

Egzamin maturalny  
CZERWIEC 2011

Schemat oceniania do zadań otwartych

Poziom rozszerzony

Rozwiąż nierówność  $|2x-4|+|x-5|\geq 12$ .

**I sposób rozwiązania:** wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały:  $(-\infty, 2)$ ,  $\langle 2, 5)$ ,  $\langle 5, \infty)$ .

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności

|                           |                          |                            |
|---------------------------|--------------------------|----------------------------|
| $x \in (-\infty, 2)$      | $x \in \langle 2, 5)$    | $x \in \langle 5, \infty)$ |
| $-2x + 4 - x + 5 \geq 12$ | $2x - 4 - x + 5 \geq 12$ | $2x - 4 + x - 5 \geq 12$   |
| $-3x \geq 3$              | $x \geq 11$              | $3x \geq 21$               |
| $x \leq -1$               |                          | $x \geq 7$                 |

Wyznaczamy części wspólne otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami,

|             |             |            |
|-------------|-------------|------------|
| $x \leq -1$ | sprzeczność | $x \geq 7$ |
|-------------|-------------|------------|

i bierzemy sumę tych przedziałów:  $x \in (-\infty, -1) \cup (7, \infty)$ .

**II sposób rozwiązania** zapisanie czterech przypadków

Zapisujemy cztery przypadki:

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x-5 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-4 < 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-4 < 0 \\ x-5 < 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przypadkach:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                      |                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \\ 2x - 4 + x - 5 \geq 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 5 \\ 3x \geq 21 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 5 \\ x \geq 7 \end{cases}$ $x \in \langle 7, \infty \rangle$ | $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 < 0 \\ 2x - 4 - x + 5 \geq 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \\ x \geq 11 \end{cases}$ <p>niemożliwe</p> | $\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases}$ <p>niemożliwe</p> | $\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x - 5 < 0 \\ -2x + 4 - x + 5 \geq 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2 \\ x < 5 \\ -3x \geq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2 \\ x < 5 \\ x \leq -1 \end{cases}$ $x \in (-\infty, -1\rangle$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Zapisujemy odpowiedź:  $x \in (-\infty, -1) \cup (7, \infty)$ .

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały  $(-\infty, 2)$ ,  $\langle 2, 5 \rangle$ ,  $\langle 5, \infty \rangle$

albo

zapisze cztery przypadki:  $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases} \begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x - 5 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$

Uwaga:

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, ale nie są one konsekwencją błędu rachunkowego popełnionego przy przekształcaniu nierówności, to przyznajemy **0 punktów**.

Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np:

I.  $x \in (-\infty, 2) \quad -2x + 4 - x + 5 \geq 12$

II.  $x \in \langle 2, 5 \rangle \quad 2x - 4 - x + 5 \geq 12$

III.  $x \in \langle 5, \infty \rangle \quad 2x - 4 + x - 5 \geq 12$

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach, stwierdzi, że czwarty przypadek jest niemożliwy i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają**

**poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 3 pkt**

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że czwarty jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający zapisze odpowiedź:  $x \leq -1$  lub  $x \geq 7$

Uwaga:

1. We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte), to przyznajemy za całe zadanie o **1 pkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.
2. Jeżeli zdający przy przekształcaniu nierówności podanej w treści zadania popełni błąd (np.  $|2(x - 4)| + |x - 5| \geq 12$ ), to otrzymuje **1 punkt mniej** niż przewidziany w schemacie w danej kategorii rozwiązania.

### Zadanie 2. (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $2x^2 - (m-2)x - 3m = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2$ , spełniające warunek  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$ .

#### Rozwiązanie:

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25 \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność  $\Delta > 0$ :

$$(m-2)^2 + 24m > 0,$$

$$m^2 + 20m + 4 > 0$$

$$m \in (-\infty, -10 - 4\sqrt{6}) \cup (-10 + 4\sqrt{6}, +\infty).$$

Rozwiązujemy nierówność  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$ .

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 25$$

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} \leq 25$$

$$m^2 + 20m - 96 \leq 0$$

Otrzymujemy  $m \in \langle -24, 4 \rangle$ .

Częścią wspólną obu zbiorów jest suma przedziałów  $\langle -24, -10 - 4\sqrt{6} \rangle \cup (-10 + 4\sqrt{6}, 4)$ .

#### Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

- a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ , gdzie  $\Delta = m^2 + 20m + 4$ , czyli  $m^2 + 20m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -10 - 4\sqrt{6}) \cup (-10 + 4\sqrt{6}, +\infty)$ .

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**

#### Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność  $\Delta \geq 0$ , to **nie otrzymuje punktu** za tę część.

- b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$ ,  $m \in \langle -24, 4 \rangle$ .

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

- c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b).

Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

- zapisanie nierówności  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$  w postaci równoważnej  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 25$  albo
- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności

$$\left(\frac{m-2-\sqrt{m^2+20m+4}}{4}\right)^2 + \left(\frac{m-2+\sqrt{m^2+20m+4}}{4}\right)^2 -$$
$$-2 \cdot \frac{m-2-\sqrt{m^2+20m+4}}{4} \cdot \frac{m-2+\sqrt{m^2+20m+4}}{4} \leq 25$$

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ..... 2 pkt**  
Doprowadzenie nierówności do postaci  $m^2 + 20m - 96 \leq 0$ .

