

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom rozszerzony
<i>Formy arkusza:</i>	MMA-R1_1P-202, MMA-R1_2P-202, MMA-R1_3P-202, MMA-R1_4P-202, MMA-R1_5P-202, MMA-R1_6P-202, MMA-R1_7P-202, MMA-R1_QP-202
<i>Termin egzaminu:</i>	Termin główny – czerwiec 2020 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	3 sierpnia 2020 r.

Zadania zamknięte

W zadaniach 1.–4. przyznaje się punkt za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R3.4).	B

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów (R5.2).	C

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
III. Modelowanie matematyczne	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzenia mi do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).	A

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).	B

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź			
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów (R7.5).	<table border="1"> <tr> <td>9</td> <td>5</td> <td>5</td> </tr> </table>	9	5	5
9	5	5			

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna odpowiedź.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bez względnej i jej interpretację geometryczną (R1.1). 4. Funkcje. Zdający szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu (R4.4).

Zasady oceniania i sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.

Zdający naszkicuje wykres funkcji f określonej wzorem:

- $f(x) = |x - 5|$

albo

- $f(x) = |x - 5| + 4$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze układ nierówności

- $0 < (a - 1)^2 - 4 < 5$ oraz rozwiąże poprawnie jedną z nierówności tego układu

albo

- $4 < (a - 1)^2 < 9$ oraz rozwiąże poprawnie jedną z nierówności tego układu

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 3p.

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.

Zdający zapisze, że podane równanie ma dwa rozwiązania dodatnie, gdy spełniona jest nierówność

$$0 < |x-5| < 5$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze układ nierówności $0 < (a-1)^2 - 4 < 5$ oraz rozwiąże poprawnie jedną z dwóch nierówności tego układu i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 3p.

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.

Zdający:

- zapisze, że podane równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2 - 4 > 0,$$

albo

- zapisze podane równanie w postaci alternatywy równań

$$x-5 = (a-1)^2 - 4 \quad \text{lub} \quad x-5 = -(a-1)^2 + 4$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający:

- zapisze, że podane równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2 - 4 > 0$$

i

- zapisze podane równanie w postaci alternatywy równań

$$x-5 = (a-1)^2 - 4 \quad \text{lub} \quad x-5 = -(a-1)^2 + 4$$

i

- rozwiąże poprawnie przynajmniej jedną z trzech nierówności:

$$(a-1)^2 - 4 > 0, \quad (a-1)^2 + 1 > 0, \quad 9 - (a-1)^2 > 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 3p.

Zdający zapisze, że $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

Zasady oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.

Zdający

- zapisze warunek istnienia rozwiązań rzeczywistych równania $|x-5| = (a-1)^2 - 4$:

$$(a-1)^2 - 4 \geq 0$$

albo

- zdający zapisze układ nierówności:

$$(-10)^2 - 4 \left(25 - ((a-1)^2 - 4)^2 \right) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1} > 0 \quad \text{i} \quad 25 - ((a-1)^2 - 4)^2 > 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze układ nierówności

$$(a-1)^2 - 4 \geq 0 \quad \text{i} \quad (-10)^2 - 4 \left(25 - ((a-1)^2 - 4)^2 \right) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1} > 0 \quad \text{i} \quad 25 - ((a-1)^2 - 4)^2 > 0$$

i poprawnie rozwiąże drugą lub czwartą z nich i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

Zasady oceniania V sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.

Zdający zastosuje definicję wartości bezwzględnej i zapisze równanie w każdym z dwóch przypadków:

$$\text{gdy } x-5 \geq 0, \text{ to } x-5 = (a-1)^2 - 4,$$

$$\text{gdy } x-5 < 0, \text{ to } 5-x = (a-1)^2 - 4$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze warunki na to, żeby rozwiązaniem równania była liczba dodatnia w każdym z dwóch rozpatrywanych przypadków i wyznaczy wszystkie wartości parametru a , dla których rozwiązaniem równania jest liczba dodatnia w jednym z tych przypadków:

- gdy $x-5 \geq 0$, to $(a-1)^2 + 1 > 0$ i $(a-1)^2 + 1 \geq 5$, skąd $a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

albo

- gdy $x-5 < 0$, to $9 - (a-1)^2 > 0$ i $9 - (a-1)^2 < 5$, skąd $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający wyznaczy wszystkie wartości parametru a , dla których równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa rozwiązania dodatnie: $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

Uwaga

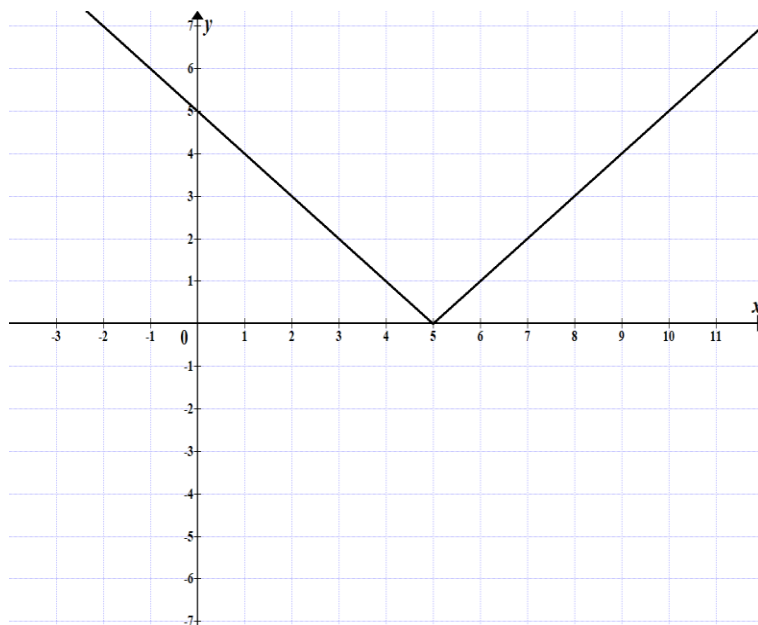
Jeżeli zdający rozpatrzy oba przypadki, ale w pierwszym przypadku nie skomentuje, że nierówność $(a-1)^2+1>0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a , to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiązuje zadanie sposobem II lub III zapisze nierówność $(a-1)^2-4 \geq 0$ i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, otrzymując w odpowiedzi zbiór $(-2, -1) \cup (3, 4)$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie I sposobem i naszkicowany wykres zawiera usterki, ale dalsze rozumowanie jest prawidłowe, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|+4$, błędnie przesunie wykres funkcji $y=|x-5|$ o 4 jednostki w dół i konsekwentnie przeprowadzi rozumowanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|+4$, zamieni miejscami współrzędne wektora przesunięcia, otrzyma wykres funkcji, dla której istnieją dwa rozwiązania dodatnie równania $f(x)=(a-1)^2$ i konsekwentnie przeprowadzi rozumowanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|$, błędnie przesunie wykres funkcji $y=|x|$, i otrzyma wykres funkcji g takiej, że nie istnieją dwa dodatnie rozwiązania równania $g(x)=(a-1)^2-4$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe rozwiązania**I sposób**

Rozważmy funkcję f określoną wzorem $f(x) = |x-5|$ i naszkicujmy jej wykres.



Wnioskujemy stąd, że podane równanie ma dwa pierwiastki dodatnie, jeśli spełniona jest nierówność

$$0 < (a-1)^2 - 4 < 5, \text{ czyli nierówność } 4 < (a-1)^2 < 9.$$

Stąd otrzymujemy, że $2 < |a-1| < 3$, zatem

$$(a-1) \in (-3, -2) \cup (2, 3).$$

Ostatecznie $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

II sposób („podstawianie”)

Równanie $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ ma dwa dodatnie rozwiązania rzeczywiste, gdy prawdziwa jest nierówność

$$0 < |x-5| < 5.$$

Ponieważ $|x-5| = (a-1)^2 - 4$, więc prawdziwa jest nierówność

$$0 < (a-1)^2 - 4 < 5$$

Nierówność ta jest równoważna koniunkcji nierówności

$$(a-3)(a+1) > 0 \quad \text{ i } \quad (a+2)(a-4) < 0,$$

skąd otrzymujemy

$$a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \quad \text{ i } \quad a \in (-2, 4).$$

Zatem dla $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$ równanie $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ ma dwa rozwiązania dodatnie.

