

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017**

**FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-R1**

MAJ 2017

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach (1.3).	A

Zadanie 2. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	5. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów; (R5.2).	D
--	--	----------

Zadanie 3. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym; (7.1).	C
-----------------------------------	--	----------

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach (R8.7).	B
--	--	----------

Zadanie 5. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R3.4).	125
--	---	------------

Zadanie 6. (0–3)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych oraz korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej (R11.2, R11.3).

Przykładowe rozwiązanie

Pochodna funkcji f jest równa

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x-1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} \text{ dla każdej liczby rzeczywistej } x.$$

Współczynnik kierunkowy szukanej stycznej jest równy:

$$f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

zatem równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (1, 0)$ ma postać:

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + 0,$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.

gdy wyznaczy pochodną funkcji f :

$$\text{np. } f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x-1)}{(x^2 + 1)^2} \text{ lub } f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.

gdy obliczy $f'(1) = \frac{1}{2}$, poprawnie interpretuje tę liczbę jako współczynnik kierunkowy stycznej i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 3 p.

gdy zapisze równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (1, 0)$: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Uwaga

Jeżeli zdający wyznacza błędnie pochodną funkcji, np.: $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x-1)}{x^2 + 1}$

i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy równanie stycznej, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 7. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne (R2.6).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$x^2y^2 - 4xy + 4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 > 0,$$

$$(xy - 2)^2 + 2(x^2 - 2xy + y^2) > 0,$$

$$(xy - 2)^2 + 2(x - y)^2 > 0.$$

Ponieważ $x \neq y$, więc $(x - y)^2 > 0$. Zatem lewa strona tej nierówności jest sumą liczby nieujemnej $(xy - 2)^2$ oraz liczby dodatniej $2(x - y)^2$, a więc jest dodatnia.

To kończy dowód.

II sposób

Zapiszmy nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ w postaci równoważnej

$$(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4 > 0.$$

Ponieważ $y^2 + 2 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej y , więc możemy potraktować tę nierówność jak nierówność kwadratową z niewiadomą x i parametrem y (lub z niewiadomą y i parametrem x). Wystarczy więc wykazać, że wyróżnik trójmianu kwadratowego $(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4$ zmiennej x jest ujemny.

$$\Delta = (-8y)^2 - 4 \cdot (y^2 + 2) \cdot (2y^2 + 4) = 64y^2 - 8(y^2 + 2)^2 =$$

$$= 8(8y^2 - y^4 - 4y^2 - 4) = 8(-y^4 + 4y^2 - 4) = -8(y^2 - 2)^2.$$

Dla każdej liczby rzeczywistej y , takiej, że $y^2 \neq 2$ wyróżnik jest ujemny. Gdy $y^2 = 2$, to wówczas nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ ma postać

$$4x^2 - 8\sqrt{2}x + 8 > 0 \text{ lub } 4x^2 + 8\sqrt{2}x + 8 > 0$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 > 0 \text{ lub } x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 > 0,$$

$$(x - \sqrt{2})^2 > 0 \text{ lub } (x + \sqrt{2})^2 > 0.$$

Ponieważ z założenia wynika, że $x \neq y$, więc $x^2 \neq 2$, a to oznacza, że każda z otrzymanych nierówności jest prawdziwa.

To kończy dowód.

III sposób

Rozpatrzmy nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ w trzech przypadkach.

I. Gdy co najmniej jedna z liczb x , y jest równa 0, np. gdy $x = 0$. Wtedy nierówność przyjmuje postać

$$2y^2 + 4 > 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej y .

II. Gdy żadna z liczb x, y nie jest równa 0 i gdy $xy < 0$. Wtedy po lewej stronie nierówności $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ wszystkie składniki są dodatnie, więc nierówność jest prawdziwa.

III. Gdy żadna z liczb x, y nie jest równa 0 i gdy $xy > 0$. Wtedy, dzieląc obie strony nierówności $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ przez xy , otrzymujemy nierówność równoważną

$$\begin{aligned}xy + 2\frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} - 8 + \frac{4}{xy} &> 0, \\xy + \frac{4}{xy} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 8 &> 0, \\xy - 4 + \frac{4}{xy} + 2\left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}\right) &> 0, \\ \left(\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 &> 0.\end{aligned}$$

Ponieważ z założenia $x \neq y$, więc $\frac{x}{y} \neq 1$, zatem $\frac{x}{y} \neq \frac{y}{x}$, co oznacza, że $\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 > 0$.

Stąd i z tego, że $\left(\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}\right)^2 \geq 0$ wynika prawdziwość otrzymanej nierówności.

To kończy dowód.

IV sposób

I. Gdy $xy \leq 0$, to wtedy po lewej stronie nierówności $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ cztery pierwsze składniki są nieujemne, piąty jest dodatni, więc nierówność jest prawdziwa.

II. Gdy $xy > 0$, wtedy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich $x^2y^2, 2x^2, 2y^2$ i 4 otrzymujemy

$$\frac{x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4}{4} \geq \sqrt[4]{x^2y^2 \cdot 2x^2 \cdot 2y^2 \cdot 4} = \sqrt[4]{16x^4y^4} = 2xy,$$

skąd

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 \geq 8xy.$$

Równość miałaby miejsce tylko wtedy, gdyby $x^2y^2 = 2x^2 = 2y^2 = 4$, a więc gdyby $x^2 = y^2$, co wobec nierówności $xy > 0$ oznaczałoby $x = y$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 > 8xy,$$

czyli

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0.$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

I sposób rozwiązania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci $(xy - 2)^2 + 2(x - y)^2 > 0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie, uwzględniające założenie, że $x \neq y$.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest istotne 1 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci $(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4 > 0$, obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $(y^2 + 2)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4$, np.: $\Delta = (-8y)^2 - 4 \cdot (y^2 + 2) \cdot (2y^2 + 4)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający uzasadni, że wyróżnik $\Delta = -8(y^2 - 2)^2$ jest niedodatni dla każdej liczby rzeczywistej y , ale nie rozpatrzy przypadku, gdy $y^2 = 2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest istotne 1 p.

