

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura z matematyki (poziom podstawowy) - Czerwiec 2014

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D ($\sqrt{(x+1)^2} = x+1 $)	1
2	C (48%)	1
3	C $((a-1)(b+1))$	1
4	A ($a = -1$ i $b = 1$)	1
5	D ($c < a < b$)	1
6	A $((-10; 2))$	1
7	A (0)	1
8	B (3)	1
9	C (7)	1
10	C (1)	1
11	A (-1705)	1
12	B (40)	1
13	C (2)	1
14	C ($20\sqrt{3}$)	1
15	C (50 pkt)	1
16	C (60°)	1
17	B (60°)	1
18	B ($\frac{15}{2}$)	1
19	B ($\frac{5}{30}$)	1
20	A (6)	1
21	D ($400\,000m^2$)	1
22	C ($m = \frac{1}{3}$)	1
23	B $((x-2)^2 + (y+2)^2 = 4)$	1
24	D (48π)	1
25	B (9)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Która z poniższych równości jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x ?

Odpowiedź: D ($\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$)

Pierwiastek z kwadratu dowolnego wyrażenia jest równy wartości bezwzględnej z tego wyrażenia. Prawidłowa jest zatem odpowiedź D. O tym, że pozostałe odpowiedzi są błędne możemy się przekonać podstawiając np. $x = -3$.

Odp. A.

$$\sqrt{x^2} = x, \sqrt{(-3)^2} = -3, \sqrt{9} = -3, 3 = -3, L \neq P$$

Odp. B.

$$|-x| = x, | -(-3) | = -3, |3| = -3, 3 = -3, L \neq P$$

Odp. C.

$$|x-1| = x-1, |-3-1| = -3-1, |-4| = -4, 4 = -4, L \neq P$$

Odp. D.

$$\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|, \sqrt{(-3+1)^2} = |-3+1|, \sqrt{(-2)^2} = |-2|, \sqrt{4} = 2, 2 = 2, L = P$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Czterech przyjaciół zarejestrowało spółkę. Wysokość udziałów poszczególnych wspólników w kapitale zakładowym spółki wyraża stosunek $12 : 8 : 3 : 2$. Jaką część kapitału zakładowego stanowi udział największego inwestora?

Odpowiedź: C (48%)

Oznaczmy sobie udziały poszczególnych wspólników jako: $12x, 8x, 3x, 2x$. Łącznie udziałów mamy:

$$12x + 8x + 3x + 2x = 25x$$

Musimy teraz obliczyć jaką część udziałów ma największy inwestor, a widzimy że ma on $12x$ z $25x$, czyli:

$$\frac{12x}{25x} \cdot 100\% = 48\%$$

Zadanie 3

0-1 pkt

Dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b wyrażenie $ab + a - b - 1$ jest równe:

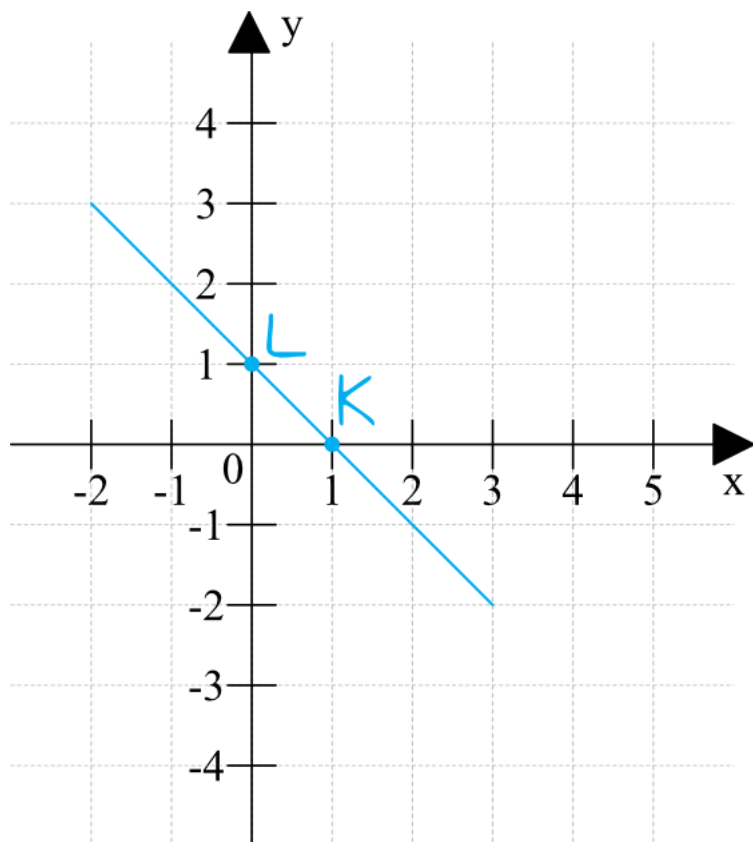
Odpowiedź: C $((a - 1)(b + 1))$

$$ab + a - b - 1 = a(b + 1) - (b + 1) = , a \cdot (b + 1) - 1 \cdot (b + 1) = (a - 1)(b + 1)$$

Zadanie 4

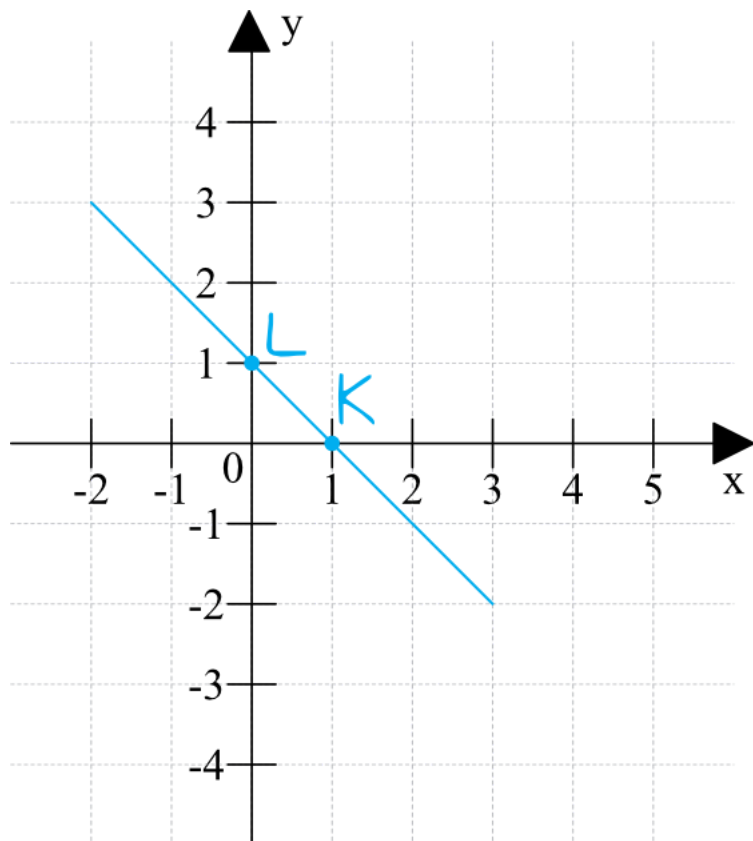
0-1 pkt

Na prostej o równaniu $y = ax + b$ leżą punkty $K = (1, 0)$ i $L = (0, 1)$. Wynika stąd, że:



Odpowiedź: A ($a = -1$ i $b = 1$)

Krok 1. Określenie współczynnika a .



Z rysunku wynika, że nasza funkcja jest malejąca, tak więc współczynnik a jest na pewno mniejszy od zera. To oznacza, że prawidłową odpowiedzią jest A lub C.

Krok 2. Określenie współczynnika b .

Tu z pomocą przyjdą nam współrzędne punktu L . Miejsce przecięcia się prostej z osią Oy mówi nam o tym jaka jest wartość współczynnika b . Skoro prosta przecina oś Oy w punkcie $L = (0, 1)$, to $b = 1$.

Prawidłowa jest więc odpowiedź A .

Zadanie 5

0-1 pkt

Dane są liczby: $a = \log_3 \frac{1}{9}$, $b = \log_3 3$, $c = \log_3 \frac{1}{27}$. Który z poniższych warunków jest prawdziwy?