III sposób

Równanie $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ ma dwa rozwiązania, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2 - 4 > 0.$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności $(a-3)(a+1) > 0$, skąd otrzymujemy

$$a < -1 \text{ lub } a > 3. \quad (1)$$

Równanie $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ jest równoważne alternatywie równań:

$$x-5 = (a-1)^2 - 4 \quad \text{lub} \quad x-5 = -(a-1)^2 + 4$$

$$x = (a-1)^2 + 1 \quad \text{lub} \quad x = -(a-1)^2 + 9$$

Rozwiązanie pierwszego z równań jest liczbą dodatnią, dla każdej liczby rzeczywistej a .
Zatem, aby równanie miało dwa dodatnie rozwiązania musi być spełniony warunek:

$$-(a-1)^2 + 9 > 0.$$

Stąd otrzymujemy $(3+a-1)(3-a+1) > 0$, czyli $(a+2)(4-a) > 0$, a zatem

$$-2 < a < 4. \quad (2)$$

Uwzględniając (1) i (2) otrzymujemy $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

IV sposób

Ponieważ lewa strona równania $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ jest nieujemna, więc równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(a-1)^2 - 4 \geq 0,$$

$$(a-1-2)(a-1+2) \geq 0,$$

$$(a-3)(a+1) \geq 0,$$

$$a \leq -1 \quad \text{lub} \quad a \geq 3.$$

Podnosząc obie strony równania $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ do kwadratu, otrzymujemy równanie równoważne

$$|x-5|^2 = \left((a-1)^2 - 4\right)^2,$$

$$(x-5)^2 = \left((a-1)^2 - 4\right)^2,$$

$$x^2 - 10x + 25 - \left((a-1)^2 - 4\right)^2 = 0.$$

Równanie to ma dwa dodatnie rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 , gdy spełnione są jednocześnie trzy warunki

$$\Delta > 0 \quad \text{i} \quad x_1 + x_2 > 0 \quad \text{i} \quad x_1 x_2 > 0.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$(-10)^2 - 4 \left(25 - \left((a-1)^2 - 4 \right)^2 \right) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1} > 0 \quad \text{i} \quad 25 - \left((a-1)^2 - 4 \right)^2 > 0,$$

Druga z tych nierówności jest prawdziwa dla każdej wartości rzeczywistej a .

Rozwiązujemy pierwszą z tych nierówności

$$100 - 4 \left(25 - \left((a-1)^2 - 4 \right)^2 \right) > 0,$$

$$25 - \left(25 - \left((a-1)^2 - 4 \right)^2 \right) > 0,$$

$$\left((a-1)^2 - 4 \right)^2 > 0,$$

$$(a-1)^2 - 4 \neq 0,$$

$$(a-1-2)(a-1+2) \neq 0,$$

$$(a-3)(a+1) \neq 0,$$

$$a \neq 3 \quad \text{i} \quad a \neq -1.$$

Rozwiązujemy trzecią z nierówności

$$25 - \left((a-1)^2 - 4 \right)^2 > 0,$$

$$\left(5 - \left((a-1)^2 - 4 \right) \right) \left(5 + \left((a-1)^2 - 4 \right) \right) > 0,$$

$$\left(9 - (a-1)^2 \right) \left((a-1)^2 + 1 \right) > 0,$$

Ponieważ $(a-1)^2 + 1 > 0$ dla każdej wartości a , więc

$$9 - (a-1)^2 > 0,$$

$$(3 - (a-1))(3 + (a-1)) > 0,$$

$$(4 - a)(2 + a) > 0,$$

$$-2 < a < 4.$$

W rezultacie otrzymujemy

$$(a \leq -1 \text{ lub } a \geq 3) \text{ i } a \neq 3 \text{ i } a \neq -1 \text{ i } -2 < a < 4.$$

$$\text{Stąd } a \in (-2, -1) \cup (3, 4).$$

V sposób

Rozważmy dwa przypadki.

1. Gdy $x-5 \geq 0$, czyli $x \geq 5$, to wtedy $|x-5| = x-5$, a równanie ma postać

$$x-5 = (a-1)^2 - 4. \text{ Stąd } x = (a-1)^2 + 1. \text{ Rozwiązanie to jest dodatnie dla każdej wartości}$$

rzeczywistej a . Ponieważ $x \geq 5$, więc $(a-1)^2 + 1 \geq 5$, czyli $(a-1)^2 \geq 4$, skąd $|a-1| \geq 2$,

a więc $a \leq -1$ lub $a \geq 3$. W tym przypadku otrzymujemy

$$a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty).$$

2. Gdy $x-5 < 0$, czyli $x < 5$, to wtedy $|x-5| = 5-x$, a równanie ma postać

$$5-x = (a-1)^2 - 4. \text{ Stąd } x = 9 - (a-1)^2. \text{ Rozwiązanie to jest dodatnie, gdy}$$

$9 - (a-1)^2 > 0$, czyli $(a-1)^2 < 9$, skąd $|a-1| < 3$, a więc $-2 < a < 4$. Rozwiązanie to jest

mnijšie od 5, gdy $9 - (a-1)^2 < 5$, czyli $(a-1)^2 > 4$, skąd $|a-1| > 2$, a więc $a < -1$ lub $a > 3$. Zatem w tym przypadku otrzymujemy $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

W rezultacie rozpatrzonych przypadków otrzymujemy

$$a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \text{ i } a \in (-2, -1) \cup (3, 4),$$

a więc $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

Zadanie 7. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów (7.3).

Zasady oceniania I i II sposobu

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzanie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.

Zdający:

- skorzysta z podobieństwa trójkątów i zapisze, np.: $|AD| = 3|KP|$ lub

$$|CP| = x \text{ i } |DP| = 2x$$

albo

- skorzysta z twierdzenia o odcinkach stycznych i zapisze, np.: $|KM| = |KP|$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający:

- skorzysta z podobieństwa trójkątów CPK i CMD i zapisze poprawne równanie

$$\text{pozwalające obliczyć długość odcinka } PK: \frac{|PK|}{2} = \frac{2x}{3x}$$

albo

- skorzysta z podobieństwa trójkątów ADM i ACD i zapisze poprawne równanie z jedną

$$\text{niewiadomą, np. } \frac{4-t}{3t} = \frac{3t}{6}, \text{ gdzie } t = |KM| = |KP|$$

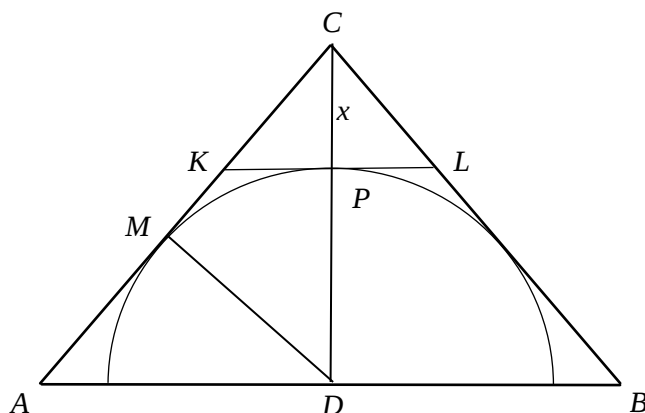
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający rozwiąże powyższe równanie i uzasadni, że $|AM| : |MC| = 4 : 5$.

Przykładowe rozwiązanie**I sposób**

Najpierw uzupełnimy rysunek.



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnosimy, że odcinek KL jest równoległy do odcinka AB .

Oznaczmy środek odcinka KL przez P i niech $|CP| = x$.

Trójkąty CKP i CAD są podobne (cecha KKK) w skali $1:3$. Wtedy $|PD| = 2x$ i $|MD| = 2x$.

Trójkąty CPK i CMD są podobne (cecha KKK). Stąd $\frac{|PK|}{|CK|} = \frac{|MD|}{|CD|}$, czyli $\frac{|PK|}{2} = \frac{2x}{3x}$.

