

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Operon 2020

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	A ($\frac{2}{3}$)	1
2	B (2)	1
3	D ($b = 1, 5a$)	1
4	C (2)	1
5	A ($\sqrt{5}$)	1
6	C ($a + b$)	1
7	D (9cm)	1
8	B ($(10 + 2\sqrt{5})cm$)	1
9	D (29°)	1
10	B (20)	1
11	D ($f(x) = x^2 + 1$)	1
12	B ($a < 0$ i $b > 0$)	1
13	C (2, 5)	1
14	A ($\frac{2\sqrt{39}}{13}$)	1
15	C ($-3\frac{3}{4}$)	1
16	B ($a_n = 8 - 3n$)	1
17	D (4)	1
18	A ($\langle -6, 5 \rangle \setminus \{-1\}$)	1
19	C ($m = 1$)	1
20	D ($f(x) = -(x+2)(x-4)$)	1
21	C (8)	1
22	B ($4\sqrt{2}cm$)	1
23	D (sześciokąt)	1
24	C ($2\pi cm$)	1
25	B (8)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Liczbą odwrotną do liczby $\frac{(\frac{1}{2})^{-1} - 5}{2^{-2} - (\frac{2}{3})^{-2}}$ jest:

Odpowiedź: A ($\frac{2}{3}$)

Na początku musimy obliczyć wartość naszej liczby. Korzystając z działań na potęgach możemy zapisać, że:

$$\frac{(\frac{1}{2})^{-1} - 5}{2^{-2} - (\frac{2}{3})^{-2}} = \frac{2 - 5}{(\frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2} = \frac{-3}{\frac{1}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{-3}{-\frac{8}{4}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Musimy jeszcze podać liczbę odwrotną do liczby $\frac{3}{2}$, a więc poszukiwaną liczbą będzie $\frac{2}{3}$.

Zadanie 2

0-1 pkt

Przedział liczbowy $\langle 2, 7 \rangle$ jest iloczynem zbioru $A = \langle m; \infty \rangle$ i zbioru $B = (-3, 7)$ dla m równego:

Odpowiedź: B (2)

Iloczyn zbiorów to zbiór, który zawiera elementy znajdujące się jednocześnie w jednym i drugim zbiorze. Skoro iloczynem zbiorów jest przedział $\langle 2, 7 \rangle$, to możemy wywnioskować, że ten przedział musi znaleźć się zarówno w zbiorze A jak i B . Aby tak się stało, to m musi być równe 2.

Zadanie 3

0-1 pkt

Liczba dodatnia a jest zapisana w postaci ułamka zwykłego. Licznik tego ułamka zwiększono

o 20%, a jego mianownik zmniejszono o 20%. Otrzymano w ten sposób liczbę b , taką, że:

Odpowiedź: D ($b = 1,5a$)

Liczbę a możemy zapisać jako $a = \frac{x}{y}$. Skoro licznik mamy zwiększyć o 20%, a mianownik zmniejszyć o 20%, to w liczniku będziemy mieć $1,2x$, a w mianowniku $0,8y$. To oznacza, że:

$$b = \frac{1,2x}{0,8y} = \frac{1,2}{0,8} \cdot \frac{x}{y} = 1,5 \cdot \frac{x}{y} = 1,5a$$

Zadanie 4

0-1 pkt

W rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{5}{7}$ na setnym miejscu po przecinku stoi cyfra:

Odpowiedź: C (2)

Aby poznać rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{5}{7}$, wystarczy na kalkulatorze podzielić 5 przez 7, dzięki czemu otrzymamy:

$$\frac{5}{7} = 0,714285714285... = 0,(714285)$$

Kluczem do sukcesu jest tutaj dostrzeżenie, że pojawia nam się tak zwany okres ułamka, czyli 714285. Każde kolejne sześć cyfr po przecinku będzie wyglądać tak samo. Jak więc będzie wyglądać ta setna cyfra? Możemy to przeanalizować krok po kroku np. w taki oto sposób:

Szósta cyfra to 5

Dwunasta cyfra to 5

...

Sześćdziesiąta cyfra to 5

...

Dziewięćdziesiąta szósta cyfra to 5

Dziewięćdziesiąta siódma cyfra to 7

Dziewięćdziesiąta ósma cyfra to 1

Dziewięćdziesiąta dziewiąta cyfra to 4

Setna cyfra to 2

Zadanie 5

0-1 pkt

Wartość wyrażenia $|8 - 4\sqrt{5}| - (3\sqrt{5} - 8)$ jest równa:

Odpowiedź: A ($\sqrt{5}$)

Krok 1. Ustalenie w jaki sposób opuścić wartość bezwzględną.

Kluczowym problemem w tym zadaniu jest opuszczenie wartości bezwzględnej. Aby to zrobić, musimy ustalić czy pod wartością bezwzględną mamy liczbę dodatnią, czy ujemną. Wiemy, że $\sqrt{5} \approx 2,24$, więc $4\sqrt{5} \approx 8,96$. W związku z tym możemy być pewni, że $8 - 4\sqrt{5}$ daje wynik ujemny.

Ujemny wynik oznacza, że opuszczając wartość bezwzględną, musimy zmienić wszystkie znaki na przeciwne.

Krok 2. Obliczenie wartości wyrażenia.

Po przeanalizowaniu wartości bezwzględnej możemy zapisać, że:

$$|8 - 4\sqrt{5}| - (3\sqrt{5} - 8) = -(8 - 4\sqrt{5}) - (3\sqrt{5} - 8) = -8 + 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 8 = \sqrt{5}$$

Zadanie 6

0-1 pkt

Jeżeli $\log 5 = a$ i $\log 3 = b$, to $\log 15$ jest równy:

Odpowiedź: C ($a + b$)

Na początku rozwijemy wszelkie wątpliwości - skoro logarytmy nie mają podanej podstawy, to znaczy że ta podstawa jest równa 10. Dla nas w tym momencie najważniejsze jest to, że zarówno liczba a jak i b mają w takim razie tę samą podstawę, co pozwoli nam za chwilę wykorzystać działania na logarytmach.

Korzystając ze wzoru na sumę logarytmów $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ powinniśmy zauważyć, że:

$$\log 15 = \log(5 \cdot 3) = \log 5 + \log 3$$

To oznacza, że pasującą odpowiedzią będzie $a + b$.

Zadanie 7

0-1 pkt

Stosunek pól dwóch trójkątów równobocznych wynosi $\frac{9}{16}$, a długość boku większego trójkąta jest równa 12cm . Mniejszy trójkąt ma bok długości:

Odpowiedź: D (9cm)

Krok 1. Obliczenie skali podobieństwa.

Z własności figur podobnych wiemy, że jeśli dwie figury są podobne względem siebie w skali k , to stosunek pól powierzchni jest równy k^2 . Z treści zadania wynika, że stosunek pól jest równy $\frac{9}{16}$, zatem:

$$k^2 = \frac{9}{16}, \quad k = \frac{3}{4} \quad \vee \quad k = -\frac{3}{4}$$

Skala podobieństwa musi być dodatnia, więc zostaje nam $k = \frac{3}{4}$.

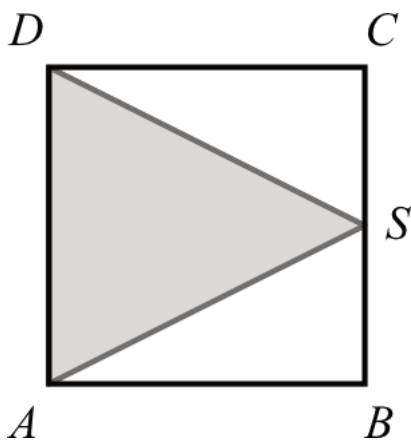
Krok 2. Obliczenie długości boku mniejszego trójkąta.

Długość boku większego trójkąta jest równa 12cm , zatem długość boku mniejszego trójkąta będzie równa $k \cdot 12\text{cm}$, czyli $\frac{3}{4} \cdot 12\text{cm} = 9\text{cm}$.