Odpowiedź: D ($c < a < b$)

Obliczmy wartość każdej z liczb:

$$a = \log_3 \frac{1}{9} = -2, \text{ bo } 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$b = \log_3 3 = 1, \text{ bo } 3^1 = 3$$

$$c = \log_3 \frac{1}{27} = -3, \text{ bo } 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$-3 < -2 < 1, c < a < b$$

Zadanie 6

0-1 pkt

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 3x - 4$ dla każdej liczby z przedziału $\langle -2, 2 \rangle$. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział:

Odpowiedź: A ($\langle -10; 2 \rangle$)

Nasza funkcja jest funkcją liniową i to w dodatku rosnącą, bo ma dodatni współczynnik $a = 3$. To oznacza, że dla $f(-2)$ funkcja przyjmie wartość najmniejszą, a dla $f(2)$ największą, zatem:

$$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 4 = -6 - 4 = -10, f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 6 - 4 = 2$$

Zbiorem wartości tej funkcji jest więc przedział $\langle -10; 2 \rangle$.

Zadanie 7

0-1 pkt

Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 + 7x + c$ jest liczba $-\frac{7}{3}$. Wówczas c jest równe:

Odpowiedź: A (0)

Skoro $-\frac{7}{3}$ jest miejscem zerowym, to znaczy że:

$$f\left(-\frac{7}{3}\right) = 0, 3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)^2 + 7 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + c = 0, 3 \cdot \frac{49}{9} + \left(-\frac{49}{3}\right) + c = 0, \frac{49}{3} - \frac{49}{3} + c = 0, 0 + c = 0, c = 0$$

Zadanie 8

0-1 pkt

Liczba $\frac{3^{27} + 3^{26}}{3^{26} + 3^{25}}$ jest równa:

Odpowiedź: B (3)

Z racji tego iż nie mamy żadnych wzorów na dodawanie potęg, to musimy wykazać się sprytem i wyłączyć wspólny czynnik przed nawias:

$$\frac{3^{27} + 3^{26}}{3^{26} + 3^{25}} = \frac{3^{26} \cdot \cancel{(3+1)}}{3^{25} \cdot \cancel{(3+1)}} = \frac{3^{26}}{3^{25}} = 3^{26-25} = 3^1 = 3$$

Zadanie 9

0-1 pkt

Dane są wielomiany: $W(x) = 2x^2 - 1$, $P(x) = x^3 + x$ i $Q(x) = (1 - x)(x + 1)$. Stopień wielomianu $W(x) \cdot P(x) \cdot Q(x)$ jest równy:

Odpowiedź: C (7)

Krok 1. Obliczenie stopnia wielomianu $Q(x)$.

Stopień wielomianu to tak naprawdę jego najwyższa potęga jaka pojawia się w danym zapisie. W przypadku $W(x)$ mamy drugi stopień wielomianu (bo pojawia się x^2), a $P(x)$ jest wielomianem trzeciego stopnia (bo mamy x^3). Musimy poznać jeszcze stopień wielomianu $Q(x)$:

$$Q(x) = (1 - x)(x + 1), \quad Q(x) = x + 1 - x^2 - x, \quad Q(x) = -x^2 + 1$$

Czyli $Q(x)$ jest wielomianem drugiego stopnia.

Krok 2. Obliczenie stopnia iloczynu $W(x) \cdot P(x) \cdot Q(x)$.

Nie musimy wymnażać przez siebie wszystkich wyrazów, aby poznać rozwiązanie tego zadania. Wystarczy wymnożyć przez siebie tylko te wyrazy z najwyższymi potęgami w każdym z wielomianów. Cała reszta nas nie interesuje. Zatem:

$$2x^2 \cdot x^3 \cdot (-x^2) = -2x^{2+3+2} = -2x^7$$

To oznacza, że powstanie nam wielomian siódmego stopnia.

Zadanie 10

0-1 pkt

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli o równaniu $y = (x + 2)(x - 4)$ jest równa:

Odpowiedź: C (1)

Krok 1. Zapisanie równania w postaci ogólnej.

Zanim przejdziemy do wyznaczenia pierwszej współrzędnej wierzchołka musimy przekształcić to równanie z postaci iloczynowej do ogólnej, zatem:

$$y = (x + 2)(x - 4), \quad y = x^2 - 4x + 2x - 8, \quad y = x^2 - 2x - 8$$

Krok 2. Obliczenie pierwszej współrzędnej.

Dla paraboli określonej wzorem ogólnym $y = ax^2 + bx + c$ współrzędna p jej wierzchołka $W = (p; q)$ wyraża się wzorem:

$$p = \frac{-b}{2a}, \quad p = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1}, \quad p = \frac{2}{2}, \quad p = 1$$

Zadanie 11

0-1 pkt

W ciągu geometrycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, wyraz $a_1 = 5$, natomiast iloraz $q = -2$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

Odpowiedź: A (-1705)

Sumę dziesięciu początkowych wyrazów możemy obliczyć za pomocą wzoru:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad S_{10} = 5 \cdot \frac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)}, \quad S_{10} = 5 \cdot \frac{1 - 1024}{1 + 2}, \quad S_{10} = 5 \cdot \frac{-1023}{3}, \quad S_{10} = 5 \cdot (-341), \quad S_{10} = -1705$$

Zadanie 12

0-1 pkt

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są dwa wyrazy: $a_2 = 11$ i $a_4 = 7$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

Odpowiedź: B (40)

Krok 1. Obliczenie wartości trzeciego wyrazu.

Znając wartość drugiego i czwartego wyrazu możemy obliczyć wartość trzeciego wyrazu:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}, a_3 = \frac{11 + 7}{2}, a_3 = \frac{18}{2}, a_3 = 9$$

Krok 2. Obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego (r).

Wybieramy dwa kolejne wyrazy i obliczamy różnicę ciągu:

$$r = a_3 - a_2, r = 9 - 11, r = -2$$

Krok 3. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu.

$$a_1 = a_2 - r, a_1 = 11 - (-2), a_1 = 11 + 2, a_1 = 13$$

Krok 4. Obliczenie wartości czterech pierwszych wyrazów.

Tak naprawdę obliczyliśmy wartości wszystkich czterech kolejnych wyrazów, więc możemy je po prostu do siebie dodać:

$$S_4 = 13 + 11 + 9 + 7 = 40$$

Ewentualnie moglibyśmy skorzystać z następującego wzoru:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, S_4 = \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4, S_4 = \frac{13 + 7}{2} \cdot 4, S_4 = \frac{20}{2} \cdot 4, S_4 = 10 \cdot 4, S_4 = 40$$

Zadanie 13

0-1 pkt

Miara kąta α spełnia warunek: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Wyrażenie $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$ jest równe:

Odpowiedź: C (2)

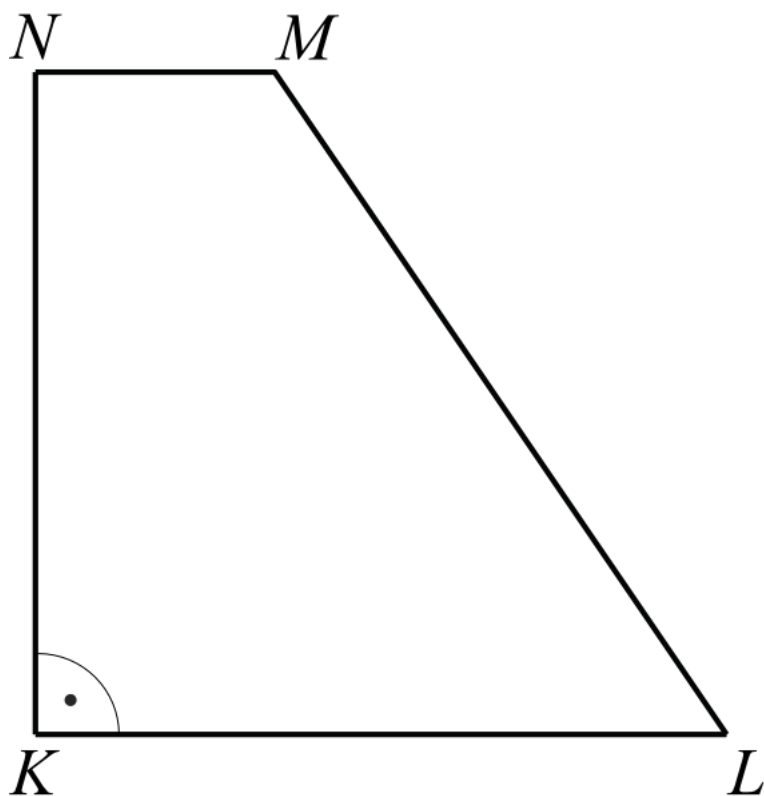
Skorzystamy tutaj z "jedynki trygonometrycznej". Skoro $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ to:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} + \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1 + 1 = 2$$

