

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Zasady oceniania rozwiązań zadań
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny Test diagnostyczny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-P0-100, MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-660, MMAP-P0-700, MMAP-P0-Q00, MMAP-P0-K00, MMAU-P0-100
<i>Termin egzaminu:</i>	7 grudnia 2023 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	12 grudnia 2023 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 ¹	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([...] potęgowanie [...]) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania

- 1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. 2022, poz.1246).

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([...] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm [...] ilorazu [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych z kapitalizacją roczną i zysków z lokat.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: [...] $ x - 2 < 3$ [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych.

Zasady oceniania

2 pkt – założenie, że $n = 2l + 1$ **oraz** przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(3l^2 + 5l + 2)$ **oraz** zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $3l^2 + 5l + 2$ jest liczbą całkowitą

ALBO

– stwierdzenie, że składnik $4n$ jest podzielny przez 4, oraz założenie, że $n = 2l + 1$ **oraz** przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 1$ do postaci $4(3l^2 + 3l + 1)$ i zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $3l^2 + 3l + 1$ jest liczbą całkowitą,

ALBO

– przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $(3n + 1)(n + 1)$ **oraz** stwierdzenie, że wyrażenie $(3n + 1)(n + 1)$ jest iloczynem dwóch liczb parzystych,

ALBO

– przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(n^2 + n) + (1 - n)(1 + n)$ **oraz** stwierdzenie, że wyrażenie $4(n^2 + n) + (1 - n)(1 + n)$ jest sumą dwóch liczb podzielnych przez 4,

ALBO

- przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $2(n^2 + n) + (n + 1)^2$
oraz stwierdzenie, że wyrażenie $2(n^2 + n) + (n + 1)^2$ jest sumą dwóch liczb podzielnych przez 4,
 ALBO
- rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 1$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(12l^2 + 10l + 2)$ i zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $12l^2 + 10l + 2$ jest liczbą całkowitą **oraz** rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 3$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(12l^2 + 22l + 10)$ i zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $12l^2 + 22l + 10$ jest liczbą całkowitą.

1 pkt – założenie, że $n = 2l + 1$ oraz zapisanie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ w postaci $3(4l^2 + 4l + 1) + 4(2l + 1) + 1$

ALBO

- stwierdzenie, że składnik $4n$ jest podzielny przez 4, oraz założenie, że $n = 2l + 1$ oraz przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 1$ do postaci $3(4l^2 + 4l + 1) + 1$,

ALBO

- przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $(3n + 1)(n + 1)$,

ALBO

- przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(n^2 + n) + (1 - n)(1 + n)$,

ALBO

- przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $2(n^2 + n) + (n + 1)^2$,

ALBO

- rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 1$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(12l^2 + 10l + 2)$ i zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $12l^2 + 10l + 2$ jest liczbą całkowitą,

ALBO

- rozpatrzenie przypadku, gdy $n = 4l + 3$, tj. przekształcenie wyrażenia $3n^2 + 4n + 1$ do postaci $4(12l^2 + 22l + 10)$ i zapisanie, że l jest liczbą całkowitą lub, że suma $12l^2 + 22l + 10$ jest liczbą całkowitą.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ liczba n jest nieparzysta, więc zapisujemy ją w postaci $n = 2l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$. Wówczas badana liczba ma postać

$$\begin{aligned} 3n^2 + 4n + 1 &= 3(2l + 1)^2 + 4(2l + 1) + 1 = 3(4l^2 + 4l + 1) + 8l + 4 + 1 \\ &= 12l^2 + 12l + 3 + 8l + 5 = 12l^2 + 20l + 8 = 4(3l^2 + 5l + 2) \end{aligned}$$

Ponieważ $l \in \mathbb{Z}$, więc również $3l^2 + 5l + 2$ jest liczbą całkowitą. Zatem iloczyn $4(3l^2 + 5l + 2)$ jest podzielny przez 4. To należało wykazać.

Sposób II

Liczba $3n^2 + 4n + 1$ jest sumą trzech składników. Składnik $4n$ jest podzielny przez 4 dla dowolnej liczby całkowitej n . Wystarczy zatem udowodnić, że liczba $3n^2 + 1$ jest podzielna przez 4 dla dowolnej nieparzystej liczby n . Ponieważ liczba n jest nieparzysta, więc zapisujemy ją w postaci $n = 2l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$. Wówczas liczba $3n^2 + 1$ ma postać

$$\begin{aligned} 3n^2 + 1 &= 3(2l + 1)^2 + 1 = 3(4l^2 + 4l + 1) + 1 = 12l^2 + 12l + 3 + 1 \\ &= 12l^2 + 12l + 4 = 4(3l^2 + 3l + 1) \end{aligned}$$

Ponieważ $l \in \mathbb{Z}$, więc również $3l^2 + 3l + 1$ jest liczbą całkowitą. Zatem iloczyn $4(3l^2 + 3l + 1)$ jest podzielny przez 4. To należało wykazać.