Zadanie 8

0-1 pkt

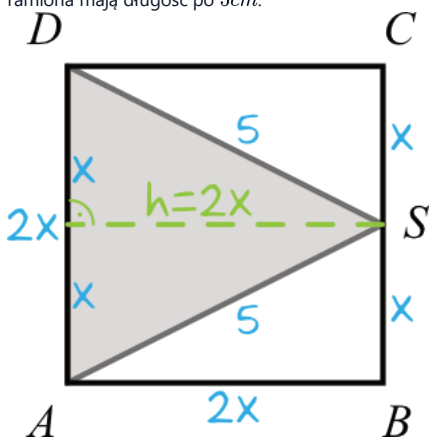
Punkt S jest środkiem boku kwadratu $ABCD$, a długość odcinka AS wynosi 5cm . Obwód trójkąta ADS jest równy:



Odpowiedź: B $((10 + 2\sqrt{5})\text{cm})$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zakładając, że odcinek SB ma długość x , to nasz bok AD będzie mieć długość $2x$. Dodatkowo warto zauważyć, że trójkąt ADS jest równoramienny, którego dwa ramiona mają długość po 5cm .



Do obliczenia obwodu brakuje nam długości długości podstawy trójkąta, czyli długości boku AD .

Krok 2. Obliczenie długości podstawy trójkąta ADS .

Wysokość dzieli nam podstawę trójkąta na dwie równe części i właśnie to pozwoli nam obliczyć brakującą długość odcinka AD . Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$x^2 + (2x)^2 = 5^2, \quad x^2 + 4x^2 = 25, \quad 5x^2 = 25, \quad x^2 = 5, \quad x = \sqrt{5} \quad \vee \quad x = -\sqrt{5}$$

Ujemną długość oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $x = \sqrt{5}$.

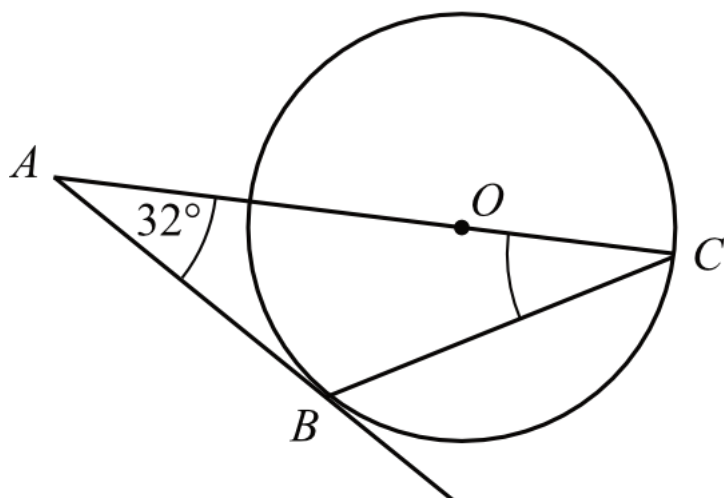
Podstawa AD ma długość $2x$, zatem będzie ona mieć długość $|AD| = 2\sqrt{5}\text{cm}$.

Krok 3. Obliczenie długości obwodu.

Na koniec została już tylko formalność, czyli obliczenie obwodu. Dodając do siebie długości wszystkich boków trójkąta ADS otrzymamy:

$$5\text{cm} + 5\text{cm} + 2\sqrt{5}\text{cm} = (10 + 2\sqrt{5})\text{cm}$$

Prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku O (patrz rysunek).

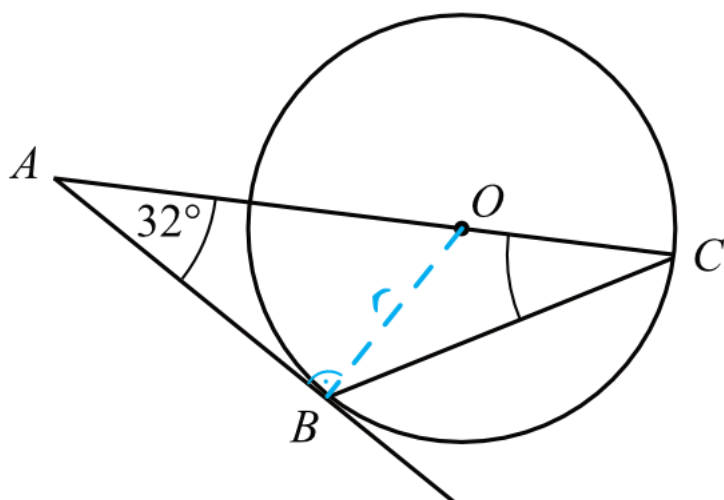


Miara kąta ACB jest równa:

Odpowiedź: D (29°)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Kluczem do sukcesu będzie dorysowanie promienia OB , który zgodnie z własnościami stycznych do okręgu, będzie tworzył ze styczną kąt prosty:



Krok 2. Obliczenie miary kąta AOB .

Spójrzmy na trójkąt ABO . Znamy tutaj miary dwóch kątów, zatem trzeci brakujący kąt będzie miał miarę:

$$|\angle AOB| = 180^\circ - 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$$

Krok 3. Obliczenie miary kąta BOC .

Kąt AOB oraz kąt BOC to kąty przyległe, zatem łączna ich miara jest równa 180° . Skoro tak, to:

$$|\angle BOC| = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$$

Krok 4. Obliczenie miary kąta ACB .

Spójrzmy na trójkąt BCO . Jest to trójkąt równoramienny, ponieważ ramiona BO oraz CO mają długość promienia. Z własności takich trójkątów wiemy, że kąty przy podstawie mają jednakową miarę. Skoro więc kąt między ramionami ma miarę 122° , to na dwa kąty przy podstawie zostanie nam:

$$180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$$

Kąty przy podstawie mają mieć równą miarę, zatem kąt BCO (czyli ACB), ma miarę:

$$|\angle ACB| = 58^\circ : 2 = 29^\circ$$

Zadanie 10

0-1 pkt

Punkty $A = (1, 2)$ i $B = (-3, 5)$ są dwoma wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Obwód tego kwadratu jest równy:

Odpowiedź: B (20)

Krok 1. Obliczenie długości boku AB .

Korzystając ze wzoru na długość odcinka w układzie współrzędnych, możemy bez problemu obliczyć długość odcinka AB .

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, |AB| = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (5 - 2)^2}, |AB| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2}, |AB| = \sqrt{16 + 9}, |AB| = \sqrt{25}, |AB| = 5$$

Krok 2. Obliczenie obwodu kwadratu.

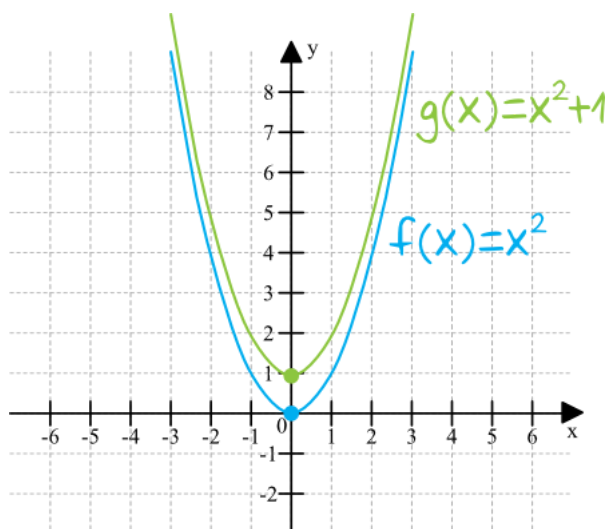
Co prawda nie jest zbyt dobrze sprecyzowane, czy wierzchołki A oraz B tworzą jeden bok kwadratu, czy też może przekątną, ale po nazewnictwie figury możemy wywnioskować, że wierzchołki A oraz B są obok siebie, więc stanowią one bok kwadratu. Skoro tak, to obwód kwadratu będzie równy:

$$Obw = 4 \cdot 5, Obw = 20$$

Zadanie 11

0-1 pkt

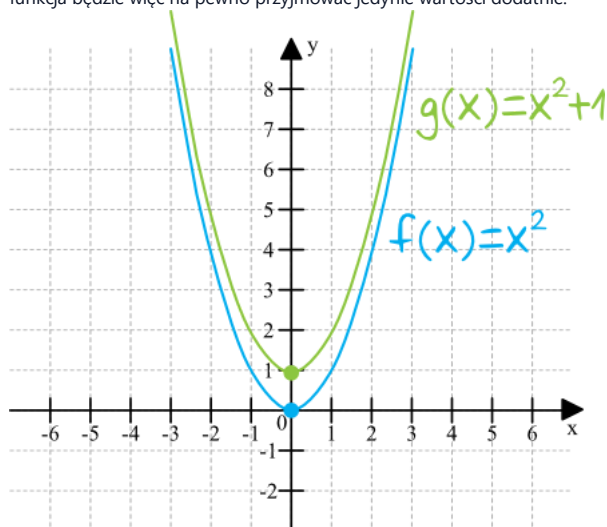
Wartości ujemnych nie przyjmuje funkcja f określona wzorem:



Odpowiedź: D ($f(x) = x^2 + 1$)

Powinniśmy kojarzyć, że funkcja $f(x) = x^2$ przyjmuje tylko wartości dodatnie lub równe zero. Wynika to oczywiście z tego, że każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu przyjmuje wartość dodatnią lub równą zero.