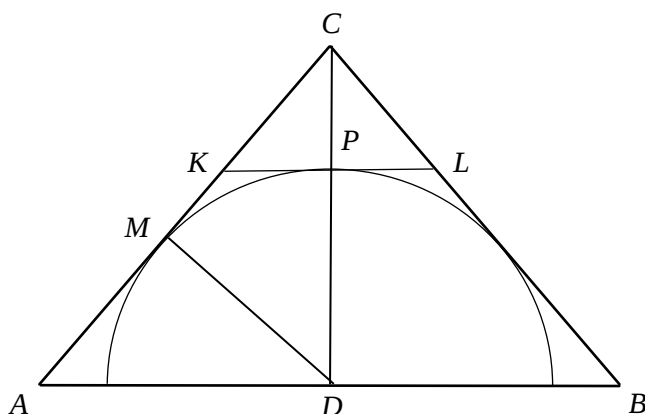
Stąd $|PK| = \frac{4}{3}$, więc $|AM| = \frac{8}{3}$ oraz $|MC| = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$.

Zatem $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5}$.

To kończy dowód.

II sposób

Najpierw uzupełnimy rysunek.



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnosimy, że odcinek KL jest równoległy do odcinka AB .

Niech punkt P będzie środkiem odcinka KL .

Zauważamy, że $|KM| = |KP|$, z twierdzenia o równości odcinków stycznych, łączących punkt leżący poza okręgiem z punktami styczności.

Niech $|KM| = |KP| = t$. Wtedy $|AD| = 3t$ i $|AM| = 4 - t$. Trójkąt ADM jest podobny do trójkąta ACD , na mocy cechy (kąt, kąt, kąt); są to trójkąty prostokątne, a kąt MAD jest wspólny dla obu trójkątów.

Możemy zatem zapisać równość: $\frac{|AM|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AC|}$, czyli $\frac{4-t}{3t} = \frac{3t}{6}$, skąd otrzymujemy równanie $9t^2 + 6t - 24 = 0$.

Równanie to ma dwa rozwiązania: $t = -2, t = \frac{4}{3}$. Odrzucamy ujemne rozwiązanie tego równania.

Zatem $t = \frac{4}{3}$. Ostatecznie $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4 - \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5}$.

To kończy dowód.

Zadanie 8. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.

Zdający zapisze równanie $(a+1)^2 = (2b+1)^2$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze wniosek $a = 2b$ (bez uzasadnienia lub z niepełnym uzasadnieniem)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.

Zdający zapisze równanie $(a-2b)(a+2b) = -2(a-2b)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający zapisze wniosek $a = 2b$ (bez uzasadnienia lub z niepełnym uzasadnieniem) i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.**

Zdający obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$ np. zmiennej a , $\Delta = (4b + 2)^2$ i zapisze, że jest on nieujemny dla każdej wartości b albo, że jest on dodatni dla każdej wartości $b > 0$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2p.

Zdający obliczy pierwiastki trójmianu $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$: $a = -2 - 2b$ lub $a = 2b$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Uwaga

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość równania jedynie dla wybranych wartości a i b , to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe rozwiązania**I sposób**

Zapisujemy równanie równoważne równaniu z założenia: $a^2 + 2a + 1 = 4b^2 + 4b + 1$. Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia i zapisujemy to równanie w postaci $(a + 1)^2 = (2b + 1)^2$. Oba wyrażenia w nawiasach są dodatnie, zatem równość kwadratów jest równoważna równości tych wyrażen, stąd $a + 1 = 2b + 1$ i dalej, $a = 2b$.

To kończy dowód.**II sposób**

Przekształcamy założenie równoważnie:

$$\begin{aligned} a^2 - 4b^2 &= 4b - 2a \\ (a - 2b)(a + 2b) &= -2(a - 2b) \\ (a - 2b)(a + 2b + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Liczby a i b są dodatnie, zatem $a + 2b + 2 \neq 0$. Stąd $a - 2b = 0$, czyli $a = 2b$.

To kończy dowód.

III sposób

Wyrażenie $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$ traktujemy jako trójmian kwadratowy jednej zmiennej np. a .

Wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$ jest równy: $\Delta = (4b + 2)^2$.

Ten wyróżnik jest nieujemny dla każdej rzeczywistej wartości b .

Obliczamy pierwiastki tego trójmianu

$$a = -2 - 2b \text{ lub } a = 2b.$$

Ponieważ $b > 0$, więc liczba $-2 - 2b < 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $a > 0$.

Zatem $a = 2b$.

To kończy dowód.

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.6).

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1p.

Zdający doprowadzi równanie do postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego kąta, np.: $3 - 6\sin^2 x + 10 - 10\sin^2 x = 24\sin x - 3$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2p.

Zdający rozwiąże równanie kwadratowe $2t^2 + 3t - 2 = 0$: $t = -2$ oraz $t = \frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- zapisze, że równanie $\sin x = -2$ nie ma rozwiązań i poda co najmniej jedną serię rozwiązań równania $\sin x = \frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$

albo

- zapisze, że równanie $\sin x = -2$ nie ma rozwiązań i poda jedno rozwiązanie równania $\sin x = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

Rozwiązanie pełne..... 4 p.

Zdający wyznaczy oba rozwiązania równania: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ oraz $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Uwagi

1. Akceptujemy przybliżone rozwiązania elementarnych równań trygonometrycznych.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie obydwa rozwiązania równania $\sin x = \frac{1}{2}$ należące do przedziału $(0, 2\pi)$ i nie zapisze komentarza dotyczącego równania $\sin x = -2$, to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający przed uzyskaniem trygonometrycznych równań elementarnych popełni błędy rachunkowe i otrzyma równania elementarne, z których co najmniej jedno ma dwie serie rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający przed uzyskaniem elementarnych równań trygonometrycznych popełni błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu wzoru na cosinus kąta podwojonego lub błąd polegający na podstawieniu w miejsce $\sin x$ wyrażenia $\sqrt{1 - \cos^2 x}$, ale otrzyma co najmniej jedno równanie typu $\sin x = a$, gdzie $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, i konsekwentnie to równanie rozwiąże, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**. Jeżeli jednak zdający otrzyma co najmniej jedno równanie typu $\sin x = a$, gdzie $a \in \{-1, 0, 1\}$, i to równanie konsekwentnie rozwiąże, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający zapisze równanie $\sin x = \frac{2}{3} \cos^2 x$, równoważne równaniu $3 \cos 2x + 10 \cos^2 x = 24 \sin x - 3$, a następnie rozwiąże równanie $\frac{4}{9} \cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$, otrzymując 4 rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$ i nie odrzuci „obcych” rozwiązań: $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy dane równanie w sposób równoważny:

$$\begin{aligned} 3 \cos 2x + 10 \cos^2 x &= 24 \sin x - 3, \\ 3(1 - 2 \sin^2 x) + 10(1 - \sin^2 x) &= 24 \sin x - 3, \\ 3 - 6 \sin^2 x + 10 - 10 \sin^2 x &= 24 \sin x - 3, \\ 16 - 16 \sin^2 x &= 24 \sin x, \\ 16 \sin^2 x + 24 \sin x - 16 &= 0 \\ 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Niech $t = \sin x$. Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned} 2t^2 + 3t - 2 &= 0, \\ \Delta = 3^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 &= 9 + 16 = 25, \\ \sqrt{\Delta} &= 5, \end{aligned}$$

$$t_1 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2,$$

$$t_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Równanie $\sin x = -2$ jest sprzeczne, a równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dwa

rozwiązania: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ oraz $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 10. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3). Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n -początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).

Zasady oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania1p.

Zdający

- wykorzysta wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego lub własność ciągu geometrycznego i zapisze np.:

$$a_2 = a_1 q \text{ i } a_3 = a_1 q^2$$

lub

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$$

lub

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

albo

- wykorzysta wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego lub własność ciągu arytmetycznego i zapisze np.:
 - $(a_2 = a_3 + r \text{ i } a_1 = a_3 + 3r)$ lub $(b_2 = a_3 + r \text{ i } b_4 = a_3 + 3r)$ lub $(b_2 = b_1 + r \text{ i } b_4 = b_1 + 3r)$
 - lub
 - $a_1 - a_2 = 2(a_2 - a_3)$ lub $b_4 - b_2 = 2(b_2 - b_1)$
 - lub
 - $b_3 = \frac{b_4 + b_2}{2}$ i $b_2 = \frac{b_1 + b_3}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2p.

