

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Operon 2021

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	C (5^3)	1
2	D ($\sqrt{3} - 1$)	1
3	A (-12)	1
4	B (1440zł)	1
5	D (4)	1
6	B (4)	1
7	C (-1)	1
8	B ($x = -3$)	1
9	D ($m > \sqrt{2}$)	1
10	A ($l : y = -\frac{3}{2}x - 2$)	1
11	C ($W = (5, 7)$)	1
12	A ($a_5 = 14$)	1
13	B ($x = 2$)	1
14	D (-1038)	1
15	C ($(-6, 3)$)	1
16	C (piętnastokąt)	1
17	A ($\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 30^\circ$)	1
18	D (9)	1
19	B (2, 4)	1
20	C ($\frac{3}{20}$)	1
21	D (20)	1
22	A (216)	1
23	B (252)	1
24	C ($\frac{\sqrt{5}}{8}d^3$)	1
25	B (3, 5)	1
26	A (4, 6)	1
27	B ($\frac{1}{4}$)	1
28	A ($\frac{1}{24}$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Wyrażenie $\frac{10^{13} \cdot 7^{13}}{14^{13} \cdot 5^{10}}$ jest równe:

Odpowiedź: C (5^3)

Aby móc skorzystać ze standardowych działań na potęgach, musielibyśmy mieć jednakowe podstawy potęg lub wykładniki (a póki co tego nie mamy). Z tego też względu w tym zadaniu należy postąpić nieco sprytniej i rozbić niektóre czynniki w taki sposób, aby móc skrócić licznik z mianownikiem. Całość wyglądałaby następująco:

$$\frac{10^{13} \cdot 7^{13}}{14^{13} \cdot 5^{10}} = \frac{2^{13} \cdot 5^{13} \cdot 7^{13}}{2^{13} \cdot 7^{13} \cdot 5^{10}} = \frac{5^{13}}{5^{10}} = 5^3$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Liczbą odwrotną do liczby $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ jest liczba:

Odpowiedź: D ($\sqrt{3} - 1$)

Krok 1. Zapisanie liczby odwrotnej.

Liczbą odwrotną otrzymamy zamieniając miejscami licznik z mianownikiem, czyli w tym przypadku byłoby to $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$. Takiej odpowiedzi niestety nie mamy, a to dlatego, że musimy jeszcze usunąć niewymierność z mianownika.

Krok 2. Usunięcie niewymierności z mianownika

Aby usunąć niewymierność musimy pomnożyć licznik oraz mianownik przez dokładnie to samo wyrażenie co w mianowniku, tylko ze zmienionym znakiem. Pozwoli nam to na skorzystanie ze wzoru skróconego mnożenia $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. W związku z tym:

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{3})} = \frac{2-2\sqrt{3}}{1^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{2-2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-2} = -1 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1$$

Zadanie 3

0-1 pkt

Najmniejsza wartość wyrażenia $(x-y)(x+y)$ dla $x, y \in \{2, 3, 4\}$ jest równa:

Odpowiedź: A (-12)

Ze wzorów skróconego mnożenia wynika, że:

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

Powinniśmy dostrzec, że aby wartość tego wyrażenia była jak najmniejsza, to wartość x musi być jak najmniejsza, natomiast wartość y jak największa (bo wtedy dużo odejmiemy). Skoro tak, to najmniejszą wartość osiągniemy dla $x = 2$ oraz $y = 4$, a będzie ona równa:

$$2^2 - 4^2 = 4 - 16 = -12$$

Zadanie 4

0-1 pkt

Laptop kosztował 1500zł. Jego cenę obniżono o 20%, a następnie podwyższono o 20%. Po tych operacjach laptop kosztuje:

Odpowiedź: B (1440zł)

Po obniżce o 20% laptop kosztował:

$$0,8 \cdot 1500\text{zł} = 1200\text{zł}$$

Potem nastąpiła podwyżka o 20%, więc teraz laptop kosztuje:

$$1,2 \cdot 1200\text{zł} = 1440\text{zł}$$

Zadanie 5

0-1 pkt

Wartość wyrażenia $3\log_4 2 + \log_4 32$ jest równa:

Odpowiedź: D (4)

Korzystając z działań na potęgach możemy zapisać, że:

$$3\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 2^3 + \log_4 32 = \log_4 8 + \log_4 32 = \log_4 (8 \cdot 32) = \log_4 256$$

Wiedząc, że $256 = 16 \cdot 16 = 4^2 \cdot 4^2 = 4^4$ możemy zapisać, że:

$$\log_4 256 = \log_4 4^4 = 4$$

Zadanie 6

0-1 pkt

Największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\sqrt{2} - \frac{x}{3} \geq 0$ jest:

Odpowiedź: B (4)

Krok 1. Rozwiązanie nierówności.

Na wstępie powinniśmy zauważyć, że odpowiedzi A oraz C możemy od razu odrzucić, gdyż nie są to liczby całkowite. Aby poznać prawidłową odpowiedź, musimy rozwiązać podaną nierówność:

$$\sqrt{2} \geq \frac{x}{3}, \quad 3\sqrt{2} \geq x, \quad x \leq 3\sqrt{2}$$

Krok 2. Wyznaczenie największej liczby całkowitej spełniającej nierówność.

Wartość $3\sqrt{2}$ to w przybliżeniu $3 \cdot 1,41 \approx 4,23$. Nasza niewiadoma x musi być mniejsza od tej wartości, a skoro tak, to najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność będzie 4.

Zadanie 7

0-1 pkt

Suma pierwiastków równania $x(x^2 + 16)(x - 11)(x + 12) = 0$ wynosi:

Odpowiedź: C (-1)

Krok 1. Rozwiązanie równania.

Pierwiastki równania to po prostu rozwiązania równania. Aby rozwiązać podane równanie musimy postąpić tak jak przy postaci iloczynowej, czyli przyrównać wszystkie wartości w nawiasach oraz przed nawiasem do zera. W związku z tym:

$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 16 = 0 \quad \vee \quad x - 11 = 0 \quad \vee \quad x + 12 = 0, \quad x = 0 \quad \vee \quad x^2 = -16 \quad \vee \quad x = 11 \quad \vee \quad x = -12$$

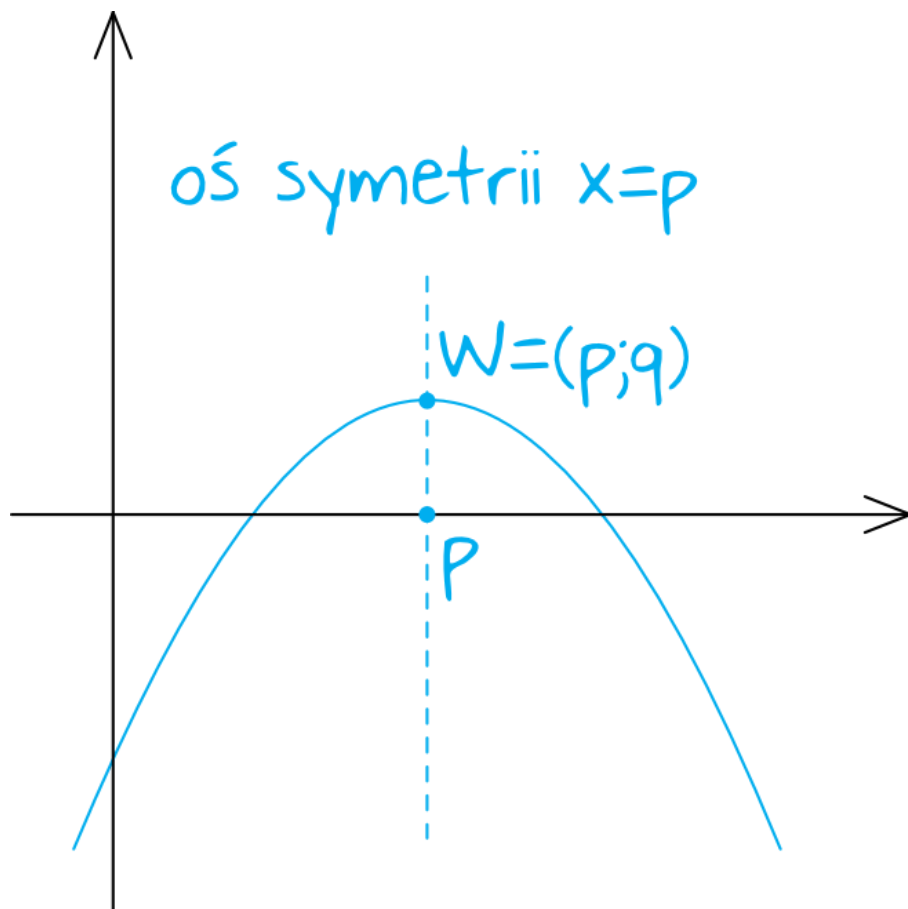
Z drugiego równania nie otrzymamy rozwiązania, bo nie istnieje jakakolwiek liczba rzeczywista x , która podniesiona do kwadratu dałaby -16 . W związku z tym zostaje nam $x = 0$, $x = 11$ oraz $x = -12$.

Krok 2. Obliczenie sumy pierwiastków równania.

