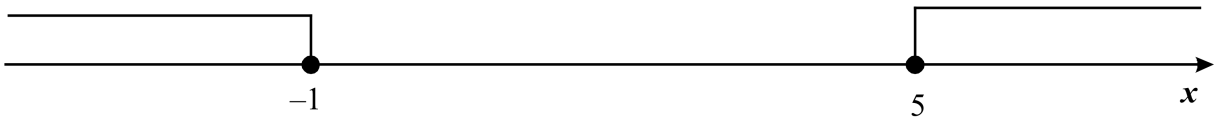
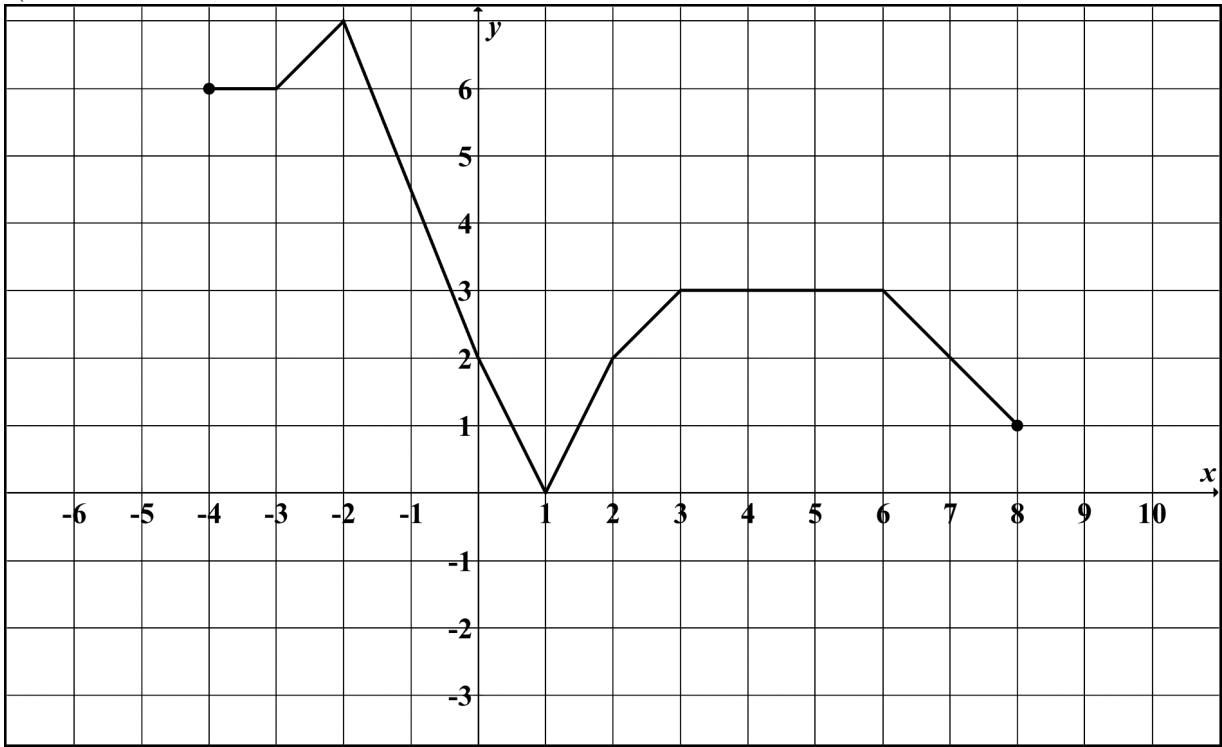


Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura z matematyki (poziom podstawowy) - Czerwiec 2010

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	C (1)	1
2	B ()	1
3	D (24300zł)	1
4	A ($x = 7^2$)	1
5	C ($37 + 20\sqrt{3}$)	1
6	A (-2)	1
7	A ($\langle -2; 5 \rangle$)	1
8	B ($f(1) < f(3)$)	1
9	B ()	1
10	A (-22)	1
11	D (-4)	1
12	A ($m = 1$)	1
13	C ($(-\infty; -3) \cup \langle 2; +\infty \rangle$)	1
14	B ($a_4 = 432$)	1
15	D (100)	1
16	C ($\cos \alpha = \frac{12}{13}$)	1
17	C (większa niż 40m i mniejsza niż 45m)	1
18	A (18m)	1
19	C (115°)	1
20	B ($((x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25)$)	1

21	C (przecinają się pod kątem innym niż prosty)	1
22	C ($V_2 = 2V_1$)	1
23	A (18)	1
24	B (20)	1
25	D (3, 5)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Liczba $|5 - 7| - |-3 + 4|$ jest równa:

Odpowiedź: C (1)

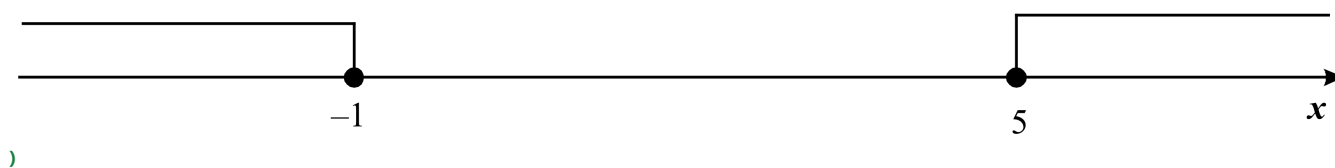
$$|5 - 7| - |-3 + 4| = |-2| - |1| = 2 - 1 = 1$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x - 2| \geq 3$.

Odpowiedź: B (



Zadanie 3

0-1 pkt

Samochód kosztował 30000zł. Jego cenę obniżono o 10%, a następnie cenę po tej obniżce ponownie obniżono o 10%. Po tych obniżkach samochód kosztował:

Odpowiedź: D (24300zł)

Tego typu zadania możemy rozwiązać na dwa sposoby.

Sposób I - rozwiązanie na konkretnych liczbach:

Krok 1. Obliczenie wysokości pierwszej obniżki.

Pierwsza obniżka jest o 10% z 30000zł, zatem wynosi ona:

$$0,1 \cdot 30000\text{zł} = 3000\text{zł}$$

Krok 2. Obliczenie ceny samochodu po pierwszej obniżce.

$$30000\text{zł} - 3000\text{zł} = 27000\text{zł}$$

Krok 3. Obliczenie wysokości drugiej obniżki.

Nasza druga obniżka jest także o 10%, ale tym razem już z 27000zł, zatem wynosi ona:

$$0,1 \cdot 27000\text{zł} = 2700\text{zł}$$

Krok 4. Obliczenie ceny samochodu po drugiej obniżce.

$$27000\text{zł} - 2700\text{zł} = 24300\text{zł}$$

Sposób II - rozwiązanie na wyrażeniach algebraicznych (metoda bardziej uniwersalna):

Krok 1. Obliczenie ceny samochodu po pierwszej obniżce.

Oznaczmy cenę samochodu jako x i obliczmy wartość samochodu po pierwszej obniżce. Skoro obniżka jest o 10%, to nowa cena stanowi teraz 90% ceny podstawowej. Cena samochodu po pierwszej obniżce jest więc równa $0,9x$.

Krok 2. Obliczenie ceny samochodu po drugiej obniżce.

Cenę wyjściową jest dla nas teraz $0,9x$ i to od tej ceny ponownie odejmujemy 10%, czyli cena samochodu po drugiej obniżce będzie równa:

$$0,9 \cdot 0,9x = 0,81x$$

Cena samochodu po dwóch obniżkach stanowi więc $0,81$ ceny podstawowej (czyli 81%). Chcąc poznać nową cenę wystarczy teraz pomnożyć $0,81$ przez początkową cenę samochodu.

$$0,81 \cdot 30000\text{zł} = 24300\text{zł}$$

Zadanie 4

0-1 pkt

Dana jest liczba $x = 63^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$. Wtedy:

Odpowiedź: A ($x = 7^2$)

Rozwiązanie zadania rozpoczniemy od rozbicia liczby 63 na iloczyn liczb 7 oraz 9. Następnie sprowadzimy do wspólnej podstawy potęgi liczbę 9 oraz ułamek $\frac{1}{3}$. Całość obliczeń wygląda następująco:

$$x = 63^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4, x = (7 \cdot 9)^2 \cdot \frac{1^4}{3^4}, x = 7^2 \cdot 9^2 \cdot \frac{1}{3^4}, x = 7^2 \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{3^4}, x = 7^2$$

Zadanie 5

0-1 pkt

Kwadrat liczby $x = 5 + 2\sqrt{3}$ jest równy:

Odpowiedź: C ($37 + 20\sqrt{3}$)

W zadaniu skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$x^2 = (5 + 2\sqrt{3})^2, x^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2, x^2 = 25 + 20\sqrt{3} + 4 \cdot 3, x^2 = 25 + 20\sqrt{3} + 12, x^2 = 37 + 20\sqrt{3}$$

Zadanie 6

0-1 pkt

Liczba $\log_5 5 - \log_5 125$ jest równa:

Odpowiedź: A (-2)

Krok 1. Obliczenie wartości poszczególnych logarytmów.

$$\log_5 5 = 1, \text{ bo } 5^1 = 5, \log_5 125 = 3, \text{ bo } 5^3 = 125$$

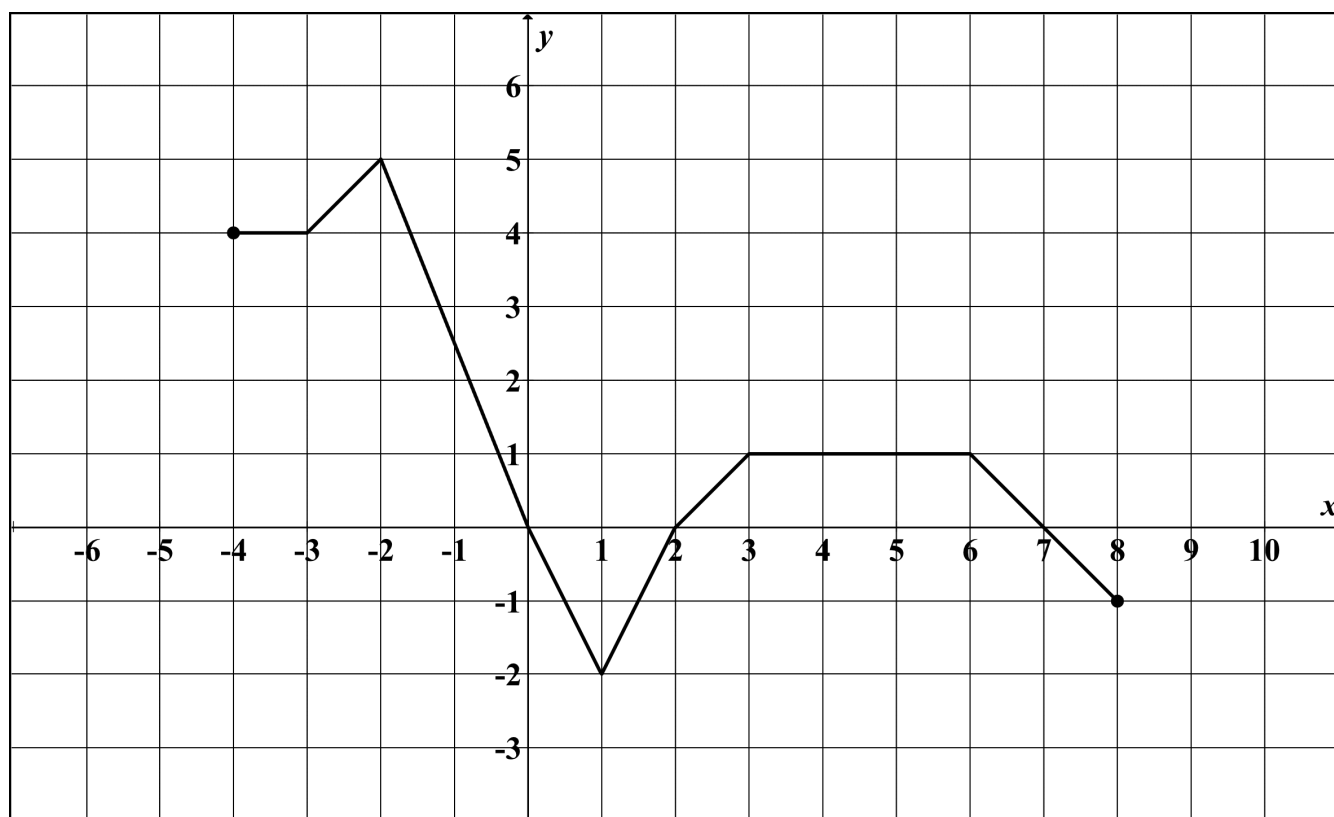
Krok 2. Obliczenie wartości całego wyrażenia.

