

Miejsce  
na naklejkę

MMA-P1\_1P-082

**EGZAMIN MATURALNY  
Z MATEMATYKI  
POZIOM PODSTAWOWY**

**Czas pracy 120 minut**

**MAJ  
ROK 2008**

**Instrukcja dla zdającego**

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 19 stron (zadania 1 – 12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstawiaj pełne rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora. Nieprawidłowe zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w marginesie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą może uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.



Za rozwiązanie  
wszystkich zadań  
można otrzymać  
łącznie  
**50 punktów**

*Życzymy powodzenia!*

**Wypełnia zdający  
przed rozpoczęciem pracy**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

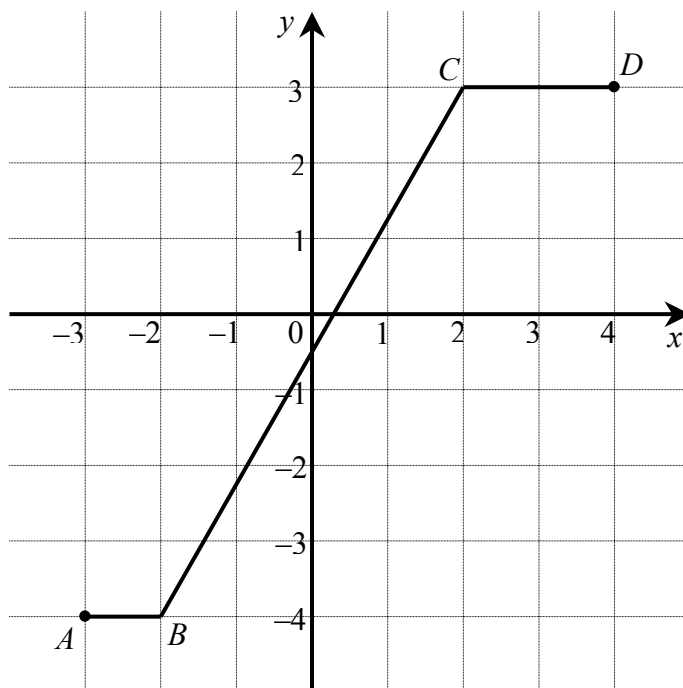
**PESEL ZDAJĄCEGO**

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

**KOD  
ZDAJĄCEGO**

**Zadanie 1. (4 pkt)**

Na poniższym rysunku przedstawiono łamaną  $ABCD$ , która jest wykresem funkcji  $y = f(x)$ .



Korzystając z tego wykresu:

- zapisz w postaci przedziału zbiór wartości funkcji  $f$ ,
- podaj wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $x = 1 - \sqrt{10}$ ,
- wyznacz równanie prostej  $BC$ ,
- oblicz długość odcinka  $BC$ .

a) Zbiór wartości funkcji  $f$  odczytuję z wykresu. Jest nim przedział  $\langle -4, 3 \rangle$ .

b) Zauważam, że  $-3 < 1 - \sqrt{10} < -2$ . Z wykresu odczytuję, że w przedziale  $\langle -3, -2 \rangle$  funkcja  $f$  jest stała i dla każdego argumentu z tego przedziału przyjmuje wartość  $(-4)$ , zatem wartością funkcji  $f$  dla argumentu  $x = 1 - \sqrt{10}$  jest  $(-4)$ , co można zapisać  $f(1 - \sqrt{10}) = -4$ .

c) Wyznaczam równanie prostej przechodzącej przez punkty  $B = (-2, -4)$

$$\text{i } C = (2, 3): \quad y - 3 = \frac{-4 - 3}{-2 - 2}(x - 2)$$

$$\text{stąd } y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}.$$

Obliczam długość odcinka  $BC$ :  $|BC| = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (3 - (-4))^2} = \sqrt{65}$ .