Zdający wykaże prawdziwość nierówności w I i w II przypadku i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci $xy + \frac{4}{xy} + 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 8 > 0$ w przypadku, gdy $xy > 0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

IV sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest istotne 1 p.

Zdający wykaże prawdziwość nierówności $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ w I przypadku i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający uzasadni, że gdy $xy > 0$, to prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4}{4} \geq 2xy$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

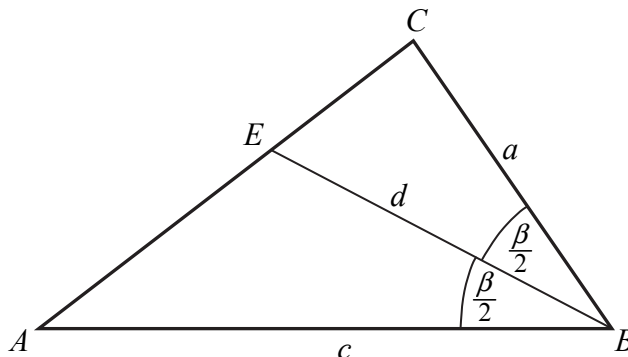
Zadanie 8. (0–3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. (7.4). Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności. (R7.4). Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. (R7.5).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta.$$

Pola trójkątów ABE i CBE są równe

$$P_{ABE} = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} \text{ oraz } P_{CBE} = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}.$$

Suma pól trójkątów ABE i CBE jest równa polu trójkąta ABC , zatem

$$\frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}.$$

Stąd

$$a \cdot c \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = d \cdot (a + c) \cdot \sin \frac{\beta}{2}.$$

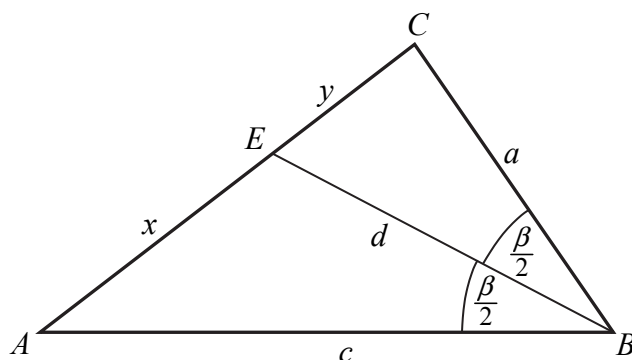
$$2ac \cdot \cos \frac{\beta}{2} = d \cdot (a + c),$$

$$d = \frac{2ac}{a + c} \cdot \cos \frac{\beta}{2}.$$

To kończy dowód.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|CB|}{|AB|}, \text{ czyli } \frac{y}{x} = \frac{a}{c}.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABE i CBE otrzymujemy

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2} \text{ oraz } y^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2}.$$

Zatem

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{y^2}{x^2} = \frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2}}{c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2}}.$$

Stąd otrzymujemy

$$a^2 \left(c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2} \right) = c^2 \left(a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2} \right),$$

$$a^2 c^2 + a^2 d^2 - 2a^2 cd \cos \frac{\beta}{2} = a^2 c^2 + c^2 d^2 - 2ac^2 d \cos \frac{\beta}{2},$$

$$a^2 d^2 - c^2 d^2 = 2a^2 cd \cos \frac{\beta}{2} - 2ac^2 d \cos \frac{\beta}{2},$$

$$(a^2 - c^2) d = 2(a - c) ac \cos \frac{\beta}{2}.$$

Gdy $a = c$, wówczas trójkąt ABC jest równoramienny, więc trójkąty ABE i CBE są

prostokątne i przystające. Wtedy $\cos \frac{\beta}{2} = \frac{d}{c}$, skąd $d = c \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2c^2}{2c} \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{\beta}{2}$.

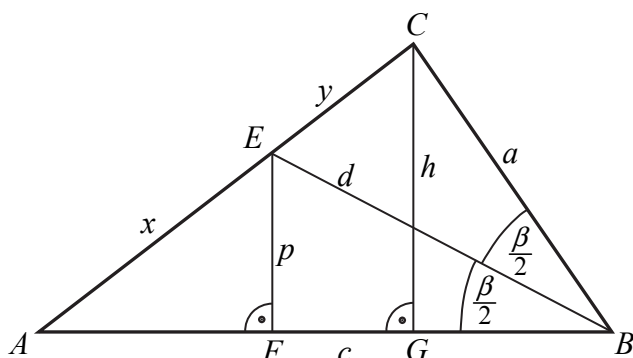
Gdy zaś $a \neq c$, to $(a - c)(a + c) \neq 0$, czyli $a^2 - c^2 \neq 0$, więc

$$d = \frac{2(a - c)}{a^2 - c^2} ac \cos \frac{\beta}{2} = \frac{2ac}{a + c} \cos \frac{\beta}{2}.$$

To kończy dowód.

III sposób

Poprowadźmy wysokości CG i EF trójkątów ABC i ABE . Ponieważ trójkąt ABC jest ostrokątny, więc spodki F i G tych wysokości leżą na boku AB trójkąta ABC . Pozostałe oznaczenia przyjmijmy jak na rysunku.



Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|CB|}{|AB|}, \text{ czyli } \frac{y}{x} = \frac{a}{c}.$$

Z trójkątów BEF i BCG otrzymujemy

$$\frac{p}{d} = \sin \frac{\beta}{2} \text{ oraz } \frac{h}{a} = \sin \beta.$$

Stąd

$$p = d \sin \frac{\beta}{2} \text{ oraz } h = a \sin \beta.$$

Trójkąty AFE i AGC są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku A . Zatem

$$\frac{|EF|}{|AE|} = \frac{|CG|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{p}{x} = \frac{h}{x+y}.$$

Stąd i z poprzednio otrzymanych równości otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \frac{d \sin \frac{\beta}{2}}{x} &= \frac{a \sin \beta}{x+y}, \\ d \sin \frac{\beta}{2} &= \frac{a \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{y}{x}}, \\ d &= \frac{2a \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{a}{c}} = \frac{2ac \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{a+c}. \end{aligned}$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

I sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 1 p.