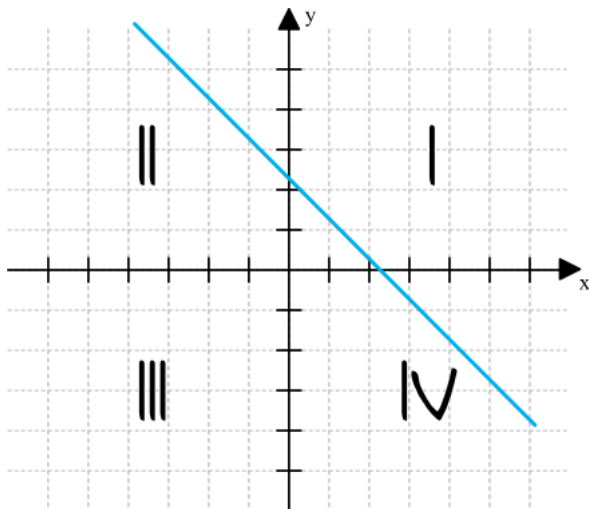
Jeżeli przyjrzymy się podanym funkcjom, to zauważymy, że każda z nich jest pewnym przekształceniem funkcji $f(x) = x^2$. Funkcją, która nie przyjmie wartości ujemnych będzie więc na pewno $f(x) = x^2 + 1$, bowiem jest to nasza standardowa funkcja $f(x) = x^2$, która jest jeszcze podniesiona o jedną jednostkę do góry. Ta funkcja będzie więc na pewno przyjmować jedynie wartości dodatnie.



Zadanie 12

0-1 pkt

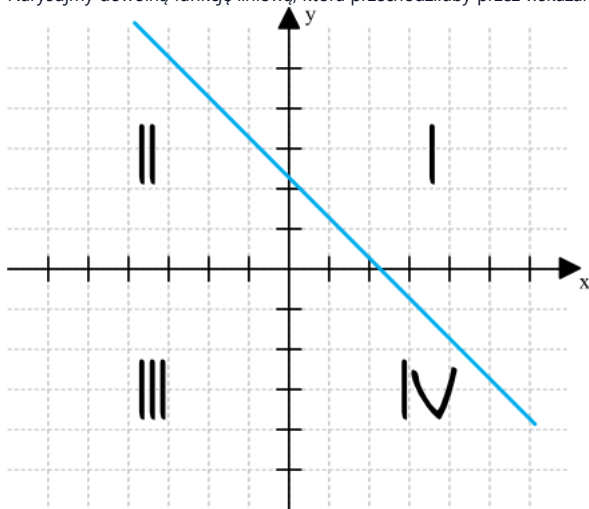
Prosta będąca wykresem funkcji $f(x) = ax + b$ przechodzi tylko przez I , II i IV ćwiartkę układu współrzędnych. Wynika stąd, że:



Odpowiedź: B ($a < 0$ i $b > 0$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Narysujmy dowolną funkcję liniową, która przechodziłaby przez wskazane ćwiartki:



Krok 2. Ustalenie wartości współczynników a oraz b .

Z rysunku wynika, że nasza prosta musi być malejąca, czyli jej współczynnik kierunkowy a musi być ujemny. Dodatkowo widzimy, że prosta przecina oś OY dla dodatnich wartości, więc tym samym współczynnik b będzie dodatni.

To oznacza, że $a < 0$ i $b > 0$.

Zadanie 13

0-1 pkt

Wspólnym pierwiastkiem równania $3x(x + \frac{2}{3})(2x - 5) = 0$ oraz równania $\frac{2x-5}{3x+2} = 0$ jest liczba:

Odpowiedź: C (2, 5)

Krok 1. Rozwiązanie pierwszego równania.

Na początek rozwiążmy pierwsze równanie. Traktujemy je tak samo jak równanie w postaci iloczynowej, czyli przyrównujemy odpowiednie wartości do zera:

$$3x = 0 \quad \vee \quad x + \frac{2}{3} = 0 \quad \vee \quad 2x - 5 = 0, \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{2}{3} \quad \vee \quad 2x = 5, \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{2}{3} \quad \vee \quad x = 2, 5$$

Krok 2. Rozwiązanie drugiego równania.

Jest to przykład równania wymiernego w którym niewiadoma x pojawia się w mianowniku ułamka, zatem zanim zaczniemy liczyć, musimy zapisać założenia. Z racji tego, iż na matematyce nie istnieje dzielenie przez zero, to mianownik musi być różny od zera, więc:

$$3x + 2 \neq 0, \quad 3x \neq -2, \quad x \neq -\frac{2}{3}$$

Dopiero teraz możemy przystąpić do obliczeń, a zaczniemy standardowo od wymnożenia obydwu stron przez wartość z mianownika:

$$\frac{2x-5}{3x+2} = 0 \quad / \cdot (3x+2), \quad 2x-5 = 0, \quad 2x = 5, \quad x = 2, 5$$

Otrzymane rozwiązanie nie wyklucza się z założeniami, więc możemy uznać, że rozwiązaniem tego równania jest $x = 2, 5$.

Krok 3. Ustalenie wspólnych rozwiązań.

Wspólny pierwiastek to tak naprawdę wspólne rozwiązanie jednego i drugiego równania. Widzimy, że takim rozwiązaniem jest jedynie $x = 2, 5$ i to będzie poszukiwana przez nas odpowiedź.

Zadanie 14

0-1 pkt

Jeżeli sinus kąta ostrego α wynosi $\frac{2\sqrt{3}}{5}$, to wartość tangensa kąta ostrego α jest równa:

Odpowiedź: A ($\frac{2\sqrt{39}}{13}$)

Krok 1. Obliczenie wartości cosinusa.

Korzystając z jedynki trygonometrycznej możemy zapisać, że:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{4 \cdot 3}{25} + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{12}{25} + \cos^2 \alpha = 1, \quad \cos^2 \alpha = \frac{13}{25}, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{13}{25}} \quad \vee \quad \cos \alpha = -\sqrt{\frac{13}{25}}$$

Wartość ujemną odrzucamy, bo cosinus dla kątów ostrych przyjmuje wartości dodatnie, zatem zostaje nam $\cos \alpha = \sqrt{\frac{13}{25}}$, co możemy jeszcze zapisać jako $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{5}$.

Krok 2. Obliczenie wartości tangensa.

Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ możemy zapisać, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{5}}{\frac{\sqrt{13}}{5}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5} : \frac{\sqrt{13}}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{13}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

Zadanie 15

0-1 pkt

Trzecim wyrazem ciągu geometrycznego jest liczba 3, a szóstym jest liczba -24 . Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu wynosi:

Odpowiedź: C ($-3\frac{3}{4}$)

Krok 1. Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego.

Do zadania można podejść na kilka sposobów, ale najprościej będzie skorzystać z własności ciągów geometrycznych. Powinniśmy dostrzec, że $a_3 \cdot q \cdot q \cdot q = a_6$, czyli że $a_3 \cdot q^3 = a_6$. Podstawiając teraz informacje z treści zadania, otrzymamy:

$$a_3 \cdot q^3 = a_6, 3 \cdot q^3 = -24, q^3 = -8, q = -2$$

Krok 2. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu.

Znając wartość trzeciego wyrazu oraz iloraz ciągu możemy obliczyć wartość pierwszego wyrazu.

$$a_3 = a_1 \cdot q^2, 3 = a_1 \cdot (-2)^2, 3 = a_1 \cdot 4, a_1 = \frac{3}{4}$$

Krok 3. Obliczenie sumy czterech pierwszych wyrazów.