**Rozwiązanie bezbłędne części b) ..... 3 pkt**  
Rozwiązanie nierówności:  $m \in \langle -24, 4 \rangle$

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**  
Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i zapisanie odpowiedzi:  
 $m \in \langle -24, -10 - 4\sqrt{6} \rangle \cup \langle -10 + 4\sqrt{6}, 4 \rangle$ .

Uwaga. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań obu nierówności, to otrzymuje **4 punkty**.

### Zadanie 3. (5 pkt)

Ciąg  $(a, b, c)$  jest geometryczny. Ciąg  $(3a+3, 2b, c-12)$  jest arytmetyczny i suma jego dwóch pierwszych wyrazów jest równa trzeciemu. Oblicz  $a, b, c$ .

#### I sposób rozwiązania

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie:  $b^2 = a \cdot c$ , a z własności ciągu arytmetycznego zapisujemy równanie:  $2(2b) = (3a+3) + (c-12)$ .

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań: 
$$\begin{cases} (3a+3) + (2b) = (c-12) \\ b^2 = a \cdot c \\ 2(2b) = (3a+3) + (c-12) \end{cases}.$$

Przekształcamy układ równań do równania z jedną niewiadomą:  $(3a+3)^2 = a(9a+21)$  lub

$$b^2 = \left(\frac{1}{3}b - 1\right)(3b+12) \text{ lub } \left(\frac{1}{3}c - 4\right)^2 = c\left(\frac{1}{9}c - \frac{21}{9}\right).$$

Rozwiązujemy równania i otrzymujemy:  $a = 3$  lub  $b = 12$  lub  $c = 48$ .

Warunki zadania spełniają liczby:  $a = 3, b = 12, c = 48$ .

#### II sposób rozwiązania

Oznaczamy: przez  $a$  – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, a przez  $q$  – iloraz tego ciągu. Wówczas  $b = a \cdot q, c = a \cdot q^2$ .

Z własności ciągu arytmetycznego i z warunków zadania zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2(2aq) = (3a+3) + (aq^2-12) \\ (3a+3) + (2aq) = aq^2-12 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a(q^2-4q+3) = 9 \\ a(q^2-2q-3) = 15 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania mamy  $a = \frac{9}{q^2-4q+3}$ , zatem  $\frac{9}{q^2-4q+3} \cdot (q^2-2q-3) = 15$ .

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie  $q^2 - 7q + 12 = 0$ .

Rozwiązaniem tego równania są liczby:  $q = 3$  oraz  $q = 4$ . Zauważamy, że dla  $q = 3$  pierwsze równanie jest sprzeczne.

Warunki zadania spełniają liczby:  $a = 3, b = 12, c = 48$ .

#### Schemat oceniania:

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (arytmetycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.

- $b^2 = a \cdot c$

albo

- $2(2b) = (3a+3) + (c-12)$

albo

- $(3a+3) + (2b) = (c-12)$

albo

- $2(2aq) = (3a + 3) + (aq^2 - 12)$

albo

- $(3a + 3) + (2aq) = aq^2 - 12$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisanie układu równań z trzema lub dwiema niewiadomymi np.:

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ 4b = 3a + 3 + c - 12 \\ 3a + 3 + 2b = c - 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 4aq = 3a + 3 + aq^2 - 12 \\ 3a + 3 + 2aq = aq^2 - 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a(q^2 - 2q - 3) = 15 \\ a(q^2 - 4q + 3) = 9 \end{cases}$$

Uwaga:

Jeżeli zdający pomyli własności któregośkolwiek ciągu, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Doprowadzenie układu równań do równania z jedną niewiadomą, np.

$$(3a + 3)^2 = a(9a + 21) \quad \text{lub} \quad b^2 = \left(\frac{1}{3}b - 1\right)(3b + 12) \quad \text{lub} \quad q^2 - 7q + 12 = 0$$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 5 pkt**

$$a = 3, \quad b = 12, \quad c = 48.$$

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje układ z niewiadomymi  $a, q$  i nie odrzuci rozwiązania  $q = 3$ , to otrzymuje 4 punkty.

#### **Zadanie 4. (4 pkt)**

Rozwiąż równanie  $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$  dla  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

##### **Rozwiązanie**

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja

trygonometryczna  $6(1 - \cos^2 x) + 7\cos x - 1 = 0$

$$6 - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0$$

$$6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą, np.  $t = \cos x$ , gdzie  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ .

Otrzymujemy równanie kwadratowe

$$6t^2 - 7t - 5 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\Delta = 49 - 4 \cdot (-5) \cdot 6 = 169 \quad \sqrt{\Delta} = 13$$

$$t_1 = \frac{7-13}{12} = -\frac{1}{2} \quad t_2 = \frac{7+13}{12} = \frac{5}{3}$$

Odrzucamy rozwiązanie  $t_2 = \frac{5}{3}$ , ponieważ  $\frac{5}{3} \notin \langle -1, 1 \rangle$

Rozwiązujemy równanie  $\cos x = -\frac{1}{2}$

Zapisujemy rozwiązania równania w podanym przedziale

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ lub } x = \frac{4}{3}\pi$$

##### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania ..... 1 pkt**

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.:

$$-6\cos^2 x + 7\cos x + 5 = 0 \text{ lub } 6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np.  $t = \cos x$ , zapisanie równania w postaci

$$-6t^2 + 7t + 5 = 0 \text{ lub } 6t^2 - 7t - 5 = 0.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Rozwiązanie równania kwadratowego ( $t = \frac{5}{3}$  lub  $t = -\frac{1}{2}$ ) i odrzucenie rozwiązania  $t = \frac{5}{3}$ .