Sposób III

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $3n^2 + 4n + 1$ oraz jego pierwiastki

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$$

$$n_1 = \frac{-4 + 2}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$n_2 = \frac{-4 - 2}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$

Następnie zapisujemy liczbę $3n^2 + 4n + 1$ w postaci iloczynu

$$3n^2 + 4n + 1 = 3\left(n + \frac{1}{3}\right)(n + 1) = (3n + 1)(n + 1)$$

Liczba n jest nieparzysta, zatem liczby $3n + 1$ oraz $n + 1$ są parzyste (suma dwóch liczb nieparzystych). Stąd iloczyn $(3n + 1)(n + 1)$ jest liczbą podzielną przez $2 \cdot 2$, czyli przez 4. To należało wykazać.

Sposób IV

Zapisujemy liczbę $3n^2 + 4n + 1$ w postaci sumy dwóch liczb podzielnych przez 4

$$3n^2 + 4n + 1 = 4n^2 - n^2 + 4n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 - n^2 = 4(n^2 + n) + (1 - n)(1 + n)$$

Liczba $4(n^2 + n)$ jest podzielna przez 4 dla dowolnej liczby całkowitej n .

Liczba n jest nieparzysta, zatem liczby $1 - n$ oraz $1 + n$ są parzyste (różnica oraz suma dwóch liczb nieparzystych). Stąd iloczyn $(1 - n)(1 + n)$ jest liczbą podzielną przez $2 \cdot 2$, czyli przez 4. Zatem liczba $3n^2 + 4n + 1$ jest podzielna przez 4 jako suma dwóch liczb podzielnych przez 4.

Sposób V

Rozważmy dwa przypadki: gdy n jest liczbą, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, oraz gdy n jest liczbą, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3.

Jeśli n jest liczbą, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, to możemy ją zapisać w postaci $n = 4l + 1$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$. Wówczas badana liczba ma postać

$$\begin{aligned} 3n^2 + 4n + 1 &= 3(4l + 1)^2 + 4(4l + 1) + 1 = 3(16l^2 + 8l + 1) + 16l + 4 + 1 \\ &= 48l^2 + 24l + 3 + 16l + 5 = 48l^2 + 40l + 8 = 4(12l^2 + 10l + 2) \end{aligned}$$

Ponieważ $l \in \mathbb{Z}$, więc suma $12l^2 + 10l + 2$ jest liczbą całkowitą. Zatem iloczyn $4(12l^2 + 10l + 2)$ jest podzielny przez 4.

Jeśli n jest liczbą, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, to możemy ją zapisać w postaci $n = 4l + 3$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$. Wówczas badana liczba ma postać

$$\begin{aligned} 3n^2 + 4n + 1 &= 3(4l + 3)^2 + 4(4l + 3) + 1 = 3(16l^2 + 24l + 9) + 16l + 12 + 1 \\ &= 48l^2 + 72l + 27 + 16l + 13 = 48l^2 + 88l + 40 = 4(12l^2 + 22l + 10) \end{aligned}$$

Ponieważ $l \in \mathbb{Z}$, więc suma $12l^2 + 22l + 10$ jest liczbą całkowitą. Zatem iloczyn $4(12l^2 + 22l + 10)$ jest podzielny przez 4.

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$; II.5) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej [...]; V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 9. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny; III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów [...] takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej [...] metodą grupowania.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i obliczenie wszystkich rozwiązań równania:

$$(-\sqrt{5}), \left(-\frac{3}{2}\right), \sqrt{5}.$$

2 pkt – przekształcenie równania $2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$ do postaci $W(x) = 0$, gdzie W jest iloczynem wielomianów stopnia co najwyżej drugiego **oraz** rozwiązanie jednego z równań wynikającego z tego rozkładu, np.

$$(2x + 3)(x^2 - 5) = 0 \text{ i } x = -\frac{3}{2}$$

ALBO

– przekształcenie równania $2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$ do postaci $W(x) = 0$, gdzie W jest wielomianem rozłożonym na czynniki liniowe, np.

$$W(x) = (2x + 3)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}),$$

ALBO

– przekształcenie równania $2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$ do postaci $W(x) = 0$, gdzie W jest wielomianem stopnia trzeciego **oraz** obliczenie jednego z pierwiastków wielomianu W **oraz** poprawne podzielenie wielomianu W przez odpowiedni dwumian, np.

$$x = -\frac{3}{2} \text{ i } (2x^3 + 3x^2 - 10x - 15) : \left(x + \frac{3}{2}\right) = 2x^2 - 10,$$

ALBO

– przekształcenie równania $2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$ do postaci alternatywy równań **oraz** rozwiązanie jednego z nich, tj. zapisanie:

$$(2x + 3 = 0, x^2 - 5 = 0) \text{ oraz } x = -\frac{3}{2}$$

albo

$$(2x + 3 = 0, x^2 - 5 = 0) \text{ oraz } (x = -\sqrt{5}, x = \sqrt{5}),$$

albo

$$(2x + 3 = 0, x - \sqrt{5} = 0, x + \sqrt{5} = 0) \text{ oraz } x = -\sqrt{5},$$

albo

$$(2x + 3 = 0, x - \sqrt{5} = 0, x + \sqrt{5} = 0) \text{ oraz } x = \sqrt{5},$$

albo

$$(2x + 3 = 0, x - \sqrt{5} = 0, x + \sqrt{5} = 0) \text{ oraz } x = -\frac{3}{2}.$$