Kiedy znamy już wartość pierwszego wyrazu i ilorazu ciągu, możemy bez problemu obliczyć sumę czterech pierwszych wyrazów ciągu, korzystając z następującego wzoru na sumę n początkowych wyrazów:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, S_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - (-2)^4}{1 - (-2)}, S_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - 16}{3}, S_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{-15}{3}, S_4 = \frac{3}{4} \cdot (-5), S_4 = \frac{-15}{4} = -3\frac{3}{4}$$

Zadanie 16

0-1 pkt

Jeśli nieskończony ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, w którym $a_1 = 5$ i różnica $r = -3$, to:

Odpowiedź: B ($a_n = 8 - 3n$)

Nasze zadanie polega tak naprawdę na zapisaniu wzoru tego ciągu arytmetycznego. W tym celu wystarczy skorzystać ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i podstawić do niego $a_1 = 5$ oraz $r = -3$:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, a_n = 5 + (n - 1) \cdot (-3), a_n = 5 - 3n + 3, a_n = 8 - 3n$$

Zadanie 17

0-1 pkt

Największą liczbą naturalną, która nie spełnia nierówności $32^{10} - 2^{48} \cdot x + 8 \cdot 4^{23} \leq (64^4)^2$, jest liczba:

Odpowiedź: D (4)

Powinniśmy zauważyć, że wszystkie liczby z tej nierówności mają coś wspólnego z dwójką, bowiem $32 = 2^5$, $8 = 2^3$, 4^2 oraz $64 = 2^6$. Korzystając teraz z działań na potęgach, całą nierówność możemy zapisać jako:

$$32^{10} - 2^{48} \cdot x + 8 \cdot 4^{23} \leq (64^4)^2, (2^5)^{10} - 2^{48} \cdot x + 2^3 \cdot (2^2)^{23} \leq ((2^6)^4)^2, 2^{50} - 2^{48} \cdot x + 2^3 \cdot 2^{46} \leq 2^{48}, 2^{50} - 2^{48} \cdot x + 2^{49} \leq 2^{48} \quad / : 2^{48}, 2^2 - x + 2^1 \leq 1$$

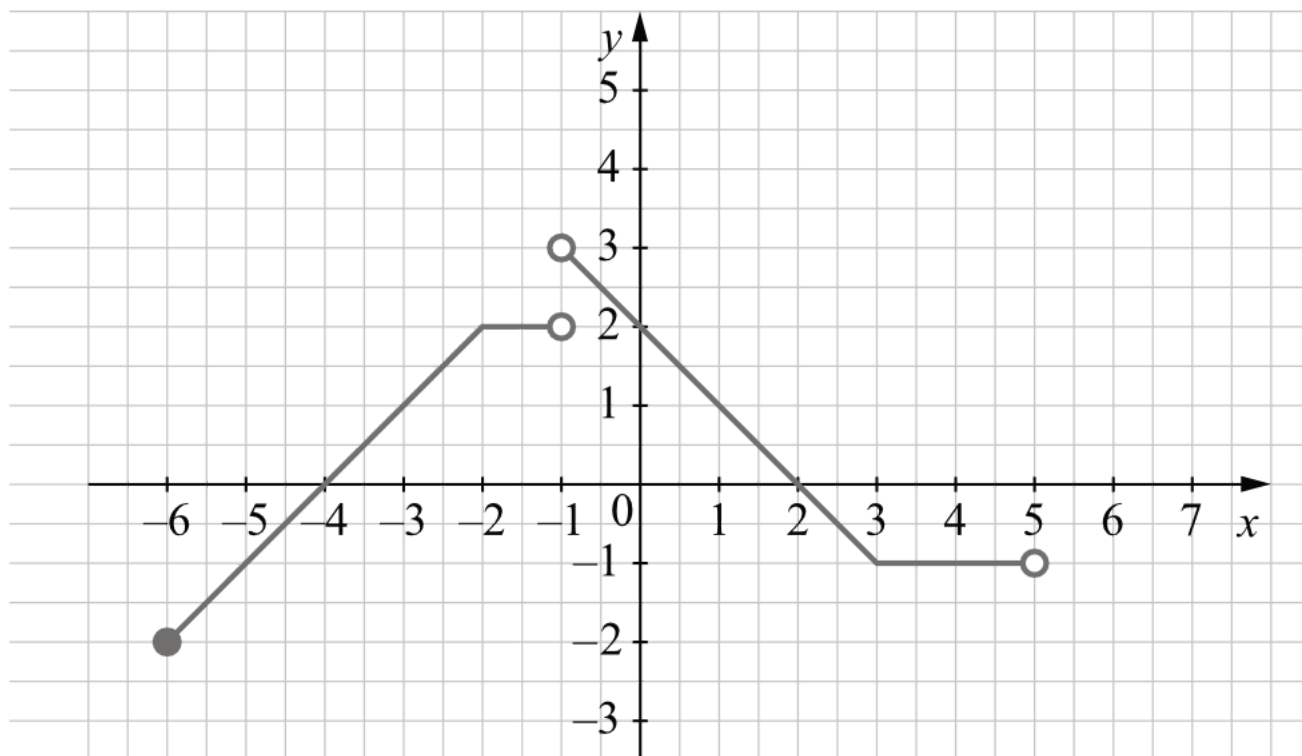
Zwróć uwagę, że w ostatnim przekształceniu musieliśmy zmienić znak nierówności na przeciwny (a to dlatego, że dzieliśmy przez liczbę ujemną -1).

Otrzymaliśmy informację, że $x \geq 5$. To oznacza, że największą liczbą naturalną, która nie spełnia tej nierówności będzie 4.

Zadanie 18

0-1 pkt

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Dziedziną funkcji f jest:

Odpowiedź: A $([-6, 5] \setminus \{-1\})$

Dziedzinę funkcji odczytujemy z osi OX . Na pierwszy rzut oka widać, że funkcja przyjmuje wartości dla argumentów od -6 (włącznie z -6 , bo kropka jest zamalowana) do 5 (ale bez 5 , bo kropka jest niezamalowana). Musimy jednak jeszcze wziąć pod uwagę, że dla argumentu $x = -1$ ta funkcja nie przyjmuje żadnych wartości. Z tego też względu dziedziną funkcji będzie $([-6, 5] \setminus \{-1\})$.

Zadanie 19

0-1 pkt

Proste o równaniach $y = (2m + 1)x - 4$ i $y = (6 - 3m)x + 4$ są równoległe wtedy, gdy:

Odpowiedź: C ($m = 1$)

Aby dwie proste były względem siebie równoległe, to muszą mieć jednakowy współczynnik kierunkowy. Skoro tak, to musimy rozwiązać następujące równanie:

$$2m + 1 = 6 - 3m, \quad 5m = 5, \quad m = 1$$

To oznacza, że te dwie proste będą względem siebie równoległe tylko wtedy, gdy $m = 1$.

Zadanie 20

0-1 pkt

Funkcja kwadratowa, której miejscami zerowymi są liczby -2 i 4 oraz do której należy punkt o współrzędnych $(0, 8)$, jest określona wzorem:

Odpowiedź: D ($f(x) = -(x + 2)(x - 4)$)

Postać iloczynową opisujemy wzorem $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1 oraz x_2 to miejsca zerowe funkcji. Podstawmy zatem do tej postaci te dwa miejsca, które są podane w treści zadania:

$$f(x) = a(x - (-2))(x - 4), \quad f(x) = a(x + 2)(x - 4)$$

Musimy jeszcze poznać brakujący współczynnik a . W tym celu do wyznaczonej postaci musimy podstawić współrzędne punktu, który do tej funkcji należy, czyli punktu $(0, 8)$. Otrzymamy zatem:

$$8 = a(0 + 2)(0 - 4), \quad 8 = a \cdot 2 \cdot (-4), \quad 8 = -8a, \quad a = -1$$

To oznacza, że poszukiwanym wzorem funkcji kwadratowej będzie $f(x) = -1 \cdot (x + 2)(x - 4)$, czyli $f(x) = -(x + 2)(x - 4)$

Zadanie 21

0-1 pkt

W turnieju bilardowym, w którym zawodnicy grali każdy z każdym, rozegrano 28 partii. Liczba zawodników biorących udział w tym turnieju wynosi:

Odpowiedź: C (8)

Krok 1. Przeanalizowanie sytuacji.