$$\log_5 5 - \log_5 125 = 1 - 3 = -2$$

Zadanie 7

0-1 pkt

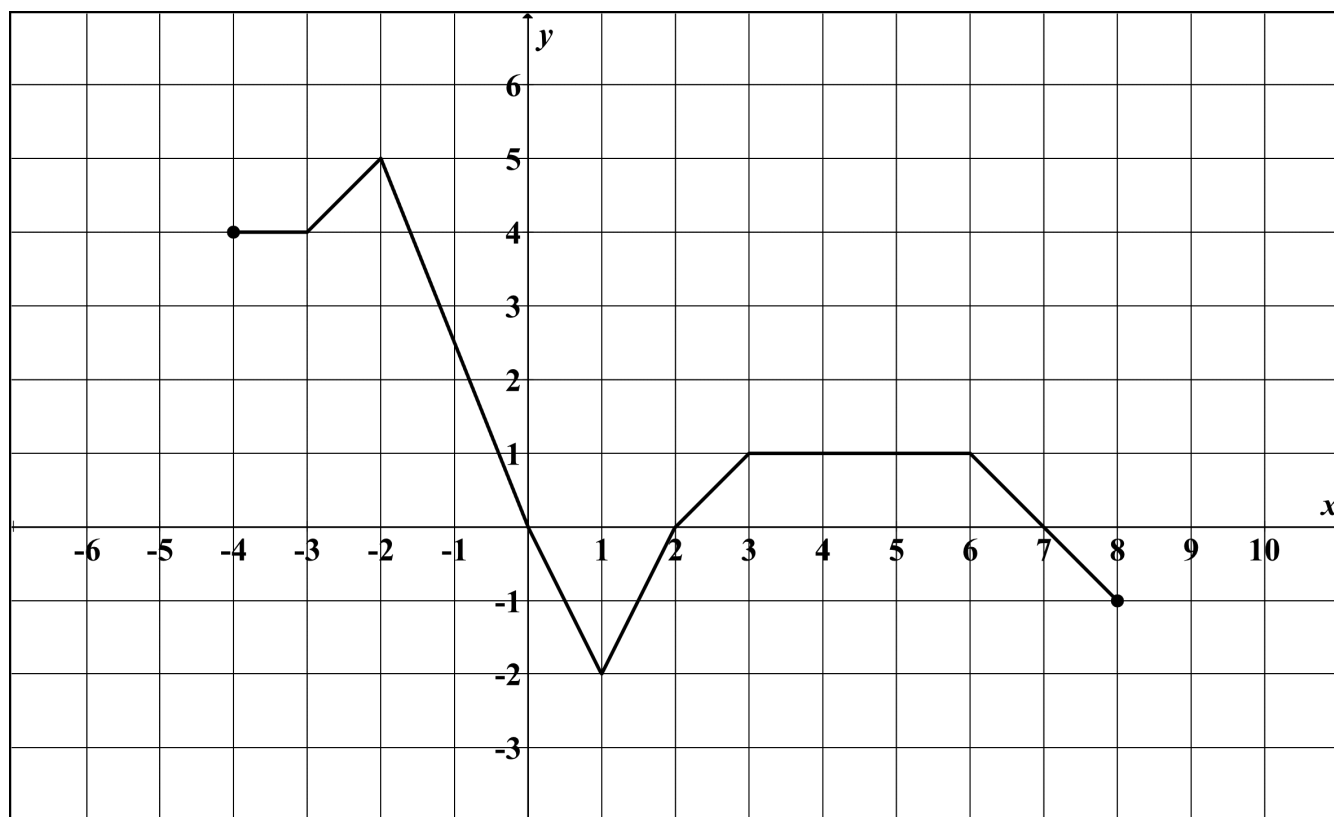
Poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Zbiorem wartości funkcji f jest:



Odpowiedź: A ($\langle -2; 5 \rangle$)

Musimy sprawdzić współrzędną y dla dwóch punktów: najniżej i najwyżej położonego. Współrzędna y najniżej położonego punktu jest równa -2 , a najwyżej położonego punktu jest równa 5 . W związku z tym zbiorem wartości jest przedział $\langle -2; 5 \rangle$.

Poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Korzystając z tego wykresu, wskaż nierówność prawdziwą.



Odpowiedź: B ($f(1) < f(3)$)

Przykładowo zapis $f(-1)$ oznacza, że musimy odczytać wartość funkcji dla argumentu $x = -1$. W naszym przypadku $f(-1)$ jest równe niespełna 3. Musimy sprawdzić tak po kolei każdą z par i zweryfikować która nierówność jest prawdziwa:

Odp. A. $f(-1) < f(1)$

Komentarz: Ta nierówność jest nieprawdziwa, bo $f(-1)$ to niespełna 3, natomiast $f(1) = -2$.

Odp. B. $f(1) < f(3)$

Komentarz: Ta nierówność jest prawdziwa, bo $f(1) = -2$, natomiast $f(3) = 1$, a więc to $f(1)$ jest mniejsze od $f(3)$.

Odp. C. $f(-1) < f(3)$

Komentarz: Ta nierówność jest nieprawdziwa, bo $f(-1)$ to niespełna 3, natomiast $f(3) = 1$.

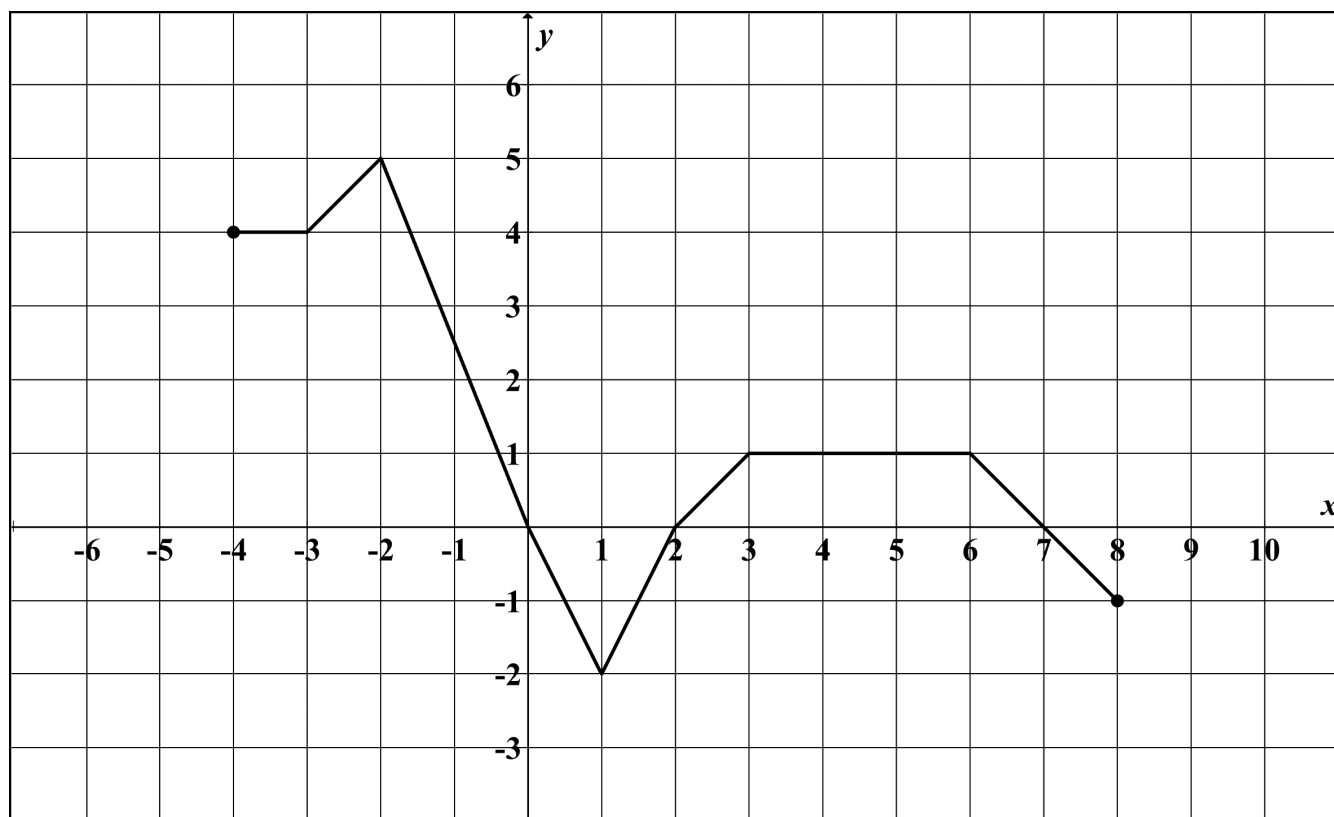
Odp. D. $f(3) < f(0)$

Komentarz: Ta nierówność jest nieprawdziwa, bo $f(3) = 1$, natomiast $f(1) = -2$.