Zdający

- zapisze układ równań, z którego można otrzymać równanie z jedną niewiadomą, np.:
 - $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$ i $a_1 = a_1 q^2 + 3(a_1 q - a_1 q^2)$

lub

$$\circ \quad a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4} \quad \text{i} \quad a_1q = \frac{\frac{a_1+a_1q}{2} + a_1q^2}{2}$$

albo

- zapisze równanie pozwalające wyznaczyć związek między a_3 i r , np.:

$$(a_3 + r)^2 = (a_3 + 3r) \cdot a_3$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3p.

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $2q^2 - 3q + 1 = 0$

albo

- zapisze $r = a_3$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne..... 4p.

Zdający

- rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np. $2q^2 - 3q + 1 = 0$: $q = 1$ lub $q = \frac{1}{2}$

albo

- obliczy trzeci wyraz ciągu geometrycznego (a_n) : $a_3 = \frac{3}{4}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne..... 5 p.

Zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu geometrycznego $a_1 = 3$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np. $2q^2 - 3q + 1 = 0$: $q = 1$ lub $q = \frac{1}{2}$ oraz obliczy dwie wartości a_1 : $a_1 = 3$, $a_1 = \frac{7}{4}$ i nie odrzuci $a_1 = \frac{7}{4}$, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeśli zdający stosuje poprawną strategię rozwiązania zadania, a jedynymi błędami w rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje maksymalnie **4 punkty**.
3. Jeśli zdający błędnie stosuje wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (np. zapisuje $a_3 = a_1q^3$) lub ciągu arytmetycznego i korzysta z tego w rozwiązaniu, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeśli zdający odgadnie iloraz ciągu geometrycznego, a następnie obliczy na tej podstawie pierwszy wyraz tego ciągu, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
5. Jeśli zdający zamienia (myli) własności ciągu geometrycznego z własnościami ciągu arytmetycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
6. Jeśli zdający zapisuje tylko odpowiedź $a_1 = 3$, to otrzymuje **0 punktów**.
7. Akceptujemy sytuacje, w których zdający dzieli obie strony zbudowanych przez siebie równań przez a_1 albo przez r , albo też przez $q - 1$ bez zapisania jakiegokolwiek komentarza.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Sumując wyrazy ciągu geometrycznego otrzymujemy równość

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4}. \quad (1)$$

Niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem arytmetycznym.

Zatem $b_1 = a_1q^2$, $b_2 = a_1q$, $b_4 = a_1$, więc różnica tego ciągu $r = a_1q - a_1q^2$ oraz $b_4 = b_1 + 3r$, czyli $a_1 = a_1q^2 + 3(a_1q - a_1q^2)$.

Stąd wynika, że $a_1 = 3a_1q - 2a_1q^2$ i $a_1(2q^2 - 3q + 1) = 0$.

Ponieważ z równości (1) wynika, że $a_1 \neq 0$, więc $2q^2 - 3q + 1 = 0$. Zatem $q = 1$ lub $q = \frac{1}{2}$.

Dla $q = 1$ ciąg (a_n) jest stały. Stąd ciąg (b_n) też jest stały. Zatem tylko dla $q = \frac{1}{2}$ ciąg (b_n)

może być ciągiem rosnącym. Otrzymujemy wtedy $r = \frac{1}{4}a_1$. Z równości (1) otrzymujemy

$$a_1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_1 = \frac{21}{4}, \text{ a stąd wynika, że } a_1 = 3.$$

II sposób

W ciągu arytmetycznym $b_1 = a_3$, $b_2 = a_3 + r$, $b_4 = a_3 + 3r$, gdzie $r > 0$.

Ponieważ ciąg $(a_3 + 3r, a_3 + r, a_3)$ jest ciągiem geometrycznym, więc zachodzi równość

$$(a_3 + r)^2 = (a_3 + 3r) \cdot a_3,$$

skąd wynika, że $a_3^2 + 2a_3r + r^2 = a_3^2 + 3a_3r$,

a zatem $r^2 = a_3r$.

Ponieważ z założenia $r > 0$, więc $r = a_3$. Podana suma trzech wyrazów jest zatem równa

$$4a_3 + 2a_3 + a_3 = \frac{21}{4}.$$

Otrzymujemy zatem $a_3 = \frac{3}{4}$. Wtedy $a_1 = b_4 = 4a_3 = 3$.

III sposób

Z danych w treści zadania wynikają równości:

$$b_1 = a_1q^2, \quad b_2 = a_1q, \quad b_4 = a_1.$$

Ponieważ (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, więc możemy zapisać równości

$$b_3 = \frac{b_4 + b_2}{2} = \frac{a_1 + a_1q}{2}$$

oraz

$$b_2 = \frac{b_3 + b_1}{2} = \frac{\frac{a_1 + a_1q}{2} + a_1q^2}{2} = a_1q$$

Rozwiążemy równanie

$$\frac{\frac{a_1 + a_1 q}{2} + a_1 q^2}{2} = a_1 q$$

Ponieważ $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$, więc możemy założyć, że $a_1 \neq 0$. Powyższe równanie jest zatem równoważne równaniu

$$\frac{\frac{1+q}{2} + q^2}{2} = q, \text{ czyli równaniu } 1 + q + 2q^2 = 4q.$$

Równanie kwadratowe $2q^2 - 3q + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania: $q = 1$ oraz $q = \frac{1}{2}$.

Jeśli $q = 1$, to obydwa ciągi są ciągami stałymi. Zatem tylko dla $q = \frac{1}{2}$ ciąg (b_n) może być ciągiem rosnącym.

Z równości $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$ otrzymujemy równanie $\frac{7}{4}a_1 = \frac{21}{4}$, czyli $a_1 = 3$.

Zadanie 11. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.1).

Zasady oceniania I i II sposobu

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części.

Pierwsza z nich polega na:

- rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$

albo

- sprawdzeniu, że dla każdej obliczonej wartości parametru m równanie $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

Druga część polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m , dla których jest spełniony warunek $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugą część rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje za:

- obliczenie dwóch pierwiastków trójmianu $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15$:

$$x_1 = m+5 \text{ oraz } x_2 = 2m-3.$$

albo

- przekształcenie wyrażenia $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2$ do postaci: $2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2$

lub równoważnej, ale zawierającej jedynie zmienne $x_1 + x_2$ oraz $x_1 \cdot x_2$.

2 punkty zdający otrzymuje za:

- zapisanie równania $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ w postaci równania z jedną niewiadomą m , np.:

$$2(m+5)^2 + 5(m+5)(2m-3) + 2(2m-3)^2 = 2$$

albo

- zapisanie równania $2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 2$ w postaci równania z jedną niewiadomą m ,

$$\text{np.: } 2(3m+2)^2 + 2m^2 + 7m - 15 = 2.$$

3 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie równania $20m^2 + 31m - 9 = 0$:

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}.$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający zamienia wzory Viète'a przy przekształcaniu lewej strony równania $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatruje warunek $\Delta \geq 0$ i nie sprawdzi, że dla każdej z otrzymanych wartości parametru m równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przekształci warunek $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$, otrzyma $2(x_1 + x_2)^2 + 3x_1x_2 = 2$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający wykorzystuje niepoprawny wzór „kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń”, przekształci warunek $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ do postaci $2(x_1 + x_2)^2 + 5x_1x_2 = 2$, i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający rozpatrując równość $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ zmieni liczbę po prawej stronie i zapisze równanie, wynikające ze wzorów Viète'a, w postaci $2(3m+2) + 2m^2 + 7m - 15 = 0$, pomijając wykładnik 2 potęgi o podstawie $(3m+2)$, to za drugą część rozwiązania zadania może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

1. Równanie ma dwa różne rozwiązania, gdy wyróżnik trójmianu jest dodatni: $\Delta > 0$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu:

$$\Delta = (-(3m+2))^2 - 4(2m^2 + 7m - 15) = m^2 - 16m + 64 = (m-8)^2.$$

$$(m-8)^2 > 0, \text{ gdy } m \neq 8.$$

Stąd wynika, że trójmian ma następujące pierwiastki: $x_1 = m+5$ oraz $x_2 = 2m-3$.

Mamy zatem rozwiązać równanie

$$2(m+5)^2 + 5(m+5)(2m-3) + 2(2m-3)^2 = 2.$$

To równanie doprowadzamy do postaci równoważnej:

$$20m^2 + 31m - 9 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania: $m_1 = -\frac{9}{5}$ oraz $m_2 = \frac{1}{4}$

Każde z otrzymanych rozwiązań jest różne od 8.