### Zadanie 2. (4 pkt)

Liczba przekątnych wielokąta wypukłego, w którym jest  $n$  boków i  $n \geq 3$  wyraża się wzorem

$$P(n) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Wykorzystując ten wzór:

- oblicz liczbę przekątnych w dwudziestokącie wypukłym.
- oblicz, ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest pięć razy większa od liczby boków.
- sprawdź, czy jest prawdziwe następujące stwierdzenie:  
*Każdy wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków ma parzystą liczbę przekątnych.*  
Odpowiedź uzasadnij.

a) Do podanego wzoru podstawiam  $n = 20$  i otrzymuję  $P(20) = \frac{20 \cdot 17}{2} = 170$ .

*W dwudziestokącie wypukłym jest 170 przekątnych.*

b) Zapisuję równanie uwzględniające treść tego podpunktu:  $\frac{n(n-3)}{2} = 5n$ .

*Jest ono równoważne równaniu kwadratowemu  $n^2 - 13n = 0$ , którego rozwiązaniem są liczby  $n = 0$  lub  $n = 13$ .*

*Biorąc pod uwagę założenie, że  $n \geq 3$  formułuję odpowiedź: Wielokątem wypukłym, który ma 5 razy więcej przekątnych niż boków jest trzynastokąt.*

- c) Powyższe stwierdzenie nie jest prawdziwe, ponieważ sześciokąt wypukły ma 9 przekątnych, czyli  $P(6) = 9$ .

**Zadanie 3. (4 pkt)**

Rozwiąż równanie  $4^{23}x - 32^9x = 16^4 \cdot (4^4)^4$ .

Zapisz rozwiązanie tego równania w postaci  $2^k$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

*Wszystkie liczby występujące w równaniu zapisuję w postaci potęgi o podstawie 2:*

$$2^{46}x - 2^{45}x = 2^{16} \cdot 2^{32}$$

*Po lewej stronie równania wyłączam wspólny czynnik przed nawias, a po prawej stronie wykonuję mnożenie:*

$$2^{45}x(2 - 1) = 2^{48}$$

$$2^{45}x = 2^{48}$$

*dzielię obie strony równania przez  $2^{45}$  i otrzymuję:*

$$x = 2^{48} : 2^{45} = 2^3$$

*Rozwiązaniem równania jest liczba  $2^3$ .*

**Zadanie 4. (3 pkt)**

Koncern paliwowy podnosił dwukrotnie w jednym tygodniu cenę benzyny, pierwszy raz o 10%, a drugi raz o 5%. Po obu tych podwyżkach jeden litr benzyny, wyprodukowanej przez ten koncern, kosztuje 4,62 zł. Oblicz cenę jednego litra benzyny przed omawianymi podwyżkami.

*Oznaczam literą  $x$  cenę jednego litra benzyny przed podwyżkami;*

*1,1 $x$  – cena jednego litra benzyny po pierwszej podwyżce;*

*1,05 · 1,1 $x$  – cena jednego litra benzyny po obu podwyżkach.*

*Zapisuję równanie:  $1,05 \cdot 1,1x = 4,62$*

$$1,155x = 4,62$$

*Rozwiązaniem równania jest  $x = 4$ ;*

*Cena jednego litra benzyny przed podwyżkami była równa 4 zł.*

**Zadanie 5. (5 pkt)**

Nieskończony ciąg liczbowy  $(a_n)$  jest określony wzorem  $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

- a) Oblicz, ile wyrazów ciągu  $(a_n)$  jest mniejszych od 1,975.  
b) Dla pewnej liczby  $x$  trzywyrazowy ciąg  $(a_2, a_7, x)$  jest arytmetyczny. Oblicz  $x$ .

- a) Rozwiązuję nierówność  $2 - \frac{1}{n} < 1,975$ .

Przekształcam ją do postaci równoważnej  $\frac{1}{n} > 0,025$ . Nierówność tę

zapisuję w postaci  $\frac{1}{n} > \frac{1}{40}$ . Jest ona spełniona gdy:  $n < 40$ .

Ponieważ  $n$  jest liczbą naturalną, więc odpowiedź jest następująca:  
39 wyrazów danego ciągu to liczby mniejsze od 1,975.

- b) Korzystam ze związku między sąsiednimi wyrazami w ciągu arytmetycznym

i zapisuję równanie:  $\frac{a_2 + x}{2} = a_7$ , czyli  $x = 2a_7 - a_2$ .