Zdający

- zapisze pola każdego z trójkątów ABC , ABE i CBE w zależności od długości a , c , d i kąta β : $P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta$, $P_{ABE} = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2}$, $P_{CBE} = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}$

albo

- zapisze, że pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów ABE i CBE oraz zapisze jedno z tych pól: $P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta$ lub $P_{ABE} = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2}$ lub $P_{CBE} = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający zapisze zależność między polem trójkąta ABC i polami trójkątów ABE i CBE w postaci, w której występują jedynie wielkości a , c , d i β , np.:

$$\frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 1 p.

Zdający zapisze zależności między wielkościami x , y , d , a i c oraz kątem β :

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \quad x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2}, \quad y^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający zapisze równanie, np.: $\frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos \frac{\beta}{2}}{c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{\beta}{2}}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga

Jeżeli zdający nie rozważy sytuacji gdy $a = c$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 1 p.

Zdający zapisze

- zależność między wielkościami x, y, a i c oraz zależności między wielkościami p, h i a oraz kątem β : $\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \frac{p}{d} = \sin \frac{\beta}{2}, \frac{h}{a} = \sin \beta$

albo

- zależność między wielkościami x, y, a i c oraz zależności między wielkościami p, h, x i y oraz kątem β : $\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \frac{p}{x} = \frac{h}{x+y},$

albo

- zależność między wielkościami p, h i a oraz kątem β oraz zależność między wielkościami x, y, a i c : $\frac{p}{d} = \sin \frac{\beta}{2}, \frac{h}{a} = \sin \beta, \frac{y}{x} = \frac{a}{c}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający zapisze wystarczającą liczbę zależności między wielkościami x, y, a, c, p i h oraz kątem β , pozwalającą wyznaczyć d w zależności od wielkości a, c i kąta β , np.:

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{c}, \frac{d \sin \frac{\beta}{2}}{x} = \frac{a \sin \beta}{x+y}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze jedynie 3 razy twierdzenie cosinusów, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 9. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną. (R9.2). 7. Planimetria. Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności (R7.4). G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa (G10.7).
-----------------------------------	---

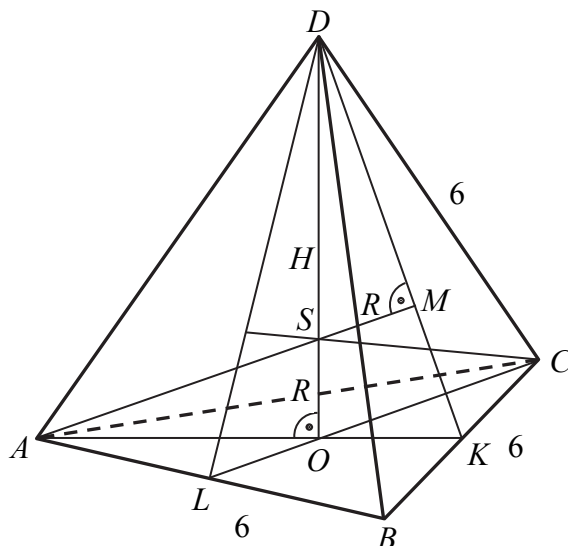
Przykładowe rozwiązanie

Niech K będzie środkiem odcinka BC , a M i O spodkami wysokości trójkąta AKD opuszczonymi z wierzchołków A i D . Płaszczyzny AKD i ABC są prostopadłe, bo prosta BC jest prostopadła do płaszczyzny AKD .

Niech T będzie punktem wspólnym wysokości AM i DO . Odległości punktu T od prostych AK i DK są równe, bo $|AK| = |DK|$. Są to też odległości punktu T od płaszczyzn ABC i BCD . Ten sam punkt T otrzymamy rozpatrując trójkąt LCD , gdzie L jest środkiem odcinka AB lub

trójkąt LBD , gdzie L jest środkiem odcinka AC . Wynika stąd, że odległość punktu T od każdej ściany czworościanu $ABCD$ jest taka sama. Wobec tego $S = T$.

Niech H oznacza wysokość czworościanu, h wysokość ściany czworościanu, a R – promień kuli, o której mowa w treści zadania. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie jak na rysunku.



Wyznamy wysokość H czworościanu.

Odcinki AK i DK to wysokości przystających trójkątów równobocznych ABC i BCD o boku długości 6, więc

$$|AK| = |DK| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Spodek O wysokości DO czworościanu jest środkiem ciężkości trójkąta ABC , więc

$$|KO| = \frac{1}{3}|AK| = \sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DOK otrzymujemy

$$\begin{aligned} |DO|^2 + |KO|^2 &= |DK|^2, \\ H^2 + (\sqrt{3})^2 &= (3\sqrt{3})^2. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} H^2 &= (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2, \\ H &= 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

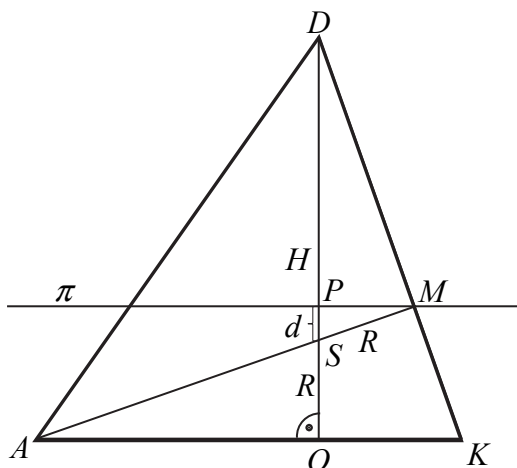
Wyznamy odległość d środka S kuli od płaszczyzny π .

I sposób

Niech P będzie punktem, w którym wysokość DO przebija płaszczyznę π . Ponieważ płaszczyzna π jest równoległa do płaszczyzny ściany ABC , więc czworościan odcięty tą płaszczyzną od czworościanu $ABCD$ jest podobny do czworościanu $ABCD$, a skala tego podobieństwa jest równa $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$. Wynika stąd, że płaszczyzna π przecina wysokość DK ściany bocznej BCD w takim punkcie M' , że

$$|DM'| = \frac{2}{3}|DK|.$$

To oznacza $M' = M$.