Uwaga:

Zdający może od razu rozwiązywać równanie kwadratowe (w którym niewiadomą jest  $\cos x$ ) i zapisać rozwiązanie w postaci  $\cos x = \frac{5}{3}$  lub  $\cos x = -\frac{1}{2}$  oraz zapisać, że równanie

$\cos x = \frac{5}{3}$  jest sprzeczne.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Rozwiązanie równania w podanym przedziale:

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{4\pi}{3}$$

albo

$$x = 120^\circ \text{ lub } x = 240^\circ$$

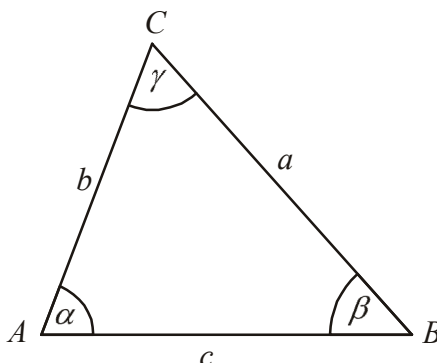
Uwagi:

2. Jeżeli zdający podstawia  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  bez żadnych założeń, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający podniesie obie strony równania  $6\cos^2 x - 5 = 7\cos x$  do kwadratu i potem nie sprawdzi rozwiązań, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Nie wymagamy, aby zdający zapisał warunek np.  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ , o ile z dalszego ciągu rozwiązania wynika, że zdający uwzględni go.
5. Jeżeli zdający rozwiąże poprawnie równanie kwadratowe i na tym zakończy, nie odrzucając rozwiązania  $\frac{5}{3}$ , to otrzymuje **2 punkty**.
6. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania kwadratowego i otrzyma dwa rozwiązania, z których co najmniej jedno należy do przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ , konsekwentnie rozwiąże oba równania w podanym przedziale, to otrzymuje **3 punkty**.
7. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązanie równania trygonometrycznego  $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ ,  $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, to otrzymuje **4 punkty**.

### Zadanie 5. (4 pkt)

Dany jest trójkąt ostrokątny o bokach  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i kątach  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (zobacz rysunek).

Wykaż, że  $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$ .



#### I sposób rozwiązania

Wykorzystujemy twierdzenie cosinusów i zapisujemy zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{i} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Przekształcamy zależności do postaci:

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad \text{i} \quad 2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$$

Zapisujemy lewą stronę równości w postaci:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta}$$

Wykorzystujemy związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta i przekształcamy zależność do postaci:

$$\frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} = \frac{b \cdot \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}}{a \cdot \frac{\sin \beta}{\operatorname{tg} \beta}} = \frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{a \cdot \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

Wykorzystujemy twierdzenie sinusów  $a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$  i wykazujemy tezę:

$$\frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{a \cdot \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2}$$

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze**

**do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zapisanie zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{i} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Przekształcenie zależności do postaci:

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad \text{i} \quad 2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Wykorzystanie twierdzenia cosinusów i zapisanie, że  $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta}$

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt  
Wykorzystanie twierdzenia sinusów i wykazanie tezy.

**II sposób rozwiązania**

Wykorzystujemy związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta i przekształcamy zależność do postaci:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta}$$

Wykorzystujemy twierdzenie sinusów  $\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$  i zapisujemy zależność w postaci:

$$\frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{b \cdot \cos \alpha}{a \cdot \cos \beta}$$

Wykorzystujemy twierdzenie cosinusów i zapisujemy zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{ i } \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Przekształcamy zależności do postaci:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{ i } \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Wykazujemy tezę:

$$\frac{b \cdot \cos \alpha}{a \cdot \cos \beta} = \frac{b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Zapisanie, że  $\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta}$  i wykorzystanie twierdzenia sinusów:  $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Wykorzystanie twierdzenia cosinusów i zapisanie zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \text{ i } \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Przekształcenie zależności do postaci:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{ i } \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

### **Zadanie 6. (3 pkt)**

Wykaż, że nie istnieje wielomian  $W(x)$  stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, który spełnia warunki:  $W(2) = 3$  i  $W(-2) = 2$ .

#### **I sposób rozwiązania**

Zapisujemy wielomian stopnia trzeciego w postaci ogólnej  $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , gdzie  $a, b, c, d$  są liczbami całkowitymi.

Ponieważ  $W(2) = 3$ , to  $8a + 4b + 2c + d = 3$  i ponieważ  $W(-2) = 2$ , to  $-8a + 4b - 2c + d = 2$ .

Po dodaniu otrzymanych równań stronami otrzymujemy równanie  $8b + 2d = 5$ , czyli  $2(4b + d) = 5$ . Ponieważ prawa strona równania jest nieparzysta, a lewa jest parzysta ( $b, d$  są zgodnie z założeniem liczbami całkowitymi), to zapisujemy wniosek, że taki wielomian nie istnieje.

#### **II sposób rozwiązania**

Zapisujemy wielomian stopnia trzeciego w postaci ogólnej  $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , gdzie  $a, b, c, d$  są liczbami całkowitymi.

Ponieważ  $W(2) = 3$ , to  $8a + 4b + 2c + d = 3$ , zatem  $d$  musi być liczbą nieparzystą.