Zadanie 14

0-1 pkt

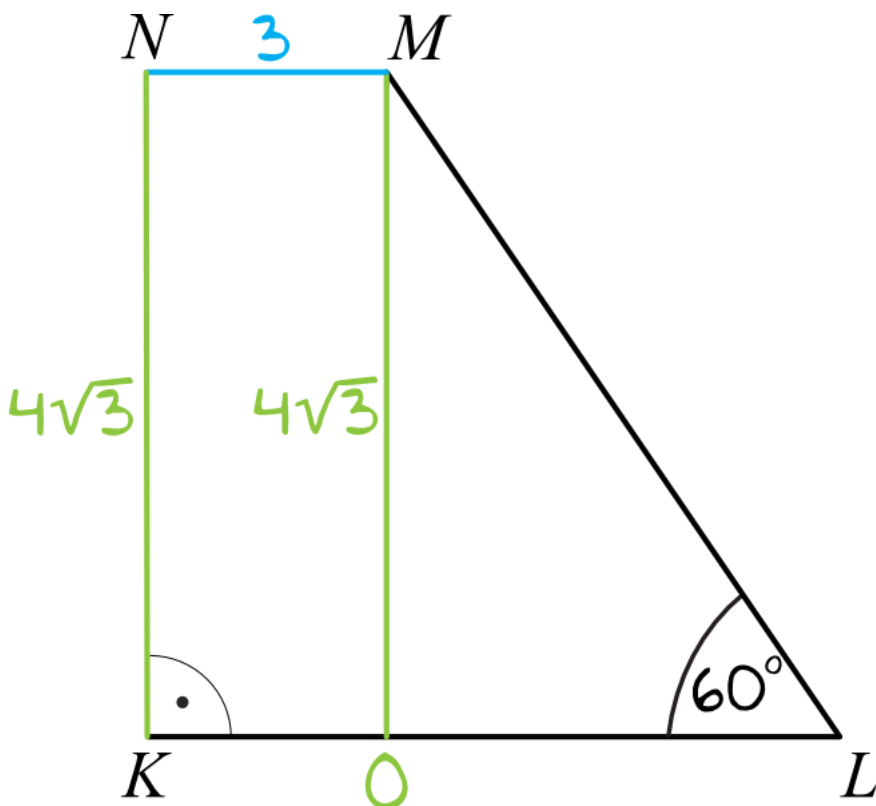
W trapezie $KLMN$, w którym $KL \parallel MN$, kąt LKN jest prosty (zobacz rysunek) oraz dane są: $|MN| = 3$, $|KN| = 4\sqrt{3}$, $|\angle KLM| = 60^\circ$. Pole tego trapezu jest równe:



Odpowiedź: C ($20\sqrt{3}$)

Krok 1. Obliczenie długości podstawy KL .

Do obliczenia pola trapezu brakuje nam tylko znajomości długości dolnej podstawy. Sporządzmy sobie prosty rysunek:



Na podstawie tego szkicu widzimy, że: $|NM| = |KO| = 3$ oraz $|NK| = |MO| = 4\sqrt{3}$. Jeśli obliczymy długość odcinka $|OL|$ (a możemy to zrobić korzystając z tangensa) to poznamy także długość dolnej podstawy trapezu.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|MO|}{|OL|}, \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{|OL|}, \sqrt{3} \cdot |OL| = 4\sqrt{3}, |OL| = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, |OL| = 4$$

Stąd też $|KL| = |KO| + |OL| = 3 + 4 = 7$.

Krok 2. Obliczenie pola trapezu.

$$P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h, P = \frac{1}{2}(7 + 3) \cdot 4\sqrt{3}, P = 5 \cdot 4\sqrt{3}, P = 20\sqrt{3}$$

Zadanie 15

0-1 pkt

Średnia arytmetyczna liczby punktów uzyskanych na egzaminie przez studentów I grupy, liczącej 40 studentów, jest równa 30. Dwudziestu studentów tworzących II grupę otrzymało w sumie 1800 punktów. Zatem średni wynik z tego egzaminu, liczony łącznie dla wszystkich studentów z obu grup, jest równy:

Odpowiedź: C (50 pkt)

Krok 1. Obliczenie sumy punktów uzyskanych przez I grupę.

Skoro było 40 studentów, a każdy uzyskał średnio 30 punktów, to łącznie uzyskali:

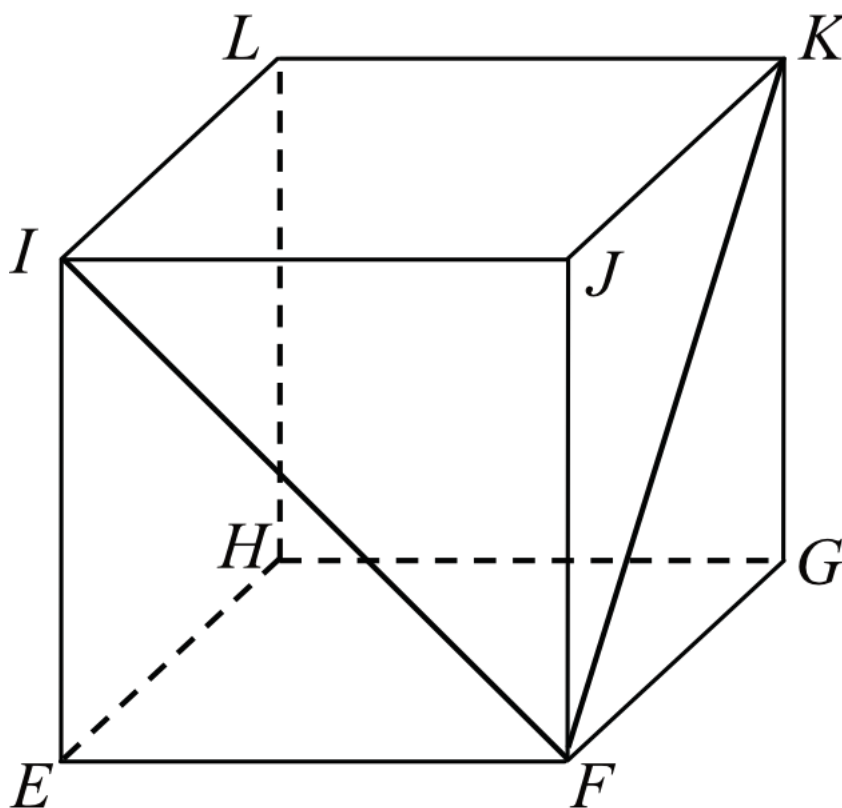
$$S_1 = 40 \cdot 30 = 1200$$

Krok 2. Obliczenie średniego wyniku z egzaminu.

Musimy dodać do siebie sumę punktów pierwszej i drugiej grupy i podzielić ją przez łączną liczbę studentów, zatem:

$$\bar{x} = \frac{1200 + 1800}{40 + 20}, \bar{x} = \frac{3000}{60}, \bar{x} = 50$$

W sześcianie $EFGHIJKL$ poprowadzono z wierzchołka F dwie przekątne sąsiednich ścian, FI oraz FK (zobacz rysunek). Miara kąta IFK jest równa:



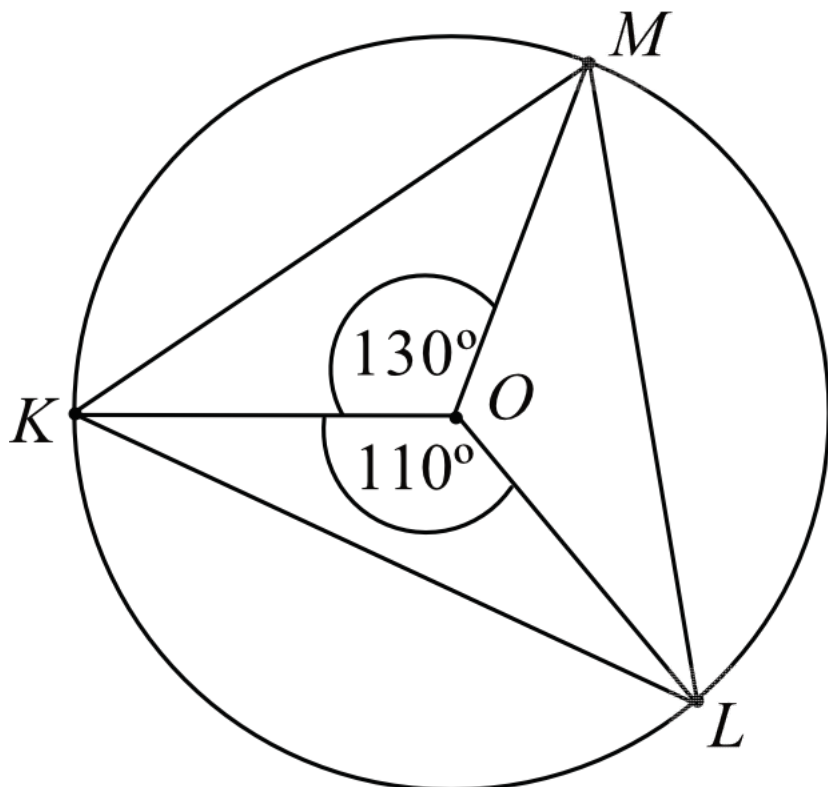
Odpowiedź: C (60°)

Gdybyśmy połączyli ze sobą punkt I oraz K to otrzymalibyśmy trójkąt IKF , którego jednym z kątów jest nasz poszukiwany $\sphericalangle IFK$. Spróbujmy ustalić jaki będzie ten trójkąt IKF . Wszystkie jego boki byłyby przekątnymi ścian, a skoro jest to sześcian, to każda z tych przekątnych miałaby tę samą długość. To oznacza, że trójkąt IKF jest równoboczny, a skoro tak, to $|\sphericalangle IFK| = 60^\circ$.

Zadanie 17

0-1 pkt

Punkt O jest środkiem okręgu (zobacz rysunek). Miara kąta LKM jest równa:



Odpowiedź: B (60°)

Kąt LKM jest kątem wpisanym w okrąg, opartym na tym samym łuku co kąt MOL . Miara kąta MOL jest równa:

$$|\angle MOL| = 360^\circ - 130^\circ - 110^\circ = 120^\circ$$

Z relacji między kątami wpisanymi i środkowymi wiemy, że kąt LKM będzie dwa razy mniejszy od kąta MOL , zatem:

$$|\angle LKM| = |\angle MOL| : 2 = 120^\circ : 2 = 60^\circ$$

Zadanie 18

0-1 pkt

Na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 12 i 9, opisano okrąg. Promień tego okręgu jest równy:

Odpowiedź: B ($\frac{15}{2}$)

Okrąg opisany na trójkącie prostokątnym ma średnicę równą przeciwprostokątnej. W związku z tym:

$$a^2 + b^2 = d^2, \quad 12^2 + 9^2 = d^2, \quad 144 + 81 = d^2, \quad d^2 = 225, \quad d = 15$$

Skoro średnica okręgu jest równa $d = 15$, to promień będzie miał długość $r = \frac{15}{2}$.

Zadanie 19

0-1 pkt

Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, \dots, 30\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest kwadratem liczby całkowitej, jest równe:

Odpowiedź: B ($\frac{5}{30}$)

Spośród liczb od 1 do 30 tylko pięć jest kwadratem liczby całkowitej. Są to:

$$1, 4, 9, 16, 25$$

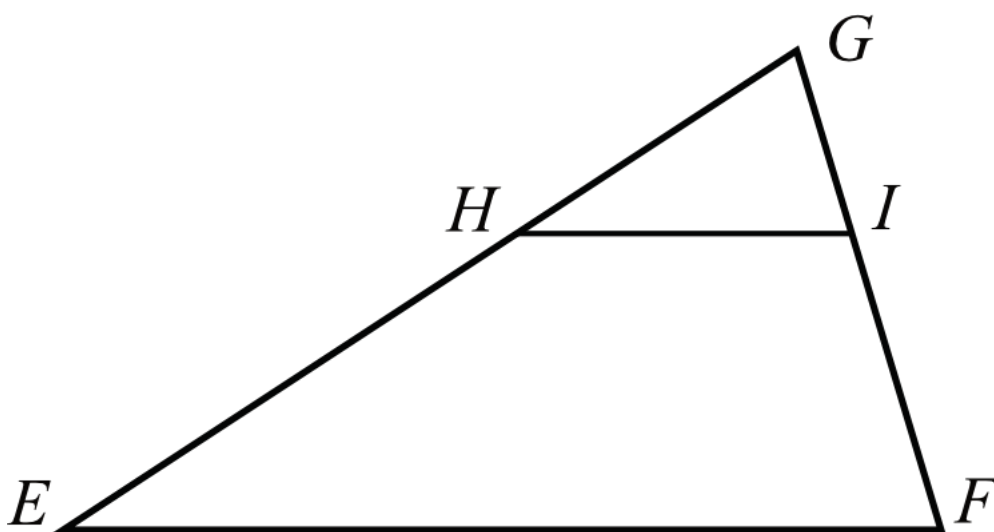
Prawdopodobieństwo wylosowania jednej z tych liczb będzie więc równe:

$$p = \frac{5}{30}$$

Zadanie 20

0-1 pkt

W trójkącie EFG bok EF ma długość 21. Prosta równoległa do boku EF przecina boki EG i FG trójkąta odpowiednio w punktach H oraz I (zobacz rysunek) w taki sposób, że $|HI| = 7$ i $|GI| = 3$. Wtedy długość odcinka FI jest równa:



Odpowiedź: A (6)

Krok 1. Zapisanie zależności między długościami boków.

Trójkąty EFG oraz HIG są trójkątami podobnymi. To oznacza, że między stosunkami długości boków zajdzie poniższa równość:

$$\frac{|EF|}{|HI|} = \frac{|GF|}{|GI|}$$

Krok 2. Obliczenie długości odcinka FI .

Podstawiając pod $|GF|$ sumę odcinków $|GI| + |FI|$ będziemy mieli równanie, z którego wyznaczymy poszukiwaną długość odcinka $|FI|$:

$$\frac{|EF|}{|HI|} = \frac{|GI| + |FI|}{|GI|}, \quad \frac{21}{7} = \frac{3 + |FI|}{3}, \quad 3 = \frac{3 + |FI|}{3}, \quad 9 = 3 + |FI|, \quad |FI| = 6$$

Zadanie 21

0-1 pkt

Na planie miasta, narysowanym w skali 1 : 20 000, park jest prostokątem o bokach 2cm i 5cm. Stąd wynika, że ten park ma powierzchnię:

Odpowiedź: D (400 000m²)

Krok 1. Obliczenie rzeczywistych wymiarów prostokąta.

Skala 1 : 20 000 oznacza, że 1cm na mapie odpowiada 20 000cm w rzeczywistości (czyli 200m). Przeliczmy więc długości odcinków na mapie na rzeczywistą długość:

$$2\text{cm} = 2 \cdot 200\text{m} = 400\text{m}, \quad 5\text{cm} = 5 \cdot 200\text{m} = 1000\text{m}$$

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni.

Pole powierzchni parku jest więc równe:

$$P = 400\text{m} \cdot 1000\text{m} = 400\,000\text{m}^2$$

Zadanie 22

0-1 pkt

Proste o równaniach: $y = mx - 5$ oraz $y = (1 - 2m)x + 7$ są równoległe, gdy:

Odpowiedź: C ($m = \frac{1}{3}$)

Aby dwie proste były względem siebie równoległe to muszą mieć jednakowy współczynnik kierunkowy a . Pierwsza prosta ma współczynnik kierunkowy $a = m$.

Druga ma $a = 1 - 2m$, zatem:

$$m = 1 - 2m, \quad 3m = 1, \quad m = \frac{1}{3}$$

Zadanie 23

0-1 pkt

Punkty $M = (2, 0)$ i $N = (0, -2)$ są punktami styczności okręgu z osiami układu współrzędnych. Które z poniższych równań opisuje ten okrąg?

Odpowiedź: B ($(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku poglądowego.

To zadanie będzie znacznie łatwiejsze kiedy naszkicujemy sobie układ współrzędnych z oznaczonymi punktami M oraz N . Na podstawie tego rysunku możemy stwierdzić, że mówimy o okręgu o środku $S = (2; -2)$, którego promień jest równy 2.

Krok 2. Zapisanie poprawnego równania okręgu.