Warunki zadania spełniają dwie wartości parametru m : $m_1 = -\frac{9}{5}$ oraz $m_2 = \frac{1}{4}$.

II sposób

Przekształcamy równość $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ w sposób równoważny:

$$2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1x_2 = 2,$$

$$2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + 5x_1x_2 = 2,$$

$$2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 2.$$

Ze wzorów Viète'a wynika, że

$$x_1 + x_2 = 3m + 2 \text{ oraz } x_1x_2 = 2m^2 + 7m - 15,$$

o ile pierwiastki x_1 i x_2 trójkianu istnieją.

Mamy zatem rozwiązać równanie

$$2(3m + 2)^2 + 2m^2 + 7m - 15 = 2.$$

To równanie doprowadzamy do postaci równoważnej

$$20m^2 + 31m - 9 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania:

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}.$$

Pozostaje sprawdzić, czy dla tych wartości m dany trójkian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki. Możemy, tak jak w sposobie pierwszym, obliczyć wyróżnik i przekonać się, że jest on nieujemny. Możemy także podstawić znalezione wartości parametru m do danego trójkianu i przekonać się, że otrzymane trójkiany mają dwa różne pierwiastki.

Po podstawieniu $m = -\frac{9}{5}$ otrzymamy trójkian:

$$x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{528}{25}.$$

Po podstawieniu $m = \frac{1}{4}$ otrzymamy trójkian:

$$x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{105}{8}.$$

Oba trójkiany mają dwa różne pierwiastki. Można się o tym przekonać, obliczając wyróżniki lub zauważając, że oba trójkiany mają dodatni współczynnik przy x^2 i ujemny wyraz wolny.

Warunki zadania spełniają dwie wartości parametru m :

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}.$$

Zadanie 12. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.) (R7.3). 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności (R8.5).

Zasady oceniania I, II, III, IV i V sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap polega na wyznaczeniu współrzędnych środka danego okręgu. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu równania/układu równań prowadzących do wyznaczenia współrzędnych środka jednokładności oraz współrzędnych środka obrazu danego okręgu w tej jednokładności.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania

Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy

- zapisze współrzędne środka: $P = (4, 3)$

lub

- zapisze równanie okręgu $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$ w postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania

Zdający otrzymuje

1 punkt, gdy

- obliczy i zapisze współrzędne punktów K i L : $K = (3, 7)$ i $L = (8, 2)$

albo

- obliczy odległość punktu P od prostej o równaniu $x + y - 10 = 0$: $d = |SP| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

albo

- zapisze równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (4, 3)$ prostopadłej do prostej $x + y - 10 = 0$: $x - y - 1 = 0$

albo

- poda tylko promień obrazu okręgu: $R = 3\sqrt{17}$,

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje

2 punkty, gdy

- zapisze współrzędne środka jednokładności: $S = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right)$

albo

- zapisze $P' = (x, x-1)$ i zapisze $|SP'| = 3 \cdot |SP| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje

3 punkty, gdy

- zapisze równanie, wynikające z równości $\vec{SP'} = -3 \cdot \vec{SP}$, prowadzące do wyznaczenia współrzędnych środka $P' = (a, b)$ okręgu, będącego obrazem punktu $P = (4, 3)$ w jednokładności:

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = -3 \cdot \left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

albo

- wykona poprawne podstawienie do odpowiedniego wzoru w zestawie *Wybranych wzorów matematycznych* i zapisze:

$$a = -3 \cdot 4 + (1 - (-3)) \cdot \frac{11}{2} \quad \text{oraz} \quad b = -3 \cdot 3 + (1 - (-3)) \cdot \frac{9}{2}$$

albo

- zapisze równanie, wynikające z równości $\vec{PP'} = -4 \cdot \vec{SP}$, prowadzące do wyznaczenia współrzędnych środka $P' = (a, b)$ okręgu, będącego obrazem punktu $P = (4, 3)$ w tej jednokładności:

$$[a - 4, b - 3] = -4 \cdot \left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

albo

- zapisze równanie $\sqrt{(a-4)^2 + (a-1-3)^2} = 6\sqrt{2}$

albo

- zapisze równanie $\frac{|a + a - 1 - 10|}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje

4 punkty, gdy zapisze równanie szukanego okręgu

$$(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153.$$

Uwagi:

1. Jeśli zdający realizuje poprawną strategię rozwiązania zadania, a jedynymi błędami w rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to za takie rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
2. Jeśli zdający zakłada błędnie, że środkiem jednokładności jest środek danego okręgu, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za drugą część rozwiązania.
3. Jeśli zdający podczas obliczania współrzędnych punktów K , L lub S popełnia błąd polegający na zamianie współrzędnych i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.

4. Jeśli zdający stosuje błędne równanie $\vec{SP} = -3 \cdot \vec{SP'}$ i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za drugą część rozwiązania.
5. Jeśli zdający zakłada błędnie, że trójkąt KLP jest trójkątem prostokątnym i w rozwiązaniu stosuje tę własność, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za drugą część rozwiązania.
6. Jeżeli zdający narysuje w układzie współrzędnych dany okrąg i daną prostą, a następnie wyznaczy graficznie obraz środka P' danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ oraz zapisze równanie tego otrzymanego okręgu, to może otrzymać **4 punkty** za drugą część rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P = (4, 3)$, a promień okręgu jest równy $r = \sqrt{17}$.

Obliczamy współrzędne punktów K i L rozwiązując układ równań:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (10-x)^2 - 8x - 6(10-x) + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 24 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Zatem $K = (3, 7)$ i $L = (8, 2)$. Środek cięciwy KL , który jest środkiem jednokładności to punkt

$$S = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ jest okrąg o promieniu

$R = 3\sqrt{17}$ oraz środka $P' = (a, b)$ takim, że $\vec{SP'} = -3 \cdot \vec{SP}$. Otrzymujemy równość:

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = -3 \cdot \left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

Zatem

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = \left[\frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right],$$

a stąd $a = 10$ i $b = 9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$.

Uwaga.

Zdający może z równania prostej wyznaczyć $x = 10 - y$ i wtedy otrzyma
$$\begin{cases} 2y^2 - 18y + 28 = 0 \\ x = 10 - y \end{cases}.$$

II sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P = (4, 3)$, a promień okręgu jest równy $r = \sqrt{17}$.

Obliczamy współrzędne punktów K i L rozwiązując układ równań:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (10-x)^2 - 8x - 6(10-x) + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 24 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Zatem $K = (3, 7)$ i $L = (8, 2)$. Środek cięciwy KL , który jest środkiem jednokładności to punkt

$$S = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ jest okrąg o promieniu

$R = 3\sqrt{17}$ oraz środka $P' = (a, b)$ takim, że $\vec{PP'} = -4 \cdot \vec{SP}$. Otrzymujemy zatem równość:

$$[a-4, b-3] = -4 \cdot \left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

Zatem

$$[a-4, b-3] = [6, 6],$$

a stąd $a = 10$ i $b = 9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$.

III sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P = (4, 3)$, a promień okręgu jest równy $r = \sqrt{17}$.

Wyznaczamy równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P = (4, 3)$ i prostopadłej do danej prostej $x + y - 10 = 0$. Prosta l ma zatem równanie $x - y - 1 = 0$. Środek jednokładności S jest punktem wspólnym obu tych prostych, więc jego współrzędne obliczamy rozwiązując układ

$$\text{równań: } \begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Stąd } S = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ jest okrąg o promieniu

$R = 3\sqrt{17}$ oraz środka $P' = (a, b)$ takim, że $\vec{SP'} = -3 \cdot \vec{SP}$. Otrzymujemy zatem równość:

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = -3 \cdot \left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

Zatem

$$\left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = \left[\frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right],$$

a stąd $a = 10$ i $b = 9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$.

IV sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P = (4, 3)$, a promień okręgu jest równy $r = \sqrt{17}$.

Obliczamy odległość d punktu P od danej prostej o równaniu $x + y - 10 = 0$.

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ jest okrąg o promieniu

$R = 3\sqrt{17}$ oraz środka $P' = (a, b)$.

