

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-600, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00, MMAU-R0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	11 czerwca 2024 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024 ¹	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 120 sekund.

1 pkt – wyznaczenie współczynnika b : $b = \frac{1}{9}m_0$

ALBO

– zapisanie związku $a + b = m_0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ po osiągnięciu stanu równowagi masa związku A była równa $\frac{1}{9}m_0$, więc

$$\frac{1}{9}m_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} a \cdot 2^{-0,05 \cdot t} + b = 0 + b = b$$

Stąd i z warunku $m(0) = m_0$ otrzymujemy

$$m_0 = a \cdot 2^{-0,05 \cdot 0} + \frac{1}{9}m_0$$

czyli $a = \frac{8}{9}m_0$.

Obliczamy czas, po którym pozostało 12,5% początkowej masy związku A:

¹Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1246).

$$\frac{1}{8}m_0 = \frac{8}{9}m_0 \cdot 2^{-0,05 \cdot t} + \frac{1}{9}m_0 \quad /: m_0$$

$$\frac{1}{72} = \frac{8}{9} \cdot 2^{-0,05 \cdot t}$$

$$2^{-6} = 2^{-0,05 \cdot t}$$

$$6 = 0,05t$$

$$t = 120$$

Zatem po 120 sekundach przereaguje 87,5% masy początkowej związku A.

Zadanie 2. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia granicy oraz poprawny wynik: $\left(-\frac{1}{6}\right)$.

1 pkt – zapisanie wyrażenia $\frac{|x-3|}{x^2-9}$ w postaci $\frac{-1}{x+3}$, gdzie $x \in (-3, 3)$

ALBO

– zapisanie wyrażenia $\left|\frac{|x-3|}{x^2-9} + \frac{1}{6}\right|$ w postaci $\frac{1}{6} \cdot \left|\frac{x-3}{x+3}\right|$, gdzie $x \in (-3, 3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Przekształcamy wyrażenie $\frac{|x-3|}{x^2-9}$, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów i definicji wartości bezwzględnej:

$$\frac{|x-3|}{x^2-9} = \frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{-1}{x+3}$$

dla każdego $x \in (-3, 3)$.

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3) = 6$ oraz $\lim_{x \rightarrow 3^-} (-1) = -1$, więc

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x^2-9} = -\frac{1}{6}$$

Sposób II

Niech ϵ będzie dowolną liczbą dodatnią. Oznaczmy $\delta = \frac{6\epsilon}{1+\epsilon}$. Wtedy $\delta > 0$ i $\delta < 6$.

Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą spełniającą warunek $-\delta < x-3 < 0$.

Wówczas

$$\begin{aligned} \left| \frac{|x-3|}{x^2-9} + \frac{1}{6} \right| &= \left| \frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{-1}{x+3} + \frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \frac{x-3}{x+3} \right| < \frac{1}{6} \cdot \frac{\delta}{|x+3|} < \\ &< \frac{1}{6} \cdot \frac{\delta}{6-\delta} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{6\epsilon}{1+\epsilon}}{6 - \frac{6\epsilon}{1+\epsilon}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6\epsilon}{6} < \epsilon \end{aligned}$$

Zatem dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego x spełniającego warunek $-\delta < x - 3 < 0$ zachodzi

$$\left| \frac{|x-3|}{x^2-9} + \frac{1}{6} \right| < \epsilon$$

To oznacza, że

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x^2-9} = -\frac{1}{6}$$

Zadanie 3. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x_0 = 7$ oraz $y = -x + 12$ (lub $y = -(x - 7) + 5$).

2 pkt – obliczenie odciętej punktu P i wyznaczenie pochodnej funkcji f : $x_0 = 7$ oraz

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x - 4) - (2x + 1) \cdot 1}{(x - 4)^2}.$$

1 pkt – obliczenie odciętej punktu P : $x_0 = 7$
 ALBO

– wyznaczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = \frac{2 \cdot (x - 4) - (2x + 1) \cdot 1}{(x - 4)^2}.$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający błędnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy odciętą x_0 punktu P :

$$5 = \frac{2x_0 + 1}{x_0 - 4}$$

$$5x_0 - 20 = 2x_0 + 1$$

$$x_0 = 7$$

Wyznaczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \frac{2(x - 4) - (2x + 1) \cdot 1}{(x - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-9}{(x - 4)^2}$$

Wyznaczamy równanie kierunkowe $y = ax + b$ stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P . Obliczamy współczynnik kierunkowy a w równaniu stycznej:

$$a = f'(7) = -1$$

Obliczamy współczynnik b w równaniu stycznej:

$$5 = -1 \cdot 7 + b$$

$$b = 12$$

Styczna ma równanie $y = -x + 12$.

Zadanie 4. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe [...].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{1}{15}$.

2 pkt – zapisanie liczby elementów zbioru $A \cap B$ i wyznaczenie/zapisanie liczby elementów zbioru B : $|A \cap B| = 8$ i $|B| = \binom{10}{3}$

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzeń $A \cap B$ oraz B :

$$P(A \cap B) = \frac{8}{2^{10}} \text{ oraz } P(B) = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}.$$

1 pkt – zapisanie liczby elementów zbioru $A \cap B$: 8

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie liczby elementów zbioru B , np. $\binom{10}{3}$,

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia B , np. $P(B) = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}$,

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia $A \cap B$, np. $P(A \cap B) = \frac{8}{2^{10}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu trzech orłów z rzędu w dziesięciu rzutach monetą,

B – zdarzenie polegające na wyrzuceniu trzech orłów w dziesięciu rzutach monetą,

Ω – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Wynikiem każdego rzutu jest orzeł (o) lub reszka (r). Wynikiem doświadczenia losowego jest dziesięciowyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru $\{o, r\}$. Zatem liczba elementów zbioru Ω jest równa $2^{10} = 1024$.