Kluczem do sukcesu jest dobre przeanalizowanie tej sytuacji. Załóżmy, że mamy 5 zawodników. W takiej sytuacji pierwszym graczem meczu może być właśnie jedna z tych pięciu osób, a drugim graczem będzie jedna z czterech pozostałych. Gdybyśmy więc zastosowali tutaj regułę mnożenia, to wyszłoby nam, że mamy $5 \cdot 4 = 20$ partii. Musimy jeszcze wziąć poprawkę na to, że licząc w ten sposób, każdą partię policzymy dwukrotnie, bo policzymy osobno zdarzenie np. (2; 5) jak i (5; 2), a to będzie przecież ta sama partia, z tymi samymi zawodnikami. Z tego też względu ostateczna liczba partii jest dwa razy mniejsza, niż to co wyjdzie nam w regule mnożenia.

Krok 2. Zapisanie równania.

To teraz analogicznie, spróbujmy podejść do rozwiązania zadania. Mamy n zawodników, a każdy z nich może zagrać mecz z $n - 1$ przeciwników (bo nie zagra sam ze sobą, tylko ze wszystkimi pozostałymi). Chcemy, by partie były unikalne, więc możemy zapisać, że:

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2} = 28, \quad n \cdot (n - 1) = 56, \quad n^2 - n = 56, \quad n^2 - n - 56 = 0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Współczynniki: $a = 1$, $b = -1$, $c = -56$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56) = 1 - (-224) = 225, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{225} = 15$$

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - 15}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 15}{2} = \frac{-14}{2} = -7, \quad n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + 15}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 15}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Ujemny wynik odrzucamy, więc zostaje nam $n = 8$. To oznacza, że w turnieju zagrało 8 zawodników.

Zadanie 22

0-1 pkt

W trójkącie ABC o polu równym 10cm^2 długość boku AB wynosi 5cm , a kąt przy wierzchołku A ma miarę 45° . Długość boku AC jest równa:

Odpowiedź: B ($4\sqrt{2}\text{cm}$)

W tym zadaniu możemy skorzystać ze wzoru na "pole trójkąta z sinusem", czyli $P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha$, gdzie $a = 5\text{cm}$, natomiast b to długość poszukiwanego boku AC . Wiedząc, że $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, otrzymamy:

$$P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha, \quad 10 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin 45^\circ, \quad 10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 20 = 5b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 40 = 5b \cdot \sqrt{2}, \quad 8 = b \cdot \sqrt{2}, \quad b = \frac{8}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}, \quad b = \frac{8\sqrt{2}}{2}, \quad b = 4\sqrt{2}$$

Zadanie 23

0-1 pkt

Liczba wierzchołków pewnego ostrosłupa jest o 5 mniejsza od liczby krawędzi. Podstawą tego ostrosłupa jest:

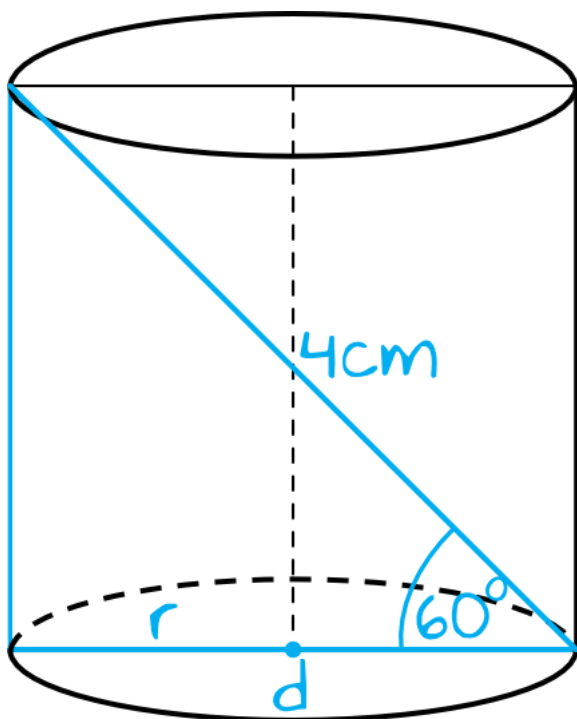
Odpowiedź: D (sześciokąt)

Ostrosłup, który ma w podstawie n -kąt będzie miał $n + 1$ wierzchołków i $2n$ krawędzi. Z treści zadania wynika, że wierzchołków jest o 5 mniej niż krawędzi, zatem:

$$n + 1 + 5 = 2n, \quad n + 6 = 2n, \quad n = 6$$

To oznacza, że w podstawie tego ostrosłupa jest sześciokąt.

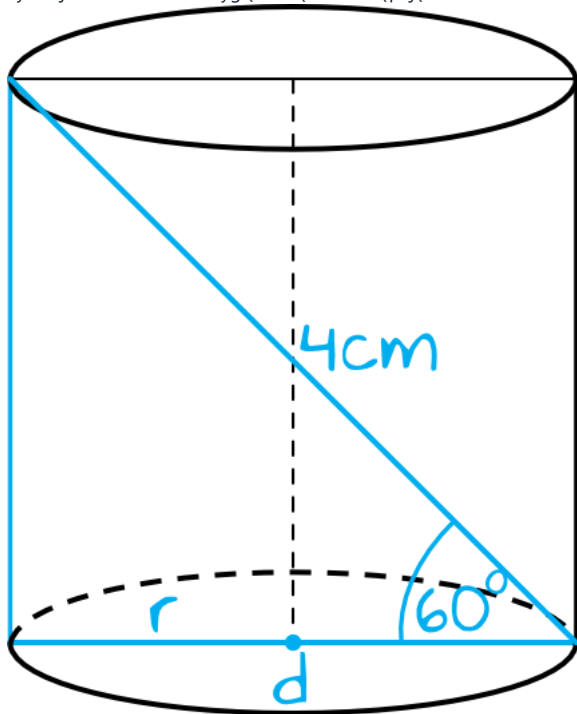
Przekątna przekroju osiowego walca ma długości 4 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Obwód podstawy tego walca jest równy:



Odpowiedź: C ($2\pi\text{ cm}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Sytuacja z treści zadania wyglądać będzie następująco:



Widzimy wyraźnie, że średnica podstawy, wysokość walca oraz przekątna przekroju osiowego będą tworzyć trójkąt prostokątny i to właśnie z niego obliczymy potrzebne dane.

Krok 2. Obliczenie promienia podstawy.

Najpierw obliczymy średnicę, korzystając z zaznaczonego trójkąta prostokątnego i z funkcji trygonometrycznych. Znamy długość przeciwprostokątnej, szukamy długości przyprostokątnej leżącej przy kącie 60° , zatem z pomocą przyjdzie nam cosinus:

$$\cos 60^\circ = \frac{d}{4}, \quad \frac{1}{2} = \frac{d}{4}, \quad d = 2[\text{cm}]$$

Obliczyliśmy długość średnicy podstawy, a do obliczenia obwodu potrzebujemy oczywiście długość promienia. Z racji tego, iż średnica jest dwa razy dłuższa od promienia, to:

$$r = 2cm : 2, r = 1cm$$

Krok 3. Obliczenie obwodu podstawy walca.

W podstawie mamy koło o promieniu $1cm$, zatem korzystając ze wzoru na obwód koła możemy zapisać, że:

$$Obw = 2\pi r, Obw = 2\pi \cdot 1cm, Obw = 2\pi cm$$

Zadanie 25

0-1 pkt

Ze zbioru liczb 1, 8, 2, 8, 4, 8, 6 usunięto jedną liczbę w ten sposób, że mediana otrzymanego zbioru liczb zmniejszyła się o 1. Wynika stąd, że usunięto liczbę:

Odpowiedź: B (8)

Krok 1. Uporządkowanie zestawu liczb.

Aby rozpocząć jakiegokolwiek obliczenia związane z medianą, musimy uporządkować ten zbiór i ustawić liczby w porządku niemalejącym (czyli od najmniejszej do największej). W związku z tym nasz zbiór będzie wyglądał następująco:

$$1, 2, 4, 6, 8, 8, 8$$

Krok 2. Obliczenie bieżącej mediany.

Nasz zestaw liczby 7 liczb, więc medianą będzie po prostu środkowy wyraz. W tym przypadku środkowym wyrazem jest 6, zatem mediana jest równa 6.

Krok 3. Ustalenie, którą liczbę usunięto.

Wiemy, że z naszego zestawu usunięto jedną liczbę, zatem nowy zestaw ma już tylko 6 liczb. To oznacza, że nową medianą będzie średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów. Z treści zadania wynika, że po usunięciu tej liczby mediana zmniejszyła się o 1, czyli wynosi 5.