Ponieważ  $W(-2) = 2$ , to  $-8a + 4b - 2c + d = 2$ , zatem  $d$  musi być liczbą parzystą.

Zatem nie istnieje wielomian spełniający warunki zadania.

#### **Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

Uwaga:

Jeżeli zdający rozpatruje wielomian stopnia drugiego zamiast stopnia trzeciego, to otrzymuje **0 punktów**.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zapisanie ogólnej postaci wielomianu trzeciego stopnia:  $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , gdzie  $a, b, c, d$  są liczbami całkowitymi.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $a, b, c, d$ :

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c + d = 3 \\ -8a + 4b - 2c + d = 2 \end{cases}$$

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Dodanie stronami obu równań:  $8b + 2d = 5$ .

oraz

- zauważenie, że lewa strona równania  $8b + 2d = 5$  jest parzysta, a prawa nieparzysta i sformułowanie wniosku, że nie istnieje wielomian spełniający podane warunki albo
- zauważenie, że  $d$  w równaniu  $8a + 4b + 2c + d = 3$  musi być nieparzyste, a w równaniu  $-8a + 4b - 2c + d = 2$  parzyste i sformułowanie wniosku, że nie istnieje wielomian spełniający podane warunki.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zauważy, że  $d$  w równaniu  $8a + 4b + 2c + d = 3$  jest nieparzyste, a w równaniu  $-8a + 4b - 2c + d = 2$  jest parzyste i nie sformułuje wniosku, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający zauważy, że lewa strona równania  $8b + 2d = 5$  jest parzysta, a prawa nieparzysta i nie sformułuje wniosku, to otrzymuje **2 punkty**.

### Zadanie 7. (4 pkt)

Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ , w którym  $|AC| = 5$  i  $|AB| = 8$ . Pole tego trójkąta jest równe  $10\sqrt{3}$ . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

#### Rozwiązanie

Oznaczamy  $|\sphericalangle CAB| = \alpha$  oraz  $R$  - promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

Obliczamy  $\sin \alpha$  ze wzoru na pole trójkąta;

$$\frac{5 \cdot 8 \cdot \sin \alpha}{2} = 10\sqrt{3} \quad \text{stad} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha \text{ jest kątem ostrym więc } \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

Korzystamy z tw. cosinusów do obliczenia długości boku  $BC$ :

$$|BC|^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}, \quad |BC| = 7$$

Promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  obliczamy korzystając z tw. sinusów:

$$2R = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{czyli} \quad R = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

#### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Obliczenie  $\sin \alpha$  :  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Istotny postęp. .... 2 pkt**

- obliczenie  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

albo

- obliczenie długości odcinków, na jakie wysokość trójkąta dzieli bok  $AB$ :  $|AD| = 2,5$  i  $|BD| = 5,5$  lub dla boku  $AC$ :  $|AE| = 4$  i  $|EC| = 1$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie  $|BC|$ :  $|BC| = 7$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

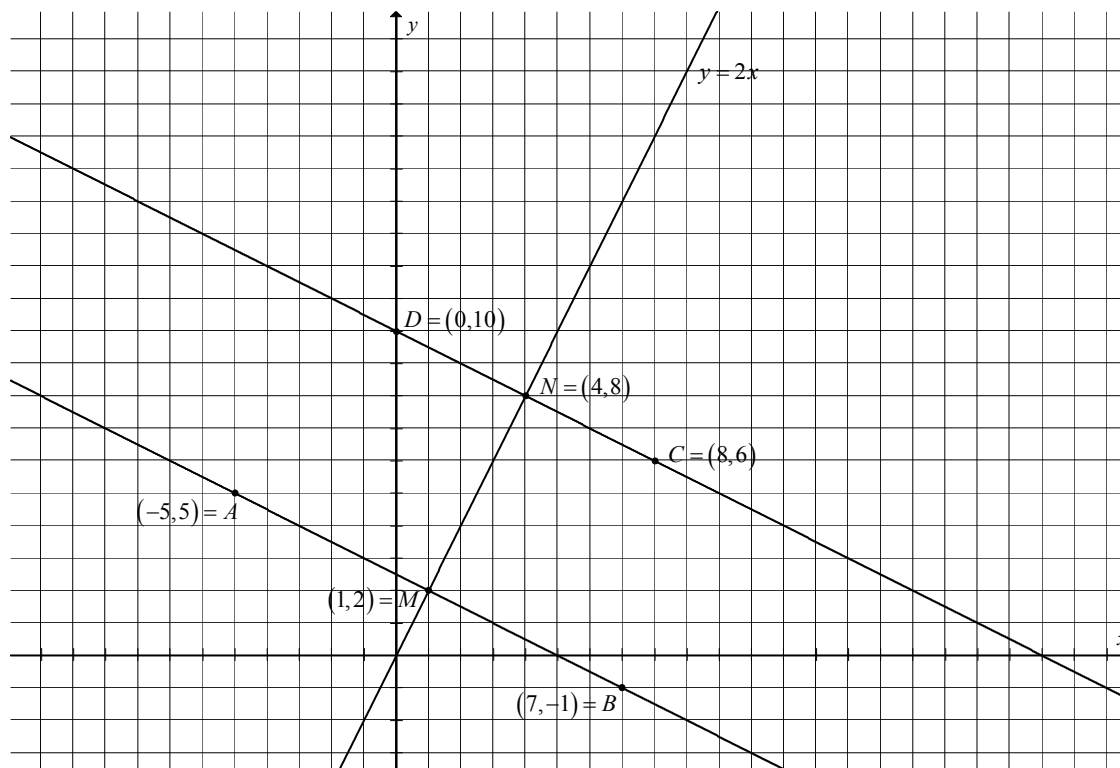
Obliczenie:  $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ .

#### Uwaga:

1. Jeżeli zdający w obliczeniach popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy promień okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , to przyznajemy **4 punkty**.

### Zadanie 8. (5 pkt)

Punkty  $A = (-5, 5)$ ,  $C = (8, 6)$  są przeciwległymi wierzchołkami trapezu równoramiennego  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel CD$ . Prosta o równaniu  $y = 2x$  jest osią symetrii tego trapezu. Oblicz współrzędne wierzchołków  $B$  i  $D$  oraz pole tego trapezu.



#### I sposób rozwiązania (punkty symetryczne względem osi symetrii)

Wyznaczamy równania prostych  $AB$  i  $CD$  prostych do osi symetrii trapezu.

prosta  $AB$

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$\frac{5}{2} = b$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

prosta  $CD$

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$10 = b$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 10$$

Wyznaczamy współrzędne punktu  $M$  leżącego na prostej  $AB$  i osi symetrii trapezu

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \quad M = (1, 2)$$

Punkt  $B$  leży na prostej  $AB$ ,  $B = \left(x, -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)$ ,  $|AM| = |MB|$  możemy więc zapisać równość

$$(1+5)^2 + (2-5)^2 = (x-1)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x - 2\right)^2$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 7$$

albo

wykorzystujemy własność: punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $AB$ :  $(1, 2) = \left( \frac{-5 + x_B}{2}, \frac{5 + y_B}{2} \right)$

Współrzędne punktu  $B$  to  $B = (7, -1)$ .

Analogicznie postępujemy przy obliczeniu współrzędnych wierzchołka  $D$ .

Wyznaczamy współrzędne punktu  $N$  leżącego na prostej  $CD$  i osi symetrii trapezu.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + 10 \end{cases} \quad N = (4, 8)$$

$D$  leży na prostej  $CD$ ,  $D = \left( x, -\frac{1}{2}x + 10 \right) \quad |CN| = |ND|$

$$(4 - 8)^2 + (8 - 6)^2 = (x - 4)^2 + \left( 10 - \frac{1}{2}x - 8 \right)^2$$

$$\frac{5}{4}x^2 - 10x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = 8$$

albo

wykorzystujemy własność: punkt  $N$  jest środkiem odcinka  $CD$ :  $(4, 8) = \left( \frac{8 + x_D}{2}, \frac{6 + y_D}{2} \right)$

Współrzędne punktu  $D$  to  $D = (0, 10)$ .

W celu wyznaczenia pola trapezu musimy obliczyć długości podstaw i wysokości trapezu.

$$|AB| = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \quad |CD| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Długość wysokości  $h$  trapezu jest równa, np. odległości wierzchołka  $C$  od prostej  $AB$ .

$$h = \frac{\left| 4 + 6 - \frac{5}{2} \right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{Obliczamy pole trapezu} \quad P = \frac{6\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{2} \cdot 3\sqrt{5} = 75.$$

Odpowiedź: Pole tego trapezu  $P = 75$ .

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Wyznaczenie równań prostych  $AB$  i  $CD$ :  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad y = -\frac{1}{2}x + 10$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie współrzędnych punktów  $M$  i  $N$ :  $M = (1, 2), N = (4, 8)$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie współrzędnych punktów  $B$  i  $D$  jako symetrycznych do punktów  $A$  i  $C$  względem prostej  $y = 2x$ :  $B = (7, -1)$ ,  $D = (0, 10)$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie pola trapezu  $P = 75$  oraz podanie współrzędnych  $B = (7, -1)$ ,  $D = (0, 10)$ .

Uwagi:

1. Jeżeli zdający nie wyznaczy współrzędnych wierzchołków  $B$  i  $D$ , ale obliczy pole trapezu, to przyznajemy **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie długości podstaw oraz wysokość trapezu i nie obliczy pola trapezu, to przyznajemy **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu długości podstaw lub wysokości trapezu i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole trapezu, to przyznajemy **4 punkty**.

**II sposób rozwiązania** (prosta i okrąg)

Niech  $S = (a, 2a)$  oznacza środek okręgu opisanego na trapezie  $ABCD$ .

Środek okręgu opisanego na trapezie leży na osi symetrii trapezu i jest równoodległy od punktów  $A$  i  $C$ , więc  $|AS| = |CS|$ .

$$(a+5)^2 + (2a-5)^2 = (a-8)^2 + (2a-6)^2$$

$$30a = 50$$

$$a = \frac{5}{3}$$

$$\text{Środek okręgu } S = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

Obliczamy długość promienia okręgu opisanego na trapezie równoramiennym.

$$r = |AS| = \sqrt{\left(\frac{5}{3} + 5\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 5\right)^2} = \frac{5\sqrt{17}}{3}.$$

Wyznaczamy równania prostych  $AB$  i  $CD$  prostopadłych do osi symetrii trapezu.

prosta  $AB$

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$\frac{5}{2} = b$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

prosta  $CD$

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$10 = b$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 10$$

Obliczamy współrzędne pozostałych wierzchołków trapezu rozwiązując układy równań.