Obliczamy liczbę elementów zbioru B : $|B| = \binom{10}{3} = 120$.

Zdarzenie $A \cap B$ polega na wyrzuceniu w dziesięciu rzutach dokładnie trzech orłów i to trzech orłów z rzędu. Obliczamy liczbę elementów zbioru $A \cap B$: $|A \cap B| = 8$.

Obliczamy prawdopodobieństwo $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{\frac{8}{1024}}{\frac{120}{1024}} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

Uwagi:

1. Zdający może rozwiązać zadanie poprzez obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń B oraz $A \cap B$.
2. Zdający może obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia B , korzystając ze schematu Bernoullego. Sukcesem w pojedynczej próbie jest wyrzucenie orła. Prawdopodobieństwo p sukcesu jest równe $p = \frac{1}{2}$. Przy liczbie prób $n = 10$ oraz liczbie sukcesów $k = 3$ otrzymujemy

$$P(B) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{2^{10}}$$

Zadanie 5. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: III.R2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne [...].

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wykorzystanie założenia i przekształcenie nierówności $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ do postaci $4a^2 - 4a + 1 \geq 0$, $4b^2 - 4b + 1 \geq 0$ albo $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$
ALBO

– zapisanie nierówności między odpowiednimi średnimi liczb $\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ (lub między odpowiednimi średnimi liczb $2a+b$ oraz $a+2b$) i przekształcenie tej nierówności do postaci, z której można bezpośrednio wnioskować o prawdziwości tezy, np. $\frac{3}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}$.

1 pkt – zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wymiernej

$$\frac{P(a,b)}{Q(a,b)} \geq 0, \text{ np. } \frac{3(a+2b)+3(2a+b)-4(a+2b)(2a+b)}{3(2a+b)(a+2b)} \geq 0$$

ALBO

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wielomianowej, np. $3(1+b) + 3(a+1) \geq 4(a+1)(1+b)$,

ALBO

– zapisanie nierówności między średnią harmoniczną a arytmetyczną liczb $\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ (lub między odpowiednimi średnimi liczb $2a+b$ oraz $a+2b$), np.

$$\frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}, \quad \frac{2a+b+a+2b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}},$$

ALBO

– wykorzystanie założenia i zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wymiernej z jedną niewiadomą, np. $\frac{1}{2a+(1-a)} + \frac{1}{a+2(1-a)} \geq \frac{4}{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ $a > 0$ i $b > 0$, więc $(2a+b)(a+2b) > 0$.

Przekształcamy równoważnie nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$$

$$\frac{3(a+2b)}{3(2a+b)(a+2b)} + \frac{3(2a+b)}{3(a+2b)(2a+b)} - \frac{4(a+2b)(2a+b)}{3(a+2b)(2a+b)} \geq 0$$

$$\frac{3a+6b+6a+3b-8a^2-20ab-8b^2}{3(2a+b)(a+2b)} \geq 0$$

$$\frac{9a+9b-8a^2-20ab-8b^2}{3(2a+b)(a+2b)} \geq 0$$

$$9a+9b-8a^2-20ab-8b^2 \geq 0$$

Korzystamy z założenia i otrzymujemy dalej

$$9a+9(1-a)-8a^2-20a(1-a)-8(1-a)^2 \geq 0$$

$$4a^2-4a+1 \geq 0$$

$$(2a-1)^2 \geq 0$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(2a-1)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a . To oznacza, że nierówność

$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Sposób II

Korzystamy z założenia $a+b=1$ i nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ zapisujemy w postaci

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{4}{3}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez liczbę dodatnią $3(a+1)(1+b)$ i ponownie korzystamy z założenia, otrzymując kolejno:

$$3(1+b) + 3(a+1) \geq 4(a+1)(1+b)$$

$$2-(a+b) \geq 4ab$$

$$1 \geq 4ab$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(a-b)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby

rzeczywistej b . To oznacza, że nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Sposób III

Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną dla liczb dodatnich

$\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ i otrzymujemy:

$$\frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{2a+b}} + \frac{1}{\frac{1}{a+2b}}}$$

$$\frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{2a+b+a+2b}$$

$$\frac{\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{3(a+b)}$$

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3(a+b)}$$

Po skorzystaniu z założenia $a+b=1$ otrzymujemy tezę.

Sposób IV

Korzystamy z założenia $a+b=1$ i nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ zapisujemy w postaci

$$\frac{1}{2a+1-a} + \frac{1}{a+2(1-a)} \geq \frac{4}{3}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez liczbę dodatnią $3(a+1)(2-a)$ i otrzymujemy kolejno:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2-a} \geq \frac{4}{3}$$

$$3(2-a) + 3(a+1) \geq 4(a+1)(2-a)$$

$$6 - 3a + 3a + 3 \geq -4a^2 + 4a + 8$$

$$4a^2 - 4a + 1 \geq 0$$

$$(2a-1)^2 \geq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(2a-1)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a , więc w szczególności dla każdego $a \in (0,1)$. To oznacza, że nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie pola trapezu w zależności od długości jego podstaw: $P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie równania z a , b oraz h , z którego można wyznaczyć długość wysokości trapezu w zależności od długości jego

podstaw, np. $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

ALBO

– wyznaczenie długości promienia okręgu w zależności od długości podstaw trapezu,

np. $r = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}$,

ALBO

– zapisanie, że pole czworokąta wpisanego w okrąg i opisanego na okręgu jest równe pierwiastkowi z iloczynu długości boków tego czworokąta,