Zauważamy, że $|PP'| = 4 \cdot d$, zatem $|PP'| = 6\sqrt{2}$. Wyznaczamy równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P = (4, 3)$ i prostopadłej do danej prostej $x + y - 10 = 0$. Prosta l ma zatem równanie $x - y - 1 = 0$. Ponieważ punkt $P' = (a, b)$ leży na tej prostej prostopadłej, więc $P' = (a, a-1)$. Stąd otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-4)^2 + (a-1-3)^2} &= 6\sqrt{2} \\ (a-4)^2 + (a-4)^2 &= 36 \cdot 2 \\ (a-10)(a+2) &= 0, \end{aligned}$$

skąd $a = 10$ lub $a = -2$.

Ponieważ skala jednokładności $k = -3$, więc jednokładność jest odwrotna. Zatem $a = -2$ nie spełnia warunków zadania. Stąd $P' = (10, 9)$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$.

V sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P = (4, 3)$, a promień okręgu jest równy $r = \sqrt{17}$.

Obliczamy odległość d punktu P od danej prostej o równaniu $x + y - 10 = 0$:

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$ jest okrąg o promieniu $R = 3\sqrt{17}$ oraz środku $P' = (a, b)$.

Wyznaczamy równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P = (4, 3)$ i prostopadłej do danej prostej $x + y - 10 = 0$. Prosta l ma zatem równanie $x - y - 1 = 0$. Ponieważ punkt $P' = (a, b)$ leży na tej prostej prostopadłej, więc $P' = (a, a - 1)$.

Skala jednokładności $k = -3$, więc $|SP'| = |-3| \cdot d = 3 \cdot d$, zatem $|SP'| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Obliczamy odległość punktu $P' = (a, a - 1)$ od danej prostej o równaniu $x + y - 10 = 0$

$$|SP'| = \frac{|a + a - 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2a - 11|}{\sqrt{2}} = \frac{|2a - 11|\sqrt{2}}{2}.$$

Otrzymujemy równanie

$$\frac{|2a - 11|\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$|2a - 11| = 9$$

Jednokładność jest odwrotna, zatem $a = 10$. Stąd $P' = (10, 9)$.

Szukany okrąg ma równanie: $(x - 10)^2 + (y - 9)^2 = 153$.

Zadanie 13. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).

Zasady oceniania i sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z następujących części.

Pierwsza polega na wyróżnieniu trzech przypadków i dodaniu – w końcowej fazie rozwiązania – otrzymanych trzech wyników.

Druga część polega na zapisaniu liczby rozważanych w każdym przypadku liczb i obliczeniu liczby tych liczb.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 p.

Zdający

- poprawnie wskaże trzy przypadki

albo

- pominie jeden z przypadków, ale zapisze liczbę liczb rozważanych w jednym przypadku, np.: $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$ lub $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot 8^2$ lub $7 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki oraz zapisze liczbę liczb rozważanych w jednym przypadku lub pominie jeden przypadek, zapisze liczbę liczb w dwóch wskazanych przez siebie przypadkach.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki i zapisze liczbę liczb rozważanych w dwóch przypadkach.

Rozwiązanie pełne..... 4 p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki i poprawnie obliczy liczbę rozważanych liczb: 12960.

Uwagi

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb siedmiocyfrowych bez użycia symbolu Newtona oraz symbolu silni.
2. Jeśli zdający w każdym z trzech rozpatrywanych przypadków poprawnie zapisze jedynie liczbę sposobów rozmieszczenia:
 - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 2**lub**
 - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2**lub**
 - cyfry 2 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2,
 to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z dwóch części.

Pierwsza polega na obliczeniu liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ oraz liczby tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0.

Druga część polega na obliczeniu liczby szukanych liczb.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1p.

Zdający zapisze, że

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

albo

- wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$

albo

- wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze, że

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

oraz

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru

$$\{0,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ jest } \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$$

albo

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

oraz

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra

$$\text{ze zbioru } \{0,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ jest } \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze, że

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1,

dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$

oraz

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru

$$\{0,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ jest } \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający poprawnie obliczy liczbę rozważanych liczb: 12960.

Uwagi

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb siedmiocyfrowych bez użycia symbolu Newtona oraz symbolu silni.
2. Jeśli zdający, obliczając liczbę wszystkich szukanych liczb metodą opisaną w II sposobie rozwiązania, poprawnie zapisze jedynie liczbę sposobów rozmieszczenia w całej I części rozwiązania:
 - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 2
lub
 - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2
lub
 - cyfry 2 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2,
to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Rozważamy trzy przypadki.

- I. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej liczby jest 1. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie dwie cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$. Takich liczb istnieje

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2 = 15 \cdot 6 \cdot 64 = 5760.$$

- II. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej jest 2. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$. Takich liczb istnieje

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot 8^2 = 20 \cdot 3 \cdot 64 = 3840.$$

- III. Pierwsza cyfra rozpatrywanej liczby jest różna od 1 i od 2. Pierwsza cyfra jest też różna od 0. Zatem na pierwszym miejscu stoi jedna z siedmiu cyfr ze zbioru $\{3,4,5,6,7,8,9\}$. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$. Takich liczb istnieje

$$7 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8 = 7 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 8 = 3360.$$

Łącznie istnieje zatem $5760+3840+3360=12960$ rozważanych liczb.

Istnieje 12960 siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

II sposób

Zliczamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$. Wtedy na siedmiu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Takich „liczb” jest

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2 = 35 \cdot 6 \cdot 64 = 13440.$$

Następnie zliczamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Takich „liczb” jest

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8 = 20 \cdot 3 \cdot 8 = 480.$$

Jest zatem $13440 - 480 = 12960$ rozważanych liczb.

Zadanie 14. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6). 7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R9.1).

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1p.

Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB| + |CD| = 10 + 16$

albo

- obliczy wysokość trapezu $ABCD$: $h = |CE| = 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2p.

Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB| + |CD| = 10 + 16$ i obliczy wysokość trapezu $ABCD$: $h = |CE| = 8$

albo

- obliczy wysokość trapezu $ABCD$: $h = |CE| = 8$ i wysokość tego ostrosłupa $H = 18$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym dokonano istotnego postępu, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania..... 3p.

Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB| + |CD| = 10 + 16$ oraz obliczy wysokość tego ostrosłupa $H = 18$

albo

- obliczy pole podstawy tego ostrosłupa: $P_{ABCD} = 104$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa $H = 18$ i pole jego podstawy: $P_{ABCD} = 104$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie zadania do końca z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozumowania (np. błędy rachunkowe, błędy w przepisaniu, itp.) 5p.

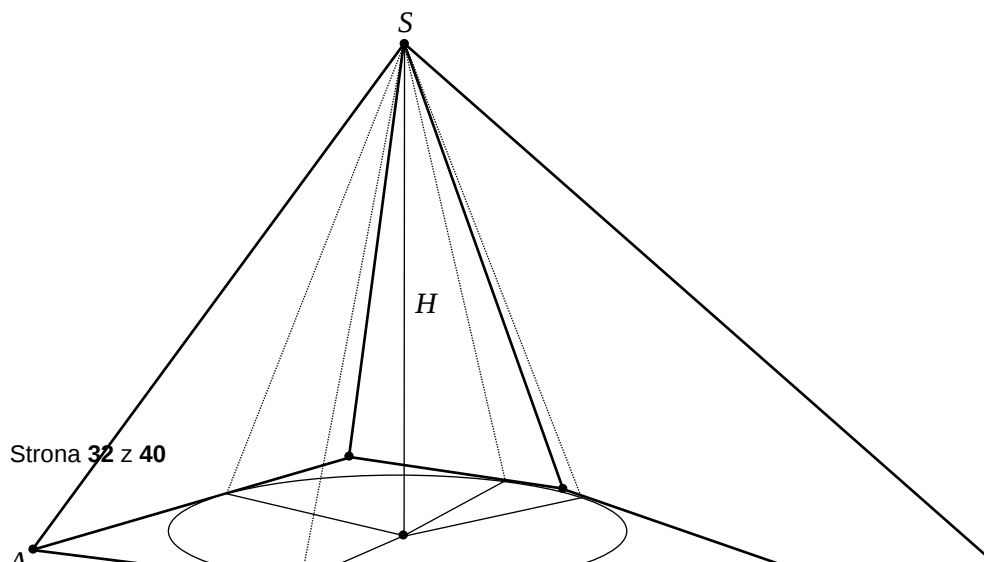
Rozwiązanie pełne..... 6p.

