek równa 6, to Paweł daje Grzegorzowi x żetonów. W pozostałych przypadkach żaden z graczy nie zyskuje ani nie oczekiwana zysku z gry Pawła była równa wartości oczekiwanej zysku z gry Grzegorza. Oblicz ustaloną przez Pawła i Grzegorza liczbę x żetonów.

Odpowiedź: 30

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Rzucamy standardową sześcienną kostką do gry, zatem liczba zdarzeń elementarnych będzie równa $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Dla Pawła zdarzeniem sprzyjającym jest sytuacja, w której na kostce padnie wypadnie liczba mniejsza od 4 (wtedy otrzyma 10 żetonów), więc Pawła interesują wyn

Dla Grzegorza zdarzeniem sprzyjającym będzie wyrzucenie jedynie wartości 6, stąd też $|B| = 1$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

W przypadku Pawła $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

W przypadku Grzegorza $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

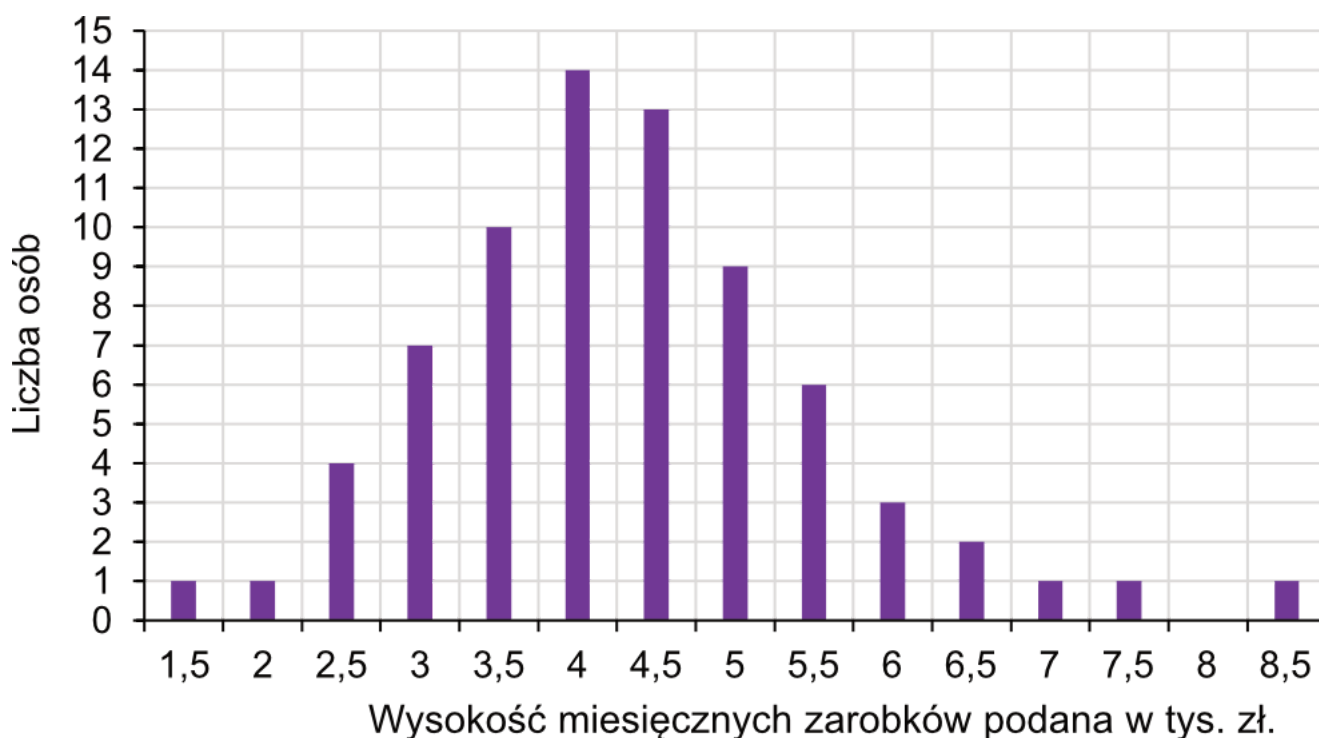
Krok 4. Obliczenie wartości oczekiwanej.