Obliczam potrzebne wyrazy:  $a_2 = \frac{3}{2}$ ,  $a_7 = \frac{13}{7}$ .

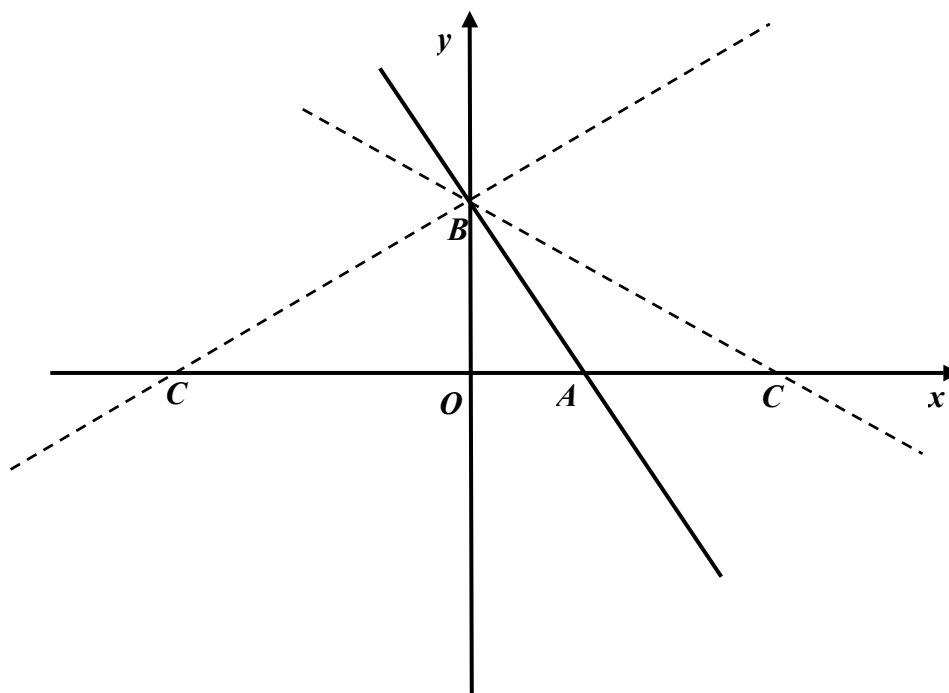
Wstawiam obliczone wartości do równania i otrzymuję  $x = 2 \cdot \frac{13}{7} - \frac{3}{2} = \frac{31}{14}$ .

Odpowiedź: Trzywyrazowy ciąg  $(a_2, a_7, x)$  jest arytmetyczny dla  $x = \frac{31}{14}$ .

**Zadanie 6. (5 pkt)**

Prosta o równaniu  $5x + 4y - 10 = 0$  przecina oś  $Ox$  układu współrzędnych w punkcie  $A$  oraz oś  $Oy$  w punkcie  $B$ . Oblicz współrzędne wszystkich punktów  $C$  leżących na osi  $Ox$  i takich, że trójkąt  $ABC$  ma pole równe 35.

Wyznaczam współrzędne punktów  $A$  i  $B$ :  $A = (2, 0)$  oraz  $B = \left(0, \frac{5}{2}\right)$ .



Punkt  $C$  może leżeć z lewej lub z prawej strony punktu  $A$ . Przyjmując, że w obu przypadkach wysokością trójkąta  $ABC$  jest odcinek  $BO$ , którego długość jest równa  $\frac{5}{2}$  i korzystając z faktu, że pole trójkąta  $ABC$  równa się 35 zapisuję

równanie: 
$$\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BO| = 35$$

$$\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot \frac{5}{2} = 35$$

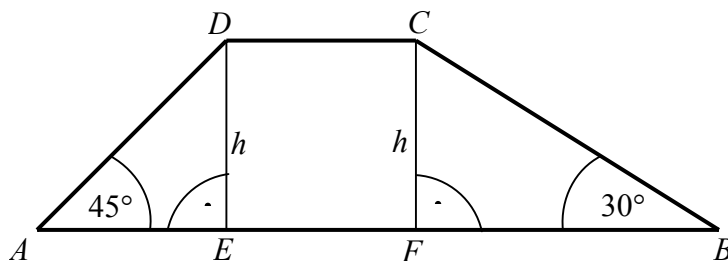
$$|AC| = 28.$$

Ponieważ punkt  $A = (2, 0)$ , więc  $C = (30, 0)$  lub  $C = (-26, 0)$ .