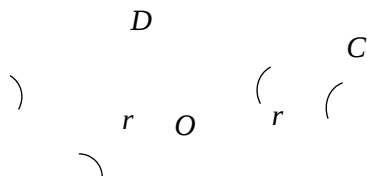
Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 624$.

Uwagi

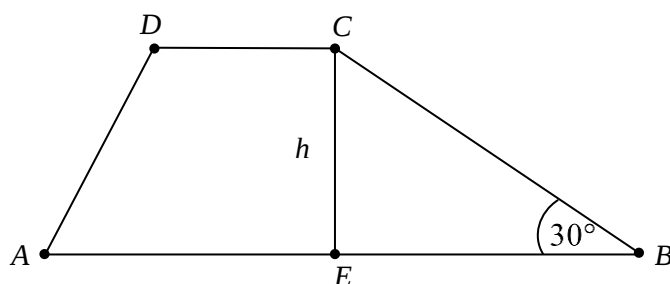
1. Jeżeli zdający we wzorze na objętość ostrosłupa pominie czynnik $\frac{1}{3}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu definicji funkcji tangens, np.: przyjmie, że jest to stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający popełni błąd polegający na tym, że niepoprawnie ustali związki między długościami boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° i 60° , np. przyjmie, że wysokość trapezu to $8\sqrt{3}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.
4. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że trapez $ABCD$ jest równoramienny lub przyjmie, że podstawy tego trapezu mają długości 16 i 10, to za całe rozwiązanie może trzymać co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe rozwiązanie





Ponieważ w tym ostrosłupie wszystkie ściany boczne nachylone są do podstawy pod tym samym kątem, więc spodek O wysokości H ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w wielokąt będący podstawą ostrosłupa. Niech r oznacza promień okręgu wpisanego w podstawę, h – wysokość trapezu $ABCD$, H natomiast niech oznacza wysokość ostrosłupa.



Ponieważ w trapez można wpisać okrąg, więc spełniony jest warunek: $|AB| + |CD| = 26$. Korzystając z własności trójkąta prostokątnego EBC o kątach 30° , 60° , 90° , otrzymujemy:

$$h = |CE| = 8, \text{ a stąd wynika, że } r = 4.$$

Ponieważ $\tan \alpha = \frac{9}{2}$, więc $\frac{9}{2} = \frac{H}{r}$ i stąd obliczamy $H = 18$.

Objętość tego ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot h \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{26}{2} \cdot 8 \cdot 18 = 624.$$

Zadanie 15. (0–7)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

- przyjęcia jednego z wymiarów ekranu (długość, szerokość) za zmienną x i obliczenie drugiego wymiaru y : $y = \frac{6000}{x}$.

- wyrażenia pola powierzchni całego ekranu z obramowaniem jako funkcji jednej zmiennej x :

$$P(x) = 6x + \frac{60000}{x} + 6060$$

- wyznaczenia dziedziny funkcji P : $(2\sqrt{1501} - 2, +\infty)$.

Za poprawne wykonanie każdej z tych części zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

Drugi etap składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji P lub funkcji $f(x) = 6x + \frac{60000}{x}$ określonej np. dla

$$x > 0: f'(x) = 6 - \frac{60000}{x^2} = \frac{6x^2 - 60000}{x^2} = \frac{6(x^2 - 10000)}{x^2}.$$

- obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji $f: x = 100$
- zbadanie znaku pochodnej funkcji f : jeśli $0 < x < 100$, to $f'(x) < 0$ oraz jeśli $x > 100$, to $f'(x) > 0$ i uzasadnienie, że dla $x = 100$ funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą, na przykład: w przedziale $(2\sqrt{1501} - 2, 100)$ funkcja P jest malejąca, w przedziale $(100, +\infty)$ funkcja P jest rosnąca, więc najmniejszą wartość funkcja P przyjmuje dla $x = 100$.

Za poprawne wykonanie każdego z tych kroków zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

Trzeci etap polega na obliczeniu obu wymiarów ekranu: $x = 100$ oraz $y = 60$.

Za poprawne wykonanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Ten sposób rozwiązania składa się z następujących czterech kroków:

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1p.

Jeżeli zdający przyjmie oznaczenia (na przykład x i y) na długość i szerokość ekranu, zapisze pole powierzchni całego ekranu z obramowaniem

$$P = (x + 10)(y + 6)$$

Uwaga

Zdający, gdy przyjmie oznaczenia (na przykład x i y) na długość i szerokość ekranu, zapisze równość

$$P = 6060 + 6x + 10y$$

to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 3 p.

Zdający zapisze nierówność między średnimi:

$$\frac{6x + 10y}{2} \geq \sqrt{6x \cdot 10y}.$$

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze, że x i y są liczbami dodatnimi, a więc wolno skorzystać z nierówności między średnimi i zapisze nierówność między średnimi:

$$\frac{6x+10y}{2} \geq \sqrt{6x \cdot 10y}, \text{ to otrzymuje } \mathbf{4 \text{ punkty}}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 5 p.

Zdający wykaże nierówność $P \geq 7260$.

Rozwiązanie prawie pełne..... 6 p.

Zdający znajdzie wartości $x = 100$ mm, $y = 60$ mm.

Rozwiązanie pełne..... 7 p.

Zdający wyciągnie wniosek, że dla $x = 100$ i $y = 60$ smartfon ma najmniejszą powierzchnię.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

- przyjęcia jednego z wymiarów całego smartfona (długość, szerokość) za zmienną x i obliczenie drugiego wymiaru całego smartfona y : $y = \frac{6000}{x-10} + 6$.
- wyrażenia pola powierzchni całego ekranu z obramowaniem jako funkcji jednej zmiennej x :

$$P(x) = x \left(\frac{6000}{x-10} + 6 \right) = \frac{6000x}{x-10} + 6x.$$

- wyznaczenia dziedziny funkcji P : $(2\sqrt{1501} + 8, +\infty)$.

Za poprawne wykonanie każdego z tych etapów zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

Drugi etap składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji P lub funkcji $f(x) = \frac{6000x}{x-10} + 6x$ określonej np. dla $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{6000(x-10) - 6000x}{(x-10)^2} + 6 = \frac{6((x-10)^2 - 10000)}{(x-10)^2} = \frac{6(x-110)(x+90)}{(x-10)^2}.$$

- obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji f : $x = 110$
- zbadanie znaku pochodnej funkcji f : jeśli $0 < x < 110$, to $f'(x) < 0$ oraz jeśli $x > 110$, to $f'(x) > 0$ i uzasadnienie, że dla $x = 110$ funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą, na przykład: w przedziale $(2\sqrt{1501} + 8, 110)$ funkcja P jest malejąca, w przedziale $(110, +\infty)$ funkcja P jest rosnąca, więc najmniejszą wartość funkcja P przyjmuje dla $x = 110$.

Za poprawne wykonanie każdego z tych etapów zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

Trzeci etap polega na obliczeniu obu wymiarów ekranu: $x = 100$ oraz $y = 60$.