Zadanie 9

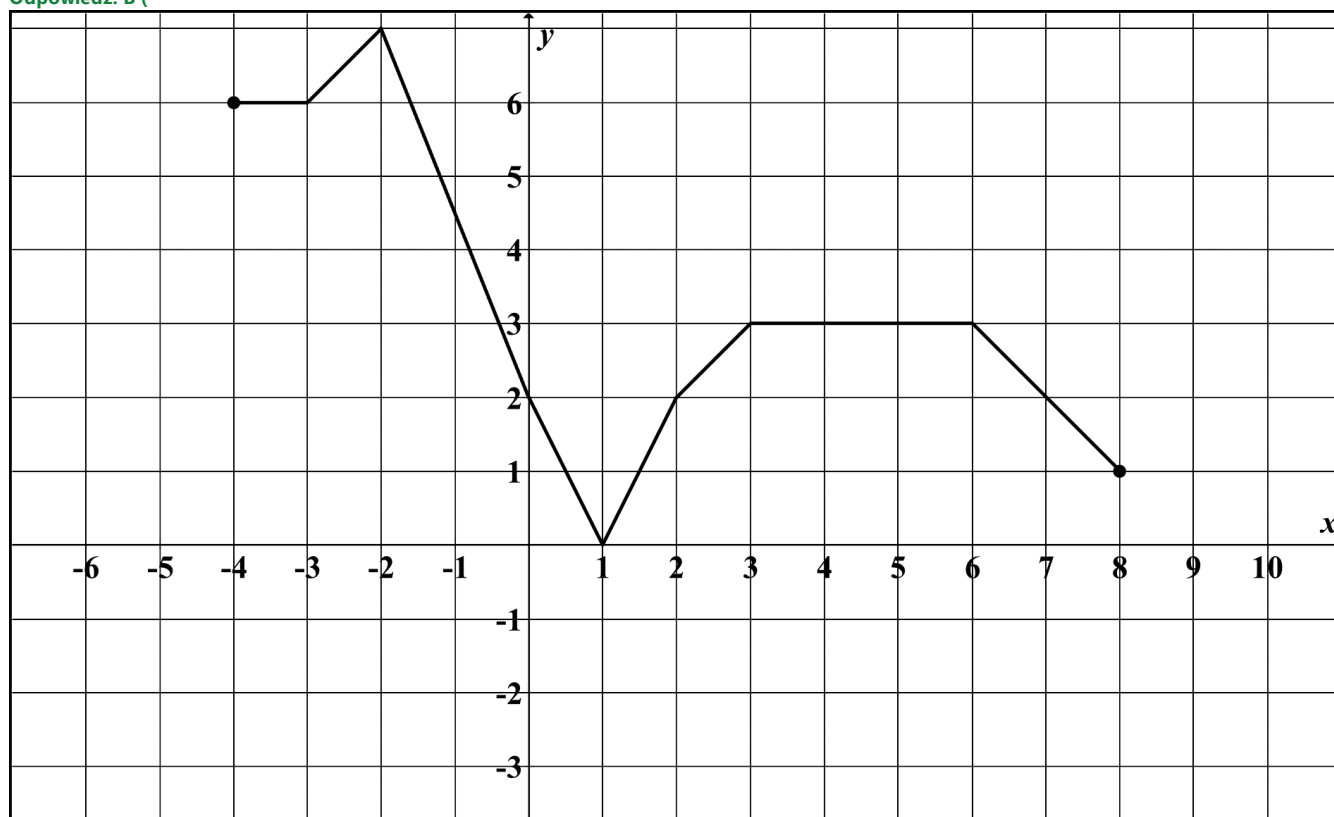
0-1 pkt

Poniżej przedstawiono wykres funkcji f .



Wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(x) + 2$ jest przedstawiony na rysunku:

Odpowiedź: B (



Aby otrzymać wykres funkcji $g(x)$ musimy zgodnie z zapisem równości $g(x) = f(x) + 2$ przesunąć wykres $f(x)$ o dwie jednostki do góry. To oznacza, że prawidłowego przesunięcia dokonano w odpowiedzi B.

Zadanie 10

0-1 pkt

Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2 + 10x - 24 = 0$ i $x_1 < x_2$. Oblicz $2x_1 + x_2$.

Odpowiedź: A (-22)

Skoro mamy przedstawione równanie kwadratowe w postaci ogólnej, to bez problemu możemy wyznaczyć pierwiastki tego równania korzystając z metody delty.

Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Współczynniki: $a = 1$, $b = 10$, $c = -24$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 100 + 96 = 196, \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - 14}{2 \cdot 1} = \frac{-24}{2} = -12, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + 14}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$x_1 < x_2$ - czyli zależność zapisana w treści zadania jest spełniona.

Krok 2. Obliczenie wartości wyrażenia $2x_1 + x_2$.

$$2x_1 + x_2 = 2 \cdot (-12) + 2 = -24 + 2 = -22$$

Zadanie 11

0-1 pkt

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + 6x - 4$. Współczynnik a jest równy:

Odpowiedź: D (-4)

Jeśli dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu to znaczy, że po jej podstawieniu do wzoru powinniśmy otrzymać wartość równą 0. W naszym przypadku prawdziwa powinna być więc równość $W(2) = 0$.

Krok 1. Obliczenie wartości wielomianu dla $x = 2$.

$$W(x) = x^3 + ax^2 + 6x - 4, W(x) = 2^3 + a \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 4, W(x) = 8 + 4a + 12 - 4, W(x) = 16 + 4a$$

Krok 2. Obliczenie wartości parametru a .

Skoro wartość wielomianu dla $x = 2$ powinna nam wyjść równa 0, a wyszło nam $16 + 4a$, to znaczy że $16 + 4a = 0$. Za pomocą tej równości obliczamy wartość parametru a .

$$16 + 4a = 0, 4a = -16, a = -4$$

Zadanie 12

0-1 pkt

Wskaż m , dla którego funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (m - 1)x + 3$ jest stała.

Odpowiedź: A ($m = 1$)

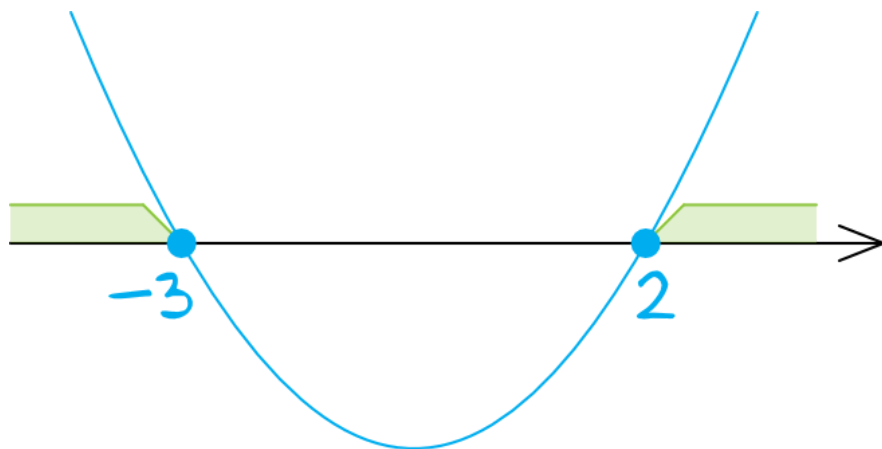
Funkcję liniową wyrażamy wzorem w postaci $f(x) = ax + b$. Aby funkcja liniowa była stała, to współczynnik a musi być równy 0. W naszym przypadku $a = m - 1$, stąd też aby funkcja była stała, to $m - 1$ musi być równe 0. Zatem:

$$m - 1 = 0, m = 1$$

Zadanie 13

0-1 pkt

Zbiorem rozwiązań nierówności $(x - 2)(x + 3) \geq 0$ jest:



Odpowiedź: C $((-\infty; -3] \cup [2; +\infty))$

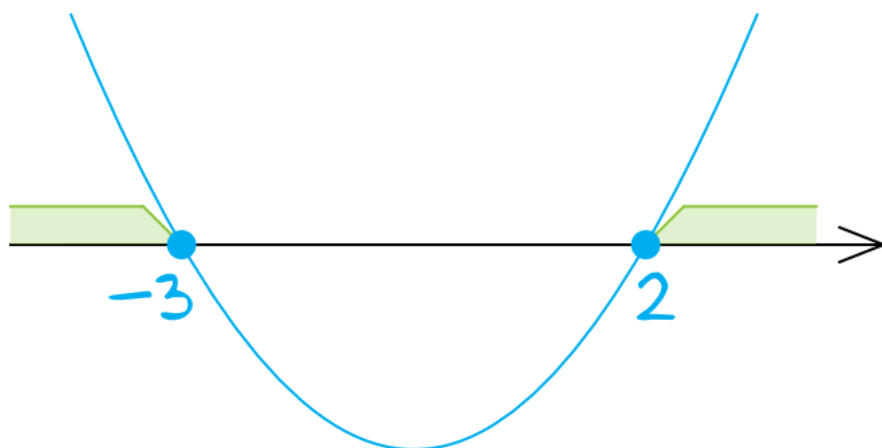
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych nierówności.

Nierówność jest zapisana w postaci iloczynowej, więc aby odnaleźć jej miejsca zerowe (które przydadzą nam się do naszkicowania wykresu) wystarczy przyrównać wartości w jednym i drugim nawiasie do zera.

$$x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0, \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -3$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Współczynnik a jest na pewno dodatni, bo przed wartościami x nie stoją żadne znaki ujemne, więc ramiona paraboli będą skierowane ku górze i będą przechodzić przez wyznaczone przed chwilą miejsca zerowe. Pamiętaj, że kropki przy $x = 2$ oraz $x = -3$ będą zamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $\geq$.



Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Odczytujemy z wykresu dla jakich argumentów x funkcja przyjmuje wartości większe lub równe 0. Pamiętaj, że skoro mamy znak $\geq$ to wartości $x = 2$ oraz $x = -3$ będą także należeć do zbioru rozwiązań (czyli nawiasy będą domknięte).

$$x \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$$

Zadanie 14

0-1 pkt

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 2$ i $a_2 = 12$. Wtedy:

Odpowiedź: B ($a_4 = 432$)

Krok 1. Wyznaczenie wartości ilorazu q .

Znając wartości dwóch kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (czyli a_1 oraz a_2) możemy wyznaczyć wartość q z następującego wzoru:

$$q = \frac{a_2}{a_1}, q = \frac{a_2}{a_1}, q = \frac{12}{2} = 6$$

Krok 2. Wyznaczenie wartości czwartego wyrazu ciągu geometrycznego.

Znając wartości a_1 oraz q możemy obliczyć wartość czwartego wyrazu ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, a_4 = a_1 \cdot 6^{4-1}, a_4 = 2 \cdot 6^3, a_4 = 2 \cdot 216, a_4 = 432$$

Zadanie 15

0-1 pkt

W ciągu arytmetycznym $a_1 = 3$ oraz $a_{20} = 7$. Wtedy suma $S_{20} = a_1 + a_2 + \dots + a_{19} + a_{20}$ jest równa:

Odpowiedź: D (100)

Aby obliczyć sumę dwudziestu pierwszych wyrazów tego ciągu arytmetycznego musimy posłużyć się wzorem:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

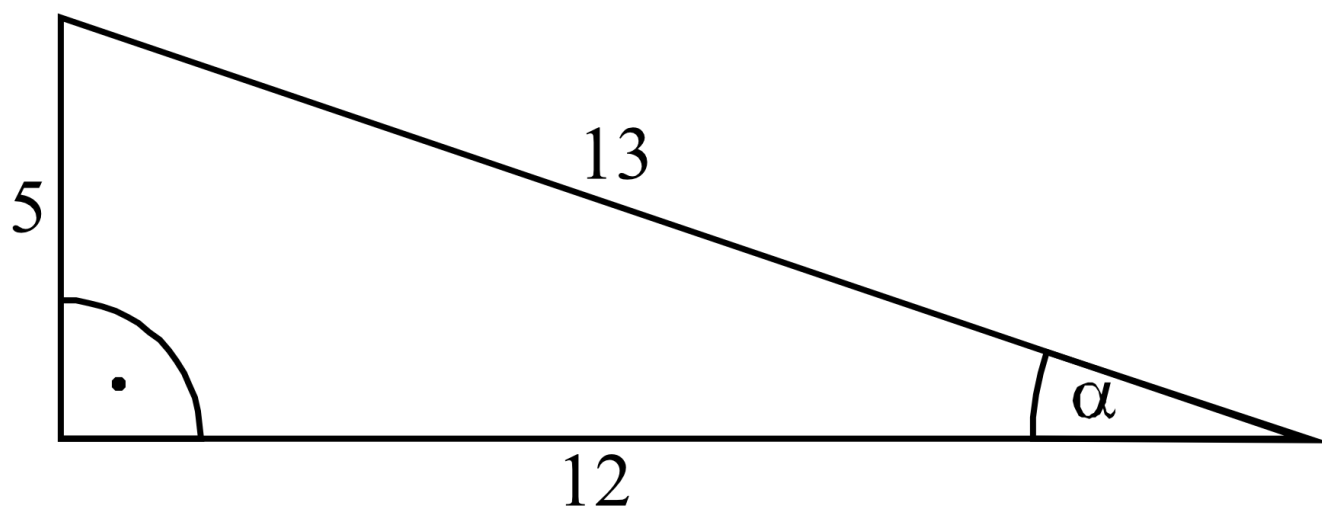
Obliczamy sumę dwudziestu pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego (czyli $n = 20$) podstawiając do powyższego wzoru informacje z treści zadania: $a_1 = 3$ oraz $a_{20} = 7$.