Suma wszystkich pierwiastków równania będzie więc równa:

$$0 + 11 + (-12) = 11 - 12 = -1$$

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -2(x + 3)^2 - 4$ jest parabola, a osią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu:

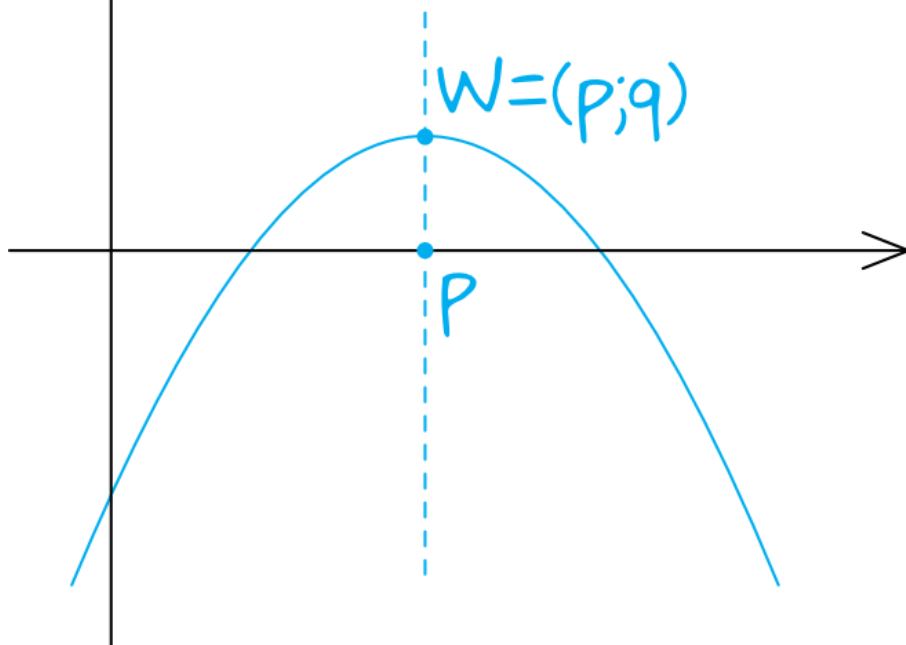


Odpowiedź: B ($x = -3$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Oś symetrii przebiega zawsze przez wierzchołek paraboli. W związku z tym kluczem do sukcesu będzie poznanie współrzędnej p tej paraboli.

oś symetrii $x=p$



Krok 2. Wyznaczenie równania osi symetrii.

Wzór funkcji zapisany jest w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ i przyjmuje on wartość $f(x) = -2(x + 3)^2 - 4$, czyli tak naprawdę $f(x) = -2(x - (-3))^2 - 4$. Teraz bez żadnych wątpliwości widzimy, że p jest równe -3 , a co za tym idzie - osią symetrii będzie prosta o równaniu $x = -3$.

Zadanie 9

0-1 pkt

Funkcja liniowa $f(x) = (m - \sqrt{2})x + 11$ jest rosnąca dla:

Odpowiedź: D ($m > \sqrt{2}$)

Funkcja liniowa jest rosnąca wtedy, gdy współczynnik a jest dodatni. W tym przypadku $a = m - \sqrt{2}$, zatem:

$$m - \sqrt{2} > 0, m > \sqrt{2}$$

Zadanie 10

0-1 pkt

Prostą równoległą do prostej $k: 3x + 2y - 5 = 0$, przechodzącą przez punkt $P = (2, -5)$, jest prosta:

Odpowiedź: A ($l: y = -\frac{3}{2}x - 2$)

Krok 1. Zapisanie równania prostej w postaci kierunkowej.

Prosta k zapisana jest w postaci ogólnej, a my potrzebujemy postaci kierunkowej $y = ax + b$ (bo tylko wtedy będziemy mogli przyrównać współczynniki kierunkowe). Musimy więc przekształcić równanie $3x + 2y - 5 = 0$ w taki sposób, aby po lewej stronie był sam y , a po prawej cała reszta zapisu. Zatem:

$$3x + 2y - 5 = 0, \quad 2y = -3x + 5, \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

Krok 2. Ustalenie równania prostej równoległej.

Aby dwie proste były względem siebie równoległe, muszą mieć jednakowy współczynnik kierunkowy. Nasza pierwsza prosta ma współczynnik kierunkowy $a = -\frac{3}{2}$, więc prosta równoległa będzie się wyrażać równaniem $y = -\frac{3}{2}x + b$.

Do pełnego wzoru brakuje nam jeszcze obliczenia współczynnika b . W tym celu do równania $y = -\frac{3}{2}x + b$ musimy podstawić współrzędne punktu P , czyli $x = 2$ oraz $y = -5$:

$$y = -\frac{3}{2}x + b, \quad -5 = -\frac{3}{2} \cdot 2 + b, \quad -5 = -3 + b, \quad b = -2$$

To oznacza, że prosta równoległa wyraża się równaniem $y = -\frac{3}{2}x - 2$.

Zadanie 11

0-1 pkt

Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = 3x^2 - 30x + 82$ jest punkt:

Odpowiedź: C ($W = (5, 7)$)

Współrzędne wierzchołka paraboli $W = (p; q)$ możemy obliczyć korzystając ze wzorów $p = \frac{-b}{2a}$ oraz $q = \frac{-\Delta}{4a}$. Ze wzoru funkcji odczytujemy współczynniki: $a = 3$, $b = -30$, $c = 82$ i przy okazji obliczymy jeszcze deltę:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 82 = 900 - 984 = -84$$

Teraz możemy już obliczyć poszukiwane współrzędne, zaczynając od p :

$$p = \frac{-(-30)}{2 \cdot 3}, \quad p = \frac{30}{6}, \quad p = 5$$

Współrzędna q będzie równa:

$$q = \frac{-(-84)}{4 \cdot 3}, \quad q = \frac{84}{12}, \quad q = 7$$

Wierzchołkiem paraboli będzie więc punkt $W = (5; 7)$.

Zadanie 12

0-1 pkt

W rosnącym ciągu arytmetycznym spełniony jest warunek $a_3 + a_7 = 28$, więc:

Odpowiedź: A ($a_5 = 14$)

W tym zadaniu powinniśmy dostrzec, że:

$$a_3 = a_5 - 2r, \quad a_7 = a_5 + 2r$$

Skoro tak, to:

$$a_3 + a_7 = a_5 - 2r + a_5 + 2r = 2a_5$$

Wiemy, że suma $a_3 + a_7 = 28$, więc:

$$2a_5 = 28, \quad a_5 = 14$$

Zadanie 13

0-1 pkt

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny $(3, 6, 5x + 2)$. Zatem:

Odpowiedź: B ($x = 2$)

Korzystając z zależności dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego możemy zapisać, że:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3, \quad 6^2 = 3 \cdot (5x + 2), \quad 36 = 15x + 6, \quad 30 = 15x, \quad x = 2$$

Zadanie 14

0-1 pkt

W ciągu liczbowym $a_n = (-1)^{2n+1} \cdot (2^{n-1} - 1)$ dla $n \geq 1$ suma $a_5 + a_{11}$ jest równa:

Odpowiedź: D (-1038)

Krok 1. Obliczenie wartości a_5 oraz a_{11} .

Chcąc obliczyć wartość piątego i jedenastego wyrazu, musimy podstawić do wzoru ciągu odpowiednio $n = 5$ oraz $n = 11$:

$$a_5 = (-1)^{2 \cdot 5 + 1} \cdot (2^{5-1} - 1), \quad a_5 = (-1)^{10+1} \cdot (2^4 - 1), \quad a_5 = (-1)^{11} \cdot (16 - 1), \quad a_5 = (-1) \cdot 15, \quad a_5 = -15$$

$$a_{11} = (-1)^{2 \cdot 11 + 1} \cdot (2^{11-1} - 1), \quad a_{11} = (-1)^{22+1} \cdot (2^{10} - 1), \quad a_{11} = (-1)^{23} \cdot (1024 - 1), \quad a_{11} = (-1) \cdot 1023, \quad a_{11} = -1023$$

Krok 2. Obliczenie sumy $a_5 + a_{11}$.