Chcąc obliczyć wartość oczekiwaną możemy posłużyć się dość skomplikowanym wzorem z tablic. Prościej jednak będzie wykonać to metodą prostej analizy. Skoro mniejsza niż Pawła, to wartość oczekiwana powinna być 3 razy większa niż nagroda Pawła (mówiąc wprost - Grzegorz ma 3 razy mniejsze szanse na wygraną, więc

$$x = 3 \cdot 10 = 30$$

Zadanie 50

Na wykresie słupkowym poniżej podano rozkład miesięcznych zarobków wszystkich pracowników w pewnej firmie F . Na osi poziomej podano - wyrażone w tysiącach przedstawiono liczbę osób, która osiąga podane zarobki.



Zadanie 1.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dominantą miesięcznych zarobków w firmie F jest:

- A. 10 tys. zł
- B. 4, 5 tys. zł
- C. 4 tys. zł

ponieważ

1. tę wartość zarobków osiąga najwięcej osób w firmie F .
2. ta wartość zarobków jest największa w firmie F .
3. iloczyn tej wartości zarobków i liczby osób z takimi zarobkami jest największy w firmie F .

Zadanie 2.

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wy kropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Medianą miesięcznych zarobków w firmie F jest tys. zł.

Zadanie 3.

Oblicz, jaki % liczby wszystkich pracowników firmy F stanowią osoby zarabiające 5, 5 tys. zł lub mniej.

Zadanie 4.

Oblicz średnią miesięcznego wynagrodzenia netto wszystkich pracowników firmy F . Wynik podaj bez zaokrąglania.

Odpowiedź: 1. C., ponieważ 1.

Zadanie 1.

Dominanta to wartość, która występuje najczęściej. Z wykresu możemy odczytać, że najwięcej osób zarabia 4 tysiące złotych. To oznacza, że dominanta miesięczny firmie F .

Zadanie 2.

Krok 1. Obliczenie liczby pracowników.

Aby poznać liczbę pracowników tej firmy, musimy zsumować liczbę osób pobierających dane wynagrodzenie (np. 1 osoba zarabia 1, 5 tysiąca, 1 osoba zarabia 2 tysiące):

$$1 + 1 + 4 + 7 + 10 + 14 + 13 + 9 + 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 75$$

Krok 2. Obliczenie mediany.

Mamy nieparzystą liczbę pracowników, a to oznacza, że mediana będzie równa tak zwanej środkowej wartości. W przypadku ciągu 75-elementowego, środkową w

Teoretycznie powinniśmy teraz wypisać wszystkie zarobki w ciągu niemalejącym (od najmniejszej do największej wypłaty) i wybrać tę, która będzie trzydziesta ósma; wystarczy zauważyć, że $1 + 1 + 4 + 7 + 10 + 14 = 37$ osób zarabia 4 tysiące lub mniej. Nas interesują zarobki 38. osoby, a te wynoszą w takim razie 4, 5 tysiące

Zadanie 3.

Osób zarabiających 5, 5 tysiąca złotych lub mniej mamy:

$$1 + 1 + 4 + 7 + 10 + 14 + 13 + 9 + 6 = 65$$

Wszystkich pracowników mamy 75, więc ci zarabiający 5, 5 tys. zł lub mniej stanowią:

$$\frac{65}{75} \cdot 100\% = 86\frac{2}{3}\%$$

Zadanie 4.

Aby obliczyć średnią, musimy zsumować wszystkie wynagrodzenia i podzielić to przez liczbę wszystkich pracowników. Suma wszystkich wynagrodzeń będzie równa:

$$1 \cdot 1,5 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2,5 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 3,5 + 14 \cdot 4 + 13 \cdot 4,5 + 9 \cdot 5 + 6 \cdot 5,5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 6,5 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 7,5 + 1 \cdot 8,5 + 2 \cdot 10 = 336, \quad \bar{x} = 4,48$$

Wiemy już, że mamy 75 pracowników, zatem średnia będzie równa:

$$\bar{x} = \frac{336}{75}, \quad \bar{x} = 4,48$$

Średnia pensja wynosi więc 4480zł.