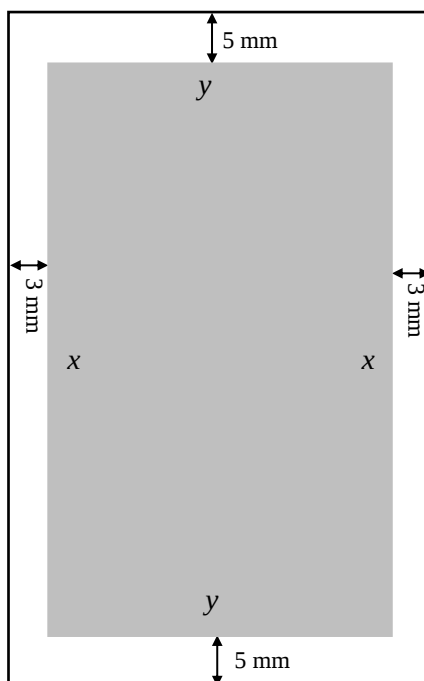
Za poprawne wykonanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozpatruje funkcję P przy założeniu, że $x + 10 > y + 6 > 0$, obliczy wymiary ekranu 100 mm i 60 mm oraz obliczy wymiary smartfona 110 mm i 66 mm, i sprawdzi, że wymiary ekranu spełniają założenie $x + 10 > y + 6$, to może otrzymać **7 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji P , ale z rozwiązania wynika, że rozważa funkcję P na zbiorze, w którym co najmniej jeden z wymiarów ekranu przyjmuje wartości ujemne, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
3. Jeżeli zdający przyjmuje błędnie, że powierzchnia smartfona jest równa 60 cm^2 i bada powierzchnię ekranu smartfona jako funkcję jednej zmiennej, to **nie otrzymuje 1 punktu za 1. część I etapu** rozwiązania, a w konsekwencji może otrzymać co najwyżej **6 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający nie ujednolici jednostek, ale przeprowadzi pełne rozumowanie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (3 punkty wyłącznie za II etap rozwiązania).
5. Jeżeli zdający popełni błąd w zamianie 60 cm^2 zapisując 600 mm^2 i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
6. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak.
7. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości x , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający:
 - a) opisuje słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek), monotoniczność funkcji P ; lub
 - b) zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja P ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość.Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
8. Jeżeli zdający przyjmie, że dziedziną funkcji P jest przedział $(0, +\infty)$, to może otrzymać **1 punkt za 3. część II etapu**, o ile otrzymane miejsce zerowe pochodnej należy do właściwej dziedziny funkcji P .
9. Jeżeli zdający rozpatruje inną wielkość niż pole, np. bada obwód, to za całe rozwiązanie zadania może otrzymać co najwyżej **1 punkt za 1. część I etapu**.

Przykładowe rozwiązania**I sposób**

Oznaczmy długości boków ekranu smartfona literami x i y ($x > y$) tak jak na rysunku:



Wtedy powierzchnia ekranu jest równa (w mm^2):

$$xy = 6000,$$

skąd wynika, że

$$y = \frac{6000}{x}.$$

Powierzchnia całego smartfona (tj. ekranu z obramowaniem) jest równa

$$P = (x+10)(y+6) = xy + 6x + 10y + 60 = 6000 + 6x + 10y + 60 = 6x + \frac{60000}{x} + 6060.$$

Ponieważ $x+10 > y+6 > 0$, to $x+4 > \frac{6000}{x}$. Stąd otrzymujemy kolejno:

$$x^2 + 4x > 6000,$$

$$x^2 + 4x + 4 > 6004,$$

$$(x+2)^2 > 6004,$$

$$|x+2| > 2\sqrt{1501},$$

$$x > 2\sqrt{1501} - 2.$$

Otrzymaliśmy funkcję P zmiennej x określoną wzorem

$$P(x) = 6x + \frac{60000}{x} + 6060 \text{ dla } x \in (2\sqrt{1501} - 2, +\infty).$$

Obliczamy pochodną funkcji P :

$$P'(x) = 6 - \frac{60000}{x^2} = \frac{6(x^2 - 10000)}{x^2} \text{ dla } x \in (2\sqrt{1501} - 2, +\infty).$$

Miejszem zerowym pochodnej funkcji P jest $x = 100$, gdyż

$$2\sqrt{1501} - 2 < 2\sqrt{1521} - 2 = 2 \cdot 39 - 2 = 76 < 100.$$

Ponadto $P'(x) < 0$ dla $x \in (2\sqrt{1501} - 2, 100)$ oraz $P'(x) > 0$ dla $x \in (100, +\infty)$.

Zatem w przedziale $(2\sqrt{1501} - 2, 100)$ funkcja P jest malejąca, a w przedziale $(100, +\infty)$ funkcja P jest rosnąca.

Stąd wynika, że funkcja P dla $x = 100$ przyjmuje najmniejszą wartość. Wtedy $y = 60$.

Poszukiwanymi wymiarami ekranu smartfona są: $x = 100$ mm, $y = 60$ mm.

II sposób

Tak jak w sposobie pierwszym obliczamy w milimetrach kwadratowych powierzchnię ekranu:

$$P = 6060 + 6x + 10y.$$

Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\frac{6x + 10y}{2} \geq \sqrt{6x \cdot 10y} = \sqrt{60xy} = \sqrt{60 \cdot 6000} = \sqrt{6^2 \cdot 10000} = 6 \cdot 100 = 600.$$

Stąd wynika, że

$$P = 6060 + 6x + 10y \geq 6060 + 1200 = 7260.$$

W nierówności między średnimi równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby występujące w tych średnich są równe.

$$\text{Niech } 6x = 10y, \text{ czyli } 6x = 10 \cdot \frac{6000}{x}.$$

Stąd otrzymujemy równanie: $x^2 = 10000$.

Jedynym dodatnim rozwiązaniem tego równania jest $x = 100$.

Wtedy $y = 60$. Ponieważ $P \geq 7260$ oraz dla $x = 100$ i $y = 60$ mamy

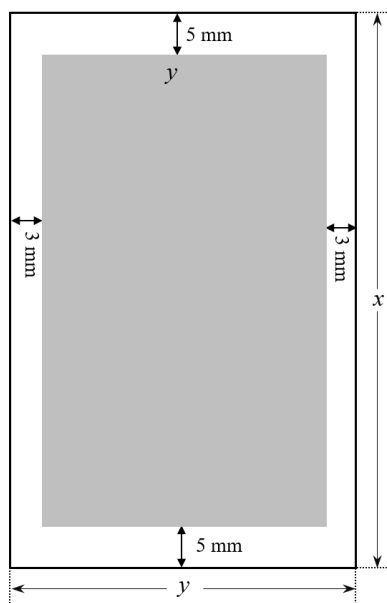
$$P = 110 \cdot 66 = 7260,$$

więc ekran z obramowaniem ma najmniejszą powierzchnię dla $x = 100$ i $y = 60$.

Poszukiwanymi wymiarami ekranu są: $x = 100$ mm, $y = 60$ mm.

III sposób

Oznaczmy długości boków całego smartfona przez x i y ($x > y$) tak jak na rysunku:



Wtedy powierzchnia ekranu jest równa (w mm^2):

$$(x-10)(y-6) = 6000$$

skąd wynika, że

$$y = \frac{6000}{x-10} + 6.$$

Powierzchnia całego smartfona (tj. ekranu z obramowaniem) jest równa

$$P = x \left(\frac{6000}{x-10} + 6 \right) = \frac{6000x}{x-10} + 6x.$$

Ponieważ $x > y > 6$ i $x > 10$, to $x > \frac{6000}{x-10} + 6$. Stąd otrzymujemy kolejno:

$$x^2 - 10x > 6000 + 6x - 60,$$

$$x^2 - 16x + 64 > 6004,$$

$$(x-8)^2 > 6004,$$

$$|x-8| > 2\sqrt{1501},$$

$$x > 2\sqrt{1501} + 8.$$

Otrzymaliśmy funkcję P zmiennej x określoną wzorem

$$P(x) = \frac{6000x}{x-10} + 6x \quad \text{dla } x \in (2\sqrt{1501} + 8, +\infty).$$

Obliczamy pochodną funkcji P :

$$P'(x) = \frac{6000(x-10) - 6000x}{(x-10)^2} + 6 = \frac{6((x-10)^2 - 10000)}{(x-10)^2} = \frac{6(x-110)(x+90)}{(x-10)^2}$$

dla $x \in (2\sqrt{1501} + 8, +\infty)$.

Miejszem zerowym pochodnej funkcji P jest $x = 110$, bo

$$2\sqrt{1501} + 8 < 2\sqrt{1521} + 8 = 2 \cdot 39 + 8 = 86 < 110.$$

Ponadto $P'(x) < 0$ dla $x \in (2\sqrt{1501} + 8, 110)$ oraz $P'(x) > 0$ dla $x \in (110, +\infty)$.

Zatem w przedziale $(2\sqrt{1501} + 8, 110)$ funkcja P jest malejąca, a w przedziale $(110, +\infty)$ funkcja P jest rosnąca.

Stąd wynika, że funkcja P dla $x = 110$ przyjmuje najmniejszą wartość.

$$\text{Wtedy } y = \frac{6000}{110-10} + 6 = 66.$$

Poszukiwanymi wymiarami ekranu smartfona są: $x = 100$ mm, $y = 60$ mm.