ALBO

– zapisanie, że wysokość trapezu równoramiennego jest średnią geometryczną długości podstaw trapezu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

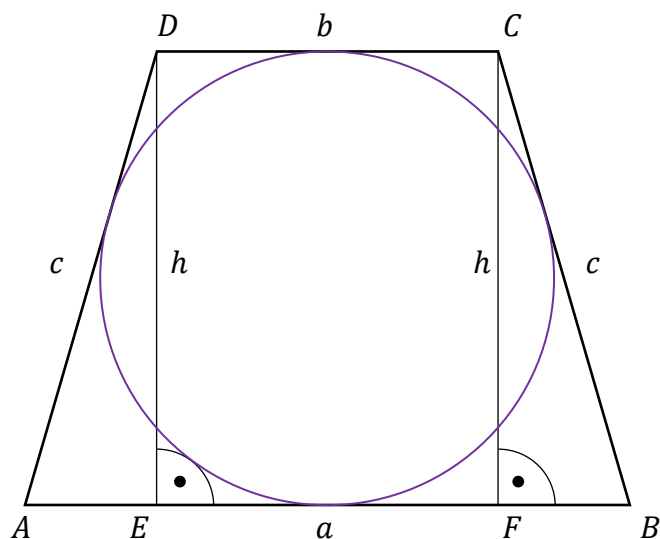
W przypadku, gdy zdający zapisze nierówność $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab$ w postaci równoważnej

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ i stwierdzi, że jej prawdziwość wynika z nierówności między średnią

arytmetyczną i geometryczną różnych liczb dodatnich a i b , to rozumowanie uznajemy za pełne.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trapez jest równoramienny, więc $|AE| = |BF| = \frac{a-b}{2}$. Ponieważ trapez jest opisany na okręgu, więc $a + b = c + c$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCF otrzymujemy

$$|BF|^2 + |FC|^2 = |CB|^2$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = c^2$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad / \cdot 4$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4h^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$h = \sqrt{ab}$$

Pole P trapezu jest równe $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

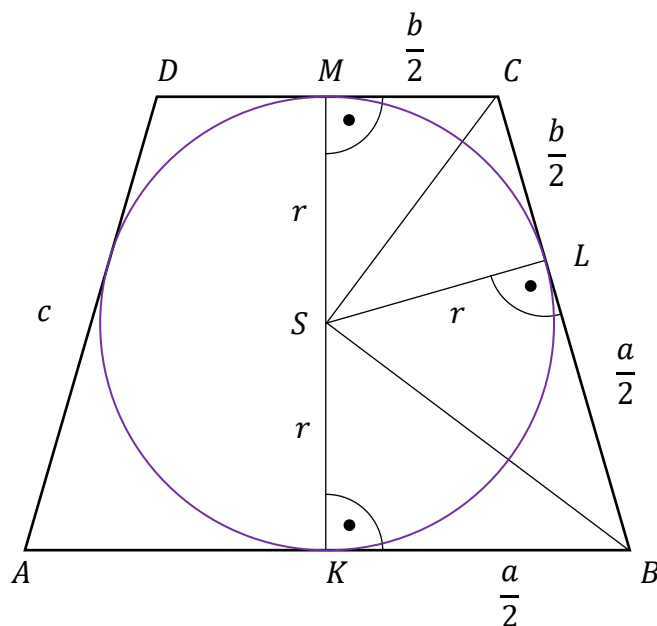
Ponieważ $a > b$, więc z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich a oraz b otrzymujemy $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Stąd

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$

czyli $P > ab$, co należało wykazać.

Sposób II

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku (K, L, M są punktami styczności okręgu z trapezem).



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|BL| = \frac{a}{2}$ oraz $|CL| = \frac{b}{2}$.

Ponieważ środek okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trapezu, więc

$$|\angle KBS| = |\angle CBS| \quad \text{oraz} \quad |\angle MCS| = |\angle BCS|$$

Suma miar kątów wewnętrznych trapezu przy ramieniu BC jest równa 180° , więc

$$|\angle KBS| + |\angle CBS| + |\angle MCS| + |\angle BCS| = 180^\circ$$

Zatem

$$|\angle CBS| + |\angle BCS| = 90^\circ$$

To oznacza, że trójkąt BCS jest prostokątny.

Wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną jest promieniem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$, więc z twierdzenia o wysokości trójkąta prostokątnego wynika,

$$\text{że } r = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{ab}.$$

$$\text{Pole } P \text{ trapezu jest równe } P = \frac{a+b}{2} \cdot 2r = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}.$$

Pozostaje wykazać, że prawdziwa jest nierówność $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab$.

Dzieląc obie strony tej nierówności przez $\sqrt{ab}$, otrzymujemy

$$\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab \quad /: \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$$

Z założenia $a > b > 0$, więc $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$. Zatem $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$ jako kwadrat liczby dodatniej $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. To oznacza, że $P > ab$.

Sposób III

Z własności czworokąta opisanego na okręgu i w który można także wpisać okrąg wynika, że pole takiego czworokąta jest równe $\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$, gdzie a, b, c, d są długościami boków czworokąta.

Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu, ale jest on równoramienny, więc można na nim także opisać okrąg. Zatem pole P tego trapezu jest równe $P = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot c} = \sqrt{ab} \cdot c$, gdzie c jest długością ramienia trapezu.

Ponieważ trapez jest opisany na okręgu, więc $a + b = c + c$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$.

Stąd $P = \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2}$.

Ponieważ $a > b$, więc z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich a oraz b otrzymujemy $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Stąd

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$

czyli $P > ab$, co należało wykazać.

Zadanie 7. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$$a_n = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3 pkt – odrzucenie wartości $q = 2$ **oraz** poprawne zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego i zapisanie równania z jedną niewiadomą $a_1 : \frac{a_1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 16$ (dla

sposobu I)

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą q oraz obliczenie pierwiastków tego równania, np.

$$16(1 - q^2) + 16(1 - q^2) \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot 16(1 - q^2) \cdot q$$

i $q = 1$ oraz $q = -1$, oraz $q = \frac{1}{2}$, oraz $q = 2$,

oraz odrzucenie tych wartości q , dla których nie jest spełniony warunek zbieżności $|q^2| < 1$ (dla sposobu II).

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą q **oraz** obliczenie pierwiastków tego równania, np. $2q^2 - 5q + 2 = 0$ i $q = \frac{1}{2}$ oraz $q = 2$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie równań $a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} a_1 \cdot q$ oraz $\frac{a_1}{1 - q^2} = 16$ (dla sposobu II).

1 pkt – zapisanie równania $a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} a_1 \cdot q$ (dla sposobu I)

ALBO

– poprawne zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego i zapisanie równania $\frac{a_1}{1 - q^2} = 16$ (dla sposobu II).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze sumę wszystkich wyrazów ciągu o wyrazach nieparzystych jako

$\frac{a_1}{1 - q}$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje **3 punkty** za całe

rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający myli ciąg geometryczny z arytmetycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n) . Z warunku $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$ oraz z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot q$$

$$a_1 \cdot \left(1 + q^2 - \frac{5}{2}q\right) = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \vee \quad q^2 - \frac{5}{2}q + 1 = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \vee \quad q = 2 \quad \vee \quad q = \frac{1}{2}$$

Rozważmy nieskończony ciąg wyrazów o numerach nieparzystych, tj. $a_1, a_3, a_5, \dots$. Jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym a_1 oraz ilorazie q^2 . Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych istnieje i jest równa 16, więc $a_1 \neq 0$ oraz $|q^2| < 1$ i $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$. Pozostaje zatem rozpatrzyć przypadki $q = 2$ oraz $q = \frac{1}{2}$.

Gdy $q = 2$, to warunek $|q^2| < 1$ nie jest spełniony.

Gdy $q = \frac{1}{2}$, to warunek $|q^2| < 1$ jest spełniony. Wtedy $\frac{a_1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 16$ i stąd $a_1 = 12$.

Nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 12 i ilorazie $\frac{1}{2}$ spełnia warunki zadania. Wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu (a_n) ma postać $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Sposób II

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n) .

Rozważmy nieskończony ciąg wyrazów o numerach nieparzystych, tj. $a_1, a_3, a_5, \dots$. Jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym a_1 oraz ilorazie q^2 . Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych istnieje i jest równa 16, więc $a_1 \neq 0$ oraz $|q^2| < 1$ i $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$. Zatem $a_1 = 16(1 - q^2)$.

Z warunku $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$ oraz z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot q$$

Stąd oraz z równości $a_1 = 16(1 - q^2)$ otrzymujemy kolejno:

$$16(1 - q^2) + 16(1 - q^2) \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot 16(1 - q^2) \cdot q$$

$$16 - 16q^2 + 16q^2 - 16q^4 = 40q - 40q^3$$

$$-16q^4 + 40q^3 - 40q + 16 = 0$$

$$-16(q^4 - 1) + 40q(q^2 - 1) = 0$$

$$-16(q^2 - 1)(q^2 + 1) + 40q(q^2 - 1) = 0$$

$$(q^2 - 1)[-16(q^2 + 1) + 40q] = 0$$

$$(q^2 - 1)(-16q^2 + 40q - 16) = 0$$

$$q^2 - 1 = 0 \quad \vee \quad -16q^2 + 40q - 16 = 0$$

$$q = 1 \quad \vee \quad q = -1 \quad \vee \quad q = 2 \quad \vee \quad q = \frac{1}{2}$$

Uwzględniając warunek $|q^2| < 1$, otrzymujemy $q = \frac{1}{2}$. Zatem $a_1 = 12$. Nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 12 i ilorazie $\frac{1}{2}$ spełnia warunki zadania. Wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu (a_n) ma postać $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Zadanie 8. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R8) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (m.in. z wykorzystaniem twierdzenia sinusów).

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\sqrt{21} - 3$ (lub $\sqrt{30 - 6\sqrt{21}}$).

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością boku AC), np.

$$(4\sqrt{3})^2 = |AC|^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot |AC| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$|AC|^2 = (4\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8},$$

$$6^2 = |AC|^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot |AC| \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ALBO

- zapisanie długości boków trójkąta ACE za pomocą jednej niewiadomej i zapisanie równania z tą jedną niewiadomą, które prowadzi do jej obliczenia, np. $|AE| = 3x$ oraz $|AC| = 4x$, oraz $|EC| = \sqrt{7}x$, oraz $(4\sqrt{3} - \sqrt{7}x)^2 + (3x)^2 = 6^2$ (dla sposobu II),

ALBO

- obliczenie sinusa kąta ABC : $\frac{-3+\sqrt{21}}{8}$ (dla sposobu III).