Równanie okręgu przybiera postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Gdzie a oraz b to współrzędne środka okręgu $S = (a; b)$, natomiast r to długość promienia.

Uważając na znaki możemy więc nasze równanie zapisać jako:

$$(x - 2)^2 + (y - (-2))^2 = 2^2, \quad (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

Zadanie 24

0-1 pkt

Objętość walca o promieniu podstawy 4 jest równa 96π . Pole powierzchni bocznej tego walca jest równe:

Odpowiedź: D (48π)

Krok 1. Wyznaczenie wysokości walca.

Do wyznaczenia pola powierzchni bocznej walca brakuje nam jego wysokości. Obliczymy ją korzystając ze wzoru na objętość:

$$V = \pi r^2 H, \quad 96\pi = \pi \cdot 4^2 \cdot H, \quad 96\pi = 16\pi \cdot H, \quad H = 6$$

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni bocznej walca.

$$P_b = 2\pi r H, \quad P_b = 2\pi \cdot 4 \cdot 6, \quad P_b = 48\pi$$

Zadanie 25

0-1 pkt

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 432, a krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość 12. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:

Odpowiedź: B (9)

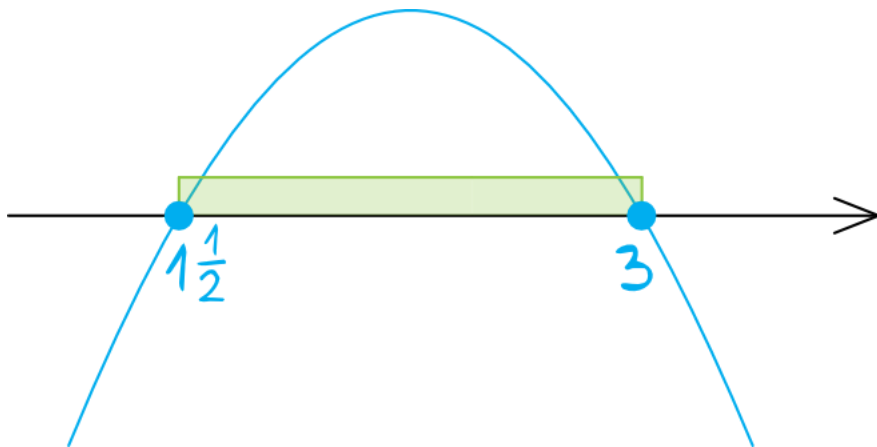
Wysokość ostrosłupa wyznaczmy podstawiając do wzoru na objętość tej bryły wszystkie dane z treści zadania, pamiętając że w podstawie tego ostrosłupa mamy kwadrat (bo jest to ostrosłup prawidłowy czworokątny):

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H, 432 = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot H, 432 = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot H, 432 = 48 \cdot H, H = 9$$

Zadanie 26

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $(2x - 3)(3 - x) \geq 0$.



Odpowiedź: $x \in \langle 1\frac{1}{2}; 3 \rangle$

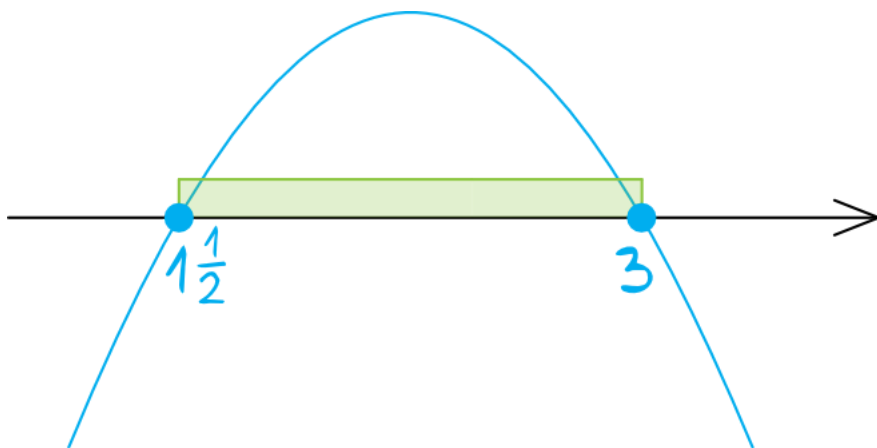
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Nasza nierówność przedstawiona jest w postaci iloczynowej, tak więc bardzo szybko jesteśmy w stanie określić miejsca zerowe - wystarczy przyrównać poszczególne wartości w nawiasach do zera.

$$(2x - 3)(3 - x) = 0, 2x - 3 = 0 \vee 3 - x = 0, 2x = 3 \vee x = 3, x = 1\frac{1}{2} \vee x = 3$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Musimy teraz określić kształt naszej paraboli. Gdybyśmy pomnożyli przez siebie wszystkie czynniki to otrzymalibyśmy między innymi $-2x^2$, tak więc współczynnik kierunkowy a wyjdzie nam ujemny. To z kolei oznacza, że ramiona paraboli będą skierowane do dołu. Zaznaczymy więc na osi wyznaczone przed chwilą miejsca zerowe (kropki będą zamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $\geq$) i na podstawie wykresu określimy przedział rozwiązań podanej nierówności.



Szukamy argumentów dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a więc interesującym nas przedziałem będzie: $x \in \langle 1\frac{1}{2}; 3 \rangle$.

Zadanie 27

0-2 pkt

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b prawdziwa jest nierówność $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Odpowiedź: Udowodniono przekształt

Przekształćmy to równanie w następujący sposób:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}, \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad \Bigg/ \cdot 4, a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2, 0 \leq a^2-2ab+b^2, 0 \leq (a-b)^2$$

Z racji tego, że kwadrat dowolnej liczby jest zawsze większy lub równy zero, to dowód możemy uznać za zakończony.

Zadanie 28

0-2 pkt

Kąt α jest ostry oraz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1+\sin \alpha}$.

Odpowiedź: Wartość wyrażenia je

Krok 1. Sprowadzenie składników wyrażenia do wspólnego mianownika.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1+\sin \alpha} = , = \frac{\sin \alpha \cdot (1+\sin \alpha)}{\cos \alpha \cdot (1+\sin \alpha)} + \frac{(\cos \alpha) \cdot \cos \alpha}{(\cos \alpha) \cdot (1+\sin \alpha)} = , = \frac{\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot (1+\sin \alpha)}$$

Krok 2. Obliczenie wartości wyrażenia przy wykorzystaniu jedynki trygonometrycznej.

Z jedynki trygonometrycznej wiemy, że $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, zatem:

$$\frac{\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot (1+\sin \alpha)} = , = \frac{\sin \alpha + 1}{\cos \alpha \cdot (1+\sin \alpha)} = , = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{3} = , = 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

Z otrzymanego wyniku możemy jeszcze usunąć niewymierność znajdującą się w mianowniku:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Zadanie 29

0-2 pkt

Liczby 6, $2x+4$, $x+26$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz różnicę r tego ciągu.

Odpowiedź: $r = 14$

Krok 1. Utworzenie równania i wyliczenie wartości x .

Różnicę ciągu obliczymy odejmując od siebie wartości dwóch kolejnych wyrazów:

$$r = a_n - a_{n-1}$$

W naszym przypadku możemy odjąć od drugiego wyrazu pierwszy, ale także od trzeciego wartość wyrazu drugiego. Skoro oba wyniki będą sobie równe, to możemy to zapisać w postaci prostego równania:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2, 2x + 4 - 6 = x + 26 - (2x + 4), 2x - 2 = x + 26 - 2x - 4, 3x = 24, x = 8$$

Krok 2. Obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego.

Wystarczy teraz pod dwa kolejne wyrazy podstawić $x = 8$ (poznając tym samym ich wartości) i korzystając ze wzoru na różnicę otrzymamy:

$$r = a_2 - a_1, r = 2x + 4 - 6, r = 2 \cdot 8 - 2, r = 14$$

Zadanie 30

0-2 pkt

Dane są dwa podzbiory zbioru liczb całkowitych: $K = \{-4, -1, 1, 5, 6\}$ i $L = \{-3, -2, 2, 3, 4\}$. Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{13}{25}$

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Skoro z pierwszego zbioru losujemy jedną z pięciu liczb i z drugiego także jedną z pięciu, to zgodnie z regułą mnożenia:

$$|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$$

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Zdarzeniami sprzyjającymi są w tym przypadku takie dwie liczby, których iloczyn jest dodatni. Teoretycznie moglibyśmy wypisać tu wszystkie możliwe kombinacje, ale możemy też zrobić to nieco bardziej matematycznie.