Trójkąty DOK , DPM , MPS są podobne, ponieważ para trójkątów prostokątnych DOK , DPM ma jeden kąt ostry wspólny oraz para trójkątów prostokątnych DPM , MPS ma jeden kąt ostry wspólny. Zatem

Stąd

$$\frac{|DP|}{|MP|} = \frac{|DO|}{|OK|} = \frac{|MP|}{|PS|}, \text{ czyli } \frac{\frac{2}{3}H}{|MP|} = \frac{H}{\sqrt{3}} = \frac{|MP|}{d}.$$

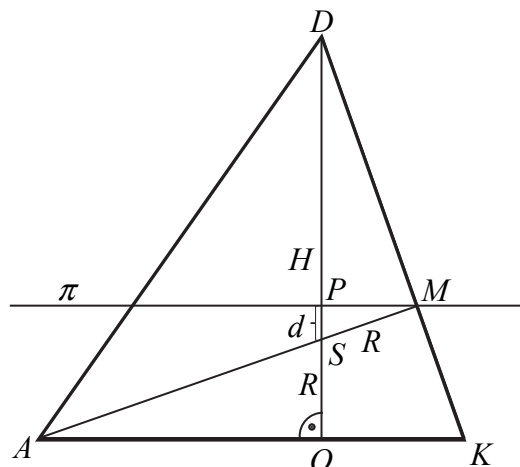
Stąd

$$|MP| = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ oraz } \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{d}$$

$$\text{Zatem } d = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

II sposób

Obliczymy najpierw promień R kuli.



Trójkąty DOK i DMS są podobne, ponieważ są prostokątne i mają jeden kąt ostry wspólny.

Zatem $\frac{|SM|}{|DS|} = \frac{|KO|}{|DK|}$. Stąd

$$\begin{aligned}\frac{R}{H-R} &= \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3}, \\ 3R &= H-R, \\ 4R &= H \\ R &= \frac{1}{4}H.\end{aligned}$$

Ponieważ $H = 2\sqrt{6}$, więc

$$R = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Płaszczyzna π odcina czworościan podobny do czworościanu $ABCD$ w skali $\frac{2}{3}$, więc

$$|DP| = \frac{2}{3}H, \text{ skąd } |OP| = \frac{1}{3}H = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Odległość punktu S od płaszczyzny π jest więc równa

$$d = \frac{1}{3}H - R = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Uwaga

Możemy najpierw wyznaczyć wielkości R i $|OP|$ w zależności od H , potem wyznaczyć szukaną odległość d w zależności od H , a następnie obliczyć H i w rezultacie d :

$$R = \frac{1}{4}H, \quad |OP| = \frac{1}{3}H,$$

więc

$$d = \frac{1}{3}H - \frac{1}{4}H = \frac{1}{12}H = \frac{1}{12} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający:

- obliczy wysokość czworościanu $ABCD$: $H = 2\sqrt{6}$

albo

- obliczy skalę s podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną π od czworościanu $ABCD$ do czworościanu $ABCD$: $s = \frac{2}{3}$,

albo

- zapisze zależność między promieniem R kuli, wysokością H czworościanu $ABCD$ i wysokością h ściany czworościanu, np.: $\frac{R}{H-R} = \frac{\frac{1}{3}h}{h}$,

albo

- zapisze zależność między R , objętością V czworościanu $ABCD$ polem P_c powierzchni całkowitej czworościanu $ABCD$, np.: $R = \frac{3V}{P_c}$,

albo

- poprawnie interpretuje wielkość d , np. pisząc $d = H - |PD| - R$ lub zaznaczając d na rysunku

i na tym przestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający:

- obliczy wysokość H czworościanu $ABCD$ oraz skalę s podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną π od czworościanu $ABCD$ do czworościanu $ABCD$: $H = 2\sqrt{6}$,
 $s = \frac{2}{3}$

albo

- obliczy wysokość H czworościanu $ABCD$ oraz obliczy promień R kuli: $H = 2\sqrt{6}$,
 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

albo

- obliczy skalę s podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną π od czworościanu $ABCD$ do czworościanu $ABCD$ oraz promień R kuli: $s = \frac{2}{3}$, $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

albo

- obliczy skalę s podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną π od czworościanu $ABCD$ do czworościanu $ABCD$ oraz wyznaczy promień R kuli w zależności od H :
 $s = \frac{2}{3}$, $R = \frac{1}{4}H$

i na tym przestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający:

- obliczy wysokość H czworościanu $ABCD$, wysokość czworościanu odciętego płaszczyzną π od czworościanu $ABCD$ do czworościanu $ABCD$ oraz promień R kuli:

$$H = 2\sqrt{6}, |DP| = \frac{4}{3}\sqrt{6}, R = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

albo

- wyznaczy szukaną odległość d w zależności od wysokości H czworościanu $ABCD$, np.: $d = \frac{1}{3}H - \frac{1}{4}H$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy odległość punktu S od płaszczyzny π : $d = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Zadanie 10. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne oraz posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (R6.6, R6.4).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

Równanie można przekształcić równoważnie do postaci:

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0.$$

Podstawiamy $t = \cos x$, przy czym $t \in \langle -1, 1 \rangle$.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$2t^2 + 3t + 1 = 0.$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \sqrt{\Delta} = 1,$$

$$t_1 = \frac{-3-1}{4} = -1,$$

$$t_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Wyznaczamy wartości x w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$$\cos x = -1 \text{ lub } \cos x = -\frac{1}{2},$$

$$x = \pi \text{ lub } x = \frac{2\pi}{3}, \text{ lub } x = \frac{4\pi}{3}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze podane równanie w postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego argumentu, np. $2 \cos^2 x - 1 + 3 \cos x = -2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze, że równanie $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania

$$\cos x = -1 \text{ lub } \cos x = -\frac{1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- rozwiąże jedno z równań $\cos x = -1$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$

albo

- wyznaczy wszystkie rozwiązania równań $\cos x = -1$ i $\cos x = -\frac{1}{2}$ w zbiorze R