2 pkt – obliczenie miary kąta BAC : 120°

ALBO

- zapisanie długości boków trójkąta ACE za pomocą jednej niewiadomej, np.

$$|AE| = 3x \text{ oraz } |AC| = 4x, \text{ oraz } |EC| = \sqrt{7}x,$$

ALBO

- obliczenie cosinusa kąta ACB : $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

1 pkt – zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest miara kąta BAC (lub miara kąta ACB), np. $\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\angle BAC|} = 8$, $\frac{6}{\sin|\angle ACB|} = 8$, $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sin|\angle BAC| = \frac{6 \cdot 4\sqrt{3}}{4 \cdot 4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający uzyska $|\angle BAC| = 60^\circ$ oraz $|\angle BAC| = 120^\circ$ i konsekwentnie obliczy długość boku AC dla obu tych wartości kątów, ale w rozwiązaniu nie odrzuci wartości $|AC| = 3 + \sqrt{21}$, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|BC|}{\sin|\angle BAC|} = 2R$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\angle BAC|} = 8$$

Stąd $|\angle BAC| = 60^\circ$ lub $|\angle BAC| = 120^\circ$.

Długość boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu R jest równa

$R\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = |BC|$. Niech D będzie wierzchołkiem trójkąta równobocznego BCD wpisanego w dany okrąg. Ponieważ $|AB| = 6$, więc $A \neq D$. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków BD , to wówczas AC byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC . Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków CD , to wówczas AB byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC . Zatem A leży na krótszym z łuków BC okręgu i $|\angle BAC| = 120^\circ$.

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie cosinusów i obliczamy długość boku AC :

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos|\angle BAC|$$

$$(4\sqrt{3})^2 = |AC|^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot |AC| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$|AC|^2 + 6 \cdot |AC| - 12 = 0$$

$$|AC| = -3 + \sqrt{21} \quad \vee \quad |AC| = -3 - \sqrt{21} < 0$$

Zatem $|AC| = -3 + \sqrt{21}$.

Sposób II

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

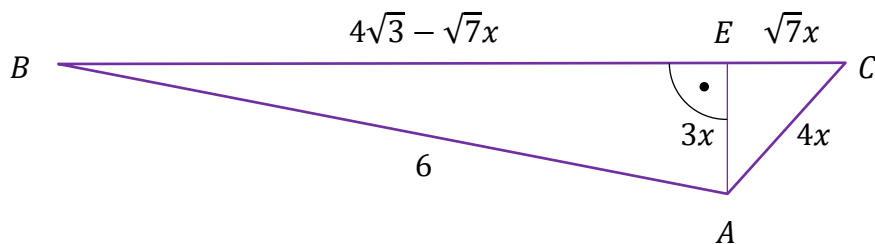
$$\frac{|AB|}{\sin|\angle ACB|} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin|\angle ACB|} = 8$$

Stąd $\sin|\angle ACB| = \frac{3}{4}$.

Niech E będzie spodkiem wysokości poprowadzonej w trójkącie ABC z wierzchołka A na bok BC .

Oznaczmy $|AE| = 3x$. Wtedy $|AC| = 4x$, $|EC| = \sqrt{7}x$, $|BE| = 4\sqrt{3} - \sqrt{7}x$ (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkąta AEB twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy

$$(4\sqrt{3} - \sqrt{7}x)^2 + (3x)^2 = 6^2$$

$$16x^2 - 8\sqrt{21}x + 12 = 0$$

$$4x^2 - 2\sqrt{21}x + 3 = 0$$

$$x = \frac{2\sqrt{21} - 6}{8} \quad \vee \quad x = \frac{2\sqrt{21} + 6}{8}$$

$$4x = \sqrt{21} - 3 \quad \vee \quad 4x = \sqrt{21} + 3$$

Ponieważ $\sqrt{21} + 3 > 7 > 4\sqrt{3} = |BC|$, więc ostatecznie $|AC| = \sqrt{21} - 3$.

Sposób III

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 2R$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 8$$

Stąd $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$ lub $|\sphericalangle BAC| = 120^\circ$.

Długość boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu R jest równa

$R\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = |BC|$. Niech D będzie wierzchołkiem trójkąta równobocznego BCD

wpisanego w dany okrąg. Ponieważ $|AB| = 6$, więc $A \neq D$. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków BD , to wówczas AC byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC . Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków CD , to wówczas AB byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC . Zatem A leży na krótszym z łuków BC okręgu i $|\sphericalangle BAC| = 120^\circ$.