Aby wynik mnożenia dwóch liczb był dodatni, to te dwie liczby muszą mieć identyczny znak (mogą to być dwie liczby dodatnie lub dwie ujemne).

Dwie liczby dodatnie możemy wybrać na $3 \cdot 3 = 9$ sposobów.

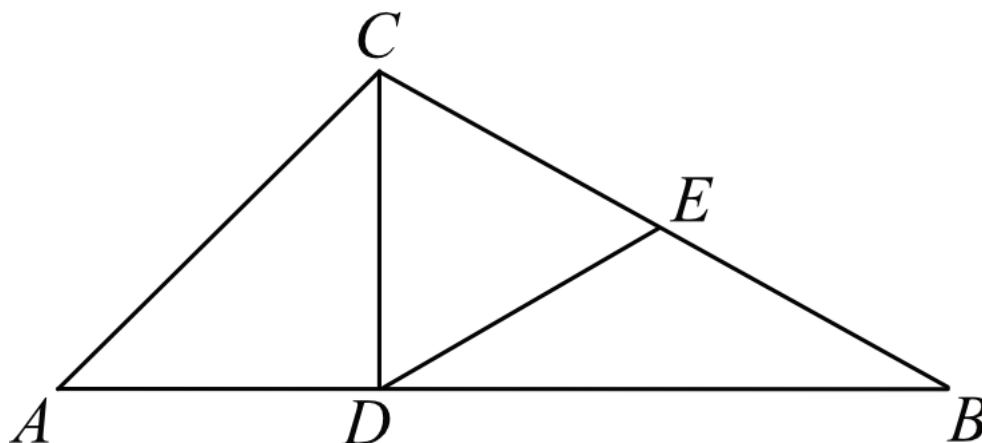
Dwie liczby ujemne możemy wybrać na $2 \cdot 2 = 4$ sposoby.

Zatem $|A| = 9 + 4 = 13$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

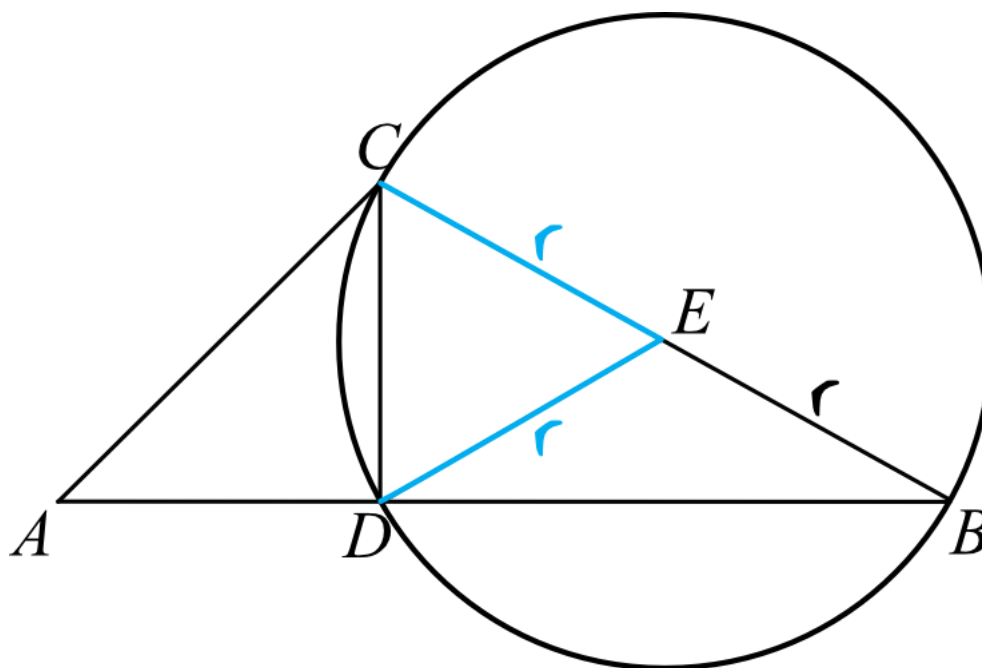
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{13}{25}$$

Dany jest trójkąt ABC . Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta, punkt E jest środkiem boku BC (tak jak na rysunku) i $|CD| = |DE|$. Udowodnij, że trójkąt CDE jest równoboczny.



Odpowiedź: Udowodniono opisując

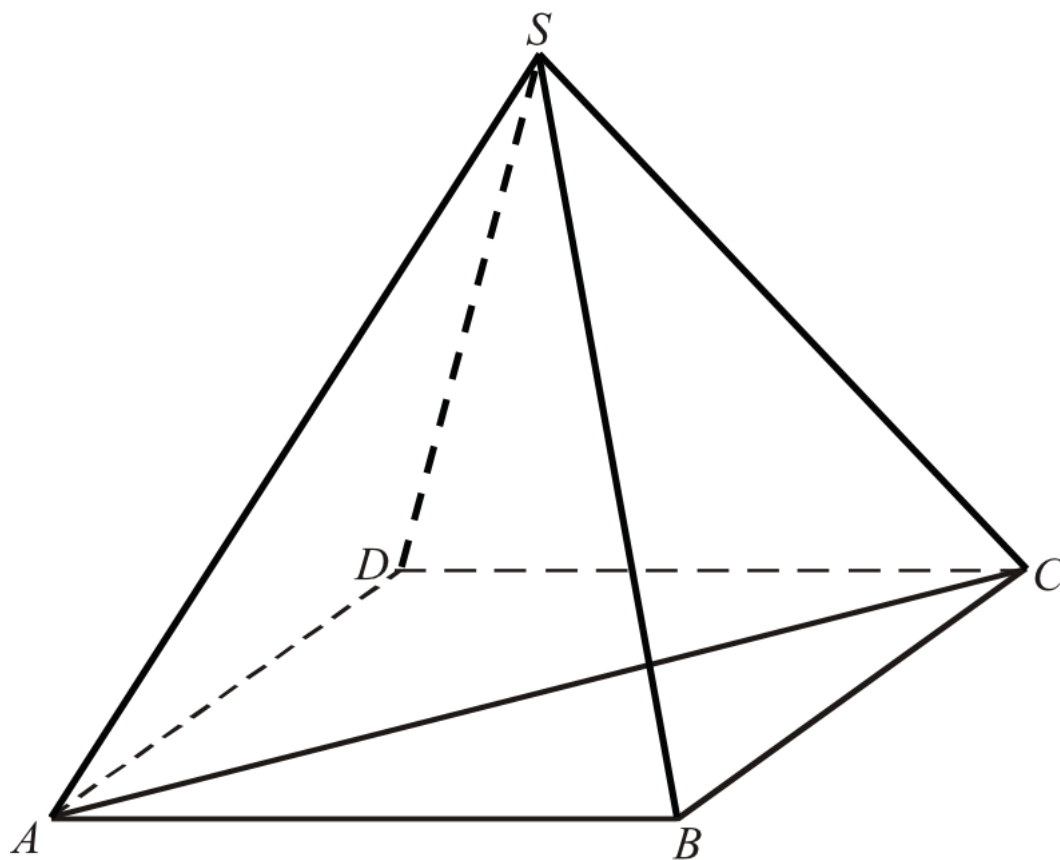
Wiedząc, że punkt E przecina odcinek BC na dwie równe części możemy z tego punktu narysować okrąg oparty na trójkącie prostokątnym DBC .



Z własności trójkąta prostokątnego opisanego na okręgu wynika, że przeciwprostokątna trójkąta jest równa długości średnicy okręgu, a tym samym odcinki CE oraz EB mają długość równą długości promienia (patrz rysunek). Jeśli przyjrzymy się rysunkowi, to zobaczymy że także odcinek DE ma długość równą promieniowi (bo jest to odcinek od krawędzi okręgu do środka okręgu. Zatem wiemy już na pewno, że $|CE| = |DE| = r$.