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający wyznaczy wszystkie rozwiązania równania w podanym przedziale:

$$x = \pi \text{ lub } x = \frac{2\pi}{3}, \text{ lub } x = \frac{4\pi}{3}.$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie sprzeczne lub równanie, którego wszystkie rozwiązania są spoza przedziału $\langle -1, 1 \rangle$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie, które ma tylko jedno rozwiązanie z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

3. Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie, które ma dwa rozwiązania z przedziału $\langle -1, 1 \rangle$, przy czym co najmniej jedno z nich jest z przedziału $(-1, 1)$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

4. Jeżeli zdający poda liczby $\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ jako rozwiązanie, ale bez stosownego uzasadnienia, to otrzymuje **0 punktów**. Jeżeli poda te 3 liczby jako rozwiązanie, z uzasadnieniem, np. sprawdzeniem spełniania przez te liczby równości lub odpowiednią ilustracją, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 11. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Jest to model klasyczny. Za każdym razem mamy 8 możliwości wyciągnięcia jednej piłeczki. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem wszystkich ciągów trójwyrazowych o wyrazach ze zbioru liczb całkowitych od 1 do 8. Zatem $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.

Niech A oznacza zdarzenie zapisania takich trzech liczb, że ich iloczyn dzieli się przez 4. Wtedy możliwe są 3 przypadki.

I. Wszystkie zapisane liczby są parzyste.

II. Dwie z zapisanych liczb są parzyste, a jedna z zapisanych jest nieparzysta.

III. Dwie z zapisanych liczb są nieparzyste, a jedna z zapisanych jest podzielna przez 4.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych w każdym z tych przypadków.

I. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

II. $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 192$.

III. $4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 96$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4: $P(A) = \frac{64 + 192 + 96}{512} = \frac{352}{512} = \frac{11}{16}$.

Uwaga

Prawdopodobieństwo zdarzenia A możemy też wyznaczyć po uprzednim obliczeniu prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego A' . Jeżeli iloczyn trzech zapisanych liczb nie dzieli się przez 4, to oznacza, że zachodzi jeden z poniższych przypadków.

I. Wszystkie zapisane liczby są nieparzyste.

II. Dwie z zapisanych liczb są nieparzyste, a jedna z zapisanych jest równa 2 lub 6.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych w każdym z tych przypadków.

I. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

II. $4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 96$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że iloczyn trzech zapisanych liczb nie jest podzielny przez 4: $P(A') = \frac{64 + 96}{512} = \frac{160}{512} = \frac{5}{16}$.

Zatem $P(A) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- obliczy $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$

albo

- wypisze wszystkie możliwe, ale rozłączne, przypadki, w których wystąpi zdarzenie A lub zdarzenie A' ,

albo

- wypisze wszystkie możliwe przypadki, w których wystąpi zdarzenie A (lub A') i poda taką metodę zliczania zdarzeń elementarnych sprzyjających A (lub A'), która wyklucza powtórzenie tego samego zdarzenia elementarnego,

albo

- obliczy $|A|$ (lub $|A'|$), stosując poprawną metodę, ale z błędem rachunkowym,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi wszystkimi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A (albo A'),

albo

- narysuje niepełne drzewo (może wystąpić brak istotnych gałęzi odpowiadających zdarzeniu A lub A'), ale na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, np. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$, przy czym najwyżej na jednym z trzech odcinków prawdopodobieństwo może być równe 1

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający

- obliczy $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$ i wypisze wszystkie możliwe, ale rozłączne, przypadki, w których wystąpi zdarzenie A lub zdarzenie A'

albo

- obliczy $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$ i wypisze wszystkie możliwe przypadki, w których wystąpi zdarzenie A (lub A') i poda taką metodę zliczania zdarzeń elementarnych sprzyjających A (lub A'), która wyklucza powtórzenie tego samego zdarzenia elementarnego,

albo

- obliczy $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$ i obliczy liczbę zdarzeń elementarnych w dwóch spośród przypadków: a) zapisano 3 liczby parzyste, b) zapisano 2 liczby parzyste i jedną nieparzystą, c) zapisano dwie liczby nieparzyste i jedną podzielną przez 4,

albo

- obliczy $|A| = 352$ lub $|A'| = 160$,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi wszystkimi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A (albo A') i na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, np. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$, przy czym najwyżej na jednym z trzech odcinków prawdopodobieństwo może być równe 1,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi wszystkimi gałęziami odpowiadającymi dwóm spośród przypadków: a) zapisano 3 liczby parzyste, b) zapisano 2 liczby parzyste i jedną nieparzystą, c) zapisano dwie liczby nieparzyste i jedną podzielną przez 4 i oblicza prawdopodobieństwo zgodnie z „metodą drzewkową”

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- obliczy $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$ i $|A| = 352$ (lub $|A'| = 160$)

albo

- narysuje poprawne drzewo oraz zapisze prawdopodobieństwo zdarzenia A (albo A') zgodnie z „metodą drzewkową”

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo: $P(A) = \frac{352}{512} = \frac{11}{16}$.

Zadanie 12. (0–5)

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète’a (R3.1).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zapisujemy układ warunków

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (4x_1 - 4x_2)^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, czyli $36m^2 - 16(2m^2 - 3m - 9) > 0$. Po uporządkowaniu otrzymujemy nierówność $4(m+6)^2 > 0$, której rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz $m = -6$.

Drugą nierówność przekształcamy równoważnie i otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} 16(x_1 - x_2)^2 - 1 &< 0, \\ 16(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - 1 &< 0, \\ 16[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] - 1 &< 0. \end{aligned}$$

Stosujemy wzory Viete'a i otrzymujemy: $16\left(\frac{36m^2}{16} - 4 \cdot \frac{2m^2 - 3m - 9}{4}\right) - 1 < 0$.

Przekształcamy nierówność równoważnie otrzymujemy kolejno:

$$36m^2 - 32m^2 + 48m + 143 < 0, \\ 4m^2 + 48m + 143 < 0.$$

Rozwiązujemy tę nierówność.

$$\Delta = 2304 - 2288 = 16 \\ m_1 = \frac{-48 - 4}{8} = -\frac{13}{2}, \quad m_2 = \frac{-48 + 4}{8} = -\frac{11}{2}, \\ m \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{11}{2}\right).$$

Wyznaczamy część wspólną obu warunków: $m \in \left(-\frac{13}{2}, -6\right) \cup \left(-6, -\frac{11}{2}\right)$.