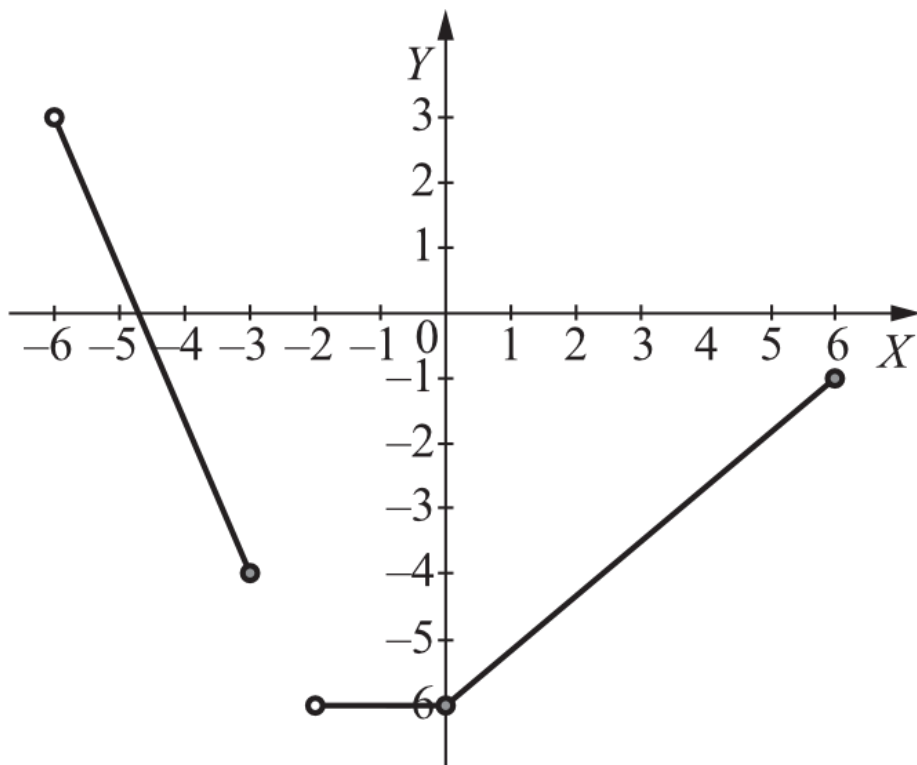
Suma tych wyrazów jest więc równa:

$$a_5 + a_{11} = (-15) + (-1023), \quad a_5 + a_{11} = -1038$$

Zadanie 15

0-1 pkt

Zbiorem wartości funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku, jest zbiór:



Odpowiedź: C ($(-6, 3)$)

Zbiór wartości odczytujemy z osi OY . Widzimy wyraźnie, że funkcja przyjmuje wartości od -6 , aż do 3 . Ustalmy jeszcze tylko nawiasy. Tutaj największą pułapką jest niezamalowana kropka przy wartości -6 . Owszem, dla argumentu $x = -2$ mamy niezamalowaną kropkę, ale ta funkcja jak najbardziej przyjmuje wartość chociażby dla $x = -1$ czy też $x = 0$. Przy wartości równej 3 tego problemu już nie ma, tutaj nawias będzie otwarty. Z tego względu zbiorem wartości będzie przedział $(-6, 3)$.

Zadanie 16

0-1 pkt

Miara kąta wewnętrznego wielokąta foremnego wynosi 156° . Ten wielokąt, to:

Odpowiedź: C (piętnastokąt)

W tym zadaniu musimy skorzystać ze wzoru:

$$k = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$

Podstawiając $k = 156^\circ$, otrzymamy:

$$156^\circ = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ, \quad \frac{156^\circ}{180^\circ} = \frac{n-2}{n}, \quad \frac{156}{180} = \frac{n-2}{n}$$

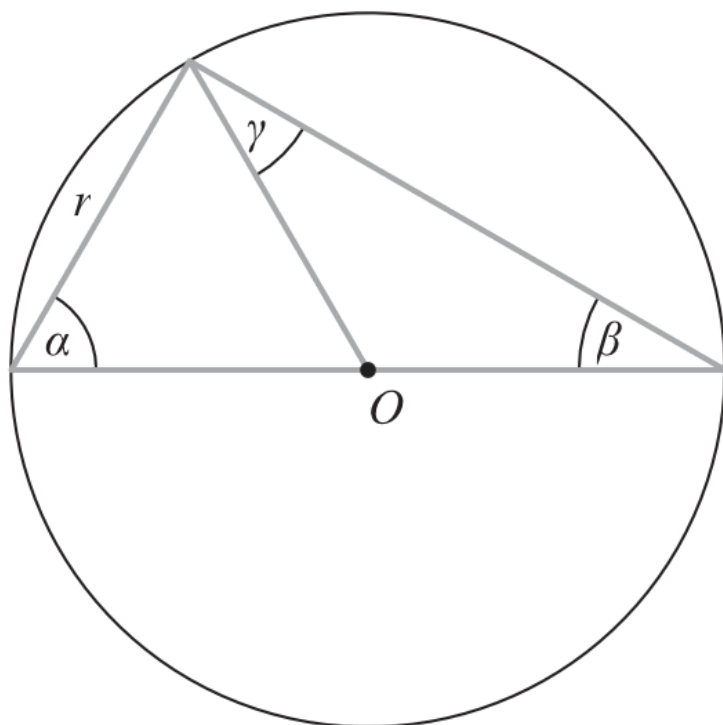
Mnożąc na krzyż, otrzymamy:

$$156n = 180 \cdot (n-2), \quad 156n = 180n - 360, \quad -24n = -360, \quad n = 15$$

Zadanie 17

0-1 pkt

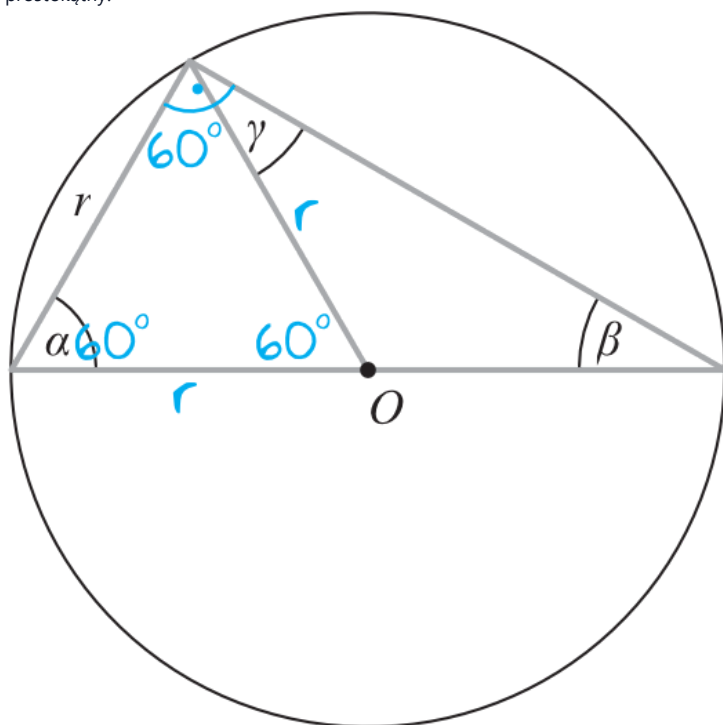
Zaznaczone na rysunku kąty α , β , γ mają miary:



Odpowiedź: A ($\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 30^\circ$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Powinniśmy zauważyć, że jeden z boków trójkąta opiera się na średnicy okręgu, a to pozwala nam stwierdzić, że cały duży trójkąt (nazwijmy go ABC) jest prostokątny.



Krok 2. Obliczenie miary kąta α .

Zwróćmy uwagę, że trójkąt AOB z zaznaczonym kątem α jest równoboczny, czyli każdy kąt tego trójkąta ma miarę 60° . Skąd to wiemy? Widzimy wyraźnie, że każdy bok tego trójkąta ma jednakową długość promienia i właśnie ta obserwacja pozwala nam błyskawicznie wyznaczyć, że $\alpha = 60^\circ$. Teoretycznie moglibyśmy już zakończyć rozwiązywanie tego zadania (bo pasuje już tylko jedna odpowiedź), ale spróbujmy jeszcze samodzielnie obliczyć pozostałe miary kątów.

Krok 3. Obliczenie miar kątów β oraz γ .

Skoro kąt ACB ma miarę 90° , a kąt ACO ma miarę 60° , to kąt γ będzie mieć miarę:

$$\gamma = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Trójkąt OBC jest równoramienny (ramiona OB oraz OC mają długość równą promieniowi okręgu), a skoro tak, to kąty przy boku BC muszą mieć jednakową miarę. W związku z tym możemy stwierdzić, że $\beta = 30^\circ$.

Zadanie 18

0-1 pkt

Pole trapezu równoramiennego o wysokości 5 jest równe 45. Odcinek łączący środki ramion tego trapezu ma długość:

Odpowiedź: D (9)

Krok 1. Obliczenie sumy długości podstaw trapezu.

Korzystając ze wzoru na pole trapezu możemy zapisać, że:

$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h, 45 = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot 5, 9 = \frac{1}{2} \cdot (a + b), a + b = 18$$

Krok 2. Obliczenie długości odcinka łączącego środki ramion.