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot n, S_n = \frac{3 + 7}{2} \cdot 20, S_{20} = \frac{10}{2} \cdot 20, S_{20} = 5 \cdot 20 = 100$$

Zadanie 16

0-1 pkt

Na rysunku zaznaczono długości boków i kąt α trójkąta prostokątnego (zobacz rysunek). Wtedy:



Odpowiedź: C ($\cos \alpha = \frac{12}{13}$)

Musimy obliczyć wartości $\cos \alpha$ oraz $\tan \alpha$, by sprawdzić która równość podana w odpowiedziach jest prawdziwa. Cosinus to stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α do długości przeciwprostokątnej, natomiast tangens to stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α . Zatem:

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}, \tan \alpha = \frac{5}{12}$$

Porównujemy teraz otrzymane wyniki z tymi które występują w odpowiedziach i stwierdzamy, że prawdziwa równość jest zapisana tylko w punkcie C.

Ogród ma kształt prostokąta o bokach długości $20m$ i $40m$. Na dwóch końcach przekątnej tego prostokąta wbito słupki. Odległość między tymi słupkami jest:

Odpowiedź: C (większa niż $40m$ i mniejsza niż $45m$)

Krok 1. Obliczenie długości przekątnej prostokąta.

Aby rozwiązać to zadanie musimy wyznaczyć długość przekątnej prostokąta o bokach długości $20m$ i $40m$. W tym celu użyjemy twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad 20^2 + 40^2 = c^2, \quad 400 + 1600 = c^2, \quad c^2 = 2000, \quad c = \sqrt{2000}[m]$$

Krok 2. Wyznaczenie przybliżonej wartości z otrzymanego pierwiastka.

Musimy teraz odpowiedzieć na pytanie ile jest równa długość $\sqrt{2000}m$. W przypadku zadań zamkniętych możemy posłużyć się nawet kalkulatorem, dzięki czemu otrzymamy przybliżenie $\sqrt{2000}m \approx 44,72m$.

Chcąc do zadania podejść bardziej profesjonalnie możemy zauważyć, że:

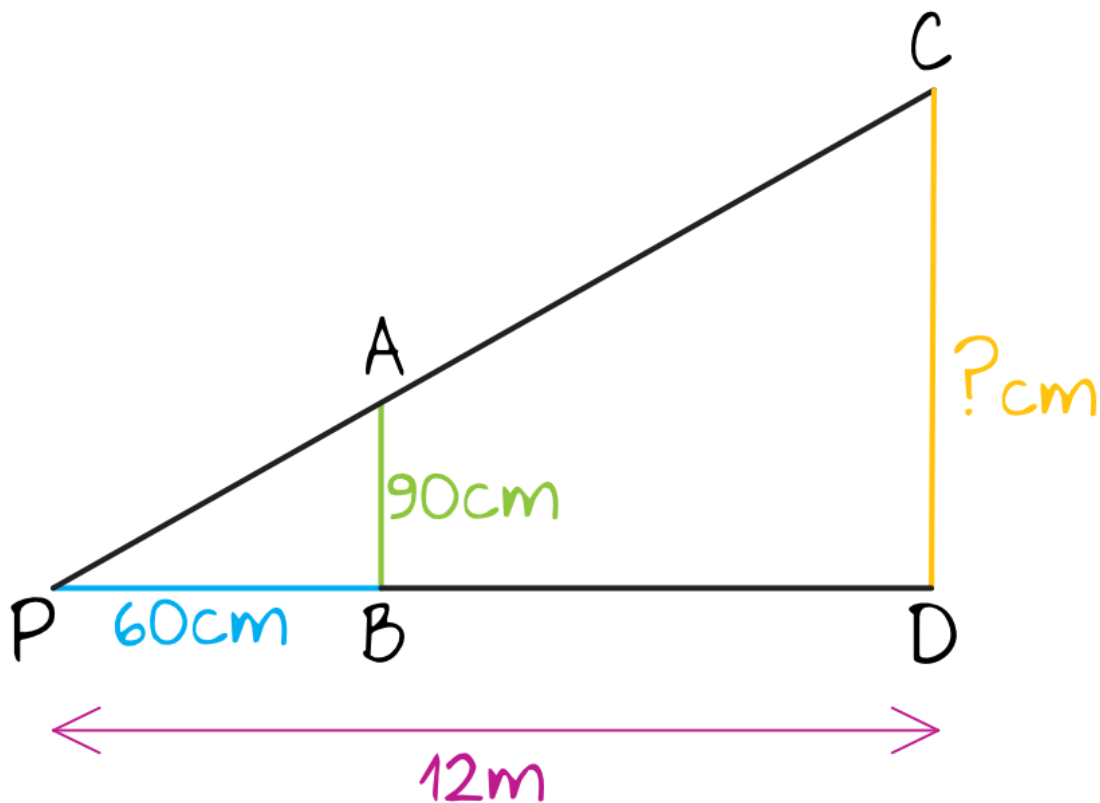
$$40^2 = 1600, \text{ więc } \sqrt{1600} = 40, \quad 45^2 = 2025, \text{ więc } \sqrt{2025} = 45$$

To z kolei oznacza, że $\sqrt{2000}$ jest większy od 40, ale mniejszy od 45, stąd też prawidłowa była odpowiedź C.

Zadanie 18

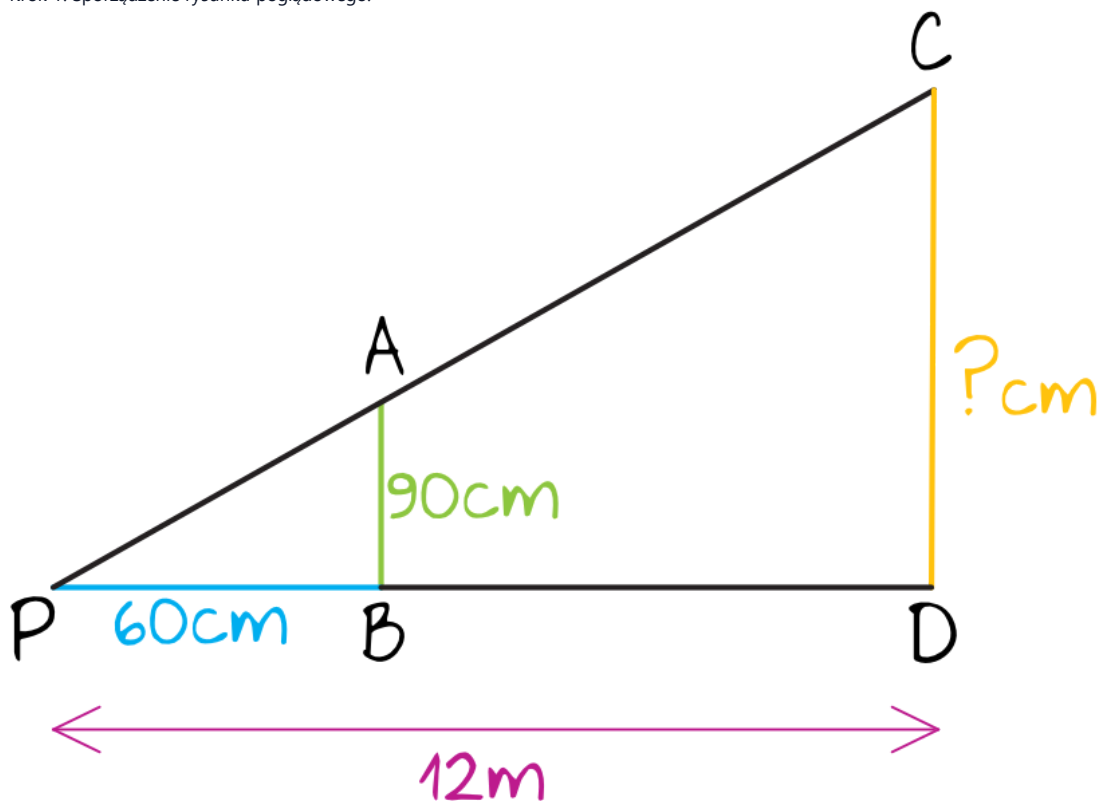
0-1 pkt

Pionowy słupek o wysokości 90cm rzuca cień o długości 60cm . W tej samej chwili stojąca obok wieża rzuca cień o długości 12m . Jaka jest wysokość wieży?



Odpowiedź: A (18m)

Krok 1. Sporządzenie rysunku poglądowego.



Sporządzając rysunek jak i wykonując późniejsze obliczenia zwracamy uwagę na jednostki! Niektóre miary są podane w centymetrach, a inne w metrach.

Krok 2. Zbudowanie równania wykorzystując podobieństwa trójkątów.

Skorzystamy z podobieństw trójkątów. Stosunek wysokości słupka do jego cienia musi być taki sam jak stosunek wysokości wieży do cienia wieży. Możemy zapisać to w następujący sposób:

$$\frac{|AB|}{|PB|} = \frac{|CD|}{|PD|}$$

Krok 3. Podstawienie odpowiednich długości do równania i wyznaczenie długości odcinka CD .