II sposób

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, czyli $36m^2 - 16(2m^2 - 3m - 9) > 0$. Po uporządkowaniu otrzymujemy nierówność $4(m+6)^2 > 0$, której rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz $m = -6$.

Obliczamy pierwiastki równania, z zachowaniem warunku $x_1 < x_2$:

$$x_1 = \frac{6m - 2|m+6|}{8} = \frac{3m - |m+6|}{4}, \quad x_2 = \frac{6m + 2|m+6|}{8} = \frac{3m + |m+6|}{4}.$$

Obliczamy wartość wyrażenia $4x_1 - 4x_2$ w zależności od m :

$$4x_1 - 4x_2 = 4 \cdot \frac{-2|m+6|}{4} = -2|m+6|.$$

Zapisujemy nierówność z treści zadania z wykorzystaniem wyznaczonych rozwiązań równania i przekształcamy ją równoważnie, otrzymując kolejno:

$$(-2|m+6|-1)(-2|m+6|+1) < 0, \\ -[1 - 4(m+6)^2] < 0, \\ 4m^2 + 48m + 143 < 0.$$

Dalsza część rozwiązania przebiega podobnie jak w I sposobie rozwiązania,

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający rozwiąże nierówność $\Delta \geq 0$ i nie odrzuci przypadku $\Delta = 0$, to za ten etap otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na znalezieniu wartości m , dla których spełniona jest nierówność: $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$.

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Poniżej podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Zdający otrzymuje **1 punkt** gdy:

- zapisze nierówność $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$ w postaci równoważnej zawierającej jedynie sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego $4x^2 - 6mx + (2m + 3)(m - 3)$, np.: $16[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] - 1 < 0$
lub
- obliczy pierwiastki trójmianu:
$$x_1 = \frac{6m - 2|m + 6|}{8} = \frac{3m - |m + 6|}{4}, \quad x_2 = \frac{6m + 2|m + 6|}{8} = \frac{3m + |m + 6|}{4}.$$

Zdający otrzymuje **2 punkty** gdy:

- zapisze nierówność $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$ w postaci nierówności równoważnej z jedną niewiadomą np.: $16\left(\frac{36m^2}{16} - 4 \cdot \frac{2m^2 - 3m - 9}{4}\right) - 1 < 0$ lub $4m^2 + 48m + 143 < 0$
lub $(-2|m + 6| - 1)(-2|m + 6| + 1) < 0$.

Zdający otrzymuje **3 punkty** gdy:

- poprawnie rozwiąże nierówność: $m \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{11}{2}\right)$.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapów

I i II oraz podaniu odpowiedzi: $m \in \left(-\frac{13}{2}, -6\right) \cup \left(-6, -\frac{11}{2}\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi

1. W przypadku otrzymania na jednym z etapów (I lub II) zbioru pustego lub zbioru R jako zbioru rozwiązań nierówności przyznajemy **0 punktów** za III etap.

2. W przypadku otrzymania w II etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z I etapu przyznajemy **0 punktów** za III etap.

3. W przypadku rozwiązania z błędami, nieprzekreślającymi poprawności rozumowania, za ostatni etap przyznajemy **1 punkt** jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II lub gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże etap II (uwaga 3. ma zastosowanie, gdy nie zachodzą przypadki 1. i 2.).

4. Jeżeli zdający w wyniku błędów otrzyma w II etapie nierówność z niewiadomą m stopnia drugiego z ujemnym wyróżnikiem lub nierówność liniową, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

5. W przypadku, gdy zdający przyjmuje błędnie $\sqrt{\Delta} = 2(m + 6)$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

Zadanie 13. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności, wyznacza współrzędne środka odcinka, wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych oraz oblicza odległość dwóch punktów (R8.5, 8.5, 8.3, 8.4, 8.6).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Środek S szukanego okręgu jest punktem przecięcia prostej $x - 3y + 1 = 0$ oraz symetralnej odcinka AB .

Wyznamy współrzędne środka D odcinka AB : $D = \left(\frac{-5+0}{2}, \frac{3+6}{2} \right) = \left(\frac{-5}{2}, \frac{9}{2} \right)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B :

$$a_{AB} = \frac{6-3}{0+5} = \frac{3}{5}.$$

Z warunku prostopadłości prostych wyznaczamy współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka AB : $a = -\frac{5}{3}$. Wyznamy równanie symetralnej odcinka AB : $y = -\frac{5}{3}x + b$.

Przechodzi ona przez punkt $D = \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right)$, stąd otrzymujemy $\frac{9}{2} = -\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{5}{2} \right) + b$. Zatem $b = \frac{1}{3}$. Wobec tego symetralną odcinka AB jest prosta $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$.

Obliczamy współrzędne punktu S , rozwiązując układ równań $\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$. Środkiem

okręgu jest $S = \left(0, \frac{1}{3} \right)$.

Wyznamy promień okręgu r obliczając np.: $|AS| = \sqrt{5^2 + \left(\frac{8}{3} \right)^2} = \frac{17}{3}$.

Wyznamy równanie okręgu o środku w punkcie $S = \left(0, \frac{1}{3} \right)$ i promieniu $r = \frac{17}{3}$:

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{289}{9}.$$

II sposób

Środkiem okręgu jest punkt S , który leży na prostej $x - 3y + 1 = 0$. Zatem $S = (3y - 1, y)$.

Ponieważ $|AS|^2 = |BS|^2$, więc możemy zapisać równanie $(x+5)^2 + (y-3)^2 = x^2 + (y-6)^2$.

Rozwiązujemy zatem układ równań

$$10x + 6y = 2 \text{ i } x - 3y = -1,$$

otrzymując współrzędne punktu S

$$S = \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Następnie obliczamy kwadrat długości promienia $|SB|^2 = r^2$

$$r^2 = \left(\frac{17}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}.$$

Zatem równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r ma postać $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$.