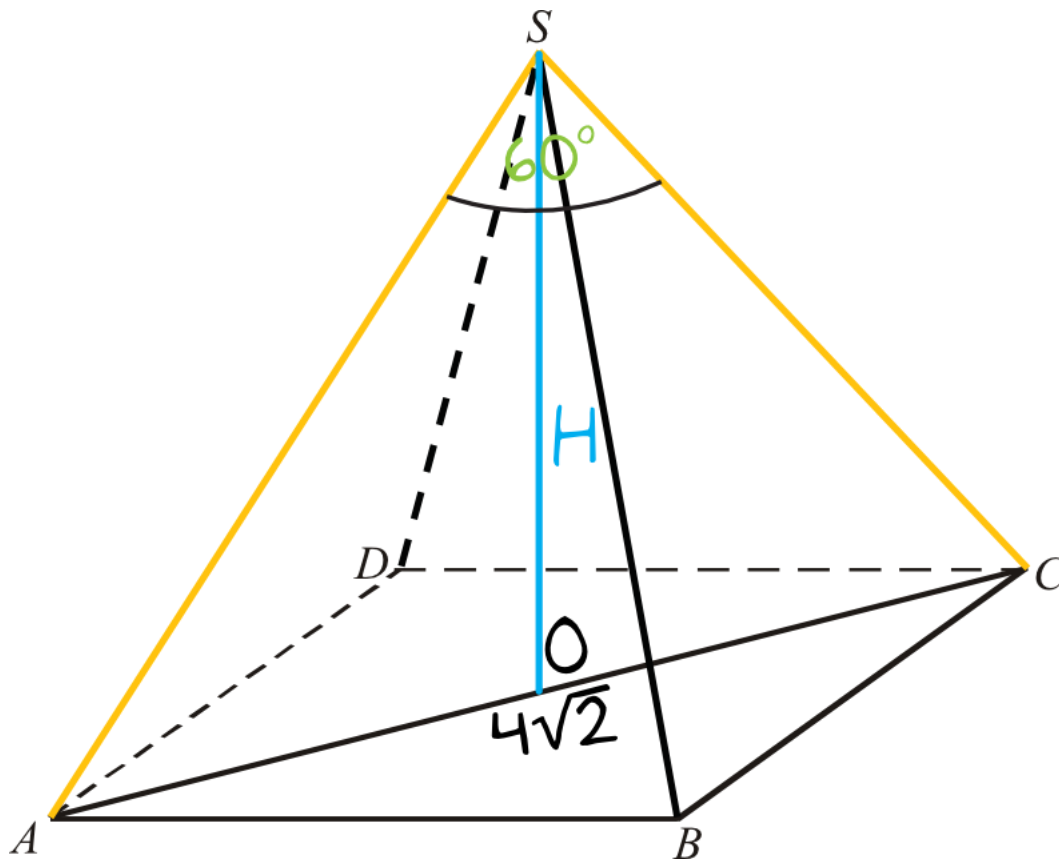
W treści zadania mamy podaną informację o tym, że $|CD| = |DE|$, a skoro tak, to rzeczywiście trójkąt CDE jest równoboczny, a długość jego wszystkich boków jest równa długości promienia okręgu opisanego na trójkącie DBC .

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCD S$ (zobacz rysunek) przekątna AC podstawy ma długość $4\sqrt{2}$. Kąt ASC między przeciwległymi krawędziami bocznymi ostrosłupa ma miarę 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Odpowiedź: $V = \frac{32\sqrt{6}}{3}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku poglądowego i analiza danych z treści zadania.



Dorysujmy sobie wysokość naszego ostrosłupa, bo będzie nam ona potrzebna do obliczenia objętości. Widzimy wyraźnie, że wysokość ostrosłupa jest jednocześnie wysokością trójkąta ACS . Skoro jest to ostrosłup prawidłowy czworokątny, to wszystkie ramiona trójkąta ACS mają tę samą długość (patrz kolor pomarańczowy na rysunku), a więc na pewno jest to trójkąt równoramienny. Ale... okazuje się, że on jest nawet nie tyle równoramienny, co równoboczny. Skąd to wynika? Wiemy, że między pomarańczowymi ramionami kąt ma miarę 60° . To oznacza, że kąty przy podstawie muszą mieć łącznie $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie muszą mieć tę samą miarę, czyli każdy z nich ma $120^\circ : 2 = 60^\circ$. Z tego wynika, że wszystkie kąty trójkąta ACS będą mieć 60° .

Dostrzeżenie tej własności bardzo ułatwia nam rozwiązanie zadania, bo w tablicach mamy bezpośredni wzór na wysokość trójkąta równobocznego. Gdybyśmy nie zauważyli że to trójkąt równoboczny, to moglibyśmy próbować obliczyć wysokość z tangensa w trójkącie AOS .

Krok 2. Obliczenie pola podstawy.

W podstawie mamy na pewno kwadrat, bo jest to ostrosłup prawidłowy czworokątny. Z własności kwadratów wiemy, że kwadrat o boku a ma przekątną równą $a\sqrt{2}$. Długość tej przekątnej jest podana w treści i wynosi $|AC| = 4\sqrt{2}$, zatem w podstawie mamy kwadrat o boku 4. To oznacza, że jego pole będzie równe:

$$P_p = a^2, P_p = 4^2, P_p = 16$$

Krok 3. Obliczenie długości wysokości ostrosłupa.

Z treści zadania wiemy, że $|AC| = 4\sqrt{2}$. Ta przekątna kwadratu jest jednocześnie podstawą naszego trójkąta równobocznego ACS , a więc wysokość obliczymy w następujący sposób:

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2}, H = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}, H = \frac{4\sqrt{6}}{2}, H = 2\sqrt{6}$$

Krok 4. Obliczenie objętości ostrosłupa.

Mamy już wszystkie potrzebne informacje, więc możemy podstawić dane i obliczyć objętość ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H, V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{6}, V = \frac{32\sqrt{6}}{3}$$

Trasę etapu wyścigu kolarskiego o długości 150 km pan Nowak pokonał w czasie o 1 godzinę i 50 minut krótszym niż jego kolega z drużyny, pan Kowalski. Średnia wartość prędkości, z jaką pan Nowak jechał na tym etapie, była o 11 km/h większa od średniej wartości prędkości pana Kowalskiego na tej trasie. Oblicz średnie wartości prędkości, z jakimi przejechali całą trasę obaj zawodnicy.

Odpowiedź: $\{v_{\text{Nowak}}\} = 36\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Krok 1. Wypisanie danych z treści zadania i ułożenie z nich układu równań.

v - średnia prędkość Nowaka (w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$)

t - czas jazdy Nowaka (w godzinach)

$v - 11$ - średnia prędkość Kowalskiego (bo jest o $11\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejsza od Nowaka)

$t + \frac{11}{6}$ - czas jazdy Kowalskiego (bo jest o 110 minut dłuższy od czasu Nowaka, a 110 minut to $\frac{11}{6}$ godziny)

$s = 150$ - długość trasy (w kilometrach)

Do ułożenia układu równań skorzystamy ze wzoru:

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = vt$$

$$\begin{cases} 150 = vt \\ 150 = (v - 11) \cdot (t + \frac{11}{6}) \end{cases}$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałego układu równań.

Z pierwszego równania wychodzi nam, że $t = \frac{150}{v}$. Podstawiając tę wartość do drugiego równania otrzymamy:

$$150 = (v - 11) \cdot \left(\frac{150}{v} + \frac{11}{6} \right) \quad \left| \cdot 6v \right., \quad 900v = (v - 11) \cdot (900 + 11v), \quad \cancel{900v} = \cancel{900v} + 11v^2 - 9900 - 121v, \quad 11v^2 - 121v - 9900 = 0 \quad \left| : 11, v^2 \right.$$

Krok 3. Obliczenie powstałego równania kwadratowego.