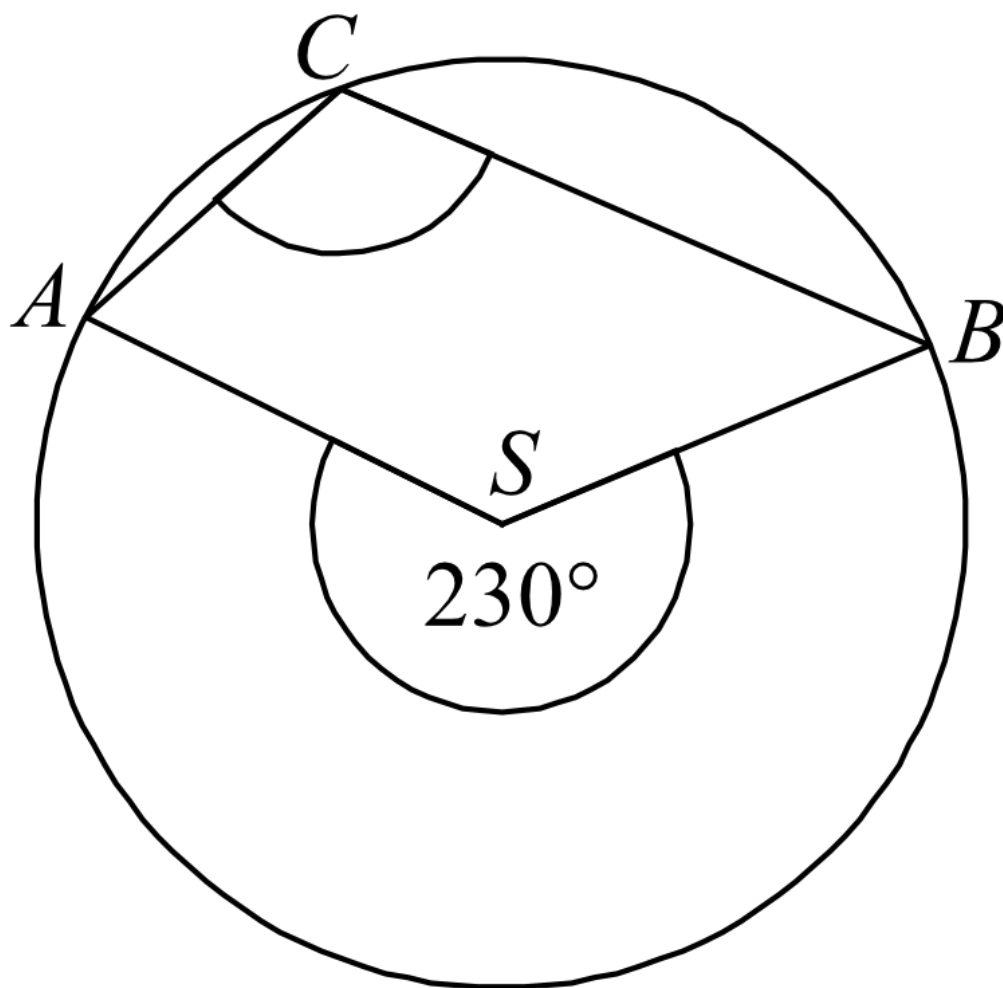
Podstawiamy do powyższej zależności dane z zadania, uważając na jednostki! Najlepiej jest zamienić sobie wszystko na metry i tak oto otrzymujemy, że:

$$\frac{|0,9|}{|0,6|} = \frac{|CD|}{12}, \quad 1,5 = \frac{|CD|}{12} \quad \Bigg/ \cdot 12, \quad |CD| = 18$$

Ewentualnie mogliśmy wykonać tzw. "mnożenie na krzyż":

$$12 \cdot 0,9 = 0,6 \cdot |CD|, \quad 10,8 = 0,6 \cdot |CD| \quad \Bigg/ : 0,6, \quad |CD| = 18$$

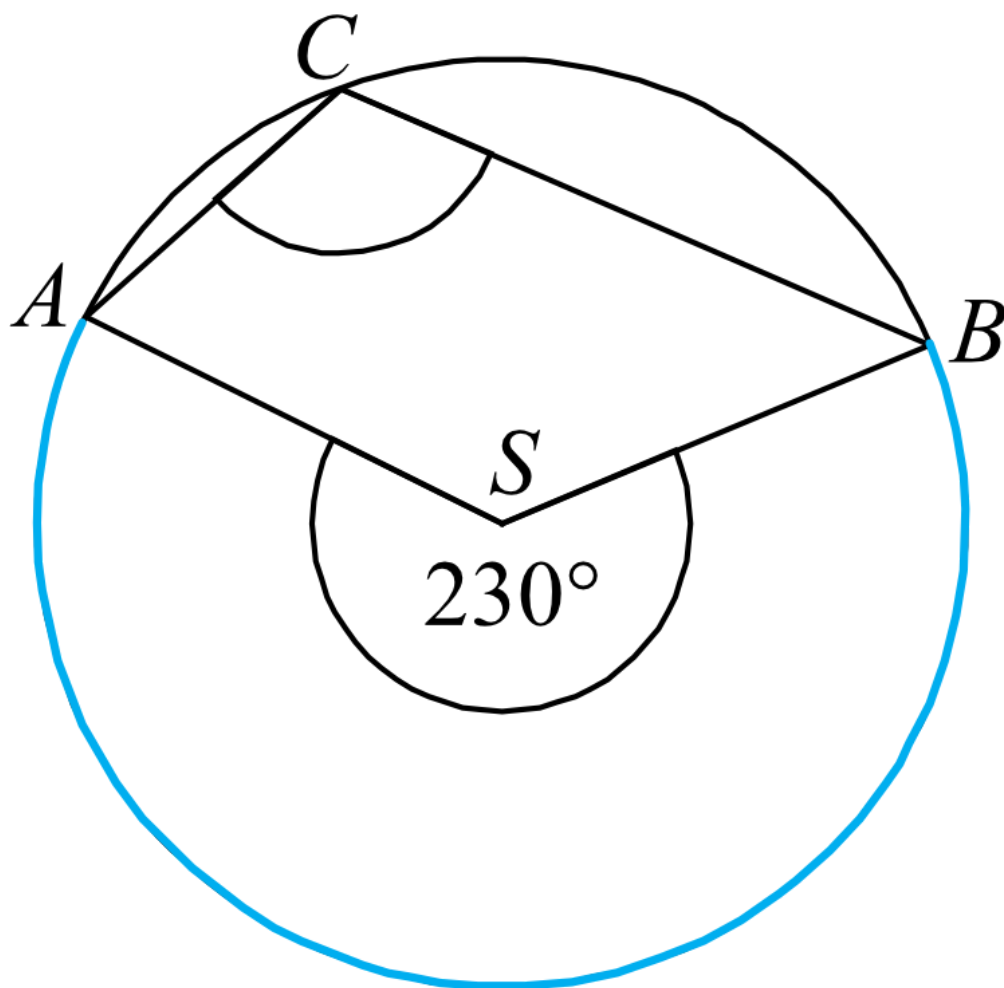
Punkty A , B i C leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta wpisanego ACB jest równa:



Odpowiedź: C (115°)

Korzystamy z zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym w okrąg, które są oparte na tym samym łuku (patrz rysunek). Zgodnie z tą zależnością miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego. To oznacza, że:

$$|\angle ACB| = \frac{1}{2} \cdot |\angle ASB|, \quad |\angle ACB| = \frac{1}{2} \cdot 230^\circ, \quad |\angle ACB| = 115^\circ$$



Zadanie 20

0-1 pkt

Dane są punkty $S = (2, 1)$, $M = (6, 4)$. Równanie okręgu o środku S przechodzącego przez punkt M ma postać:

Odpowiedź: B $((x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25)$

Krok 1. Analiza wzoru na równanie okręgu.

W tym zadaniu wykorzystamy wzór na równanie okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdzie a oraz b to współrzędne środka okręgu $S = (a; b)$, natomiast r to promień tego okręgu. Współrzędne środka okręgu są podane w treści zadania i jest to $S = (2; 1)$, czyli $a = 2$ oraz $b = 1$.

W związku z tym już wiemy na pewno, że wzór będzie miał postać $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$, czyli prawidłowa będzie odpowiedź A lub B. To czego nam brakuje to wiedzy na temat długości promienia okręgu, czyli r .

Krok 2. Obliczenie długości promienia r .

Znając współrzędne dwóch punktów $S = (2, 1)$ oraz $M = (6, 4)$ jesteśmy w stanie wyliczyć odległość między nimi (czyli w naszym przypadku będzie to długość promienia), korzystając ze wzoru:

$$r = \sqrt{(x_M - x_S)^2 + (y_M - y_S)^2}, \quad r = \sqrt{(6 - 2)^2 + (4 - 1)^2}, \quad r = \sqrt{4^2 + 3^2}, \quad r = \sqrt{16 + 9}, \quad r = \sqrt{25}, \quad r = 5$$

Krok 3. Zapisanie ostatecznej formy równania okręgu.

Podstawiamy $r = 5$ do wzoru wyznaczonego w pierwszym kroku i otrzymujemy poprawną odpowiedź.

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2, \quad (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

Zadanie 21

0-1 pkt

Proste o równaniach $y = 2x + 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 2$:

Odpowiedź: C (przecinają się pod kątem innym niż prosty)

Krok 1. Sprawdzenie, czy te proste są równoległe.

Aby proste były równoległe to ich współczynniki kierunkowe a (czyli liczba stojąca przed wartością x) muszą być identyczne. W naszym przypadku w pierwszym równaniu współczynnik $a = 2$, a w drugim $a = -\frac{1}{3}$. W związku z tym proste te na pewno nie są równoległe, ani tym bardziej się nie pokrywają.

Krok 2. Sprawdzenie, czy te proste są prostopadłe.

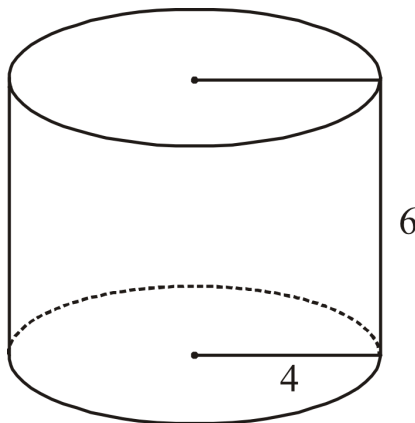
Aby proste były prostopadłe, to iloczyn ich współczynników a musi być równy -1 . W naszym przypadku tak nie jest, bo $2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$. To z kolei wyklucza informację o tym, że mogłyby to być proste prostopadłe.

W związku z powyższymi krokami wykluczaliśmy odpowiedzi A , B oraz D . Prawidłową odpowiedzią jest zatem odpowiedź C , bo te proste przecinają się pod kątem innym niż prosty.

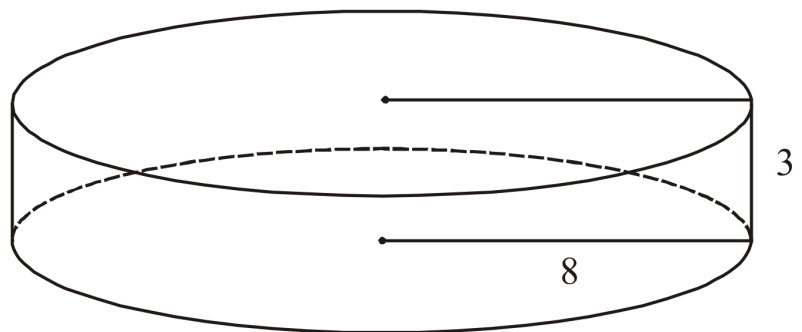
Zadanie 22

0-1 pkt

Na poniższych rysunkach zaznaczono promień i wysokości walców. Objętość pierwszego walca jest równa V_1 , objętość drugiego walca jest równa V_2 . Wówczas:



pierwszy walec



drugi walec

Odpowiedź: C ($V_2 = 2V_1$)

Krok 1. Obliczenie objętości pierwszego i drugiego walca.