III sposób

Przyjmijmy, że punkt $S = (a, b)$ jest środkiem szukanego okręgu. Ponieważ punkt ten leży na prostej $x - 3y + 1 = 0$, więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej. Stąd $a - 3b + 1 = 0$.

Okrąg przechodzi przez punkty $A = (-5, 3)$ i $B = (0, 6)$, zatem

$$\begin{cases} (-5 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2 \\ (-a)^2 + (6 - b)^2 = r^2. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy zależność między a i b : $5a + 3b - 1 = 0$.

Z układu równań

$$\begin{cases} a - 3b + 1 = 0 \\ 5a + 3b - 1 = 0 \end{cases}$$

obliczamy współrzędne środka okręgu $S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$. Wyznaczone współrzędne podstawiamy do jednego z równań układu z niewiadomą r i obliczamy kwadrat promienia okręgu: $r^2 = \frac{289}{9}$.

Zatem szukane równanie okręgu ma postać: $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$.

Schematy punktowania

I sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.
Zdający

- wyznaczy współrzędne środka odcinka AB : $D = \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$

albo

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej zawierającej odcinek AB : $a_{AB} = \frac{3}{5}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze równanie symetralnej odcinka AB : $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności 3 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu S : $S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Zdający wyznaczy promień okręgu (lub kwadrat promienia okręgu): $r = \frac{17}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- zapisze współrzędne punktu S w zależności od jednej zmiennej, np.: $S = (3y - 1, y)$

albo

- zapisze równość $|AS|^2 = |BS|^2$ (lub $|AS| = |BS|$) lub równoważne równanie

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = x^2 + (y-6)^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze układ równań

$$10x + 6y = 2 \text{ i } x - 3y = -1$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności 3 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu S :

$$S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Wyznaczy kwadrat promienia okręgu (lub promień okręgu): $r^2 = \frac{289}{9}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- zapisze układ równań:
$$\begin{cases} (-5-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 \\ (-a)^2 + (6-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

albo

- zauważy, że współrzędne środka okręgu spełniają równanie: $a - 3b + 1 = 0$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze układ równań:
$$\begin{cases} (-5-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 \\ (-a)^2 + (6-b)^2 = r^2 \end{cases}$$
 i zauważy, że współrzędne

środku okręgu spełniają równanie $a - 3b + 1 = 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności 3 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu S : $S = \left(0, \frac{1}{3}\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 4 p.

Wyznaczy promień okręgu (lub kwadrat promienia okręgu): $r = \frac{17}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$.

Uwaga

Jeżeli zdający oblicza współrzędne punktu P przecięcia danej prostej z osią Oy , oblicza odległość PB , zapisuje równanie okręgu i na tym poprzestaje, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 14. (0–6)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego oraz stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. (5.3, 5.4) 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych; (R3.3).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego. Skoro suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 27, to $b - r + b + b + r = 27$, a stąd $b = 9$. Wówczas ciąg geometryczny $(7 - r, 9, 2r + 19)$ spełnia warunek $81 = (7 - r) \cdot (2r + 19)$. Równanie to ma dwa rozwiązania $r = 4$ i $r = -\frac{13}{2}$.

W pierwszym przypadku otrzymujemy ciąg arytmetyczny $(5, 9, 13)$, a w drugim przypadku ciąg arytmetyczny $(\frac{31}{2}, 9, \frac{5}{2})$.

II sposób

Liczby a, b, c są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego, zatem $\frac{a+c}{2} = b$. Suma liczb a, b, c równa 27, stąd $a + b + c = 27$. Ciąg $(a - 2, b, 2c + 1)$ jest geometryczny, zatem $b^2 = (a - 2) \cdot (2c + 1)$.

Zapisujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi:
$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = b \\ a+b+c = 27 \\ b^2 = (a-2) \cdot (2c+1) \end{cases}.$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $a + c = 2b$, podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy $b = 9$.

Do trzeciego równania podstawiamy $b = 9$ i $a = 2b - c$ i otrzymujemy równanie kwadratowe: $2c^2 - 31c + 65 = 0$. Równanie to ma dwa rozwiązania: $c = \frac{5}{2}$ oraz $c = 13$. W pierwszym

przypadku otrzymujemy: $a = 5$, $b = 9$, $c = 13$ a w drugim przypadku otrzymujemy: $a = \frac{31}{2}$,

$$b = 9, c = \frac{5}{2}.$$

III sposób

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego, natomiast $a-2$ pierwszy wyraz tego ciągu.

Wtedy $b = (a-2)q$ i $2c+1 = (a-2)q^2$. Z ostatniej zależności otrzymujemy $c = \frac{(a-2)q^2 - 1}{2}$.

Ponieważ suma liczb a , b , c jest równa 27, więc możemy zapisać równość

$$a + (a-2)q + \frac{(a-2)q^2 - 1}{2} = 27.$$

Z własności ciągu arytmetycznego wynika równanie

$$b = \frac{a+c}{2},$$

które możemy zapisać w postaci

$$(a-2)q = \frac{2a + (a-2)q^2 - 1}{4}.$$

Otrzymaliśmy zatem układ równań z niewiadomymi a i q :

$$2a + 2(a-2)q + (a-2)q^2 = 55$$

$$4(a-2)q = 2a + (a-2)q^2 - 1.$$

Ten układ jest równoważny układowi

$$2(a-2) + 2(a-2)q + (a-2)q^2 = 51$$

$$-2(a-2) + 4(a-2)q - (a-2)q^2 = 3$$

Po wyłączeniu czynnika $(a-2)$ każde z równań przyjmuje postać

$$(a-2)(2 + 2q + q^2) = 51$$

$$(a-2)(-2 + 4q - q^2) = 3$$

Zatem

$$3(2 + 2q + q^2) = 51(-2 + 4q - q^2),$$

skąd otrzymujemy równanie kwadratowe

$$3q^2 - 11q + 6 = 0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania

$$q = 3, \quad q = \frac{2}{3}.$$

Jeśli $q = 3$, to $a = 5$, $b = 9$ i $c = 13$. Jeżeli natomiast $q = \frac{2}{3}$, to $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$ i $c = \frac{5}{2}$.