1 pkt – przekształcenie równania $2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$ do postaci $W(x) = 0$, gdzie W jest iloczynem wielomianów stopnia co najwyżej drugiego, np.

$$W(x) = (2x + 3)(x^2 - 5)$$

ALBO

– zapisanie jednego rozwiązania wymiernego równania $2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$ lub dwóch rozwiązań niewymiernych tego równania, jeśli te rozwiązania nie zostały otrzymane w wyniku zastosowania błędnej metody,

ALBO

– przekształcenie równania $2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$ do postaci alternatywy równań, (np. $2x + 3 = 0, x^2 = 5$), przy czym alternatywa musi wynikać z poprawnego wnioskowania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze tylko trzy poprawne rozwiązania równania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający uzyska tylko dwa poprawne rozwiązania $x = \sqrt{5}$ oraz $x = -\sqrt{5}$ w wyniku dzielenia obustronnie równania przez dwumian $(2x + 3)$ z podaniem odpowiednich założeń, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający uzyska dwa poprawne rozwiązania $x = \sqrt{5}$ oraz $x = -\sqrt{5}$ w wyniku dzielenia obustronnie równania przez dwumian $(2x + 3)$ bez podania odpowiednich założeń lub w wyniku zauważenia, że obie strony równania $x^2(2x + 3) = 5(2x + 3)$ zawierają ten sam czynnik $2x + 3$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający uzyska trzy poprawne pierwiastki wielomianu, lecz traktuje równanie jako nierówność (podaje zbiór rozwiązań w postaci przedziału/ sumy przedziałów), to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający przy przekształcaniu równania do postaci $W(x) = 0$ zapisuje czynnik $(2x + 3)$ z wykładnikiem 2, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za zapisanie alternatywy równań oraz za rozwiązanie równań tej alternatywy).

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równanie równoważnie, stosując metodę grupowania wyrazów:

$$2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$$

$$2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0$$

$$x^2(2x + 3) - 5(2x + 3) = 0$$

$$(2x + 3)(x^2 - 5) = 0$$

$$(2x + 3)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \quad \text{lub} \quad x - \sqrt{5} = 0 \quad \text{lub} \quad x + \sqrt{5} = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{5}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $(-\sqrt{5})$, $(-\frac{3}{2})$, $\sqrt{5}$.

Sposób II

Przekształcamy równanie równoważnie, stosując metodę grupowania wyrazów:

$$2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$$

$$2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0$$

$$2x(x^2 - 5) + 3(x^2 - 5) = 0$$

$$(2x + 3)(x^2 - 5) = 0$$

$$(2x + 3)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \quad \text{lub} \quad x - \sqrt{5} = 0 \quad \text{lub} \quad x + \sqrt{5} = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{5}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $(-\sqrt{5})$, $(-\frac{3}{2})$, $\sqrt{5}$.

Sposób III

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$$

$$2x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0$$

Obliczamy $W(-\frac{3}{2}) = 0$ i stwierdzamy, że liczba $(-\frac{3}{2})$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 15$.

Zatem wielomian W jest podzielny przez dwumian $x + \frac{3}{2}$. Dzielimy wielomian W przez dwumian $x + \frac{3}{2}$ i otrzymujemy

$$(2x^3 + 3x^2 - 10x - 15) : (x + \frac{3}{2}) = 2x^2 - 10$$

Zatem $W(x) = (x + \frac{3}{2})(2x^2 - 10) = 2(x + \frac{3}{2})(x^2 - 5) = 2(x + \frac{3}{2})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$.

Obliczamy pierwiastki wielomianu W :

$$2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

$$x + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{lub} \quad x - \sqrt{5} = 0 \quad \text{lub} \quad x + \sqrt{5} = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{5}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $(-\sqrt{5})$, $(-\frac{3}{2})$, $\sqrt{5}$.

Sposób IV

Przekształcamy równanie do postaci alternatywy dwóch równań

$$2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$$

$$x^2(2x + 3) = 5(2x + 3)$$

Zatem

$$2x + 3 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 = 5$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{5}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $(-\sqrt{5})$, $(-\frac{3}{2})$, $\sqrt{5}$.

Sposób V

Przekształcamy równanie równoważnie

$$2x^3 + 3x^2 = 10x + 15$$

$$x^2(2x + 3) = 5(2x + 3)$$

Zatem $x = -\frac{3}{2}$ jest rozwiązaniem tego równania.

Rozwiązujemy równanie $x^2(2x + 3) = 5(2x + 3)$ w zbiorze $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, +\infty)$

$$x^2(2x + 3) = 5(2x + 3) \quad /: (2x + 3)$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{5}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $(-\sqrt{5})$, $(-\frac{3}{2})$, $\sqrt{5}$.

Zadanie 10. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Zadanie 11.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: [...] zbiór wartości [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 11.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: [...] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

(2, 6)

Zadanie 11.3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

2 pkt – dwie poprawne odpowiedzi.

1 pkt – jedna poprawna odpowiedź.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

AB

Zadanie 11.4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$ [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.13) posługuje się funkcją wykładniczą [...] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi; V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.4) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 14. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; VI.5) stosuje wzór [...] na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Zadanie 15. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.6) wykorzystuje własności ciągów [...] geometrycznych [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 16. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: [...] cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° [...].

Zasady oceniania

2 pkt – dwie poprawne odpowiedzi.