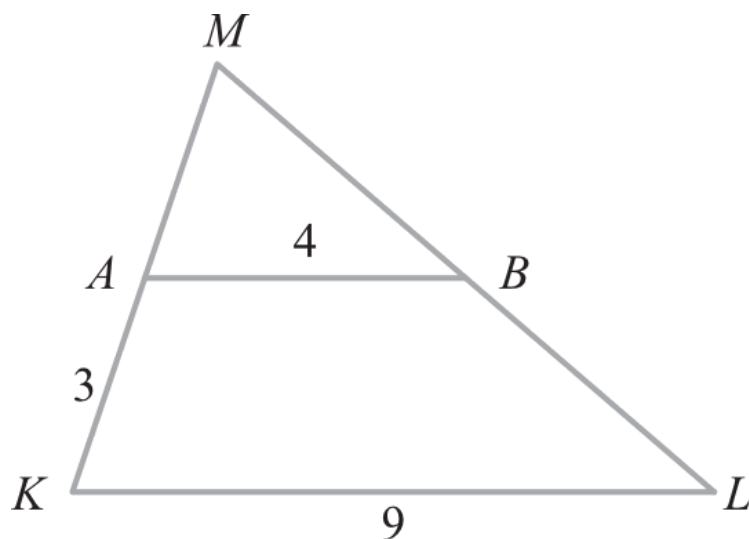
Mamy trapez równoramienny, więc odcinek łączący środki ramion będzie równy połowie sumy podstaw:

$$x = \frac{18}{2}, x = 9$$

Zadanie 19

0-1 pkt

W trójkącie KLM punkt A leży na boku KM , a punkt B leży na boku LM . Odcinek AB jest równoległy do boku KL oraz $|KL| = 9$, $|KA| = 3$, $|AB| = 4$ (zobacz rysunek). Odcinek AM ma długość:



Odpowiedź: B (2, 4)

Powinniśmy dostrzec, że trójkąty ABM oraz KLM są względem siebie podobne (wynika to z cechy kąt-kąt-kąt). Skoro tak, to stosunek odcinka AM względem AB musi być taki sam jak stosunek odcinka KM względem KL . Jeżeli oznaczmy odcinek AM jako x , to otrzymamy:

$$\frac{x}{4} = \frac{x+3}{9}$$

Mnożąc teraz na krzyż, wyjdzie nam, że:

$$9x = 4 \cdot (x + 3), 9x = 4x + 12, 5x = 12, x = 2,4$$

Zadanie 20

0-1 pkt

Wartość wyrażenia $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos \alpha$ dla kąta ostrego α , dla którego $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, wynosi:

Odpowiedź: C ($\frac{3}{20}$)

Krok 1. Obliczenie wartości $\cos \alpha$.

Z jedynki trygonometrycznej wiemy, że $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ w związku z tym podstawiając wartość sinusa otrzymamy:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1, \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}, \cos \alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} \vee \cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}}, \cos \alpha = \frac{4}{5} \vee \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

Wartość ujemną cosinusa odrzucamy, bo dla kątów ostrych cosinus przyjmuje wartości dodatnie. Zostaje nam więc $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Krok 2. Obliczenie wartości $\operatorname{tg} \alpha$.

Znamy wartość sinusa oraz cosinusa, zatem możemy bez problemu obliczyć tangensa:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} : \frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Krok 3. Obliczenie wartości wyrażenia.

Na koniec musimy podstawić obliczone wartości do wyrażenia z treści zadania, otrzymując:

$$\left(\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) \cdot \frac{4}{5} =, = \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{16}\right) \cdot \frac{4}{5} =, = \left(\frac{12}{16} - \frac{9}{16}\right) \cdot \frac{4}{5} =, = \frac{3}{16} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{20}$$

Zadanie 21

0-1 pkt

Punkty $A = (3, -2)$ i $C = (-2, 3)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Obwód tego kwadratu jest równy:

Odpowiedź: D (20)

Krok 1. Obliczenie długości przekątnej AC .

Z treści zadania wynika, że punkty A oraz C są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu, a to oznacza, że odcinek AC jest przekątną tej figury. Korzystając ze wzoru na długość odcinka możemy zapisać, że:

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}, |AC| = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (3 - (-2))^2}, |AC| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2}, |AC| = \sqrt{25 + 25}, |AC| = \sqrt{25 \cdot 2}, |AC| = 5\sqrt{2}$$

Krok 2. Obliczenie długości boku kwadratu.

Z własności kwadratów wiemy, że kwadrat o boku a ma przekątną o długości $a\sqrt{2}$. Skoro więc nasza przekątna ma długość $5\sqrt{2}$, to:

$$a\sqrt{2} = 5\sqrt{2}, a = 5$$

Krok 3. Obliczenie obwodu kwadratu.

Na koniec została już tylko formalność, czyli obliczenie obwodu kwadratu:

$$\operatorname{Obw} = 4a, \operatorname{Obw} = 4 \cdot 5, \operatorname{Obw} = 20$$

Zadanie 22

0-1 pkt

Objętość sześcianu, którego suma długości krawędzi jest równa 72, wynosi:

Odpowiedź: A (216)

Krok 1. Obliczenie długości krawędzi sześcianu.

Sześcian ma 12 krawędzi. Skoro suma ich długości wynosi 72, to każda krawędź ma:

$$12a = 72, a = 6$$

Krok 2. Obliczenie objętości sześcianu.

Korzystając ze wzoru na objętość możemy zapisać, że:

$$V = a^3, V = 6^3, V = 216$$

Objętość prostopadłościanu, którego każda następna krawędź jest dwa razy dłuższa od poprzedniej, wynosi 216. Pole powierzchni tego prostopadłościanu jest równe:

Odpowiedź: B (252)

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

Jeżeli pierwszą krawędź oznaczmy sobie jako a , to druga zgodnie z treścią zadania będzie dwa razy większa, czyli $b = 2a$, a kolejna będzie jeszcze dwa razy większa, czyli $c = 4a$.

Krok 2. Obliczenie długości krawędzi prostopadłościanu.

Objętość naszej bryły jest równa 216, zatem korzystając ze wzoru na objętość możemy zapisać, że:

$$V = a \cdot b \cdot c, 216 = a \cdot 2a \cdot 4a, 216 = 8a^3, a^3 = 27, a = 3$$

Skoro $a = 3$, to zgodnie z wcześniejszymi oznaczeniami $b = 2 \cdot 3 = 6$ oraz $c = 4 \cdot 3 = 12$.

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni prostopadłościanu.

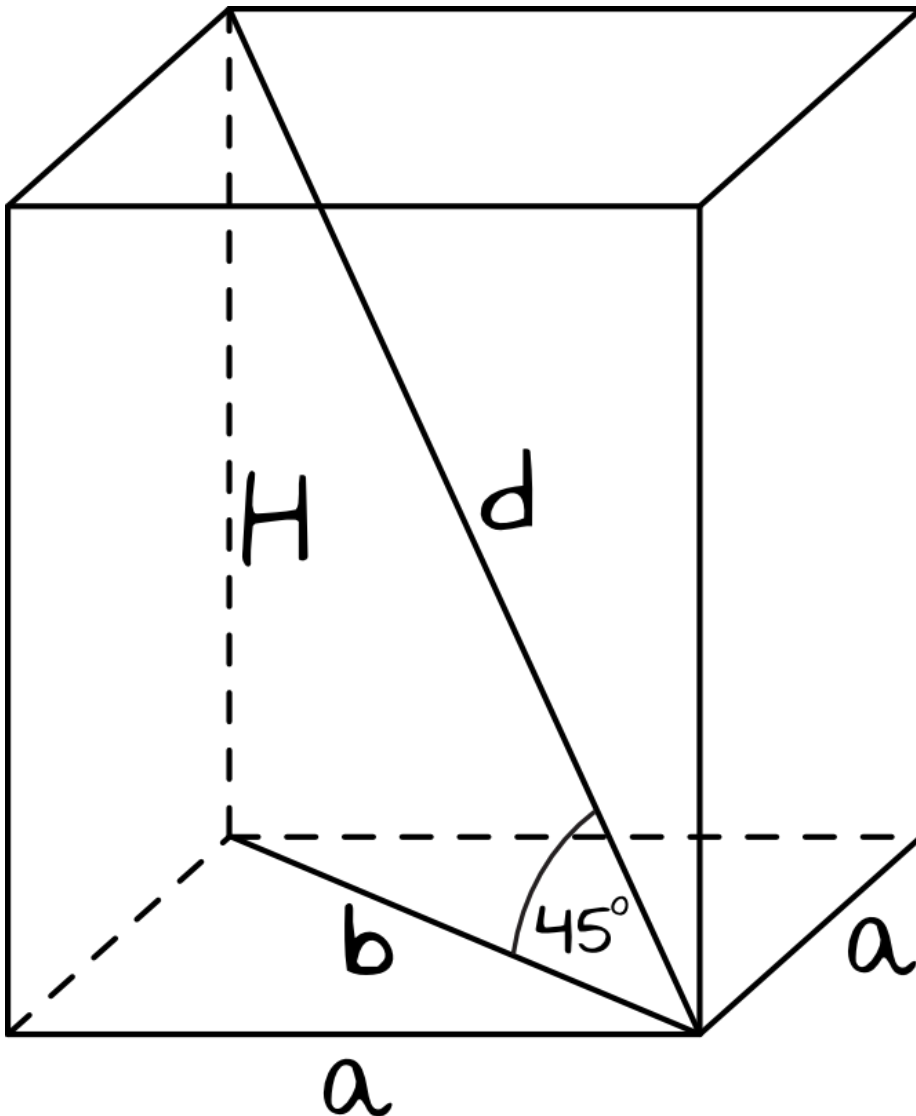
Korzystając ze wzoru na pole powierzchni prostopadłościanu możemy zapisać, że:

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc, P_c = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 12 + 2 \cdot 6 \cdot 12, P_c = 36 + 72 + 144, P_c = 252$$

Zadanie 24

0-1 pkt

Przekątna graniastostupa prawidłowego czworokątnego o długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Objętość tego graniastostupa wyraża się wzorem:



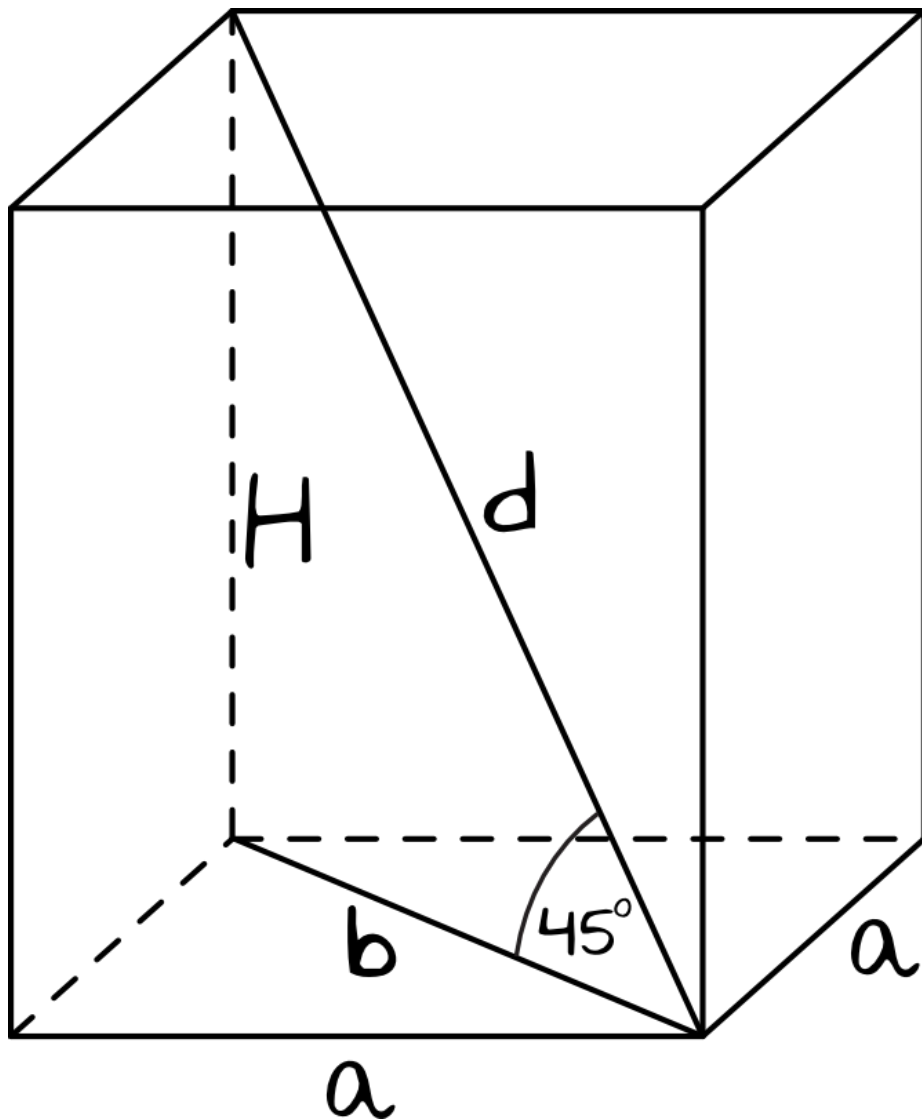
Odpowiedź: C ($\frac{\sqrt{2}}{8} d^3$)

Krok 1. Obliczenie miary kąta α .

Z tabelki trygonometrycznej musimy odczytać jaką miarę przyjmuje kąt dla sinusa równego $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Spoglądając do tak zwanej małej tabelki widzimy, że będzie to miara 45° .

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nasz graniastostup jest prawidłowy czworokątny, czyli w podstawie będzie miał on kwadrat. Sytuacja z treści zadania będzie więc wyglądać następująco:



Zwróć uwagę, że powstał nam trójkąt równoramienny, w którym wysokość H będzie miała taką samą długość jak przekątna podstawy b . Z własności kwadratów wiemy, że $b = a\sqrt{2}$, zatem $H = a\sqrt{2}$. Dodatkowo przekątna graniastopuła d będzie $\sqrt{2}$ razy większa od przekątnej podstawy b , czyli $d = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a$.

Krok 3. Zapisanie objętości graniastopuła.

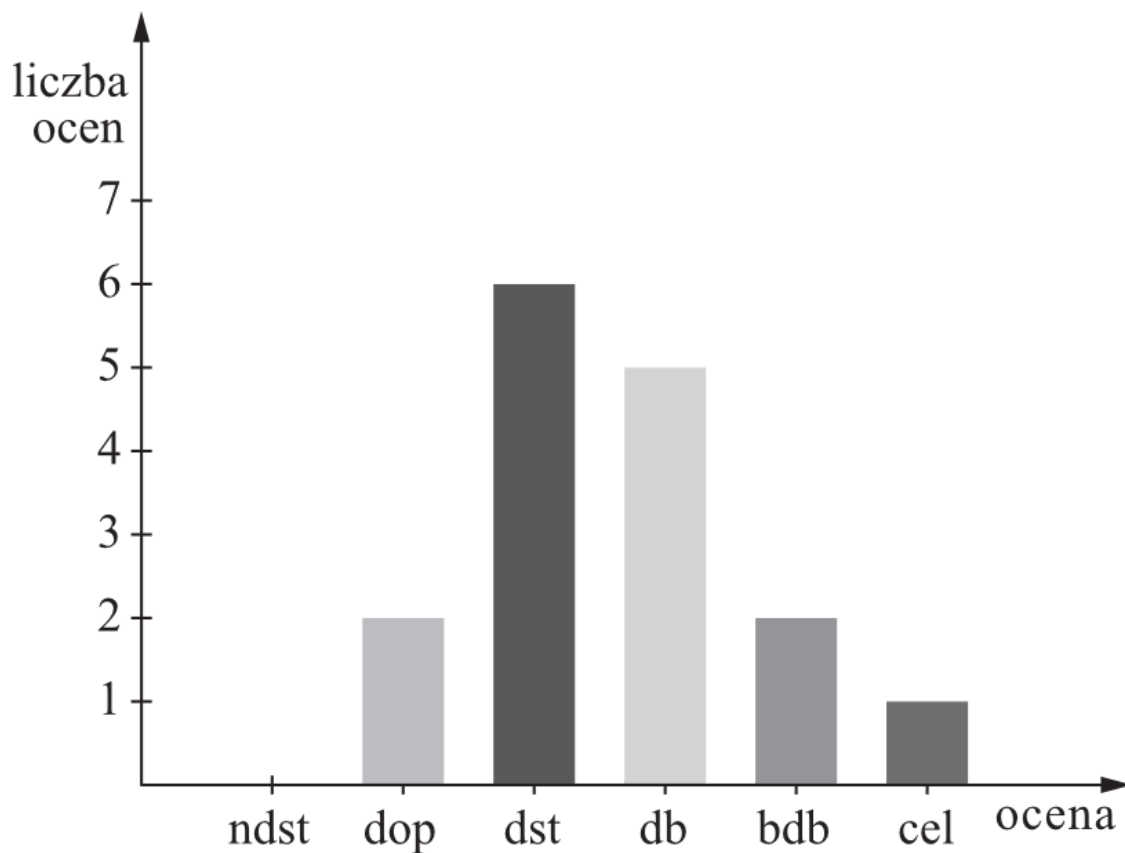
Wzór na objętość graniastopuła to w tym przypadku:

$$V = a^2 \cdot H, \quad V = a^2 \cdot a\sqrt{2}, \quad V = a^3 \cdot \sqrt{2}$$

Chcąc dopasować się do odpowiedzi, musimy jeszcze nasz wynik przekształcić. Wiedząc, że $d = 2a$, czyli że $a = \frac{1}{2}d$, otrzymamy:

$$V = \left(\frac{1}{2}d\right)^3 \cdot \sqrt{2}, \quad V = \frac{1}{8}d^3 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}d^3$$

Na diagramie słupkowym przedstawiono oceny końcowe ucznia.



Mediana ocen ucznia jest równa:

Odpowiedź: B (3, 5)

Aby wyznaczyć medianę, musimy najpierw dowiedzieć się ile ocen zdobył nasz uczeń. Sumując wyniki z diagramu otrzymamy informację, że tych ocen jest:

$$2 + 6 + 5 + 2 + 1 = 16$$

Jest to parzysty wynik, zatem mediana będzie równa średniej arytmetycznej wartości środkowych wyrazów. W tym przypadku będzie to średnia arytmetyczna ósmej i dziewiątej oceny.