Wiemy, że w pierwszym walcu $r = 4$, natomiast $H = 6$. Skoro tak, to korzystając ze wzoru na objętość walca możemy zapisać, że:

$$V_1 = \pi r^2 \cdot H, \quad V_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 6, \quad V_1 = \pi \cdot 16 \cdot 6, \quad V_1 = 96\pi$$

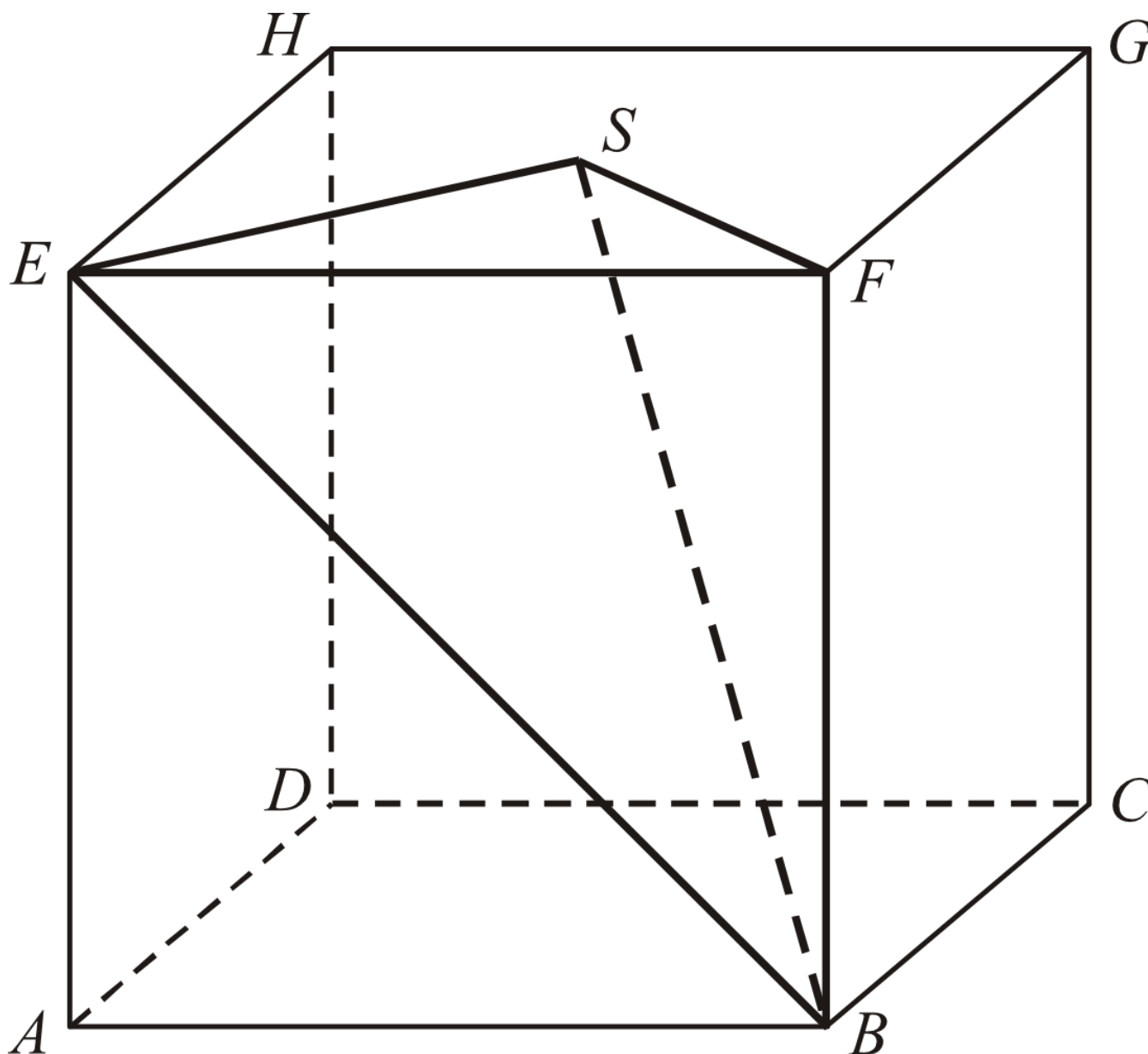
Analogicznie możemy obliczyć objętość drugiego walca, w którym $r = 8$, natomiast $H = 3$, zatem:

$$V_2 = \pi r^2 \cdot H, \quad V_2 = \pi \cdot 8^2 \cdot 3, \quad V_2 = \pi \cdot 64 \cdot 3, \quad V_2 = 192\pi$$

Krok 2. Ustalenie relacji, między V_1 oraz V_2 .

Widzimy, że V_2 jest dwa razy większe od V_1 . Skoro tak, to prawdziwą relacją będzie ta zapisana w trzeciej odpowiedzi, czyli $V_2 = 2V_1$.

Punkt S jest środkiem ściany $EFGH$ sześcianu (zobacz rysunek), którego krawędź ma długość 6. Objętość bryły $EFSB$ jest równa:



Odpowiedź: A (18)

Krok 1. Obliczenie pola podstawy EFS .

Nasza bryła jest tak naprawdę odwróconym ostrosłupem, w którym trójkąt EFS jest podstawą. Ściana $EFGH$ jest kwadratem, a przekątne kwadratu przecinają się w połowie swojej długości, dzieląc kwadrat tak naprawdę na cztery jednakowe trójkąty - jednym z tych trójkątów jest właśnie EFS . Możemy więc być pewni, że trójkąt EFS stanowi $\frac{1}{4}$ kwadratu $EFGH$, którego bok ma długość $a = 6$, zatem:

$$P_p = \frac{1}{4} \cdot 6^2, P_p = \frac{1}{4} \cdot 36, P_p = 9$$

Krok 2. Obliczenie objętości bryły $EFSB$.

Wiemy już, że $P_p = 9$. Z rysunku wynika, że wysokość bryły jest równa długości krawędzi sześcianu, zatem $H = 6$. W związku z tym objętość poszukiwanej bryły będzie równa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H, V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 6, V = 18$$

W karcie dań jest 5 zup i 4 drugie dania. Na ile sposobów można zamówić obiad składający się z jednej zupy i jednego drugiego dania?

Odpowiedź: B (20)

Mamy pięć zup do wyboru i cztery drugie dania, a więc ilość możliwych kombinacji obliczymy wykonując proste mnożenie $5 \cdot 4 = 20$.

W czterech rzutach sześcienną kostką do gry otrzymano następujące liczby oczek: 6, 3, 1, 4. Mediana tych danych jest równa:

Odpowiedź: D (3, 5)

Krok 1. Uporządkowanie wyników rzutu kostką.

Aby obliczyć medianę musimy najpierw ustawić wyniki z rzutów w porządku niemalejącym, zatem:

$$1, 3, 4, 6$$

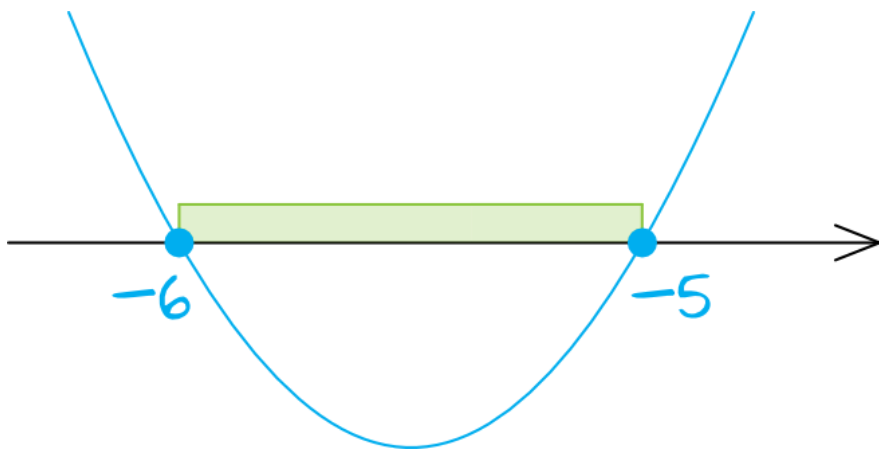
Krok 2. Obliczenie mediany.

W przypadku ciągu, który ma nieparzystą liczbę elementów, medianą jest środkowy wyraz. Nasz ciąg ma jednak parzystą liczbę elementów (dokładnie cztery), a więc aby uzyskać medianę musimy obliczyć średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów. W naszym przypadku środkowymi wyrazami są 3 oraz 4, tak więc mediana będzie równa:

$$m = \frac{3 + 4}{2} = 3,5$$

Zadanie 26

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $x^2 + 11x + 30 \leq 0$.Odpowiedź: $x \in \langle -6; -5 \rangle$

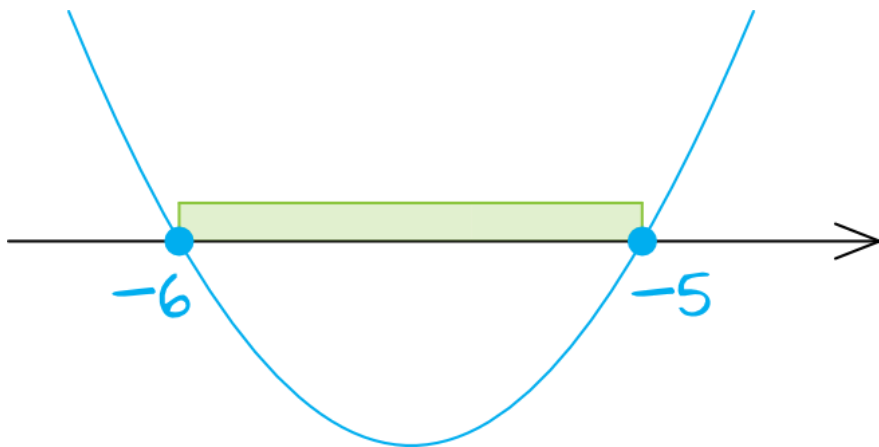
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Współczynniki: $a = 1$, $b = 11$, $c = 30$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 11^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = 121 - 120 = 1, \sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 - 1}{2 \cdot 1} = \frac{-12}{2} = -6, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 + 1}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Parabola ma ramiona skierowane ku górze, bo współczynnik a jest dodatni. Wykres będzie miał więc następującą postać:Punkty $x = -6$ oraz $x = -5$ muszą mieć koniecznie zamalowane kropki, bo w nierówności wystąpił znak $\leq$.

Krok 3. Odczytanie rozwiązania nierówności.

Interesuje nas zbiór argumentów, dla których wartość funkcji kwadratowej jest mniejsza lub równa zero (czyli w których miejscach wykres funkcji jest pod osią Ox lub dokładnie na osi). Tym zbiorem jest oczywiście: $x \in \langle -6; -5 \rangle$.

Zadanie 27

0-2 pkt

Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$.

Odpowiedź: $\{x = -2 \text{ lub } x = -\sqrt{5} \text{ lub } x = \sqrt{5}\}$

Krok 1. Wyłączenie odpowiednich czynników przed nawias i zapisanie równania w postaci iloczynowej.

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0, \quad x^2(x + 2) - 5(x + 2) = 0, \quad (x + 2)(x^2 - 5) = 0$$

Krok 2. Wyznaczenie rozwiązań z postaci iloczynowej.

Korzystając z postaci iloczynowej szukamy rozwiązań tej równości, przyrównując wartości w nawiasach do zera. Pamiętaj, że z równanie $x^2 - 5 = 0$ będzie mieć dwa rozwiązania - jedno dodatnie, a drugie ujemne.

$$x + 2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 5 = 0, \quad x = -2 \quad \vee \quad x = \sqrt{5} \quad \vee \quad x = -\sqrt{5}$$

Zadanie 28

0-2 pkt

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1cm i od drugiej przyprostokątnej o 32cm . Oblicz długości boków tego trójkąta.