wierzchołek  $B$

$$\begin{cases} \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$$

wierzchołek  $D$

$$\begin{cases} \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9} \\ y = -\frac{1}{2}x + 10 \end{cases}$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{425}{9}$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 7$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$A = (-5, 5) \quad B = (7, -1)$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{20}{3}\right)^2 = \frac{425}{9}$$

$$\frac{5}{4}x^2 - 10x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 8$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$D = (0, 10) \quad C = (8, 6)$$

W celu wyznaczenia pola trapezu obliczamy długości podstaw i wysokość trapezu.

$$|AB| = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$|CD| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Wysokość  $h$  trapezu jest równa odległości wierzchołka  $C$  od prostej  $AB$

$$h = \frac{\left|4 + 6 - \frac{5}{2}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = 3\sqrt{5}.$$

$$\text{Obliczamy pole trapezu } P = \frac{\sqrt{180} + \sqrt{80}}{2} \cdot 3\sqrt{5} = 75.$$

Odpowiedź: Pole tego trapezu jest równe 75.

#### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze**

**do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zapisanie układu równań lub równania, z którego można wyznaczyć współrzędne środka okręgu np.

$$\begin{cases} b = 2a \\ (a+5)^2 + (b-5)^2 = (a-8)^2 + (b-6)^2 \end{cases} \quad \text{albo} \quad (a+5)^2 + (2a-5)^2 = (a-8)^2 + (2a-6)^2$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

$$\text{Obliczenie współrzędnych środka okręgu } S = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ oraz promienia okręgu } r = \frac{5\sqrt{17}}{3}$$

$$\text{i podanie równania okręgu } \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie współrzędnych punktów  $B$  i  $D$ , np. poprzez rozwiązanie układów równań:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{425}{9} \\ y = -\frac{1}{2}x + 10 \end{cases} \quad : B = (7, -1), D = (0, 10)$$

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

Obliczenie pola trapezu  $P = 75$  oraz podanie współrzędnych  $B = (7, -1)$ ,  $D = (0, 10)$ .

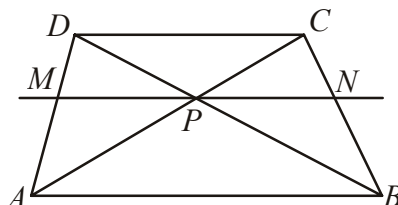
Uwagi:

1. Jeżeli zdający nie wyznaczy współrzędnych wierzchołków  $B$  i  $D$ , ale obliczy pole trapezu, to przyznajemy **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie długości podstaw oraz wysokość trapezu i nie obliczy pola trapezu, to przyznajemy **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu długości podstaw lub wysokości trapezu i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole trapezu, to przyznajemy **4 punkty**.

### Zadanie 9. (3 pkt)

Przekątne trapezu  $ABCD$  przecinają się w punkcie  $P$ . Prosta równoległa do podstaw trapezu, przechodząca przez punkt  $P$ , przecina ramiona  $AD$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $M$  i  $N$ . Wykaż, że  $|MP| = |NP|$ .

#### Rozwiązanie



Założenie:  $AC, BD$  przekątne trapezu  $ABCD$ ,  
 $P$  – punkt przecięcia przekątnych,  
 $MN$  prosta równoległa do podstaw trapezu, punkt  $P$  leży na prostej  $MN$ .

Teza:  $|MP| = |NP|$ .

Dowód:

Trójkąt  $ABD$  jest podobny do trójkąta  $MPD$  ( $kkk$ ), więc  $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|MD|}{|AD|}$ .

Trójkąt  $ABC$  jest podobny do trójkąta  $PNC$  ( $kkk$ ), więc  $\frac{|PN|}{|AB|} = \frac{|NC|}{|BC|}$ .

Z twierdzenia Talesa dla prostych  $AD$  i  $BC$  przeciętych prostymi równoległymi  $AB, MN$  i  $DC$  zapiszemy proporcję  $\frac{|MD|}{|AD|} = \frac{|NC|}{|BC|}$ .

Z zapisanych proporcji wnioskujemy, że  $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|PN|}{|AB|}$ , stąd  $|MP| = |NP|$ .

#### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zauważenie dwóch par trójkątów podobnych:  $ABD$  i  $MPD$  oraz  $ABC$  i  $PNC$  i zapisanie

proporcji  $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|MD|}{|AD|}$ ,  $\frac{|PN|}{|AB|} = \frac{|NC|}{|BC|}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Skorzystanie z twierdzenia Talesa dla prostych  $AD$  i  $BC$  przeciętych prostymi równoległymi

$AB, MN$  i  $DC$  i zapisanie proporcji  $\frac{|MD|}{|AD|} = \frac{|NC|}{|BC|}$ .

Uwaga:

Zdający może skorzystać z proporcji  $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|BN|}{|NC|}$  i albo z niej wyprowadzić żadaną proporcję albo do niej sprowadzić żadaną proporcję.

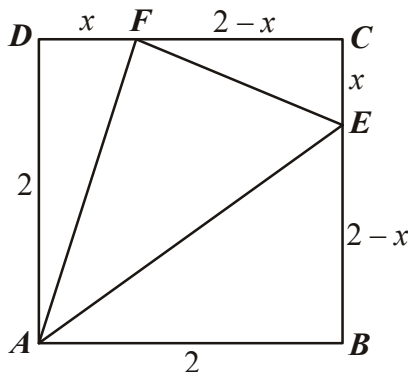
**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Zapisanie równości  $\frac{|MP|}{|AB|} = \frac{|NP|}{|AB|}$  i wyprowadzenie wniosku, że  $|MP| = |NP|$ .