1 pkt – jedna poprawna odpowiedź.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

16.1. B

16.2. D

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° [...]; VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład [...] prostopadłość do innej prostej [...]).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład [...] równoległość [...] do innej prostej [...]).

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 20. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 21. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 22. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych; VIII.7) stosuje twierdzenie [...] o kącie między styczną a cięciwą.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 23. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w [...] rombów [...]; VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 24. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa; VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania2 pkt – poprawna metoda i obliczenie promienia okręgu O : $r = 7$.1 pkt – stwierdzenie i wykazanie, że trójkąty APC oraz BPD są podobne

ALBO

– stwierdzenie i wykazanie, że trójkąty APD oraz BPC są podobne,

ALBO

– zapisanie równości, wynikającej z podobieństwa trójkątów lub twierdzenia o siecznych, prowadzącej do obliczenia długości odcinka PA , np.

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}, \quad |PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Z warunków zadania otrzymujemy:

- $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$, ponieważ są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku AD ,
- $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$, ponieważ są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku BC ,
- $|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle BPD|$, ponieważ są to kąty wierzchołkowe.

Zatem trójkąty ACP oraz BPD są podobne na podstawie cechy KKK (ką – ką – ką).

Z podobieństwa trójkątów ACP oraz BPD otrzymujemy:

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}$$

$$\frac{|PA|}{5} = \frac{8}{4}$$

$$|PA| = 10$$

$$|AB| = |AP| + |PB| = 10 + 4 = 14$$

Zatem promień r okręgu $\mathcal{O}$ jest równy:

$$r = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$$

Sposób II

Z warunków zadania otrzymujemy:

- $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC|$, ponieważ są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku AC ,
- $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD|$, ponieważ są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku BD ,
- $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle BPC|$, ponieważ są to kąty wierzchołkowe.

Zatem trójkąty APD oraz BPC są podobne na podstawie cechy KKK (ką – ką – ką).

Z podobieństwa trójkątów APD oraz BPC otrzymujemy:

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$

$$\frac{|PA|}{8} = \frac{5}{4}$$

$$|PA| = 10$$

$$|AB| = |AP| + |PB| = 10 + 4 = 14$$

Zatem promień r okręgu $\mathcal{O}$ jest równy:

$$r = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$$

Sposób III

Korzystamy z twierdzenia o siecznych okręgu:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

$$|PA| \cdot 4 = 8 \cdot 5$$

$$|PA| = 10$$

Obliczamy długość średnicy okręgu AB :

$$|AB| = |AP| + |PB| = 10 + 4 = 14$$

Zatem promień r okręgu $\mathcal{O}$ jest równy:

$$r = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$$

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: X.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni [...]; X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną; X.4) oblicza objętości [...] graniastosłupów i ostrosłupów [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 26. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną; X.3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), oblicza miary tych kątów; X.4) oblicza objętości [...] ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości ściany bocznej ostrosłupa **oraz** poprawny wynik: $h_b = 10$.

2 pkt – obliczenie współczynnika proporcjonalności: $x = 2$

ALBO

– obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 12$,

ALBO

– obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 8$,

ALBO

– zapisanie, że $H = 8$ i $\frac{1}{2}a = 6$ **oraz** sprawdzenie, że dla tych danych liczbowych objętość ostrosłupa jest równa 384,

– zapisanie równania z jedną niewiadomą h_b – wysokością ściany bocznej, np.

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{5}h_b\right)^2 \cdot \frac{4}{5}h_b = 384,$$

– obliczenie objętości $V_1 = 48$ ostrosłupa o krawędzi podstawy $a_1 = 6$ i wysokości $H_1 = 4$, podobnego do rozpatrywanego **oraz** obliczenie skali podobieństwa tych

$$\text{ostrosłupów, np. } k = \sqrt[3]{\frac{384}{48}} = 2.$$

1 pkt – oznaczenie połowy krawędzi podstawy jako $3x$ i zapisanie wysokości ostrosłupa jako $4x$ **oraz** zapisanie wysokości ściany bocznej jako $5x$, gdzie x jest współczynnikiem proporcjonalności

ALBO

– oznaczenie połowy krawędzi podstawy jako $3x$ i zapisanie wysokości ostrosłupa jako $4x$ **oraz** zapisanie równania z jedną niewiadomą x prowadzącego do wyznaczenia krawędzi podstawy oraz wysokości ostrosłupa, np.

$$\frac{1}{3} \cdot (6x)^2 \cdot 4x = 384,$$

ALBO

- zapisanie dwóch równań z niewiadomymi a oraz H prowadzących do wyznaczenia krawędzi podstawy oraz wysokości ostrosłupa, np.

$$\frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{4}{3} \text{ oraz } \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = 384,$$

ALBO

- zapisanie zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy oraz wysokością ściany bocznej np. $\frac{\frac{1}{2}a}{h_b} = \frac{3}{5}$ **oraz** zapisanie zależności pomiędzy wysokością ostrosłupa oraz wysokością ściany bocznej, np. $\frac{H}{h_b} = \frac{4}{5}$,
- obliczenie objętości $V_1 = 48$ ostrosłupa o krawędzi podstawy $a_1 = 6$ i wysokości $H_1 = 4$, podobnego do rozpatrywanego **oraz** zapisanie stosunku objętości tych ostrosłupów, np. $\frac{V}{V_1} = \frac{384}{48}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający przyjmuje w rozwiązaniu, że jedna ze ścian bocznych ostrosłupa jest trójkątem równobocznym i wykorzystuje to do obliczenia wysokości ściany bocznej, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

2. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej
- b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa
- c) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
- d) uwzględnienie we wzorze na objętość ostrosłupa połowy długości krawędzi podstawy

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył praw do innej liczby punktów.

Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a) – d), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający jedynie zapisze lub obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 3 i 4, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy wysokość ściany bocznej ostrosłupa opuszczoną z wierzchołka podstawy na krawędź boczną, to otrzymuje **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przyjmujemy oznaczenia:

α – miara kąta pomiędzy wysokością ściany bocznej a podstawą,

a – długość krawędzi podstawy,

H – wysokość ostrosłupa,

h_b – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,

V – objętość ostrosłupa,

P_p – pole podstawy ostrosłupa.

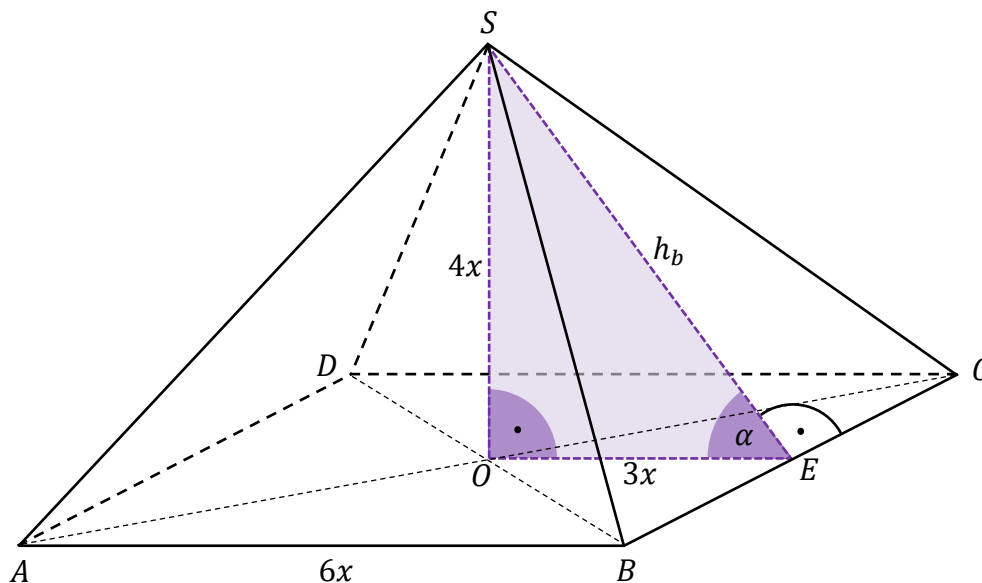
Zauważamy, że $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ oraz $a > 0$, $H > 0$ i $h_b > 0$.

Ponieważ O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu, więc $|OE| = \frac{1}{2}a$.

W trójkącie prostokątnym SOE mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|SO|}{|OE|} = \frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{4}{3}$$

Zatem $|SO| = 4x$ oraz $|OE| = 3x$ (zobacz rysunek)



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|SE|^2 = |SO|^2 + |OE|^2$$

$$(h_b)^2 = H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$(h_b)^2 = (4x)^2 + (3x)^2 = 16x^2 + 9x^2 = 25x^2$$

$$h_b = 5x$$

Ponadto

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (6x)^2 \cdot 4x = \frac{1}{3} \cdot 36x^2 \cdot 4x = 48x^3$$

Stąd, że $V = 384$, otrzymujemy

$$48x^3 = 384$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

Obliczamy wysokość h_b ściany bocznej ostrosłupa:

$$h_b = 5x = 10$$

Sposób II

Przyjmujemy oznaczenia:

α – miara kąta pomiędzy wysokością ściany bocznej a podstawą,

a – długość krawędzi podstawy,

H – wysokość ostrosłupa,

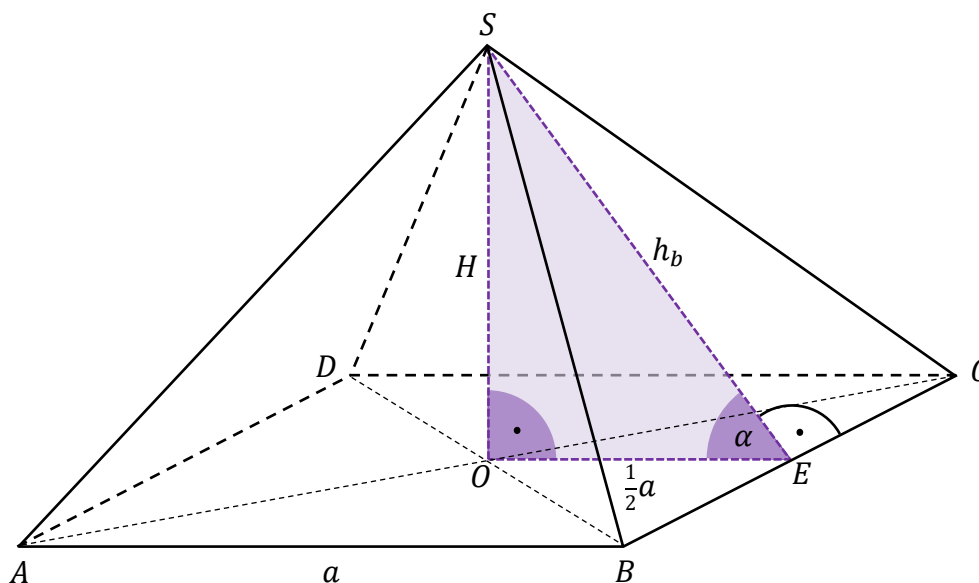
h_b – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,