Odpowiedź: Długości boków trójk

Krok 1. Zapisanie długości przyprostokątnych i przeciwprostokątnej.

Jeżeli przyjąłbyśmy, że przeciwprostokątna ma długość x , to przyprostokątne mają długość $x - 1$ oraz $x - 32$. Warto też tutaj przyjąć sobie założenie, że długości boków nie mogą być mniejsze lub równe 0, a więc $x > 32$ (gdyby był mniejszy niż 32, to z równania $x - 32$ otrzymamy liczbę ujemną).

Krok 2. Obliczenie długości przeciwprostokątnej.

Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa otrzymamy:

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (x - 1)^2 + (x - 32)^2 = x^2$$

Korzystamy teraz ze wzorów skróconego mnożenia:

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 64x + 1024 = x^2$$

Upraszczamy zapis i doprowadzamy go do postaci ogólnej, czyli takiej w której po prawej stronie będziemy mieć zero (to pozwoli nam potem wyliczyć deltę):

$$2x^2 - 66x + 1025 = x^2 \quad / - x^2, \quad x^2 - 66x + 1025 = 0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego oraz obliczenie ostatecznej długości przeciwprostokątnej.

Współczynniki: $a = 1$, $b = -66$, $c = 1025$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-66)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1025 = 121 - 120 = 4356 - 4100 = 256, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{256} = 16$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-66) - 16}{2 \cdot 1} = \frac{66 - 16}{2} = \frac{50}{2} = 25, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-66) + 16}{2 \cdot 1} = \frac{66 + 16}{2} = \frac{82}{2} = 41$$

x_1 możemy odrzucić, bo zgodnie z tym co napisaliśmy sobie w pierwszym kroku nasz x musi być większy niż 32. W przeciwnym wypadku długość przyprostokątnej byłaby równa $25 - 32 = -7$, a to na pewno jest nieprawda.

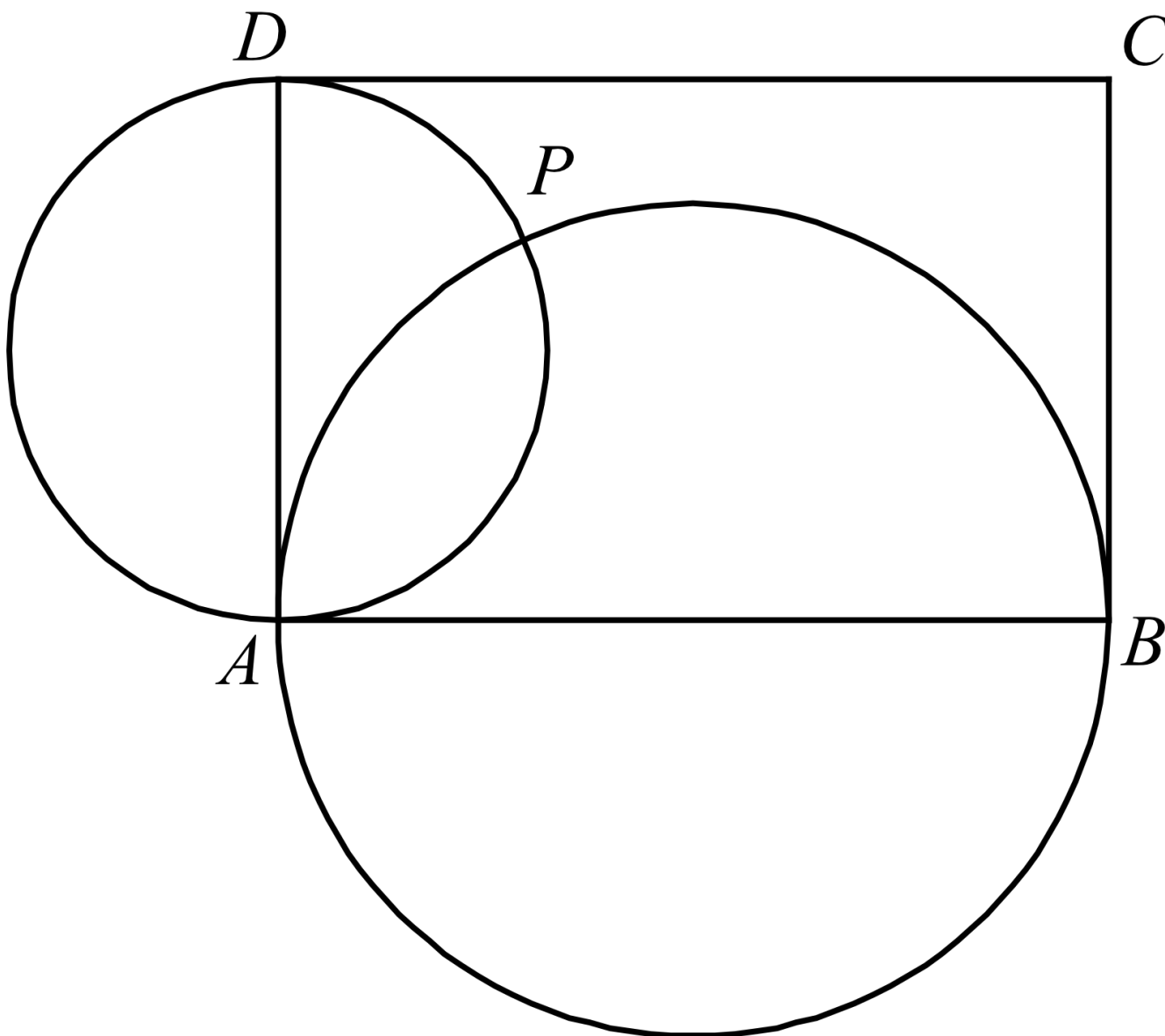
Krok 4. Obliczenie długości wszystkich boków tego trójkąta:

Przeciwprostokątna: 41cm

Pierwsza przyprostokątna: $x - 1\text{cm} = 41\text{cm} - 1\text{cm} = 40\text{cm}$

Druga przyprostokątna: $x - 32\text{cm} = 41\text{cm} - 32\text{cm} = 9\text{cm}$

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty B , P i D leżą na jednej prostej.



Odpowiedź: Udowodniono na podst

Krok 1. Analiza kątów APB oraz DPA .

Połączmy sobie punkt P z punktami A , B oraz D , tworząc w ten sposób odcinki $|PA|$, $|PB|$ oraz $|PD|$. Teraz musimy dostrzec, że kąty $\sphericalangle APB$ oraz $\sphericalangle DPA$ są oparte na średnicach okręgów, a to z kolei oznacza, że te dwa kąty mają na pewno miarę 90° .

Krok 2. Analiza kąta BPD i zakończenie dowodzenia.

Kąt BPD jest sumą kątów APB oraz DPA , a więc ma miarę równą $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Skoro jest to kąt półpełny, to jego ramiona na pewno tworzą linię prostą, a to z kolei oznacza, że punkty B , P oraz D na pewno leżą na jednej prostej.

Zadanie 30

0-2 pkt

Uzasadnij, że jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.

Odpowiedź: Udowodniono korzysta

Krok 1. Wymnożenie poszczególnych wyrazów.

Wymnażamy po kolei poszczególne wyrazy po lewej stronie, a po prawej stosujemy wzór skróconego mnożenia.

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2, a^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2 = (ac)^2 + 2 \cdot ac \cdot bd + (bd)^2, a^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2 = a^2 \cdot c^2 + 2abcd + b^2 \cdot d^2$$

Krok 2. Redukcja wyrazów podobnych i uproszczenie zapisu.

Skracamy obie strony równania przez $a^2 \cdot c^2$ oraz przez $b^2 \cdot d^2$.

$$\cancel{a^2 \cdot c^2} + a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot c^2 + \cancel{b^2 \cdot d^2} = \cancel{a^2 \cdot c^2} + 2abcd + \cancel{b^2 \cdot d^2}, a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot c^2 = 2abcd$$

Teraz przenosimy wszystkie wartości na lewą stronę:

$$a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot c^2 - 2abcd = 0$$

Zapis ten możemy uprościć do postaci:

$$(ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd = 0$$

Krok 3. Zapisanie powstałego równania z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.

Musimy dostrzec, że powstały zapis możemy przekształcić korzystając ze wzorów skróconego mnożenia. Widać to zwłaszcza wtedy, kiedy powyższe równanie pokażemy w formie $(ad)^2 - 2 \cdot ad \cdot bc + (bc)^2 = 0$. Zatem:

$$(ad)^2 - 2 \cdot ad \cdot bc + (bc)^2 = 0, (ad - bc)^2 = 0$$

Krok 4. Obliczenie wartości powstałego równania.

Pierwiastkując obie strony równania otrzymamy:

$$(ad - bc)^2 = 0 \quad \bigg/ \sqrt{}, \quad ad - bc = 0, \quad ad = bc$$

Zadanie 31

0-2 pkt

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe nieparzyste.

Odpowiedź: 500 liczb.

Krok 1. Określenie liczby cyfr, które mogą znaleźć się na pierwszym miejscu naszej liczby.

Zgodnie z treścią zadania pierwsza cyfra musi być parzysta, a więc mogą to być tylko i wyłącznie 2, 4, 6 lub 8. Cyfrę 0 odrzucamy, bo nie może być pierwszą cyfrą w liczbie.

Krok 2. Określenie liczby cyfr, które mogą znaleźć się na drugim, trzecim i czwartym miejscu naszej liczby.

Na każdym z pozostałych miejsc możemy mieć jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7 lub 9.

Krok 3. Obliczenie liczby wszystkich możliwych kombinacji.

Zgodnie z regułą mnożenia wszystkich kombinacji będzie:

$$|\Omega| = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$$

Z pojemnika, w którym jest siedem kul ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, losujemy dwa razy po jednej kuli bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy kule oznaczone liczbami, z których pierwsza będzie mniejsza od 4 i druga będzie parzysta.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{3}{14}$

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Pierwsze losowanie odbywa się z siedmiu dostępnych kul. Mamy informację, że losowanie jest bez zwracania, więc wylosowana kula nie wraca już do pojemnika, czyli w drugim losowaniu dostępnych będzie już tylko sześć kul. To oznacza, że zdarzeń elementarnych będziemy mieć zgodnie z regułą mnożenia $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Zdarzeniem sprzyjającym jest sytuacja, w której liczba na pierwszej kuli jest równa 1, 2 lub 3, a na drugiej 2, 4 lub 6. Moglibyśmy zapisać, że zgodnie z regułą mnożenia jest ich $|A| = 3 \cdot 3 = 9$, ale trzeba byłoby tutaj nanieść jeszcze poprawkę, że zdarzenie (2; 2) nie może wystąpić (bo losowanie jest bez zwracania), więc tych zdarzeń tak naprawdę jest $|A| = 9 - 1 = 8$. Dla pewności możemy je sobie wypisać:

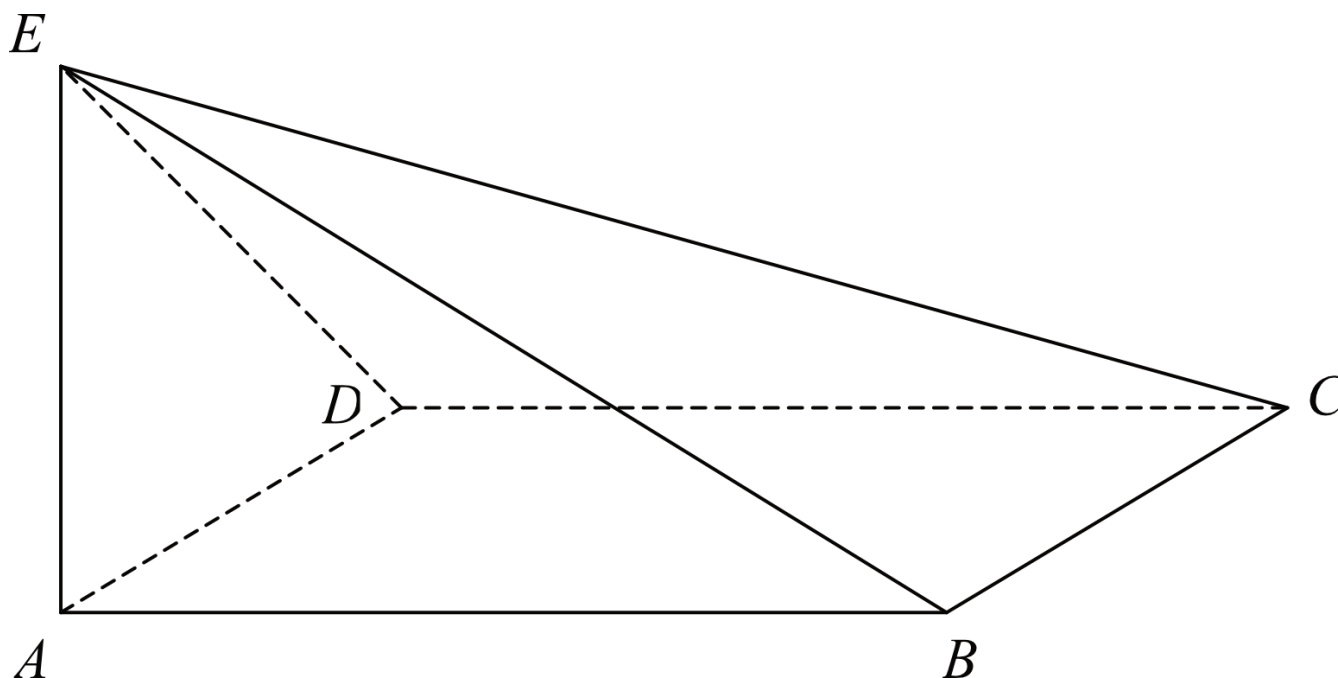
$$(1; 2), (1; 4), (1; 6), (2; 4), (2; 6), (3; 2), (3; 4), (3; 6)$$

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$$

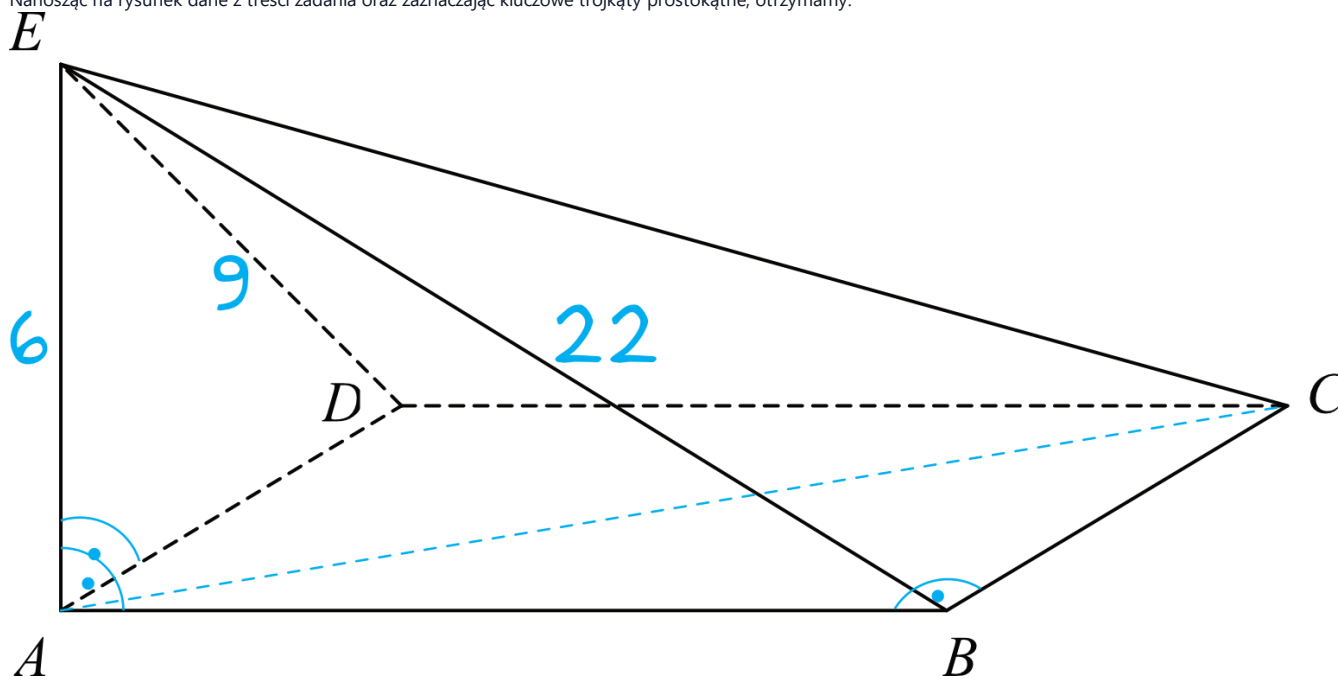
Podstawą ostrosłupa $ABCDE$ jest prostokąt $ABCD$. Krawędź AE jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Oblicz długość krawędzi EC , jeśli wiadomo, że $AE = 6$, $BE = 22$, $DE = 9$.



Odpowiedź: $(|EC|=23\backslash)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanosząc na rysunek dane z treści zadania oraz zaznaczając kluczowe trójkąty prostokątne, otrzymamy:



Krok 2. Obliczenie długości krawędzi AB .

Spójrzmy na trójkąt prostokątny ABE . Znamy dwie długości boków tego trójkąta, zatem korzystając z Twierdzenia Pitagorasa wyjdzie nam, że:

$$|AB|^2 + 6^2 = 22^2, |AB|^2 + 36 = 484, |AB|^2 = 448, |AB| = \sqrt{448} \vee |AB| = -\sqrt{448}$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, bo krawędź musi mieć dodatnią długość, zatem zostaje nam $|AB| = \sqrt{448}$ i w takiej formie możemy to zostawić, ponieważ za chwilę i tak będziemy tę liczbę podnosić do kwadratu.

Krok 3. Obliczenie długości krawędzi AD .

Tym razem spoglądamy na trójkąt prostokątny ADE . Tutaj także znamy dwie długości boków, zatem trzeci bok tego trójkąta obliczymy z Twierdzenia Pitagorasa:

$$|AD|^2 + 6^2 = 9^2, |AD|^2 + 36 = 81, |AD|^2 = 45, |AD| = \sqrt{45} \vee |AD| = -\sqrt{45}$$

Ponownie odrzucamy ujemny wynik, zatem zostaje nam $|AD| = \sqrt{45}$.

Krok 4. Obliczenie długości krawędzi AC .

Znamy dwie długości boków prostokąta znajdującego się w podstawie. To sprawia, że korzystając ponownie z Twierdzenia Pitagorasa, możemy obliczyć długość przekątnej AC .

$$\sqrt{448}^2 + \sqrt{45}^2 = |AC|^2, 448 + 45 = |AC|^2, |AC|^2 = 493, |AC| = \sqrt{493} \quad \vee \quad |AC| = -\sqrt{493}$$

Interesuje nas tylko dodatnia wartość, zatem $|AC| = \sqrt{493}$.

Krok 5. Obliczenie długości krawędzi EC .

Koniec końców spoglądamy teraz na trójkąt prostokątny ACE . Tutaj także znamy już dwie długości boków, bowiem $|AC| = \sqrt{493}$ oraz $AE = 6$, zatem poszukiwana długość krawędzi EC będzie równa:

$$\sqrt{493}^2 + 6^2 = |EC|^2, 493 + 36 = |EC|^2, |EC|^2 = 529, |EC| = \sqrt{529} \quad \vee \quad |EC| = -\sqrt{529}$$

Długość krawędzi musi być dodatnia, zatem zostaje nam $|EC| = \sqrt{529}$, co możemy jeszcze zapisać jako po prostu $|EC| = 23$.

Droga z miasta A do miasta B ma długość 474 km . Samochód jadący z miasta A do miasta B wyrusza godzinę później niż samochód z miasta B do miasta A . Samochody te spotykają się w odległości 300 km od miasta B . Średnia prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A , liczona od chwili wyjazdu z A do momentu spotkania, była o $17 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejsza od średniej prędkości drugiego samochodu liczonej od chwili wyjazdu z B do chwili spotkania. Oblicz średnią prędkość każdego samochodu do chwili spotkania.

Odpowiedź: Średnia prędkość aut

Krok 1. Wypisanie danych z treści zadania.

Pierwszy samochód przejechał: $474 - 300 = 174$ (kilometrów)

Drugi samochód przejechał: 300 (kilometrów)

Czas jazdy pierwszego samochodu: $t_1 = \frac{174}{v_1}$ (godzin)

Czas jazdy drugiego samochodu: $t_2 = \frac{300}{v_2}$ (godzin)

Krok 2. Ułożenie i rozwiązanie odpowiedniego układu równań.

Aby rozwiązać to zadanie musimy teraz powiązać ze sobą odpowiednie informacje i zapisać je w formie układu równań.

Do stworzenia pierwszego równania skorzystamy z informacji na temat prędkości obydwu pojazdów, bo choć nie znamy ich dokładnych wartości, to wiemy że:

$$v_1 = v_2 - 17$$

Drugie równanie ułożymy wiedząc, że pierwszy samochód wyruszył godzinę później, zatem:

$$t_1 + 1 = t_2, \quad \frac{174}{v_1} + 1 = \frac{300}{v_2} \quad \Bigg/ \cdot v_1 v_2, \quad 174v_2 + v_1 v_2 = 300v_1$$

Z tych dwóch informacji możemy ułożyć następujący układ równań:

$$\begin{cases} v_1 = v_2 - 17 \\ 174v_2 + v_1 v_2 = 300v_1 \end{cases}$$

Skoro $v_1 = v_2 - 17$, to podstawiając to do drugiego równania otrzymamy:

$$174v_2 + (v_2 - 17)v_2 = 300(v_2 - 17), \quad 174v_2 + v_2^2 - 17v_2 = 300v_2 - 5100, \quad v_2^2 - 143v_2 + 5100 = 0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Współczynniki: $a = 1$, $b = -143$, $c = 5100$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-143)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5100 = 20449 - 20440 = 49, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$v_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-143) - 7}{2 \cdot 1} = \frac{143 - 7}{2} = \frac{136}{2} = 68, \quad \text{lub}, \quad v_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-143) + 7}{2 \cdot 1} = \frac{143 + 7}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

Krok 4. Obliczenie wszystkich możliwości uzyskiwanych prędkości.

Jeśli $v_2 = 68$, to $v_1 = 68 - 17 = 51$

Jeśli $v_2 = 75$, to $v_1 = 75 - 17 = 58$

Żadnej z tych odpowiedzi nie możemy odrzucić, zatem obydwie możliwości są prawidłowe i takie też jest rozwiązanie naszego zadania.