To prowadzi nas do wniosku, że środkowymi wyrazami muszą być 4 oraz 6, bo wtedy $m = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Aby 4 oraz 6 były środkowymi liczbami, to z zestawu musimy usunąć jedną z ósemek i taka też będzie nasza odpowiedź.

Zadanie 26

0-2 pkt

Oblicz wartość parametru m , dla którego miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{5-2m}{2}x + 2$ jest liczba 4.

Odpowiedź: $m = 3$

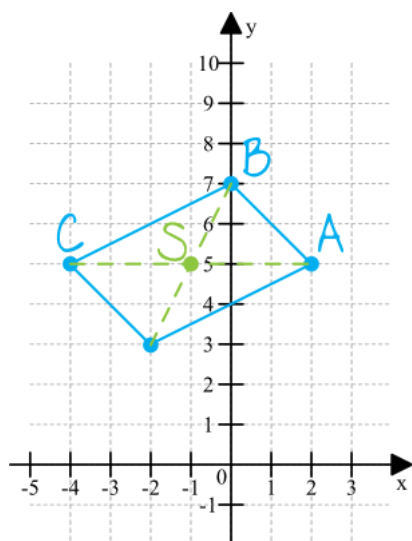
Miejsce zerowe funkcji to argument x , dla którego funkcja przyjmuje wartość równą 0. Krótko mówiąc, wystarczy do wzoru funkcji podstawić $x = 4$ i sprawdzić kiedy ta funkcja przyjmie wartość równą 0. Otrzymamy zatem równanie:

$$0 = \frac{5-2m}{2} \cdot 4 + 2, 0 = (5-2m) \cdot 2 + 2, 0 = 10 - 4m + 2, 4m = 12, m = 3$$

Zadanie 27

0-2 pkt

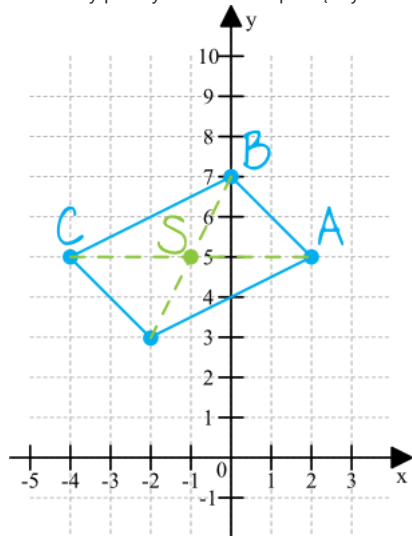
Punkty $A = (2, 5)$, $B = (0, 7)$, $C = (-4, 5)$ są trzema kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołka D tego równoległoboku.



Odpowiedź: $D = (-2; 3)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zaznaczmy punkty w układzie współrzędnych:



Przekątne równoległoboku przecinają się w połowie swojej długości i to będzie punkt wyjścia do obliczenia brakującego punktu D .

Krok 2. Obliczenie współrzędnych punktu S .

Korzystając ze wzoru na środek odcinka możemy zapisać, że:

$$S = \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right), S = \left(\frac{2 + (-4)}{2}; \frac{5 + 5}{2} \right), S = \left(\frac{-2}{2}; \frac{10}{2} \right), S = (-1; 5)$$

Krok 3. Obliczenie współrzędnych punktu D .

$$x_S = \frac{x_B + x_D}{2}, -1 = \frac{0 + x_D}{2}, -2 = 0 + x_D, x_D = -2$$

$$y_S = \frac{y_B + y_D}{2}, 5 = \frac{7 + y_D}{2}, 10 = 7 + y_D, y_D = 3$$

To oznacza, że $D = (-2; 3)$.

Zadanie 28

0-2 pkt

Wartość wyrażenia $\frac{tg30^\circ \cdot tg60^\circ - 4\sin^2 60^\circ}{\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ}$ sprowadź do najprostszej postaci.

Odpowiedź: -2

Krok 1. Wypisanie kluczowych wartości z tablic trygonometrycznych.

Zanim zaczniemy obliczenia, to przyjrzyjmy się całemu przykładowi i omówmy sobie strategię rozwiązywania.

Spójrzmy na licznik naszego wyrażenia. Wszystkie wartości możemy odczytać z tak zwanej "małej tabelki" trygonometrycznej, co pozwoli nam za chwilę wykonywać dokładne i precyzyjne obliczenia. Wypiszmy sobie zatem potrzebne dane:

$$tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad tg60^\circ = \sqrt{3}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Teraz spójrzmy na mianownik. Korzystając ze wzorów redukcyjnych możemy zauważyć, że:

$$\cos 40^\circ = \sin(90^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ$$

Skoro tak, to analogicznie $\cos^2 40^\circ$ będzie równe $\sin^2 50^\circ$. To oznacza, że w mianowniku pojawi nam się działanie $\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ$, czyli tzw. "jedynka trygonometryczna".

Krok 2. Obliczenie wartości wyrażenia.

Korzystając z danych zapisanych w pierwszym kroku możemy zapisać, że:

$$\frac{tg30^\circ \cdot tg60^\circ - 4\sin^2 60^\circ}{\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ} = , = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ} = , = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot \frac{3}{4}}{1} = , = \frac{3}{3} - 3 = 1 - 3 = -2$$

Zadanie 29

0-2 pkt

Liczba naturalna a przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2. Wykaż, że reszta z dzielenia liczby $2a^2$ przez 7 jest równa 1.

Odpowiedź: Udowodniono przedsta

Wiemy, że liczba a przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, zatem możemy ją zapisać w postaci $a = 7n + 2$. Podstawiając tę postać do liczby $2a^2$ otrzymamy:

$$2a^2 = 2 \cdot (7n + 2)^2 = 2 \cdot (49n^2 + 28n + 4) = 98n^2 + 56n + 8$$

Jak teraz udowodnić, że ta otrzymana przed chwilą liczba dzieli się przez 7, dając resztę 1? Moglibyśmy wyłączyć siódmkę przed nawias ($98 : 7$ to 14, a $56 : 7 = 8$), ale przeszkadza nam w tym 8, która nie dzieli się przez 7. Rozbijmy sobie zatem 8 na sumę $7 + 1$ i zapiszmy, że:

$$98n^2 + 56n + 7 + 1 = 7 \cdot (14n^2 + 8n + 1) + 1$$

Otrzymany wynik mówi nam, że dzieląc całe wyrażenie przez 7 otrzymamy jakąś liczbę naturalną (opisaną jako $14n^2 + 8n + 1$) i jeszcze zostanie nam 1 reszty, co należało właśnie udowodnić.

Zadanie 30

0-2 pkt

Ustal, czy w ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 3n - 10$ są wyrazy równe 0.

Odpowiedź: Tak, ta wartość jest

Współczynniki: $a = 1$, $b = -3$, $c = -10$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 - (-40) = 9 + 40 = 49, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

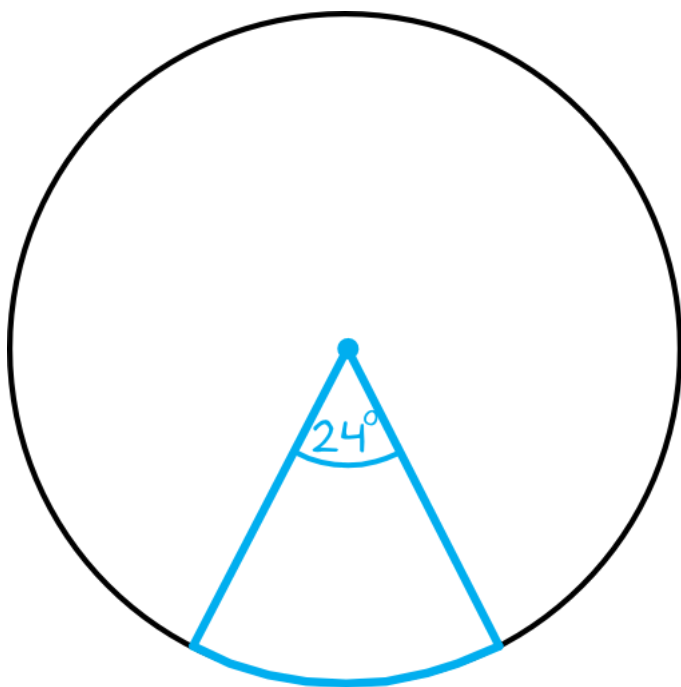
$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2, \quad n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

W ciągach n musi być liczbą naturalną, zatem wynik $n = -2$ nas nie interesuje. Pasuje nam za to wynik $n = 5$ i oznacza on, że w tym ciągu jest jeden wyraz mający wartość równą 0 i jest to wyraz piąty.