### Zadanie 10. (5 pkt)

Dany jest kwadrat  $ABCD$  o boku równym 2. Na bokach  $BC$  i  $CD$  wybrano odpowiednio punkty  $E$  i  $F$  takie, że  $|CE| = |DF| = x$ . Oblicz wartość  $x$ , dla której pole trójkąta  $AEF$  jest najmniejsze i oblicz to pole.

#### Rozwiązanie



Z warunków zadania  $|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = 2$ ,  $|CE| = x$  i  $|DF| = x$   $0 \leq x \leq 2$ .

Określamy długość odcinków  $|BE|$  i  $|CF|$ :  $|BE| = 2 - x$ ,  $|CF| = 2 - x$ .

Obliczamy pole trójkąta  $AEF$ .

$$P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ABE} - P_{CEF} - P_{ADF} = 4 - \frac{1}{2}(2-x) \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2-x) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

Pole trójkąta  $AEF$  jest funkcją zmiennej  $x$ :  $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$  dla  $x \in \langle 0, 2 \rangle$ . Funkcja ta

osiąga najmniejszą wartość dla  $x = -\frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$ . Wówczas pole trójkąta  $AEF$  jest równe  $1\frac{1}{2}$ .

#### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Zapisanie, że  $P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ADF} - P_{CEF} - P_{ABE}$  lub  $P_{AEF} = P_{ABCD} - (P_{ADF} + P_{CEF} + P_{ABE})$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zapisanie pól trójkątów  $ADF$ ,  $CEF$  i  $ABE$ :  $P_{ADF} = x$ ,  $P_{ABE} = 2 - x$

i  $P_{CEF} = \frac{-x^2 + 2x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + x$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zapisanie  $P_{AEF}$  jako funkcji  $x$ :  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Wyznaczenie  $x$ , dla którego funkcja przyjmuje minimum:  $x = 1$ .

Obliczenie pola trójkąta  $AEF$ :  $1\frac{1}{2}$ .

Uwagi:

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu sumy pól trójkątów  $ADF$ ,  $ABE$  i  $CEF$  i rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd w obliczeniu odciętej wierzchołka paraboli i konsekwentnie do tego błędu obliczy pole trójkąta  $AEF$ , to otrzymuje **4 punkty**.
3. Nie wymagamy uzasadnienia, że dla znalezionej wartości  $x=1$  funkcja przyjmuje minimum (a więc stwierdzenia, że ramiona paraboli są skierowane do góry, czy uzasadnienia, że w jedynym znalezionym miejscu zerowym pochodnej funkcja ma minimum).
4. Jeżeli zdający wyznaczy wartość  $x$ , dla której pole trójkąta  $AEF$  jest najmniejsze i nie obliczy pola tego trójkąta, to otrzymuje **4 punkty**.

### Zadanie 11. (4 pkt)

Spośród wszystkich liczb czterocyfrowych o cyfrach ze zbioru  $\{1, 2, 3\}$  losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wszystkich cyfr wylosowanej liczby jest równa 7.

#### Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie czteroelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru  $\{1, 2, 3\}$ . Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny,  $|\Omega| = 3^4 = 81$ .

Zauważmy, że zdarzeniu  $A$  - suma wszystkich czterech cyfr wylosowanej liczby jest równa 7, odpowiada sytuacji, gdy w zapisie liczby występują cyfry 3,2,1,1, albo 1,2,2,2 w dowolnej kolejności.

Stąd  $|A| = 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 16$  i  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{81}$ .

#### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zdający zapisze  $|\Omega| = 3^4$  albo poda rozkład  $7 = 1+1+2+3 = 1+2+2+2$  i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze  $|\Omega| = 3^4$  i poda rozkład  $7 = 1+1+2+3 = 1+2+2+2$  i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

- Zdający obliczy  $|A| = 12 + 4 = 16$  i nie obliczy prawdopodobieństwa.
- albo
- Zdający obliczy prawdopodobieństwo  $P(A)$  z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie prawdopodobieństwa:  $P(A) = \frac{16}{3^4}$  lub  $P(A) = \frac{16}{81}$ .

#### Uwagi:

1. Zdający otrzymuje 2 punkty, gdy obliczy prawdopodobieństwo tylko dla jednego przypadku:

- $7 = 1+1+2+3$ ,  $|A| = 12$ , zatem  $P(A) = \frac{12}{3^4}$

albo

- $7 = 1+2+2+2$ ,  $|A| = 4$ , zatem  $P(A) = \frac{4}{3^4}$

2. Zdający otrzymuje 3 punkty, gdy obliczy prawdopodobieństwo  $P(A)$  z błędem rachunkowym

3.