Zadanie ma zatem dwa rozwiązania.

**Zadanie 7. (4 pkt)**

Dany jest trapez, w którym podstawy mają długość 4 cm i 10 cm oraz ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach  $30^\circ$  i  $45^\circ$ . Oblicz wysokość tego trapezu.



Trójkąt  $AED$  jest trójkątem prostokątnym i równoramiennym ( $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle EDA| = 45^\circ$ ), więc  $|AE| = |ED| = h$ .

Korzystam z własności trójkąta prostokątnego  $BFC$  i zapisuję zależność między przyprostokątnymi  $\frac{|CF|}{|FB|} = \operatorname{tg} 30^\circ$ , stąd  $|FB| = |CF| \cdot \sqrt{3}$ ,  $|FB| = h\sqrt{3}$ .

$|EF| = |DC| = 4$ , więc otrzymuję równanie:

$|AE| + 4 + |FB| = 10$ , z którego po podstawieniu wyznaczonych wielkości otrzymuję:

$$h + 4 + h\sqrt{3} = 10.$$

Obliczam wysokość trapezu:

$$h + h\sqrt{3} = 6$$

$$h(1 + \sqrt{3}) = 6$$

$$h = \frac{6}{\sqrt{3} + 1} = 3(\sqrt{3} - 1).$$

Odpowiedź: Wysokość trapezu jest równa  $3(\sqrt{3} - 1)$  cm.

**Zadanie 8. (4 pkt)**

Dany jest wielomian  $W(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ .

- a) Sprawdź, czy punkt  $A = (1, 30)$  należy do wykresu tego wielomianu.
- b) Zapisz wielomian  $W$  w postaci iloczynu trzech wielomianów stopnia pierwszego.

a) Obliczam  $W(1)$ :

$$W(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 45 = 32$$

$$W(1) \neq 30$$

Otrzymany wynik oznacza, że punkt  $A$  nie należy do wykresu wielomianu  $W$ .

b) Rozkładam wielomian na czynniki:

$$\begin{aligned} W(x) &= x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = \\ &= x^3 - 9x - 5x^2 + 45 = \\ &= x(x^2 - 9) - 5(x^2 - 9) = \\ &= (x^2 - 9)(x - 5) = \\ &= (x + 3)(x - 3)(x - 5). \end{aligned}$$

Odpowiedź:  $W(x) = (x + 3)(x - 3)(x - 5)$ .

**Zadanie 9. (5 pkt)**

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej  $f(x) = (2x+1)(x-2)$  w przedziale  $\langle -2, 2 \rangle$ .

Zapisuję wzór funkcji w postaci ogólnej  $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ .

Wyznaczam odcięta wierzchołka paraboli:  $x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$ .

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli należy do przedziału  $\langle -2, 2 \rangle$ , więc najmniejszą wartością funkcji  $f$  w tym przedziale jest druga współrzędna

wierzchołka:  $y_w = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{25}{8}$ .

Obliczam wartości funkcji na końcach przedziału:  $f(-2) = 12$ ,  $f(2) = 0$ .

Największą wartością funkcji  $f$  w podanym przedziale jest  $f(-2) = 12$ .