Ponownie stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 8$$

Stąd $\sin|\angle ACB| = \frac{3}{4}$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy

$$\sin^2|\angle ACB| + \cos^2|\angle ACB| = 1$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2|\angle ACB| = 1$$

$$\cos|\angle ACB| = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \vee \quad \cos|\angle ACB| = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Ponieważ AB nie jest najdłuższym bokiem trójkąta, więc kąt ACB nie jest rozwarty

i dlatego $\cos|\angle ACB| = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Obliczamy $\sin|\angle ABC|$:

$$\begin{aligned} \sin|\angle ABC| &= \sin(180^\circ - |\angle BAC| - |\angle ACB|) = \sin(|\angle BAC| + |\angle ACB|) = \\ &= \sin|\angle BAC| \cdot \cos|\angle ACB| + \sin|\angle ACB| \cdot \cos|\angle BAC| = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3 + \sqrt{21}}{8} \end{aligned}$$

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{|AC|}{\sin|\angle ABC|} = 2R$$

$$|AC| = 2R \cdot \sin|\angle ABC|$$

$$|AC| = 8 \cdot \frac{-3 + \sqrt{21}}{8} = -3 + \sqrt{21}$$

Uwaga:

Po obliczeniu $\cos|\angle ACB|$ można obliczyć $\cos|\angle ABC|$:

$$\begin{aligned} \cos|\angle ABC| &= \cos(180^\circ - |\angle BAC| - |\angle ACB|) = -\cos(|\angle BAC| + |\angle ACB|) = \\ &= -\cos|\angle BAC| \cdot \cos|\angle ACB| + \sin|\angle ACB| \cdot \sin|\angle BAC| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

Po zastosowaniu twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos|\angle ABC|$$

$$|AC|^2 = 6^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8}$$

$$|AC| = \sqrt{30 - 6\sqrt{21}}$$

$$|AC| = \sqrt{(\sqrt{21} - 3)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{21} - 3$$

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{k\pi}{5}$ oraz $-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ oraz $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\sin(5x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $\frac{k\pi}{5}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
ALBO

– rozwiązanie równania $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ lub $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt – przekształcenie równoważne równania do postaci alternatywy dwóch równań trygonometrycznych: $\sin(5x) = 0$ lub $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1 pkt – zastosowanie wzorów na sinus sumy i różnicy kątów i przekształcenie równania do postaci

$$\sin(5x) \cos x + \cos(5x) \sin x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x) \cos x - \cos(5x) \sin x = 0$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sumę sinusów i przekształcenie równania do postaci

$$2 \sin \frac{6x+4x}{2} \cos \frac{6x-4x}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Stosujemy wzory na sinus sumy oraz różnicy kątów i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

$$\sin(5x + x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x - x) = 0$$

$$\sin(5x) \cos x + \cos(5x) \sin x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(5x) \cos x - \cos(5x) \sin x = 0$$

$$\sin(5x) \cdot (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\sin(5x) = 0 \quad \vee \quad 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$5x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Sposób II

Stosujemy wzór na sumę sinusów i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$
$$2 \sin \frac{6x+4x}{2} \cos \frac{6x-4x}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$$
$$2 \sin(5x) \cos x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$$
$$\sin(5x) \cdot (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$$
$$\sin(5x) = 0 \quad \vee \quad 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$
$$5x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 10. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.3) rozpoznaje w graniastosłupach [...] kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), oblicza miary tych kątów; X.4) oblicza [...] pola powierzchni graniastosłupów [...], również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{\sqrt{3}a^2}{2} + 3\sqrt{2}a^2$.

3 pkt – wyznaczenie wysokości graniastosłupa: $a\sqrt{2}$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością graniastosłupa), np.

$$(H^2 + a^2) + (H^2 + a^2) - 2 \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \frac{5}{6} = a^2$$

1 pkt – obliczenie cosinusa kąta α : $\frac{5}{6}$

ALBO

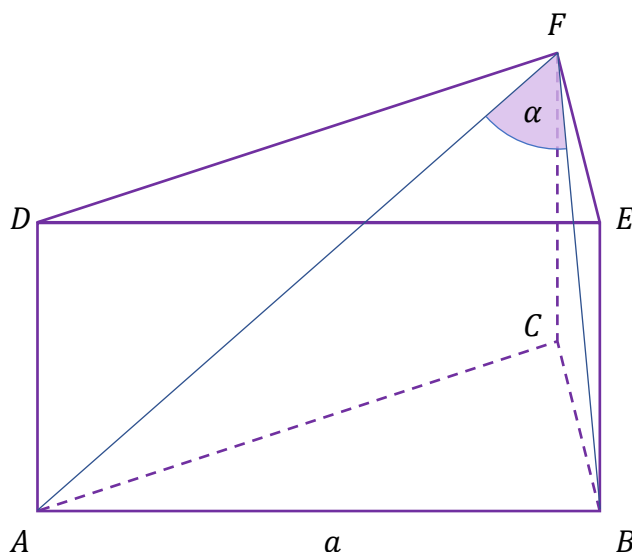
– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta ABF i zapisanie równania

$$|AF|^2 + |BF|^2 - 2 \cdot |AF| \cdot |BF| \cdot \cos \alpha = a^2.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Oznaczmy ponadto przez H wysokość graniastosłupa.

Korzystamy z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i obliczamy $\cos \alpha$:

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{25}{36}$$

więc $\cos \alpha = \frac{5}{6}$, gdyż α jest kątem ostrym.