V – objętość ostrosłupa,

P_p – pole podstawy ostrosłupa.

Zauważamy, że $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ oraz $a > 0$, $H > 0$ i $h_b > 0$.

Ponieważ O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu, więc $|OE| = \frac{1}{2}a$.



W trójkącie prostokątnym SOE mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|SO|}{|OE|} = \frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{4}{3}$$

Zatem

$$H = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{2}{3}a$$

Ponadto

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{2}{3}a = \frac{2}{9}a^3$$

Stąd, że $V = 384$, otrzymujemy

$$\frac{2}{9}a^3 = 384$$

$$a^3 = 384 : \frac{2}{9} = 384 \cdot \frac{9}{2} = 1728$$

$$a = 12$$

$$H = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość h_b ściany bocznej ostrosłupa:

$$|SE|^2 = |SO|^2 + |OE|^2$$

$$(h_b)^2 = H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$(h_b)^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$h_b = 10$$

Sposób III

Przyjmujemy oznaczenia:

α – miara kąta pomiędzy wysokością ściany bocznej a podstawą,

a – długość krawędzi podstawy,

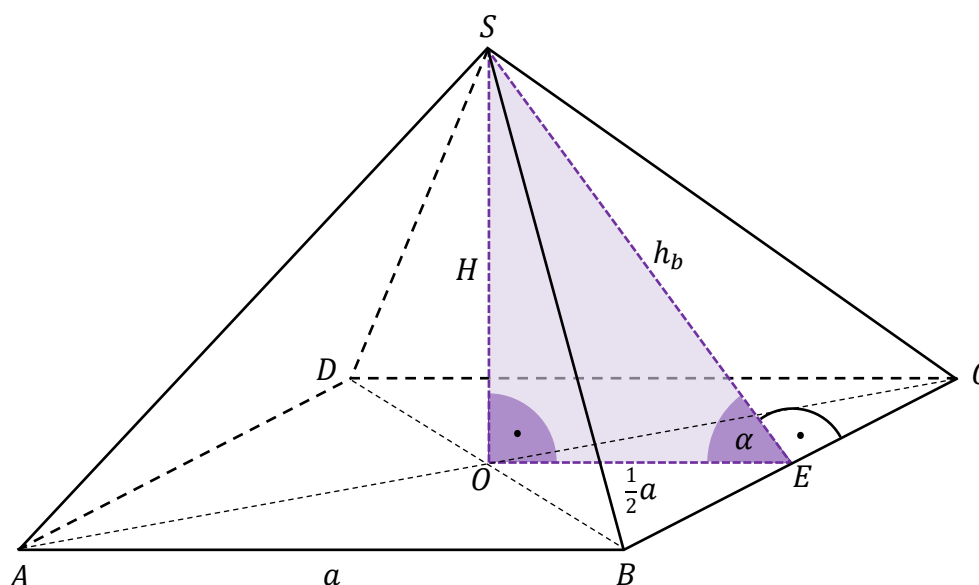
H – wysokość ostrosłupa,

h_b – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,

V – objętość ostrosłupa,

P_p – pole podstawy ostrosłupa.

Zauważamy, że $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ oraz $a > 0$, $H > 0$ i $h_b > 0$.



Ponieważ O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu, więc $|OE| = \frac{1}{2}a$.

Z treści zadania wiemy, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, zatem $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$. Stąd $\sin \alpha = \frac{4}{3} \cdot \cos \alpha$.

Wykorzystując tę zależność oraz tożsamość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ otrzymujemy

$$\left(\frac{4}{3} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{16}{9} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{25}{9} \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

Stąd $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, ponieważ α jest kątem ostrym.

$$\text{Zatem } \sin \alpha = \frac{4}{3} \cdot \cos \alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

Z trójkąta prostokątnego AOS otrzymujemy

$$\sin \alpha = \frac{H}{h_b} \quad \text{oraz} \quad \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{h_b}$$

Zatem

$$\frac{H}{h_b} = \frac{4}{5} \quad \text{oraz} \quad \frac{\frac{1}{2}a}{h_b} = \frac{3}{5}$$

$$H = \frac{4}{5} h_b \quad \text{oraz} \quad a = \frac{6}{5} h_b$$

Ponadto

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{5} h_b\right)^2 \cdot \frac{4}{5} h_b = \frac{1}{3} \cdot \frac{36}{25} h_b^2 \cdot \frac{4}{5} h_b = \frac{48}{125} h_b^3$$