Odpowiedź: Najmniejszą wartością funkcji w podanym przedziale jest

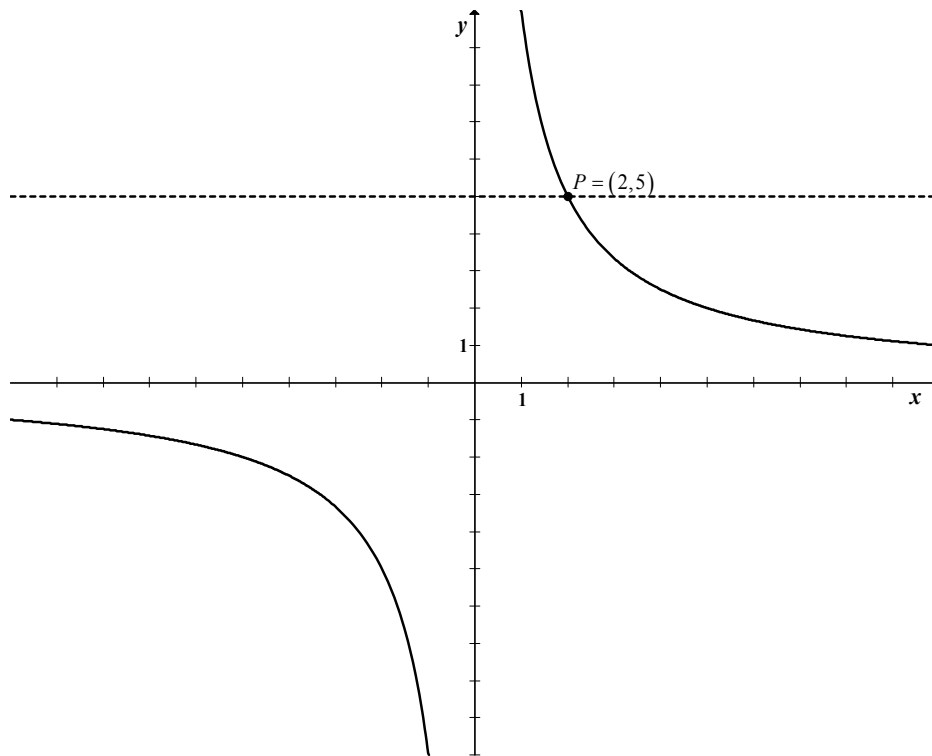
$y_w = -\frac{25}{8}$ , a największą  $f(-2) = 12$ .

**Zadanie 10. (3 pkt)**

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji  $h$ , określonej wzorem  $h(x) = \frac{a}{x}$  dla  $x \neq 0$ .

Wiadomo, że do wykresu funkcji  $h$  należy punkt  $P = (2, 5)$ .

- Oblicz wartość współczynnika  $a$ .
- Ustal, czy liczba  $h(\pi) - h(-\pi)$  jest dodatnia czy ujemna.
- Rozwiąż nierówność  $h(x) > 5$ .



- a) Korzystam z faktu, że punkt  $P = (2, 5)$  należy do wykresu funkcji  $h$  i wyznaczam współczynnik  $a$ :  $5 = \frac{a}{2}$  stąd  $a = 10$ .

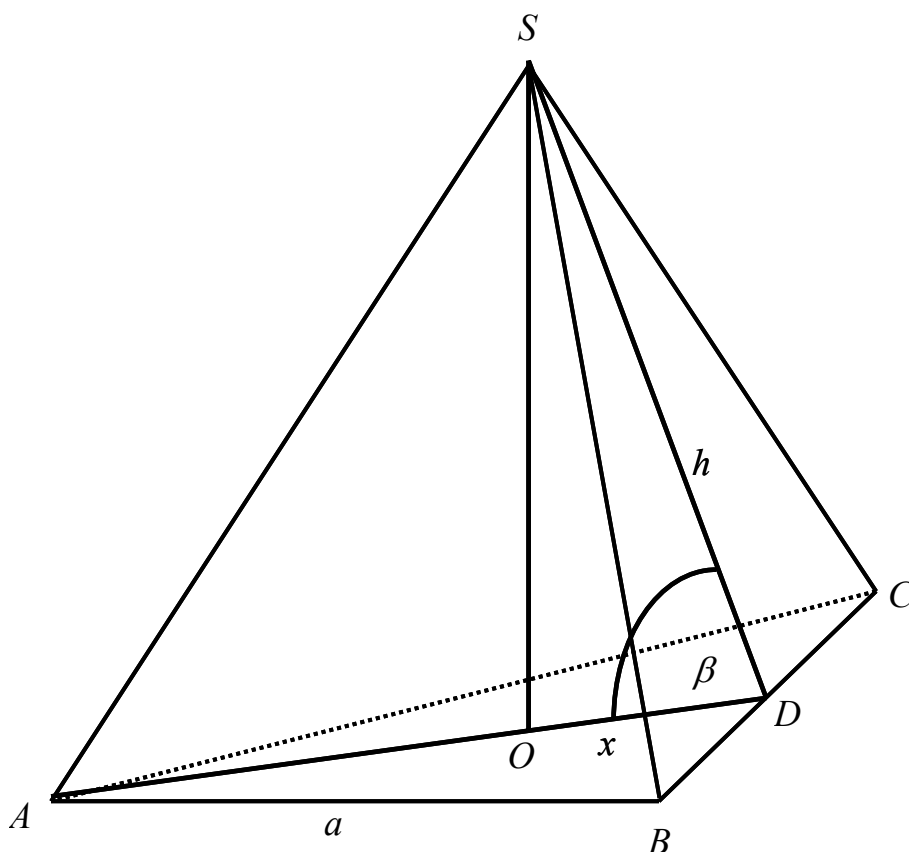
Funkcja  $h$  jest dana wzorem:  $h(x) = \frac{10}{x}$ .