Podczas wyznaczania mediany musimy uporządkować wszystkie liczby w ciągu niemalejącym (czyli od najmniejszej do największej). Nie musimy jednak wypisywać wszystkich ocen po kolei. Widzimy, że skoro uczeń ma dwie dwójki i sześć trójek, ósmą oceną w tym ciągu jest właśnie trójka, a dziewiątą będzie już czwórka. W związku z tym mediana będzie równa:

$$m = \frac{3 + 4}{2}, m = \frac{7}{2}, m = 3,5$$

Zadanie 26

0-1 pkt

Mediana zestawu danych: 1, 1, 2, 2, x , 4, 6, 7, 9, 11 wynosi 3, 5. Zatem średnia arytmetyczna tego zestawu jest równa:

Odpowiedź: A (4, 6)

Nasz zestaw składa się z 10 liczb. Mediana jest w takim razie średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów, czyli piątego i szóstego. Na pierwszy rzut oka widać, że zestaw liczb jest uporządkowany od najmniejszego do największego, aczkolwiek musimy być ostrożni, bo nie wiemy przecież jaka jest wartość x (równie dobrze x może być najmniejszą lub największą liczbą w tym zestawie). Nie mniej jednak widzimy, że gdyby x przybierał wartość np. równą 12, to mediana

Mamy uporządkowany (od najmniejszej do największej) zestaw 10 liczb. Piątym wyrazem jest x , szóstym jest 4, a mediana ma być równa 3, 5, zatem:

$$\frac{x+4}{2} = 3,5, \quad x+4 = 7, \quad x = 3$$

To oznaczamy, że średnia arytmetyczna tego zestawu jest równa:

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+2+3+4+6+7+9+11}{10}, \quad \bar{x} = \frac{46}{10}, \quad \bar{x} = 4,6$$

Zadanie 27

0-1 pkt

Wyniki dwukrotnego rzutu sześcienną kostką do gry zapisujemy jako liczby dwucyfrowe. Prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 4 wynosi:

Odpowiedź: B ($\frac{1}{4}$)

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Na każdej kostce może wypaść jeden z sześciu wyników. Rzucamy niezależnie dwoma kostkami, zatem liczba wszystkich kombinacji będzie równa $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Każdą parę wyników zapisujemy jako liczbę dwucyfrową, czyli przykładowo rzut (1; 4) oznacza liczbę 14. Musimy teraz ustalić, ile otrzymamy wyników podzielnych przez 4. Nie ma tutaj prostej metody na wyliczenie tych zdarzeń sprzyjających, musimy je po prostu wypisać. Nie będzie to trudne i najlepiej jest to robić dziesiątkami:

$$12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64$$

To oznaczamy, że 9 przypadków spełnia warunki zadania, stąd też możemy napisać, że $|A| = 9$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Zadanie 28

0-1 pkt

Rzucamy dwa razy monetą i dwa razy sześcienną kostką do gry. Wyniki zapisujemy w kolejności rzutów: moneta, moneta, kostka, kostka.

Prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch orłów i tych samych liczb oczek wynosi:

Odpowiedź: A ($\frac{1}{24}$)

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Na każdej kostce może wypaść jeden z sześciu wyników, a na każdej monecie jeden z dwóch wyników. Zgodnie z regułą mnożenia, liczba wszystkich kombinacji będzie więc równa $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 144$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Chcemy otrzymać jednakowe wyniki na kostkach i dwa orły, zatem interesującymi nas kombinacjami będą

$$(O, O, 1, 1); (O, O, 2, 2); (O, O, 3, 3); (O, O, 4, 4); (O, O, 5, 5); (O, O, 6, 6)$$

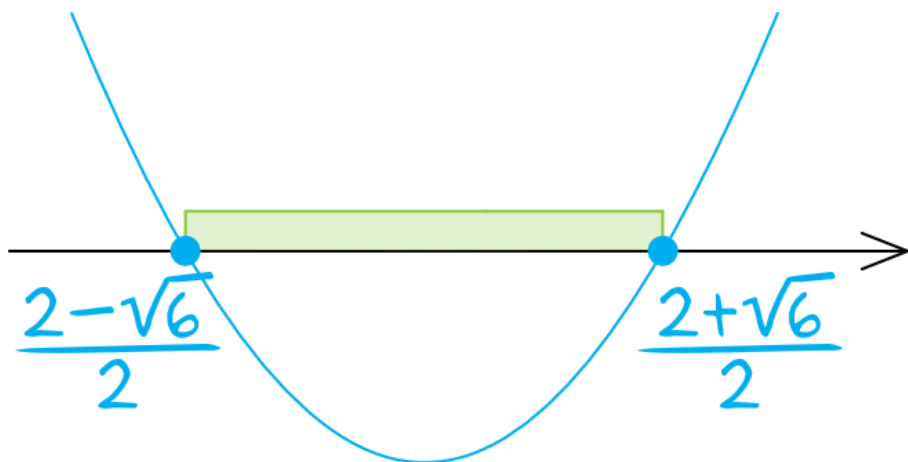
Warunki zadania spełnia 6 przypadków, stąd też możemy napisać, że $|A| = 6$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{144} = \frac{1}{24}$$

Rozwiąż nierówność $(x-1)^2 \leq \frac{3}{2}$.



Odpowiedź: $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{2+\sqrt{6}}{2}\}$

Krok 1. Zapisanie nierówności w postaci ogólnej.

Rozwiązanie zadania musimy zacząć od przekształcenia zapisu nierówności. Po pierwsze, musimy przenieść $\frac{3}{2}$ na lewą stronę (tak aby po prawej stronie zostało 0). Po drugie, musimy wykonać potęgowanie zgodnie ze wzorem skróconego mnożenia $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Całość będzie wyglądać następująco:

$$(x-1)^2 \leq \frac{3}{2}, (x-1)^2 - \frac{3}{2} \leq 0, x^2 - 2x + 1 - \frac{3}{2} \leq 0, x^2 - 2x - \frac{1}{2} \leq 0 \quad / \cdot 2, 2x^2 - 4x - 1 \leq 0$$

Mnożenie obydwu stron przez 2 nie jest konieczne (na koniec uzyskamy te same wyniki), ale dzięki temu nie będziemy mieć już ułamków w dalszej części obliczeń.

Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Teraz możemy przystąpić do obliczenia miejsc zerowych.

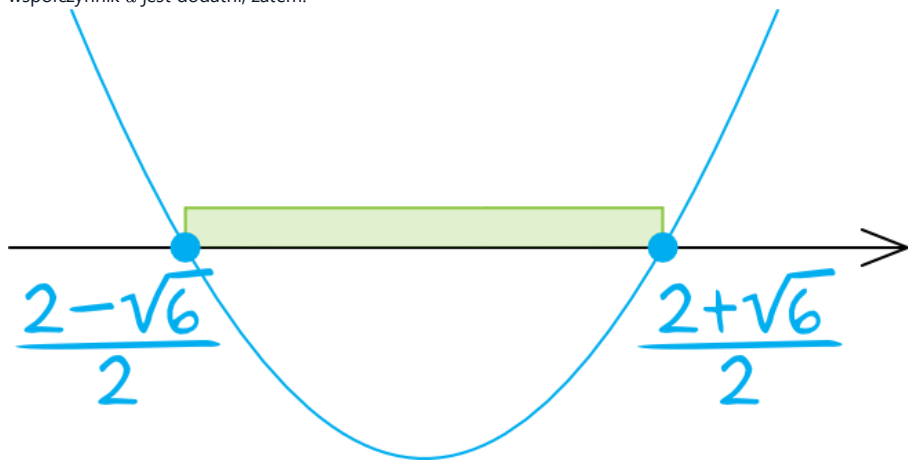
Współczynniki: $a = 2$, $b = -4$, $c = -1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 16 - (-8) = 24, \sqrt{\Delta} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - 2\sqrt{6}}{2 \cdot 2} = \frac{4 - 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + 2\sqrt{6}}{2 \cdot 2} = \frac{4 + 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Otrzymane miejsca zerowe zaznaczamy na osi liczbowej i przystępujemy do rysowania paraboli. Parabola będzie mieć ramiona skierowane do góry, bo współczynnik a jest dodatni, zatem:



Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas miejsca w których funkcja przyjmuje wartości mniejsze lub równe zera. Patrzymy się zatem co znajduje się pod osią lub na osi i widzimy, że rozwiązaniem tej nierówności będzie w takim razie przedział $x \in \langle \frac{2-\sqrt{6}}{2}; \frac{2+\sqrt{6}}{2} \rangle$

Zadanie 30

0-2 pkt

Uzasadnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n liczba $4^{n+1} - 3^{n+2} + 4^n - 3^n$ jest podzielna przez 5.

Odpowiedź: Wykazano wyłączając

Aby udowodnić, że ta liczba jest podzielna przez 5, musimy cały zapis do postaci w której będziemy mieć 5 pomnożone przez jakąś liczbę całkowitą. W tym celu trzeba przekształcić zapis wyłączając wspólne czynniki przed nawias np. w taki oto sposób:

$$4^{n+1} - 3^{n+2} + 4^n - 3^n = , = 4^n \cdot (4^1 + 1) - 3^n \cdot (3^2 + 1) = , = 4^n \cdot 5 - 3^n \cdot 10 = , = 5 \cdot (4^n - 3^n \cdot 2)$$

Wiedząc, że n jest liczbą naturalną możemy być pewni, że zapis $4^n - 3^n \cdot 2$ jest liczbą całkowitą. To oznacza, że podana liczba dzieli się przez 5, a wynikiem tego dzielenia będzie to, co znalazło się w nawiasie, czyli $4^n - 3^n \cdot 2$.

Zadanie 31

0-2 pkt

Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi 72, a szósty wyraz tego ciągu jest równy 22. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

Odpowiedź: $a_1 = 2$

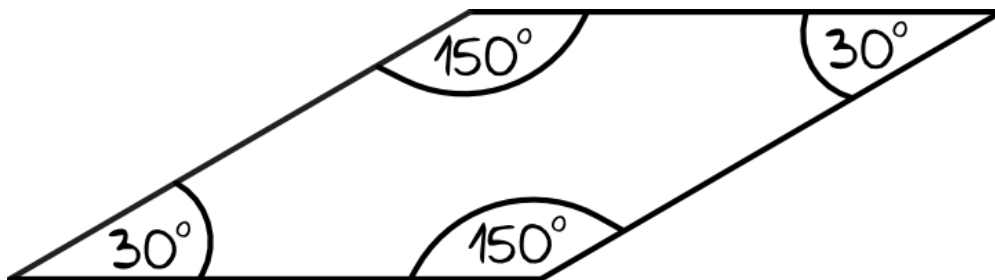
W tym zadaniu musimy skorzystać wzoru na sumę n -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Podstawiając do tego wzoru $n = 6$, otrzymamy:

$$S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6, 72 = \frac{a_1 + 22}{2} \cdot 6, 12 = \frac{a_1 + 22}{2}, 24 = a_1 + 22, a_1 = 2$$

Zadanie 32

0-2 pkt

Oblicz miary kątów równoległoboku o bokach długości 5 i 12 oraz o polu równym 30.