Stąd, że $V = 384$, otrzymujemy

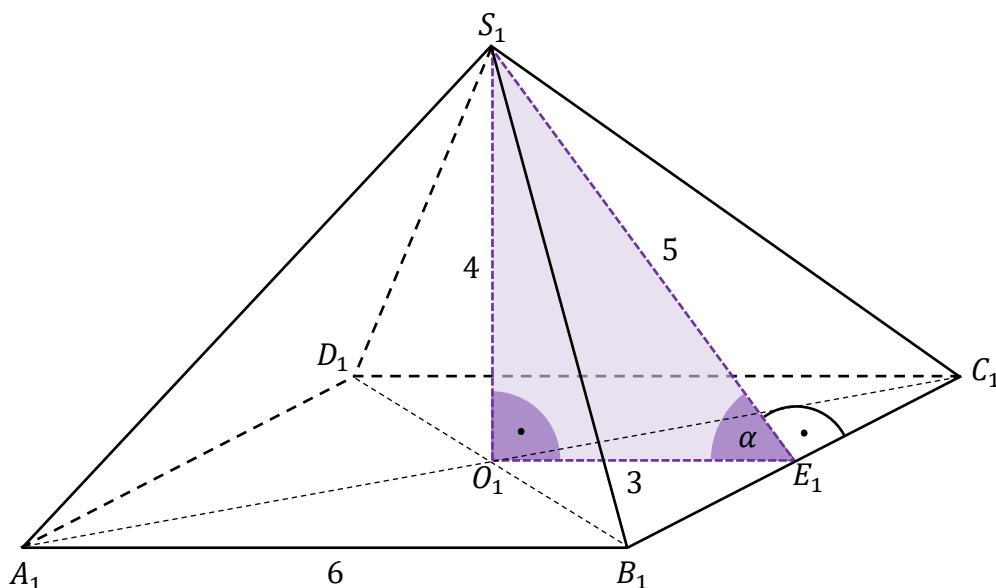
$$\frac{48}{125} h_b^3 = 384$$

$$h_b^3 = 384 : \frac{48}{125} = 384 \cdot \frac{125}{48} = 1000$$

$$h_b = 10$$

Sposób IV

Rozważmy ostrosłup prawidłowy czworokątny $A_1B_1C_1D_1S_1$ o wysokości 4 i krawędzi podstawy długości 6.



Objętość tego ostrosłupa jest równa

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 48$$

Ostrosłup ten jest podobny do danego ostrosłupa, a stosunek ich objętości jest równy sześciannowi skali podobieństwa. Zatem

$$k^3 = \frac{V}{V_1} = \frac{384}{48} = 8$$

Stąd $k = 2$.

Ponieważ wysokość S_1E_1 ściany bocznej ostrosłupa $A_1B_1C_1D_1S_1$ jest równa 5, więc szukana wysokość ściany bocznej danego ostrosłupa jest równa $5 \cdot 2 = 10$.

Zadanie 27. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych; XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) [...]; VI.6) wykorzystuje własności ciągów [...] arytmetycznych [...] do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda i obliczenie liczby numerów CAN spełniających warunki zadania: 840.

1 pkt – podanie liczby możliwości wyboru pierwszej, drugiej i trzeciej cyfry numeru CAN
ALBO

– wypisanie czterech trzywyrazowych ciągów arytmetycznych: $(9, 6, 3)$, $(8, 5, 2)$, $(7, 4, 1)$, $(6, 3, 0)$,

ALBO

– zapisanie liczby możliwości wyboru czwartej, piątej i szóstej cyfry numeru CAN:
 $7 \cdot 6 \cdot 5$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że w numerze CAN nie występuje cyfra 0 i konsekwentnie poda liczbę wszystkich numerów CAN, w których nie występuje cyfra 0, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający zapisze tylko 840, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Liczba wszystkich sześciocyfrowych numerów CAN spełniających warunki zadania jest iloczynem liczby możliwości ustawienia cyfr na trzech pierwszych miejscach i liczby możliwości ustawienia czwartej, piątej i szóstej cyfry.

Na pierwszych trzech miejscach znajdują się cyfry, które tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy (-3) . Cztery trzywyrazowe ciągi spełniają powyższy warunek: $(9, 6, 3)$, $(8, 5, 2)$, $(7, 4, 1)$, $(6, 3, 0)$.

Czwartą cyfrę w numerze CAN możemy ustawić na 7 sposobów. Piątą cyfrę – na 6 sposobów. Szóstą cyfrę – na 5 sposobów.

Zatem liczba wszystkich sześciocyfrowych numerów CAN, spełniających warunki zadania, jest równa: $4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840$.