Zadanie 31

0-2 pkt

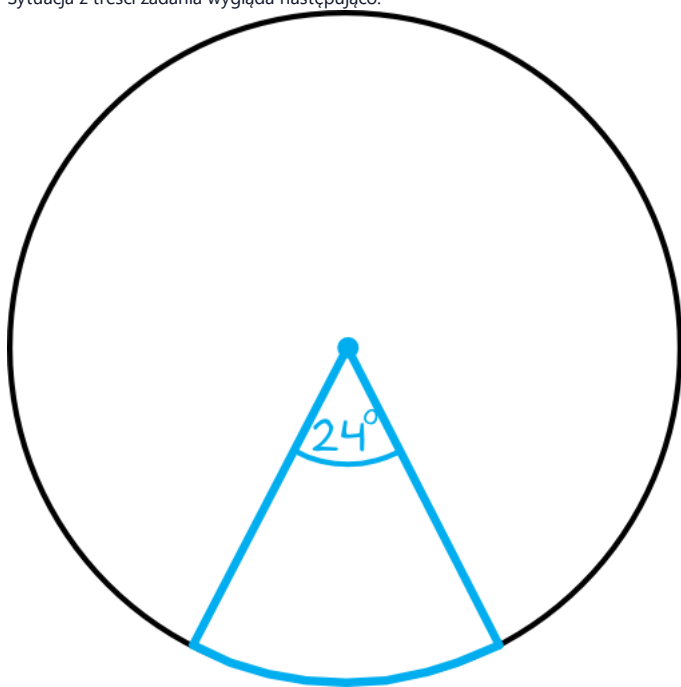
Pole wycinka koła jest równe $\frac{3\pi}{5} \text{ cm}^2$, a kąt wycinka tego koła ma miarę 24° . Oblicz długość łuku tego wycinka koła.



Odpowiedź: $\backslash(\text{Obw}_{\{w\}}=\frac{2}{5}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Sytuacja z treści zadania wygląda następująco:



Krok 2. Obliczenie pola powierzchni koła.

Wycinek stanowi $\frac{24^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{15}$ całego koła. Skoro ten wycinek ma pole powierzchni równe $\frac{3\pi}{5} \text{ cm}^2$, to pole całego koła będzie 15 razy większe, czyli będzie równe:

$$P = 15 \cdot \frac{3\pi}{5} \text{ cm}^2, P = 9\pi \text{ cm}^2$$

Krok 3. Obliczenie długości promienia koła.

Korzystając ze wzoru na pole koła możemy zapisać, że:

$$P = \pi r^2, 9\pi = \pi \cdot r^2, r^2 = 9, r = 3 \quad \vee \quad r = -3$$

Ujemną długość oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $r = 3\text{ cm}$.

Krok 4. Obliczenie długości łuku wycinka koła.

Skoro promień ma długość $r = 3$, to obwód całego koła będzie równy:

$$Obw = 2\pi r, Obw = 2\pi \cdot 3\text{ cm}, Obw = 6\pi\text{ cm}$$

Nas interesuje poznanie długości wycinka koła, który stanowi $\frac{1}{15}$ całego koła, zatem:

$$Obw_w = \frac{1}{15} \cdot 6\pi\text{ cm}, Obw_w = \frac{2}{5}\pi\text{ cm}$$

Zadanie 32

0-4 pkt

Grupa studentów zaplanowała wyjazd na narty. Postanowiono podzielić się po równo kosztem pobytu, który dla całej grupy wynosił 3840zł. Okazało się jednak, że z wyjazdu zrezygnowały 4 osoby, więc każdy z uczestników musiał zapłacić o 160zł więcej. Oblicz, ile osób wzięło udział w tym wyjeździe na narty i jaką kwotę każda z nich zapłaciła.

Odpowiedź: W wyjeździe wzięło u

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do danych treści zadania.

Na podstawie treści zadania możemy zapisać, że:

x - liczba studentów, która pojechała na narty

$x + 4$ - liczba studentów przed rezygnacją 4 osób

$\frac{3840}{x}$ - ostateczna cena wyjazdu pojedynczego studenta

$\frac{3840}{x+4}$ - cena wyjazdu pojedynczego studenta, przed rezygnacją 4 osób

Z treści zadania wynika, że ostateczna cena na jedną osobę była o 160zł wyższa, zatem powstaje nam następujące równanie:

$$\frac{3840}{x} - 160 = \frac{3840}{x+4}$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania.

$$\frac{3840}{x} - 160 = \frac{3840}{x+4} \quad \bigg/ \cdot x, \quad 3840 - 160x = \frac{3840x}{x+4} \quad \bigg/ \cdot (x+4), \quad 3840 \cdot (x+4) - 160x \cdot (x+4) = 3840x, \quad 3840x + 15360 - (160x^2 + 640x) = 3840x$$

Aby działać na nieco mniejszych liczbach, możemy (choć nie musimy) podzielić obie strony tego równania przez -160 , dzięki czemu otrzymamy:

$$x^2 + 4x - 96 = 0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe w postaci ogólnej, zatem z pomocą przyjdzie nam delta:

Współczynniki: $a = 1$, $b = 4$, $c = -96$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-96) = 16 - (-384) = 400, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{400} = 20$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 20}{2 \cdot 1} = \frac{-24}{2} = -12, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 20}{2 \cdot 1} = \frac{16}{2} = 8$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, bo liczba studentów nie może być ujemna. Zostaje nam zatem $x = 8$.

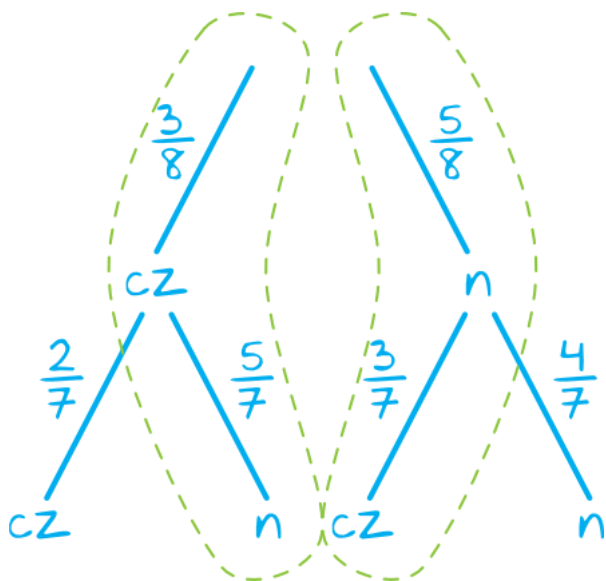
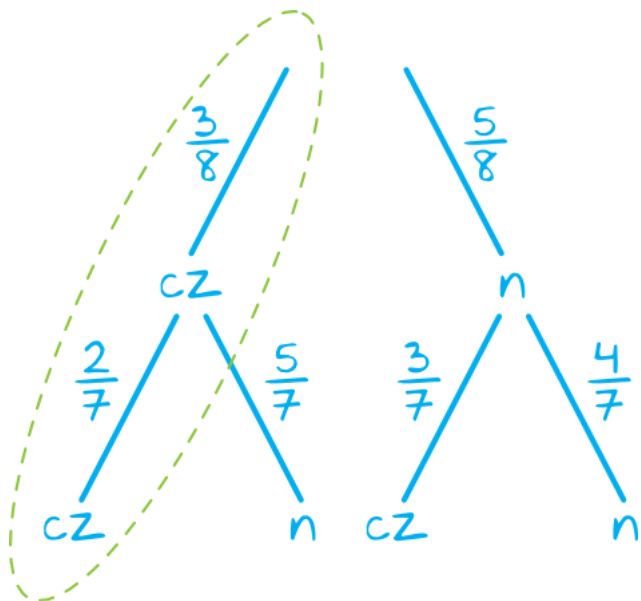
Krok 4. Obliczenie kwoty, jaką zapłacił każdy ze studentów.