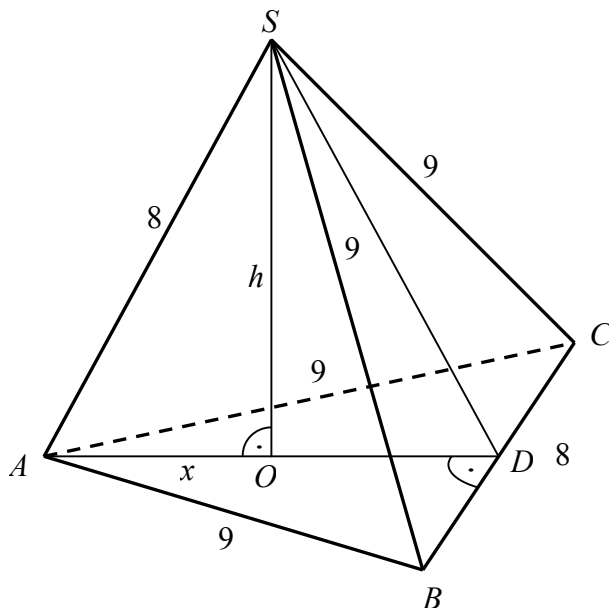
### Zadanie 12. (4 pkt)

W ostrosłupie trójkątnym  $ABCS$  o podstawie  $ABC$  i wierzchołku  $S$  dane są:  
 $|AB| = |AC| = |BS| = |CS| = 9$  i  $|AS| = |BC| = 8$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

#### Rozwiązanie

**I sposób** (ostrosłup jako „samodzielna bryła”)

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $BDS$  obliczamy wysokość ściany bocznej  $BCS$ :



$$|SD| = \sqrt{9^2 - 4^2} = \sqrt{65}$$

Trójkąty  $BCS$  i  $BCA$  są przystające, więc

$$|AD| = |SD| = \sqrt{65}$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach  $AOS$  i  $ODS$  mamy

$$h^2 + x^2 = 8^2 \text{ i } h^2 + (\sqrt{65} - x)^2 = \sqrt{65}^2$$

$$\text{Stąd } h^2 = 64 - x^2 \text{ i } 64 - x^2 + (\sqrt{65} - x)^2 = 65$$

$$64 - x^2 + 65 - 2\sqrt{65}x + x^2 = 65$$

$$x = \frac{32}{\sqrt{65}}, \text{ więc } h^2 = 64 - \left(\frac{32}{\sqrt{65}}\right)^2,$$

$$\text{a stąd } h = \frac{56}{\sqrt{65}}.$$

$$\text{Objętość ostrosłupa jest więc równa } V = \frac{1}{3} P_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{65} \cdot \frac{56}{\sqrt{65}} = \frac{224}{3} = 74 \frac{2}{3}$$

Uwaga. Wysokość ostrosłupa możemy obliczyć inaczej, np.

A. Ze wzoru Herona obliczamy pole trójkąta  $ADS$

$$p = \frac{1}{2}(8 + \sqrt{65} + \sqrt{65}) = 4 + \sqrt{65},$$

$$P_{ADS} = \sqrt{(4 + \sqrt{65})(4 + \sqrt{65} - \sqrt{65})(4 + \sqrt{65} - \sqrt{65})(4 + \sqrt{65} - 8)} = \sqrt{(4 + \sqrt{65})(\sqrt{65} - 4) \cdot 4 \cdot 4} = 4\sqrt{49} = 28$$

ale  $P_{ADS} = \frac{1}{2}\sqrt{65} \cdot h$ , więc  $\frac{1}{2}\sqrt{65} \cdot h = 28$ , stąd  $h = \frac{56}{\sqrt{65}}$ .

B. Trójkąt  $ADS$  jest równoramienny, więc z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ADE$ , gdzie  $E$  jest środkiem boku  $AS$  obliczamy wysokość  $DE$  trójkąta  $ADS$

$$|DE| = \sqrt{(\sqrt{65})^2 - 4^2} = 7$$

Wykorzystując dwukrotnie wzór na pole trójkąta  $ADS$  mamy

$$P_{ADS} = \frac{1}{2}|AD| \cdot h \text{ oraz } P_{ADS} = \frac{1}{2}|AS| \cdot |DE|, \text{ stąd } \frac{1}{2}\sqrt{65} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7, \text{ więc } h = \frac{56}{\sqrt{65}}$$

To samo uzyskamy wykorzystując podobieństwo trójkątów  $AOE$  i  $AED$  (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $A$ )

$$\frac{|OS|}{|AS|} = \frac{|ED|}{|AD|}, \text{ czyli } \frac{h}{8} = \frac{7}{\sqrt{65}}, \text{ stąd } h = \frac{56}{\sqrt{65}}$$

Możemy też zapisać sinus kąta przy wierzchołku  $A$  raz w trójkącie prostokątnym  $AOS$ , drugi raz w trójkącie prostokątnym  $AED$

$$\sin |\sphericalangle A| = \frac{|OS|}{|AS|} \text{ oraz } \sin |\sphericalangle A| = \frac{|ED|}{|AD|}, \text{ stąd } \frac{|OS|}{|AS|} = \frac{|ED|}{|AD|}, \text{ czyli } \frac{h}{8} = \frac{7}{\sqrt{65}}, \text{ więc } h = \frac{56}{\sqrt{65}}$$

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa  $P = 4\sqrt{65}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

- obliczenie wysokości ostrosłupa  $h = \frac{56\sqrt{65}}{65}$  i nie obliczenie pola podstawy ostrosłupa

albo

- obliczenie pola podstawy ostrosłupa i wskazanie metody obliczenia wysokości ostrosłupa.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie wysokości ostrosłupa  $h = \frac{56\sqrt{65}}{65}$  oraz pola podstawy ostrosłupa i nie obliczenie objętości lub obliczenie objętości ostrosłupa z błędem rachunkowym.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie objętości ostrosłupa:  $V = \frac{224}{3}$ .