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych; III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 29.1 (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 29.2 (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel; IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: XII.2) [...] znajduje [...] dominantę.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A3

Zadanie 30. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia długości krótszej podstawy trapezu o największym polu i obliczenie największego pola trapezu **oraz** poprawne wyniki:

$$b = 3 \text{ dm}, P = 112,5 \text{ dm}^2.$$

3 pkt – zapisanie poprawnego wzoru na pole trapezu w zależności od zmiennej b **oraz** prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli: $b = 3$

ALBO

– zapisanie poprawnego wzoru na pole trapezu w zależności od zmiennej h **oraz** prawidłowe obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli: $h = 15$,

ALBO

– zapisanie poprawnej nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną dla liczb dodatnich, np. $(12 + b)$ i $(18 - b)$

$$\sqrt{(12 + b)(18 - b)} \leq \frac{12 + b + 18 - b}{2},$$

ALBO

– wyznaczenie pochodnej funkcji P **oraz** obliczenie jej miejsca zerowego, np.

$$P'(b) = -b + 3, b = 3.$$

2 pkt – zapisanie poprawnego wzoru na pole trapezu w zależności od jednej zmiennej:

$$P(b) = \frac{1}{2}(12 + b)(18 - b) \text{ lub } P(h) = \frac{1}{2}(30 - h)h.$$

1 pkt – zapisanie związku między krótszą podstawą a wysokością trapezu: $b + h = 18$ **oraz** zapisanie wzoru na pole trapezu w zależności od dwóch zmiennych:

$$P(b) = \frac{1}{2}(12 + b)h.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

- Jeżeli zdający zapisze pole trapezu jako funkcję P jednej zmiennej, ale otrzyma wartość pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli zawierającej wykres funkcji P , która leży poza dziedziną funkcji P , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający zapisze pole trapezu jako funkcję P jednej zmiennej, a następnie obliczy wartości tej funkcji dla pierwszej współrzędnej wierzchołka i dwóch argumentów leżących

symetrycznie względem pierwszej współrzędnej wierzchołka i nie odwoła się do własności wykresu funkcji kwadratowej, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający nie zapisze pola trapezu jako funkcji jednej zmiennej, a jedynie oblicza wartości pola dla wybranych par liczb b oraz h i na tej podstawie wskazuje największą wartość pola, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Sposób I

Przyjmujemy oznaczenia:

$a = 12$ – dłuższa podstawa trapezu,

b – krótsza podstawa trapezu,

h – wysokość trapezu.

Z warunków zadania otrzymujemy:

$$b + h = 18$$

Stąd wyznaczamy h :

$$h = 18 - b$$

Pole trapezu wyrażamy jako funkcję zmiennej b :

$$P(b) = \frac{1}{2}(12 + b)(18 - b) = -\frac{1}{2}(b + 12)(b - 18)$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P . Z warunków zadania wynika, że:

$$b > 0 \text{ oraz } h = 18 - b > 0 \text{ oraz } b < 12$$

Zatem

$$b > 0 \text{ oraz } b < 18 \text{ oraz } b < 12$$

Zmienna b może przyjmować wartość z przedziału $(0, 12)$.

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = \frac{-12 + 18}{2} = \frac{6}{2} = 3 \in (0, 12)$$

Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu 3.

Dla $b = 3$ pole tego trapezu jest równe:

$$P(3) = \frac{1}{2}(12 + 3)(18 - 3) = 112,5$$

Największe pole równe $112,5 \text{ dm}^2$ ma trapez, którego krótsza podstawa ma 3 dm.

Sposób II

Przyjmujemy oznaczenia:

$a = 12$ – dłuższa podstawa trapezu,

b – krótsza podstawa trapezu,

h – wysokość trapezu.

Z warunków zadania otrzymujemy:

$$b + h = 18$$

Stąd wyznaczamy b :

$$b = 18 - h$$

Pole trapezu wyrażamy jako funkcję zmiennej h :

$$P(h) = \frac{1}{2}(12 + 18 - h)h = \frac{1}{2}(30 - h)h$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P . Z warunków zadania wynika, że:

$$h > 0 \text{ oraz } b = 18 - h > 0 \text{ oraz } b = 18 - h < 12$$

Zatem

$$h > 0 \text{ oraz } h < 18 \text{ oraz } h > 6$$

Zmienna h może przyjmować wartość z przedziału $(6, 18)$.

Wykresem funkcji P jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$p = \frac{30 + 0}{2} = 15 \in (6, 18)$$

Zatem funkcja P przyjmuje wartość największą dla argumentu 15.

Dla $h = 15$ pole tego trapezu jest równe:

$$P(15) = \frac{1}{2}(30 - 15)15 = 112,5$$

Obliczamy długość krótszej podstawy trapezu:

$$b = 18 - 15 = 3$$

Największe pole równe $112,5 \text{ dm}^2$ ma trapez, którego krótsza podstawa ma 3 dm.

Sposób III

Przyjmujemy oznaczenia:

$a = 12$ – dłuższa podstawa trapezu,

b – krótsza podstawa trapezu,

h – wysokość trapezu.

Z warunków zadania otrzymujemy:

$$b + h = 18$$

Stąd wyznaczamy h :

$$h = 18 - b$$

Pole trapezu wyrażamy jako funkcję zmiennej b :

$$P(b) = \frac{1}{2}(12 + b)(18 - b)$$

Z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną dla liczb dodatnich $(12 + b)$ i $(18 - b)$ otrzymujemy

$$\sqrt{(12 + b)(18 - b)} \leq \frac{12 + b + 18 - b}{2}$$

$$\sqrt{(12 + b)(18 - b)} \leq 15$$

Stąd

$$(12 + b)(18 - b) \leq 225$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy $12 + b = 18 - b$, czyli dla $b = 3$.

Wtedy pole trapezu jest największe i równe $P(3) = \frac{1}{2} \cdot 225 = 112,5$.