Odpowiedź: $(30^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 15^\circ)$

Krok 1. Obliczenie wartości $\sin \alpha$.

W tym zadaniu pomoże nam wzór na pole równoległoboku z sinusem, czyli:

$$P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Podstawiając do niego dane z treści zadania, otrzymamy:

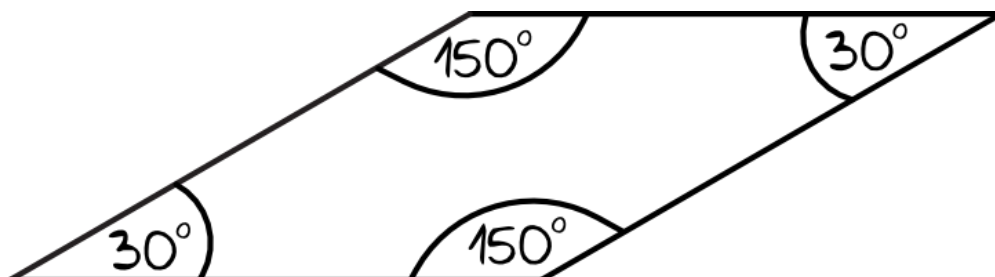
$$30 = 5 \cdot 12 \cdot \sin \alpha, \quad 30 = 60 \cdot \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

Krok 2. Wyznaczenie miar kątów równoległoboku.

Z tablic trygonometrycznych (możemy skorzystać nawet z tak zwanej małej tabelki) odczytujemy, że sinus przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$ dla kąta o mierze 30° .

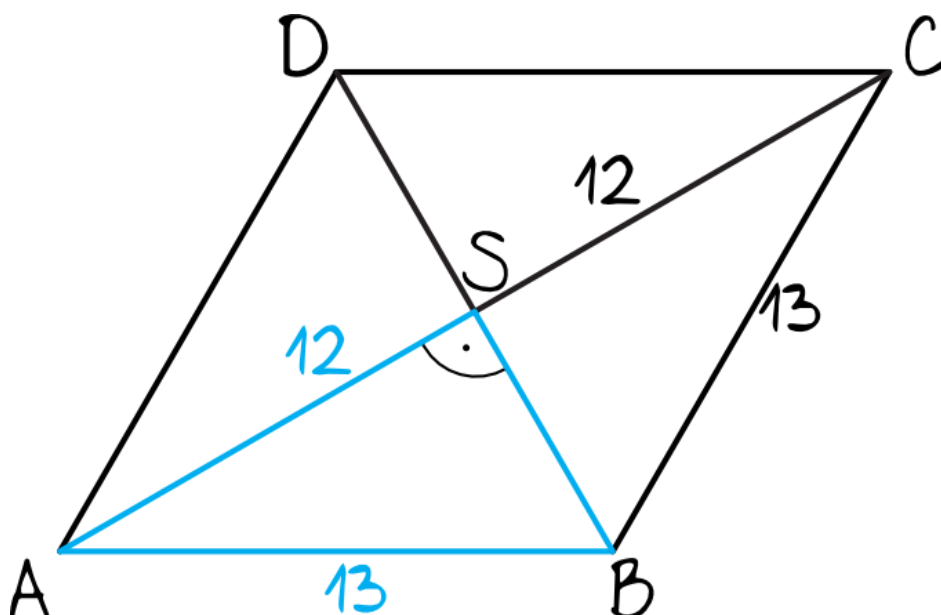
Suma kątów przy jednym ramieniu równoległoboku jest zawsze równa 180° . Skoro więc ostry kąt tej figury ma miarę 30° , to rozwarty kąt będzie mieć miarę:

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$



To oznacza, że nasz równoległobok ma kąty o mierze $30^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 150^\circ$.

Przekątna AC rombu $ABCD$ o wierzchołkach $A(-7, 2)$, $B(5, -3)$ ma długość 24. Oblicz długość przekątnej BD tego rombu.



Odpowiedź: $|BD| = 10$

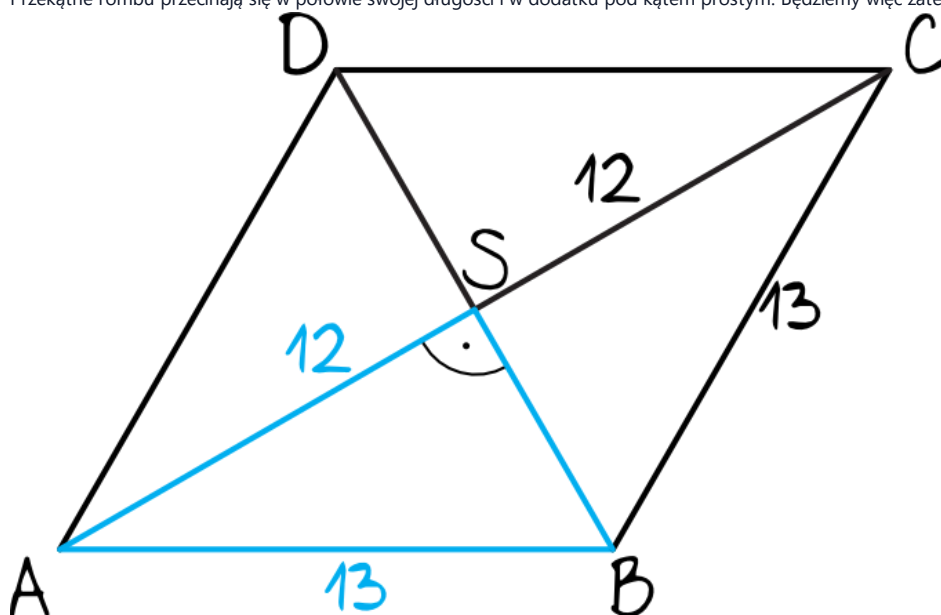
Krok 1. Obliczenie długości boku AB .

Znamy współrzędne wierzchołków punktów A oraz B , zatem korzystając ze wzoru na długość odcinka możemy zapisać że:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, |AB| = \sqrt{(5 - (-7))^2 + (-3 - 2)^2}, |AB| = \sqrt{12^2 + (-5)^2}, |AB| = \sqrt{144 + 25}, |AB| = \sqrt{169}, |AB| = 13$$

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Przekątne rombu przecinają się w połowie swojej długości i w dodatku pod kątem prostym. Będziemy więc zatem taką oto sytuację:



Krok 3. Obliczenie długości przekątnej BD .

Na rysunku pomocniczym powstał nam trójkąt prostokątny, zatem z pomocą przyjdzie nam Twierdzenie Pitagorasa:

$$|AS|^2 + |BS|^2 = |AB|^2, 12^2 + |BS|^2 = 13^2, 144 + |BS|^2 = 169, |BS|^2 = 25, |BS| = 5 \vee |BS| = -5$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $|BS| = 5$, co oznacza, że poszukiwany odcinek BD ma długość dwa razy większą, czyli $|BD| = 2 \cdot 5 = 10$.

Krawędzie prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka mają długości będące kolejnymi liczbami nieparzystymi. Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 60. Oblicz objętość i pole powierzchni tej bryły.

Odpowiedź: $V = 105$ oraz $P_{\{$

Krok 1. Obliczenie długości krawędzi prostopadłościanu.

Trzy kolejne liczby nieparzyste możemy zapisać jako:

I krawędź: $2n + 1$

II krawędź: $2n + 3$

III krawędź: $2n + 5$

W prostopadłościanie każda z krawędzi występuje czterokrotnie, a skoro suma długości tych krawędzi jest równa 60, to:

$$4 \cdot (2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5) = 60, \quad 4 \cdot (6n + 9) = 60, \quad 24n + 36 = 60, \quad 24n = 24, \quad n = 1$$

Otrzymany wynik posłuży nam teraz do wyznaczenia konkretnych długości krawędzi prostopadłościanu. Podstawiając $n = 1$ do zapisanych wcześniej wyrażeń, otrzymamy:

To oznacza, że:

I krawędź: $2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

II krawędź: $2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$

III krawędź: $2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 = 7$

Krok 2. Obliczenie objętości prostopadłościanu.

Znając długości krawędzi możemy bez problemu obliczyć objętość tej bryły:

$$V = abc, \quad V = 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad V = 105$$

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni prostopadłościanu.