Schemat punktowania

I sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający uzależnił wartości dwie spośród liczb a , b , c od trzeciej z liczb i od różnicy r ciągu arytmetycznego, np.: $a = b - r$ i $c = b + r$

i na tym zakończył lub dalej popełniał błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 p.

Zdający zapisze równania wynikające z własności ciągu arytmetycznego i z własności ciągu geometrycznego, np.: $a = b - r$, $c = b + r$, $b^2 = (a - 2) \cdot (2c + 1)$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, wynikające z własności ciągu geometrycznego, np.: $81 = (7 - r)(2r + 19)$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne 5 p.

Zdający obliczy liczby a , b , c w jednym z możliwych przypadków i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga

Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne 6 p.

Zdający obliczy liczby w dwóch przypadkach spełniających warunki zadania: $a = 5$, $b = 9$, $c = 13$ oraz $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$, $c = \frac{5}{2}$.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający zapisze jedno z równań: $\frac{a+c}{2} = b$, $b^2 = (a-2) \cdot (2c+1)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze układ trzech równań z trzema niewiadomymi, np.:
$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = b \\ a+b+c = 27 \\ b^2 = (a-2) \cdot (2c+1) \end{cases}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.: $-2c^2 + 31c + 16 = 81$.

Rozwiązanie prawie pełne 5 p.

Zdający obliczy liczby a , b , c w jednym z możliwych przypadków i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga

Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne **6 p.**

Zdający obliczy liczby w dwóch przypadkach spełniających warunki zadania: $a = 5$, $b = 9$, $c = 13$ oraz $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$, $c = \frac{5}{2}$.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania **1 p.**

Zdający zapisze wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego w zależności od jednej z liczb i ilorazu ciągu geometrycznego, np.

$$a - 2, b = (a - 2)q, c = \frac{(a - 2)q^2 - 1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny **2 p.**

Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$a + (a - 2)q + \frac{(a - 2)q^2 - 1}{2} = 27 \text{ i } (a - 2)q = \frac{2a + (a - 2)q^2 - 1}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **3 p.**

Zdający zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.:

$$3(2 + 2q + q^2) = 51(-2 + 4q - q^2)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne **5 p.**

Zdający obliczy liczby a , b i c w jednym z możliwych przypadków i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga

Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne **6 p.**

Zdający zapisze dwa zestawy liczb spełniające warunki zadania: $a = 5$, $b = 9$ i $c = 13$

oraz $a = \frac{31}{2}$, $b = 9$ i $c = \frac{5}{2}$.

Uwagi (do wszystkich schematów punktowania)

1. Jeżeli zdający myli własności ciągu arytmetycznego z własnościami ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie jeden zestaw liczb a, b, c , także ze sprawdzeniem warunków zadania, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 15. (0–7)

III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Niech r oraz h oznaczają, odpowiednio, promień podstawy walca i wysokość walca. Pole P powierzchni całkowitej tego walca jest równe $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Stąd

$$h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r}.$$

Objętość walca $V = \pi r^2 h$ zapisujemy jako funkcję zmiennej r :

$$V(r) = \pi r^2 \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{Pr - 2\pi r^3}{2}, \text{ gdzie } 0 < r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}.$$

Pochodna funkcji V jest określona wzorem

$$V'(r) = \frac{1}{2}(P - 6\pi r^2) \text{ dla } 0 < r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}.$$

Wyznaczamy miejsca zerowe i badamy znak pochodnej

$$V'(r) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}},$$

$$V'(r) > 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } 0 < r < \sqrt{\frac{P}{6\pi}},$$

$$V'(r) < 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sqrt{\frac{P}{6\pi}} < r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}.$$

Wynika stąd, że w przedziale $(0, \sqrt{\frac{P}{6\pi}})$ funkcja V jest rosnąca, a w przedziale $(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}, \sqrt{\frac{P}{2\pi}})$ jest malejąca. Zatem $V(\sqrt{\frac{P}{6\pi}})$ jest największą wartością tej funkcji. Wartość ta jest równa

$$V\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right) = \frac{P \cdot \sqrt{\frac{P}{6\pi}} - 2\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)^3}{2} = \frac{P}{3} \cdot \sqrt{\frac{P}{6\pi}}.$$

$$\text{Gdy } r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}, \text{ to wtedy } h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \sqrt{\frac{2P}{3\pi}}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) **Pierwszy etap** składa się z trzech części:

- wyznaczenie wysokości walca w zależności od promienia podstawy walca:

$$h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r},$$

- wyznaczenie objętości walca jako funkcji jednej zmiennej r , $V(r) = \frac{Pr - 2\pi r^3}{2}$,
- wyznaczenie dziedziny funkcji V : $D_V = \left(0, \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$.

Za poprawne wykonanie każdej z tych części zdający otrzymuje **1 punkt**.

b) **Drugi etap** składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej $f(r) = \frac{P}{2} \cdot r - \pi r^3$:

$$f'(r) = \frac{P}{2} - 3\pi r^2,$$
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji V : $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ lub obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji f : $r = -\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$.
- zbadanie znaku pochodnej funkcji V i uzasadnienie, że dla $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ funkcja V osiąga największą wartość.

Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

c) **Trzeci etap**.

Obliczenie największej objętości walca i wysokości walca o największej objętości:

$$V = \frac{P}{3} \cdot \sqrt{\frac{P}{6\pi}}, \quad h = \sqrt{\frac{2P}{3\pi}}.$$

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze objętość walca z błędem rzeczowym, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie, a jeżeli dodatkowo poprawnie wyznaczy dziedzinę funkcji V , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający obliczy pochodną funkcji f lub V z błędem rachunkowym i otrzyma funkcję liniową albo funkcję kwadratową o ujemnym wyróżniku o wyróżniku równym 0, to może otrzymać punkty jedynie za pierwszy etap rozwiązania.
3. Jeśli zdający rozwiązuje zadanie dla stożka, to otrzymuje **0 punktów**, nawet jeśli rozwiązanie tego innego zadania jest poprawne.
4. Za rozwiązanie z konkretną wartością liczbową w miejsce P zdający otrzymuje **0 punktów**.