- b) Z wykresu odczytuję, że  $h(-\pi) < 0$ , natomiast  $h(\pi) > 0$ . Stąd wynika, że  $h(\pi) - h(-\pi)$  jest liczbą dodatnią.

Z informacji podanej w zadaniu wiem, że wykres funkcji  $h$  przechodzi przez punkt  $P = (2, 5)$ . Odczytuję rozwiązanie nierówności  $h(x) > 5$  z wykresu: jest to przedział  $(0, 2)$ .

**Zadanie 11. (5 pkt)**

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego równa się  $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$ , gdzie  $a$  oznacza długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa. Zaznacz na poniższym rysunku kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy. Miarę tego kąta oznacz symbolem  $\beta$ . Oblicz  $\cos \beta$  i korzystając z tablic funkcji trygonometrycznych odczytaj przybliżoną wartość  $\beta$  z dokładnością do  $1^\circ$ .



Na rysunku zaznaczam kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy –  $\beta$  (punkt D jest środkiem odcinka BC).

Wprowadzam oznaczenie:  $h$  – wysokość ściany bocznej.

Zapisuję równanie opisujące pole powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{a^2 \sqrt{15}}{4}, \text{ z którego wyznaczam wysokość ściany bocznej ostrosłupa}$$

$$h = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Z trójkąta prostokątnego  $SOD$ , w którym  $x = |OD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$  – długość promienia

okręgu wpisanego w podstawę ostrosłupa otrzymuję:  $\cos \beta = \frac{x}{h}$ .

$$\cos \beta = \frac{x}{h} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{15}}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,4472.$$

Z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych odczytuję miarę kąta:  $\beta = 63^\circ$ .

**Zadanie 12. (4 pkt)**

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo każdego z następujących zdarzeń:

- $A$  – w każdym rzucie wypadnie nieparzysta liczba oczek.
- $B$  – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą większą od 9.
- $C$  – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą nieparzystą i większą od 9.

$\Omega$  dla tego doświadczenia jest zbiorem wszystkich uporządkowanych par, których wyrazy mogą się powtarzać i każdy z tych wyrazów może być jedną z liczb: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Można ten zbiór opisać w tabelce:

|   | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

$$|\Omega| = 6^2 = 36.$$

Zdarzeniu  $A$  sprzyja 9 zdarzeń elementarnych:

$$\{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}.$$

Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$

Zdarzeniu  $B$  sprzyja 6 zdarzeń elementarnych. Łatwo je wypisać:

$$\{(6,6), (6,5), (6,4), (5,6), (5,5), (4,6)\}.$$

Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia  $B$ :  $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

Zdarzeniu  $C$  sprzyjają dwa zdarzenia elementarne:  $\{(6,5), (5,6)\}$

Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia  $C$ :  $P(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$

## BRUDNOPIS