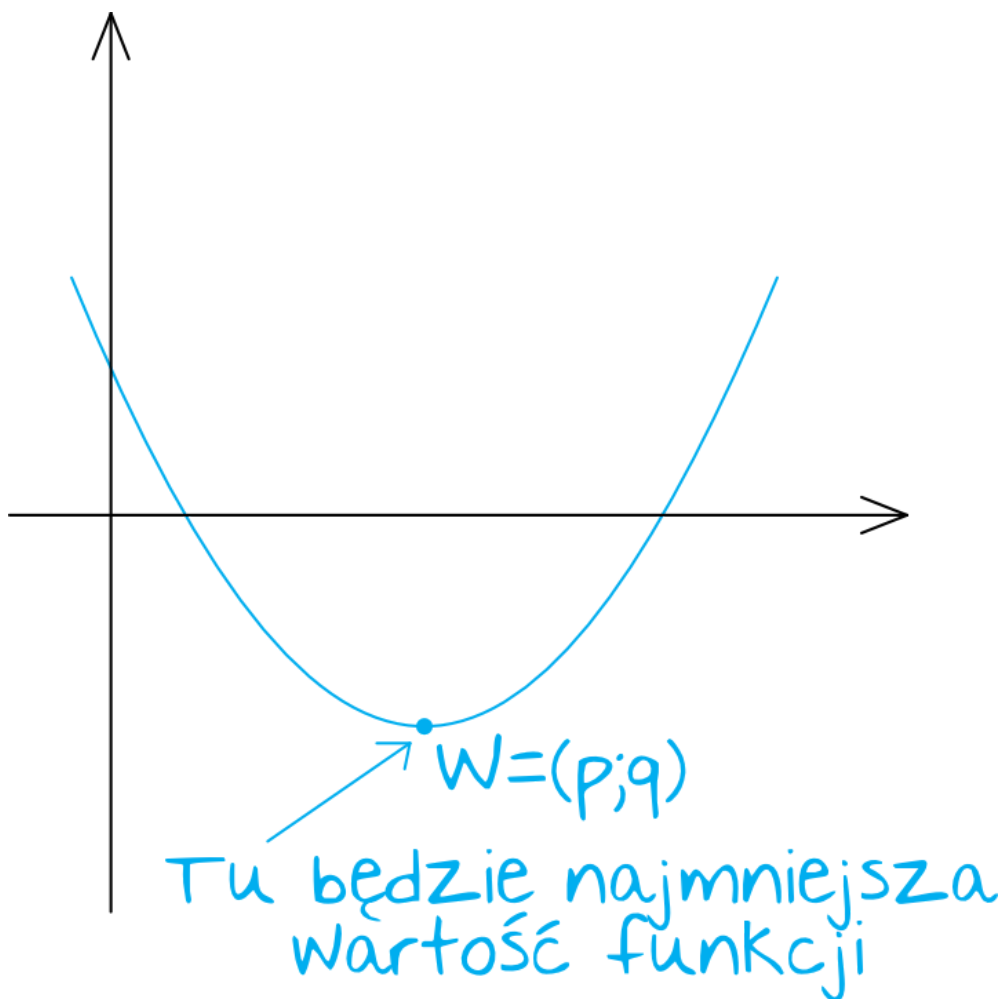
Musimy jeszcze obliczyć pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, zatem korzystając ze wzoru na to pole możemy zapisać, że:

$$P_c = 2 \cdot (ab + ac + bc), \quad P_c = 2 \cdot (3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7), \quad P_c = 2 \cdot (15 + 21 + 35), \quad P_c = 2 \cdot 71, \quad P_c = 142$$

Zadanie 35

0-4 pkt

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -2\frac{1}{2}$ i $x_2 = 1$. Wykres funkcji f przechodzi przez punkt $A(-3, 8)$. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f .



Odpowiedź: $q = -12\frac{1}{4}$

Krok 1. Zapisanie wzoru funkcji w postaci iloczynowej.

Znamy dwa miejsca zerowe, więc możemy przystąpić do zapisania funkcji w postaci iloczynowej. Dla przypomnienia, postać iloczynowa wygląda następująco:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Podstawiając teraz podane miejsca zerowe otrzymamy:

$$y = a\left(x + 2\frac{1}{2}\right)(x - 1), \quad 8 = a \cdot \left(-3 + 2\frac{1}{2}\right)(-3 - 1), \quad 8 = a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-4), \quad 8 = 2a, \quad a = 4$$

To oznacza, że nasza funkcja wyraża się wzorem:

$$y = 4\left(x + 2\frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

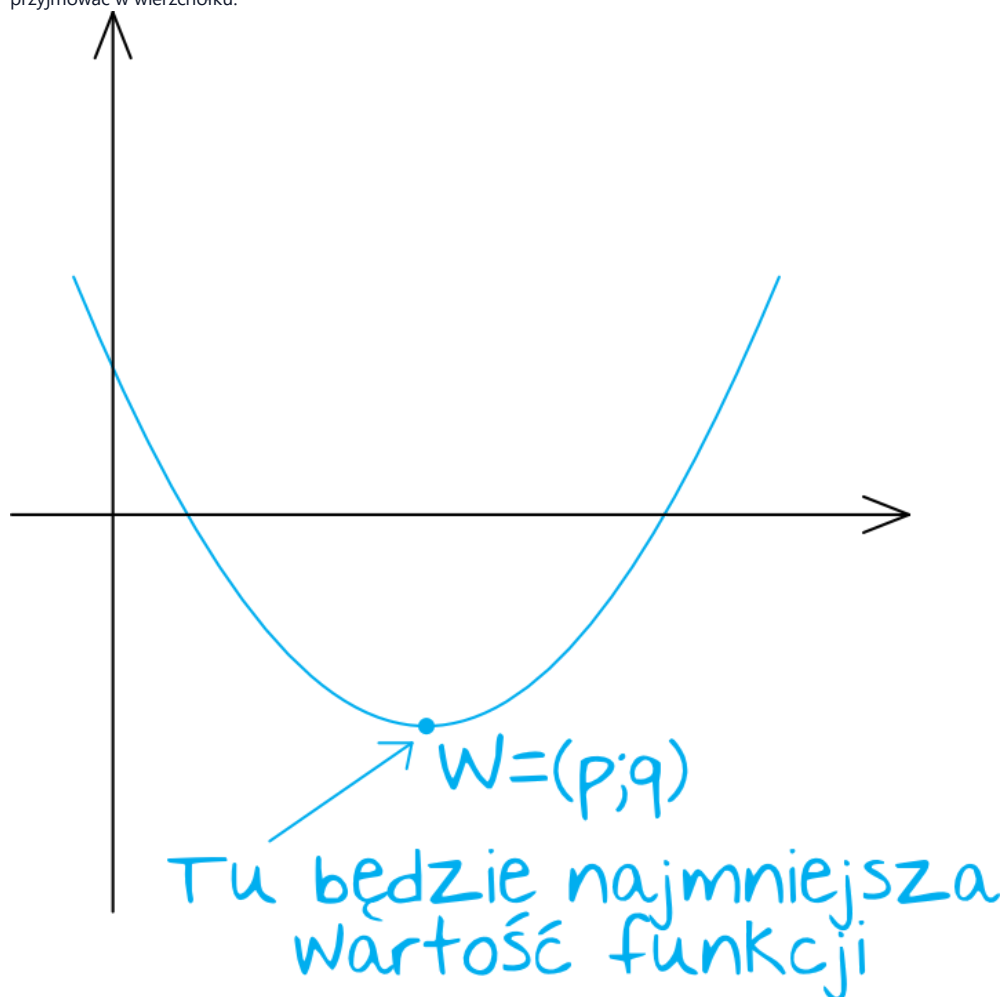
Krok 2. Zapisanie wzoru funkcji w postaci ogólnej.

Chcemy teraz zapisać wzór funkcji w postaci ogólnej (umożliwi nam to potem poznanie najmniejszej wartości funkcji). W tym celu musimy wymnożyć przez siebie nawiasy i uporządkować zapis:

$$y = 4\left(x + 2\frac{1}{2}\right)(x - 1), \quad y = (4x + 10)(x - 1), \quad y = 4x^2 - 4x + 10x - 10, \quad y = 4x^2 + 6x - 10$$

Krok 3. Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji f .

Wykres naszej funkcji jest parabolą, która ma ramiona skierowane do góry (bo współczynnik $a = 4$). Skoro tak, to swoją najmniejszą wartość ta funkcja będzie przyjmować w wierzchołku:



Nas interesuje poznanie najmniejszej wartości, czyli szukamy wartości współrzędnej q . Korzystając zatem ze wzoru na tą współrzędną możemy zapisać, że:

$$q = -\frac{\Delta}{4a}, q = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}, q = -\frac{(6^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-10))}{4 \cdot 4}, q = -\frac{(36 + 160)}{16}, q = -\frac{196}{16}, q = -12\frac{1}{4}$$

Tak na marginesie, można też byłoby obliczyć wartość współrzędnej p (ją się wylicza nieco szybciej), a następnie można byłoby sprawdzić jaką wartość przyjmuje funkcja dla tego argumentu. Współrzedną p obliczylibyśmy w następujący sposób:

$$p = \frac{-b}{2a}, p = \frac{-6}{2 \cdot 4}, p = \frac{-6}{8}, p = -\frac{3}{4}$$

I teraz podstawiając wartość $x = -\frac{3}{4}$ do wzoru $y = 4x^2 + 6x - 10$, otrzymalibyśmy:

$$q = 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 10, q = 4 \cdot \frac{9}{16} + 6 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 10, q = \frac{9}{4} + \left(-\frac{18}{4}\right) - 10, q = -\frac{9}{4} - 10, q = -12\frac{1}{4}$$