Stosujemy do trójkąta ABF twierdzenie cosinusów, a następnie korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i otrzymujemy:

$$|AF|^2 + |BF|^2 - 2 \cdot |AF| \cdot |BF| \cdot \cos \alpha = a^2$$

$$(H^2 + a^2) + (H^2 + a^2) - 2 \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \frac{5}{6} = a^2$$

$$\frac{1}{3} \cdot (H^2 + a^2) = a^2$$

$$H = a\sqrt{2}$$

Obliczamy pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa:

$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} + 3\sqrt{2}a^2$$

Zadanie 11. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R3) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na obliczeniu współrzędnych punktów A oraz B . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania:

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A oraz B przecięcia paraboli i prostej

$$3x + y = 2 = 0: A = (-3, 7) \text{ oraz } B = (2, -8).$$

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (jedną ze współrzędnych punktu A lub B),

$$\text{które wynika z układu równań } \begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases}, \text{ np.}$$

$$3x + x^2 - 2x - 8 + 2 = 0, \quad y = \left(-\frac{y+2}{3}\right)^2 + \frac{2(y+2)}{3} - 8.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Drugi etap polega na obliczeniu współrzędnych punktu C . Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu C : $C = (6, -2)$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą/drugą współrzędną punktu C), np.

$$\frac{|3c + (-\frac{1}{2}c + 1) + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}.$$

1 pkt – uzależnienie drugiej/pierwszej współrzędnej punktu C od pierwszej/drugiej

$$\text{współrzędnej, np. } C = \left(c, -\frac{1}{2}c + 1\right).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na obliczeniu długości boku BC .

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – obliczenie długości boku BC równoległoboku: $|BC| = 2\sqrt{13}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy współrzędne punktów przecięcia paraboli z prostą o równaniu $3x + y + 2 = 0$:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + x^2 - 2x - 8 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ x = -3 \vee x = 2 \end{cases}$$

Stąd $A = (-3, 7)$ oraz $B = (2, -8)$.

Punkt C leży na prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i ma pierwszą współrzędną dodatnią, więc $C = (c, -\frac{1}{2}c + 1)$ przy pewnym $c > 0$.

Korzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej i otrzymujemy kolejno:

$$\frac{|3c + (-\frac{1}{2}c + 1) + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{|2,5c + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$|2,5c + 3| = 18$$

$$c = 6 \vee c = -\frac{42}{5}$$

Zatem $C = (6, -2)$.

Obliczamy długość boku BC :

$$|BC| = \sqrt{(6 - 2)^2 + (-2 + 8)^2} = 2\sqrt{13}$$

Zadanie 12. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète’a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na zapisaniu warunku $\Delta > 0$ w postaci nierówności z niewiadomą m i rozwiązaniu tej nierówności. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie warunku $\Delta > 0$ w postaci nierówności z niewiadomą m i rozwiązanie tej nierówności: $(m+1)^2 + 4 \cdot (3-m) \cdot (m+1)^2 > 0$ oraz $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{13}{4})$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

4 pkt – wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7: 1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}, \frac{-3+2\sqrt{42}}{3}.$$

3 pkt – zapisanie równania z niewiadomą m w postaci $\frac{-3m^3-3m^2+59m-53}{(3-m)^2} = 0$ lub

$3m^3 + 3m^2 - 59m + 53 = 0$ oraz wyznaczenie jednego z rozwiązań tego równania (np. $m = 1$) i podzielenie wielomianu $3m^3 + 3m^2 - 59m + 53$ przez odpowiedni dwumian, np. $(3m^3 + 3m^2 - 59m + 53):(m-1) = 3m^2 + 6m - 53$
ALBO

– zapisanie równania z niewiadomą m w postaci $\frac{-3m^3-3m^2+59m-53}{(3-m)^2} = 0$ lub

$3m^3 + 3m^2 - 59m + 53 = 0$ **oraz** zastosowanie metody grupowania i zapisanie wielomianu $3m^3 + 3m^2 - 59m + 53$ w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopni dodatnich, np. $(m - 1)(3m^2 + 6m - 53)$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą m , wynikającego z warunku

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7, \text{ np. } \left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-(m+1)^2}{3-m} = \frac{-(m+1)^2}{3-m} + 7.$$

1 pkt – przekształcenie warunku $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na zapisaniu warunku $3 - m \neq 0$ oraz wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki: $3 - m \neq 0$ i $\Delta > 0$, i $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie warunku $3 - m \neq 0$ i poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , które spełniają jednocześnie warunki $3 - m \neq 0$ i $\Delta > 0$,

$$\text{i } (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7: 1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

I etap

Równanie $(3 - m)x^2 + (m + 1)x - (m + 1)^2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste tylko wtedy, gdy $3 - m \neq 0$ i wyróżnik trójmianu $(3 - m)x^2 + (m + 1)x - (m + 1)^2$ jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$(m + 1)^2 + 4 \cdot (3 - m)(m + 1)^2 > 0$$

$$(m + 1)^2[1 + 4 \cdot (3 - m)] > 0$$

$$(m + 1)^2 \cdot (13 - 4m) > 0$$

$$-4 \cdot (m + 1)^2 \cdot \left(m - \frac{13}{4}\right) > 0$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{13}{4}\right)$$

II etap

Sposób I

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek

$x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$$

$$\left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-(m+1)^2}{3-m} = \frac{-(m+1)^2}{3-m} + 7$$

$$\left(\frac{m+1}{m-3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{(m+1)^2}{m-3} - 7 = 0$$

$$\frac{(m+1)^2 - 3 \cdot (m+1)^2(m-3) - 7(m-3)^2}{(m-3)^2} = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 3(m^2 + 2m + 1)(m-3) - 7(m^2 - 6m + 9) = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53 = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m^3 + 3m - 3m^2 + 3m + 53m - 53 = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m(m^2 - 1) - 3m(m-1) + 53(m-1) = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$(m-1)[-3m(m+1) - 3m + 53] = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$(m-1)[-3m^2 - 6m + 53] = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$\left(m = 1 \quad \vee \quad m = \frac{-3 - 2\sqrt{42}}{3} \quad \vee \quad m = \frac{-3 + 2\sqrt{42}}{3}\right) \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$m = 1 \quad \vee \quad m = \frac{-3 - 2\sqrt{42}}{3} \quad \vee \quad m = \frac{-3 + 2\sqrt{42}}{3}$$