Współczynniki: $a = 1$, $b = -11$, $c = -900$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-900) = 121 - (-3600) = 121 + 3600 = 3721, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{3721} = 61$$

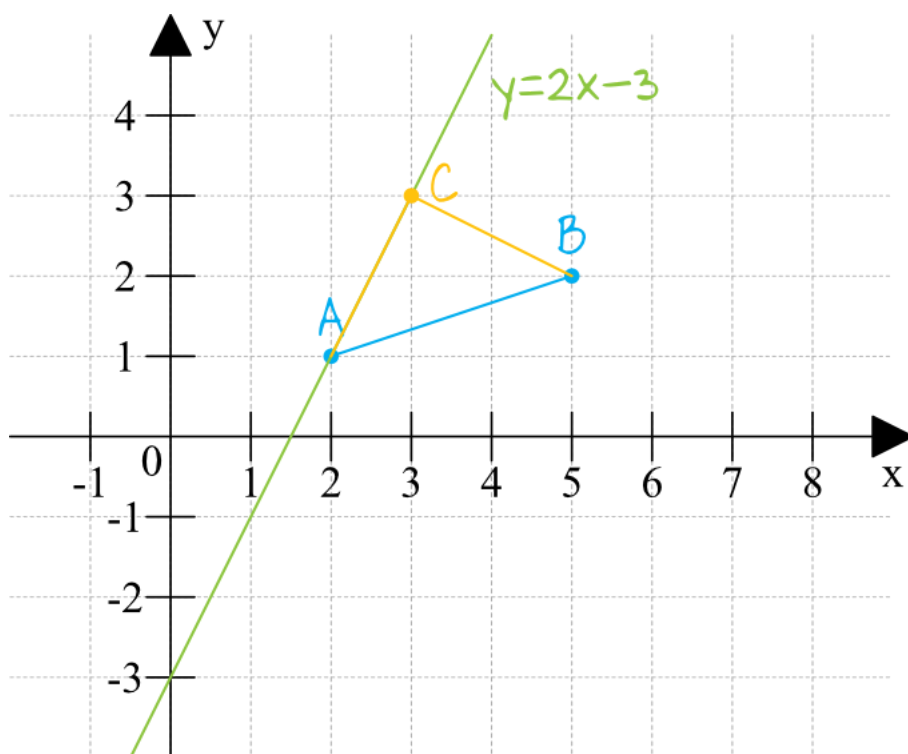
$$v_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) - 61}{2 \cdot 1} = \frac{11 - 61}{2} = \frac{-50}{2} = -25, \quad v_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-11) + 61}{2 \cdot 1} = \frac{11 + 61}{2} = \frac{72}{2} = 36$$

Krok 4. Interpretacja wyników i obliczenie prędkości jazdy pana Nowaka i Kowalskiego.

Ujemną prędkość musimy odrzucić, stąd też zostaje nam jedynie $v = 36\frac{\text{km}}{\text{h}}$ i jest to zgodnie z naszymi oznaczeniami prędkość pana Nowaka. Pozostaje nam jeszcze do obliczenia prędkość pana Kowalskiego, która wyniesie:

$$36\frac{\text{km}}{\text{h}} - 11\frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

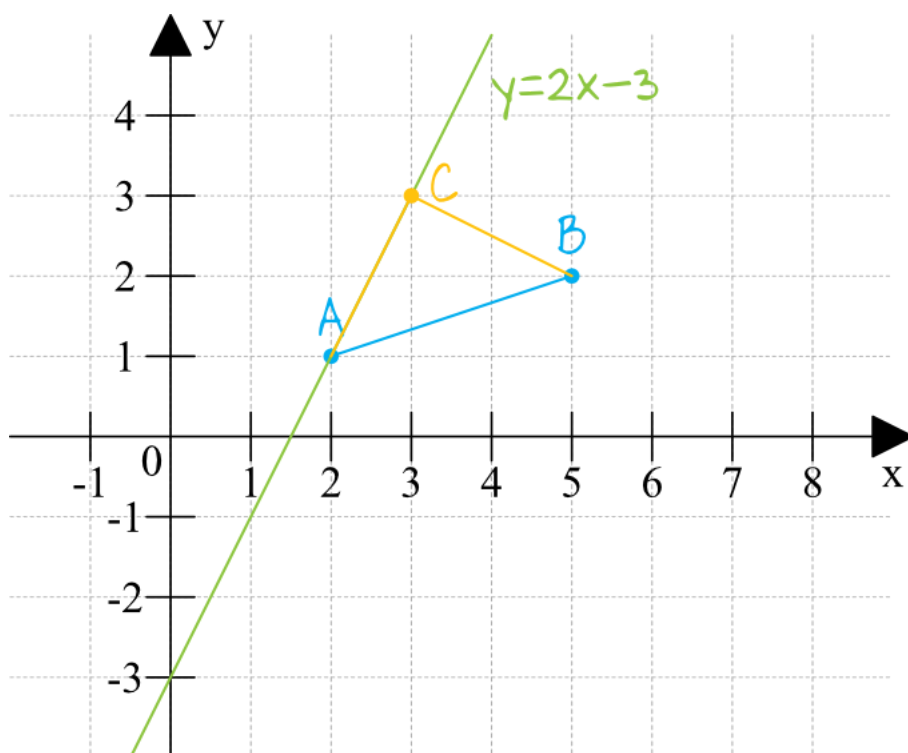
Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest bok AB , gdzie $A = (2, 1)$ i $B = (5, 2)$. Ramię tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x - y - 3 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C .



Odpowiedź: $C = (3; 3)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku poglądowego.

Zaznaczmy sobie poszczególne punkty w układzie współrzędnych oraz narysujmy prostą, której wzór jest podany w treści zadania i która zawiera się w jednym z ramion. Równanie naszej prostej po przekształceniu do postaci kierunkowej możemy zapisać jako $y = 2x - 3$, co oznacza że współczynnik kierunkowy prostej jest dodatni. Prosta jest więc rosnąca i to właśnie na niej znajdzie się poszukiwany przez nas punkt C i jak się za chwilę okaże, znajdzie się tam też punkt A .



Krok 2. Wyznaczenie symetralnej odcinka AB .

Generalnie naszym celem jest wyznaczenie współrzędnych wierzchołka C . Aby go wyznaczyć musimy znać wzory dwóch prostych, z których zbudujemy układ równań, którego rozwiązaniem będą współrzędne przecięcia się prostych (czyli współrzędne punktu C). Jedną prostą już mamy (jest podana w treści zadania) i teraz musimy jakoś wyznaczyć drugą prostą, która przez ten punkt C przejdzie. Oczywiście nie wyznaczymy wzoru prostej BC , no bo właśnie brakuje nam tej współrzędnej C . Co więc możemy zrobić?

Możemy wyznaczyć równanie prostej, która jest prostopadła do odcinka AB i która przechodzi przez środek tego odcinka. Ta prosta będzie na pewno przechodzić przez punkt C bo będzie to tak naprawdę wysokość trójkąta równoramiennego, a wiemy że w trójkątach równoramiennych wysokość pada dokładnie na środek podstawy. Czyli chcąc standardowo rozwiązać to zadanie moglibyśmy wyznaczyć wzór prostej AB (bo znamy odpowiednie wierzchołki), następnie wyznaczylibyśmy środek tego odcinka (wyszłoby nam, że $S = (\frac{7}{2}; \frac{3}{2})$) no i na sam koniec wyznaczylibyśmy wzór prostej prostopadłej do prostej AB , która przechodzi przez punkt S . Ja jednak pokażę Ci jak można byłoby taką symetralną wyznaczyć nieco prościej:

Wiemy, że jest to trójkąt równoramienny w którym $|AC| = |CB|$. Skoro znamy współrzędne punktów A oraz B , to możemy je podstawić do wzoru na długość odcinka w układzie współrzędnych:

$$|AC| = |CB|, \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

Dla przejrzystości obliczeń podniemyśmy do potęgi obie strony równania i przyjmijmy że $x_c = x$ oraz $y_c = y$.

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x_B - x)^2 + (y_B - y)^2, (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (5 - x)^2 + (2 - y)^2, \cancel{x^2} - 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} - 2y + 1 = 25 - 10x + \cancel{x^2} + \cancel{4} - 4y +$$

Udało nam się otrzymać kolejny wzór prostej, która przechodzi przed punkt C i jest to właśnie symetralna odcinka AB .

Krok 3. Obliczenie współrzędnych punktu C .

Z wyznaczonego w drugim kroku równania prostej i z równania podanego w treści zadania (który po przekształceniu jest równy $y = 2x - 3$) możemy stworzyć taki mały układ równań. Obrazowo rzecz ujmując - te dwie proste przetną się w punkcie C , a wiemy z interpretacji geometrycznej układu równań, że miejsce przecięcia się dwóch prostych jest właśnie rozwiązaniem układu równań. Zatem:

$$\begin{cases} y = -3x + 12 \\ y = 2x - 3 \end{cases},$$

Rozwiązując metodą podstawiania otrzymamy:

$$-3x + 12 = 2x - 3, 15 = 5x, x = 3$$

Znając współrzędną x możemy już bez problemu obliczyć współrzędną y :

$$y = 2x - 3, y = 2 \cdot 3 - 3, y = 3$$

To oznacza, że poszukiwane przez nas współrzędne to $C = (3; 3)$.