Sposób II

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1x_2 + 7$$

$$\left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-(m+1)^2}{3-m} = \frac{-(m+1)^2}{3-m} + 7$$

$$\left(\frac{m+1}{m-3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{(m+1)^2}{m-3} - 7 = 0$$

$$\frac{(m+1)^2 - 3 \cdot (m+1)^2(m-3) - 7(m-3)^2}{(m-3)^2} = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 3(m^2 + 2m + 1)(m-3) - 7(m^2 - 6m + 9) = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

$$-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53 = 0 \quad \wedge \quad m \neq 3$$

Zauważamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53$. Dzielimy wielomian $-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53$ przez dwumian $m - 1$. Dzielienie to możemy wykonać, korzystając np. z algorytmu Hornera

	-3	-3	59	-53
1	-3	-6	53	0

Otrzymujemy $(m - 1)(-3m^2 - 6m + 53) = 0$. Stąd $m = 1$ lub $m = \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}$, lub $m = \frac{-3+2\sqrt{42}}{3}$.

III etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru $m \neq 3$, które jednocześnie spełniają warunki

$$m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{13}{4}\right) \text{ oraz } m \in \left\{1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}, \frac{-3+2\sqrt{42}}{3}\right\}: m \in \left\{1, \frac{-3-2\sqrt{42}}{3}\right\}.$$

Zadanie 13.1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów i ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – wyznaczenie pola P_p podstawy ostrosłupa w zależności od promienia R okręgu

opisanego na podstawie: $P_p = \frac{(R\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A, B, C – wierzchołki podstawy ostrosłupa,

S – wierzchołek ostrosłupa,

H – wysokość ostrosłupa poprowadzona z wierzchołka S na płaszczyznę podstawy ABC ,

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa.

Podstawa ABC ostrosłupa jest trójkątem równobocznym, więc promień R okręgu

opisanego na podstawie jest równy $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Stąd $a = R\sqrt{3}$. Zatem pole P_p podstawy

jest równe $P_p = \frac{(R\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Ponieważ $H + R = 6$, więc $H = 6 - R$.

Wyznaczamy objętość V ostrosłupa w zależności od R :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \cdot (6 - R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

Zadanie 13.2. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.R4) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R5) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $R = 4$ i obliczenie wartości największej funkcji V : $8\sqrt{3}$.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $R = 4$

ALBO

– przekształcenie nierówności $\frac{R+R+12-2R}{3} \geq \sqrt[3]{R \cdot R \cdot (12-2R)}$ do postaci $\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 64 \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$ oraz zapisanie, że równość zachodzi tylko wtedy, gdy liczby R oraz $12 - 2R$ są równe.

2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji V : $R = 4$

ALBO

– obliczenie wartości R , dla której zachodzi równość średniej arytmetycznej i geometrycznej liczb dodatnich R , R oraz $12 - 2R$: $R = 4$,

ALBO

– przekształcenie nierówności $\frac{R+R+12-2R}{3} \geq \sqrt[3]{R \cdot R \cdot (12-2R)}$ do postaci $\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 64 \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V : $V'(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (12R - 3R^2)$

ALBO

– zapisanie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną liczb R , R oraz $12 - 2R$: $\frac{R+R+12-2R}{3} \geq \sqrt[3]{R \cdot R \cdot (12-2R)}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości R , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:

- opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V
LUB
- zapisuje, że dla wyznaczonej wartości R funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość,
LUB
- zapisuje, że dla wyznaczonej wartości R funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.
3. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, że dla $R = 4$ funkcja V osiąga najmniejszą wartość i obliczy $V(4) = 8\sqrt{3}$, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie. Jeśli zdający nie przedstawi żadnego uzasadnienia i obliczy $V(4) = 8\sqrt{3}$, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wyznaczamy pochodną funkcji V : $V'(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (12R - 3R^2)$ dla $R \in (0, 6)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V :

$$V'(R) = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (12R - 3R^2) = 0$$

$$3R \cdot (4 - R) = 0$$

$$R = 0 \notin (0, 6) \text{ lub } R = 4 \in (0, 6)$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(R) > 0 \text{ dla } R \in (0, 4),$$

$$V'(R) < 0 \text{ dla } R \in (4, 6).$$

Zatem funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0, 4]$ oraz jest malejąca w przedziale $[4, 6)$.

Stąd dla $R = 4$ funkcja V osiąga wartość największą równą

$$V(4) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6 \cdot 4^2 - 4^3) = 8\sqrt{3}$$

Sposób II

Ponieważ $R \in (0, 6)$, więc liczby R , R oraz $12 - 2R$ są dodatnie. Z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich R , R oraz $12 - 2R$ otrzymujemy

$$\frac{R + R + 12 - 2R}{3} \geq \sqrt[3]{R \cdot R \cdot (12 - 2R)}$$

$$4 \geq \sqrt[3]{2 \cdot (6R^2 - R^3)}$$

$$64 \geq 2 \cdot (6R^2 - R^3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 64 \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

$$8\sqrt{3} \geq V(R)$$

przy czym równość zachodzi tylko dla tych R , dla których $R = 12 - 2R$ i jednocześnie $R \in (0, 6)$, tj. dla $R = 4$.

Zatem funkcja V osiąga wartość największą dla $R = 4$ i wtedy $V(4) = 8\sqrt{3}$.