Wyszło nam, że $x = 8$, czyli że było 8 studentów. Skoro zapłacili oni za wycieczkę 3840zł, to każdy z nich zapłacił:

$$3840\text{ zł} : 8 = 480\text{ zł}$$

W urnie są 3 kule czerwone i 5 niebieskich. Z urny losujemy dwa razy bez zwracania po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

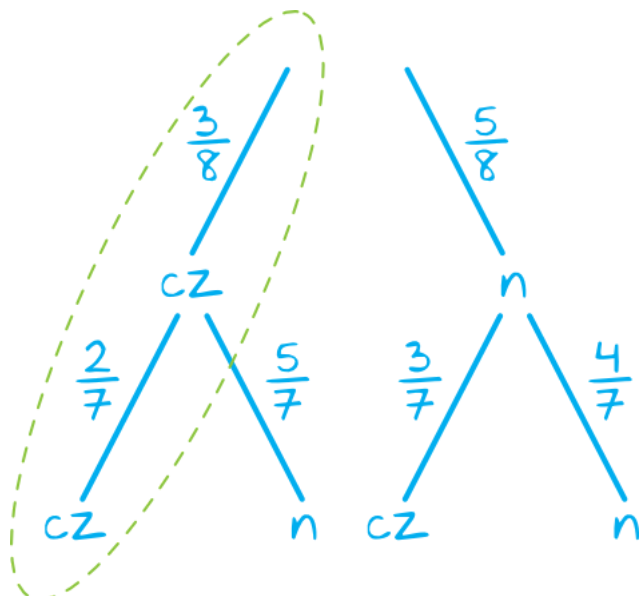
- a) dwóch kul czerwonych,
b) dwóch kul różnych kolorów.



Odpowiedź: a) $\frac{3}{28}$

Krok 1. Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania kuli czerwonej.

W urnie mamy łącznie $3 + 5 = 8$ kul. Początkowe prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej jest równe $\frac{3}{8}$, a kuli niebieskiej $\frac{5}{8}$. Jeżeli w pierwszym losowaniu byśmy wylosowali kulę czerwoną, to liczba kul czerwonych spada do 2 sztuk, a łącznie wszystkich kul pozostanie 7. Na podstawie tych obserwacji możemy zbudować proste drzewko:

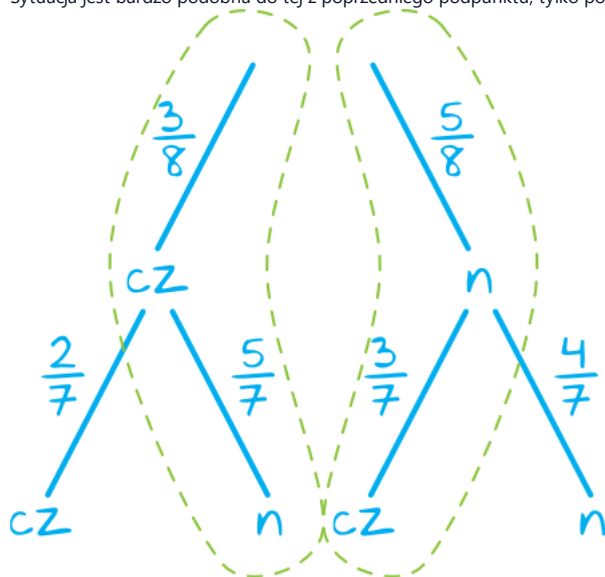


Nas interesuje tylko ten przypadek, w którym losujemy dwie czerwone kule. To oznacza, że prawdopodobieństwo wystąpienia takiego zdarzenia będzie równe:

$$P = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

Krok 2. Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania kul różnych kolorów.

Sytuacja jest bardzo podobna do tej z poprzedniego podpunktu, tylko po prostu inne gałęzie drzewka będą nas interesować.



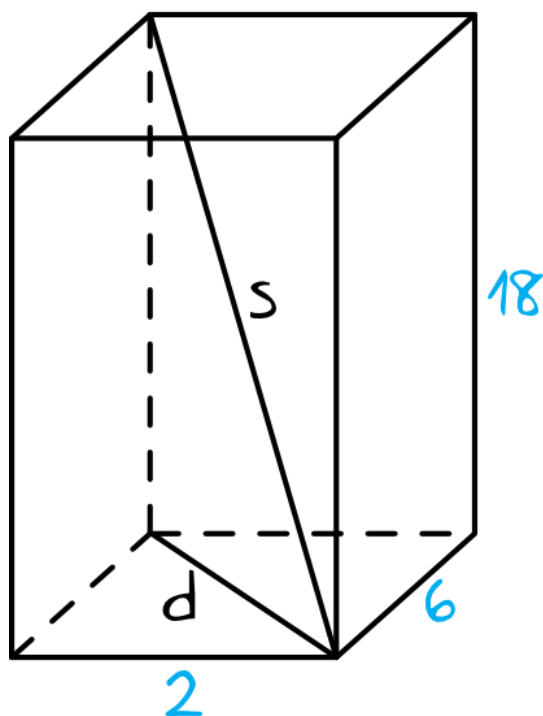
Pasuje nam zarówno wylosowanie najpierw kuli czerwonej, a potem niebieskiej, jak i najpierw niebieskiej, a potem czerwonej. Stąd też prawdopodobieństwa obydwu tych sytuacji będziemy musieli do siebie dodać:

$$P = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

Objętość prostopadłościanu jest równa 216, a długości trzech jego krawędzi poprowadzone z jednego wierzchołka są liczbami naturalnymi i tworzą niemalejący ciąg geometryczny, którego iloraz jest liczbą pierwszą. Oblicz wymiary tego prostopadłościanu oraz długość jego przekątnej.

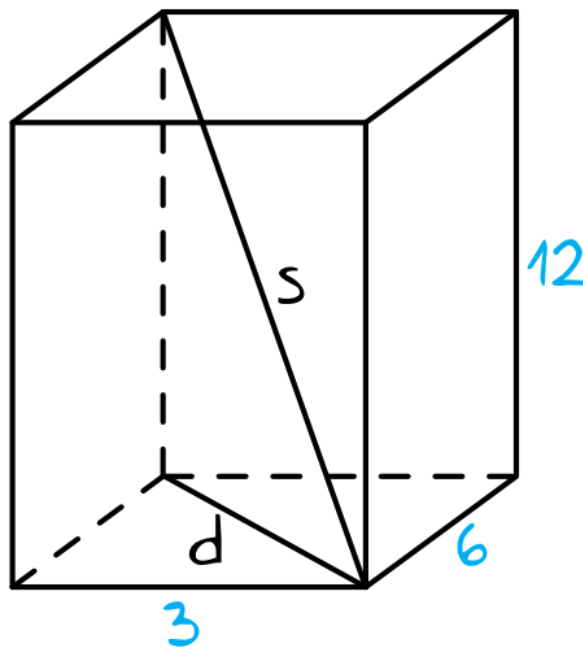
I wariant

2 x 6 x 18



II wariant

3 x 6 x 12



Odpowiedź: $2 \times 6 \times 18$

Krok 1. Obliczenie długości jednej z krawędzi prostopadłościanu.

Na razie potraktujmy to zadanie jako typowy przykład z ciągów. Z treści zadania możemy wywnioskować, że liczby a , b oraz c tworzą ciąg geometryczny, a iloczyn tych liczb jest równy 216. Czyli mamy taką oto sytuację:

$$a \cdot b \cdot c = 216$$

Z własności ciągów geometrycznych wiemy, że dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego zachodzi równość $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$, czyli w naszym przypadku $b^2 = a \cdot c$. Skoro tak, to możemy podstawić tę zależność do naszego zapisu:

$$a \cdot b \cdot c = 216, a \cdot c \cdot b = 216, b^2 \cdot b = 216, b^3 = 216, b = 6$$

Krok 2. Ustalenie, jakie są wymiary pozostałych boków.

Wiemy już, że jeden z boków ma długość $b = 6$. Tym samym możemy zapisać, że:

$$a \cdot 6 \cdot c = 216, a \cdot c = 36$$

Z treści zadania wynika, że wszystkie długości krawędzi są liczbami naturalnymi. Musimy się więc zastanowić jakie dwie liczby naturalne pomnożone przez siebie dają wynik równy 36. Będą to:

$$1 \cdot 36 = 36, 2 \cdot 18 = 36, 3 \cdot 12 = 36, 4 \cdot 9 = 36, 6 \cdot 6 = 36$$

Możemy więc mówić o następujących ciągach:

I wersja: $1, 6, 36 \Rightarrow q = 6$

II wersja: $2, 6, 18 \Rightarrow q = 3$

III wersja: $3, 6, 12 \Rightarrow q = 2$

IV wersja: $4, 6, 9 \Rightarrow q = 1,5$

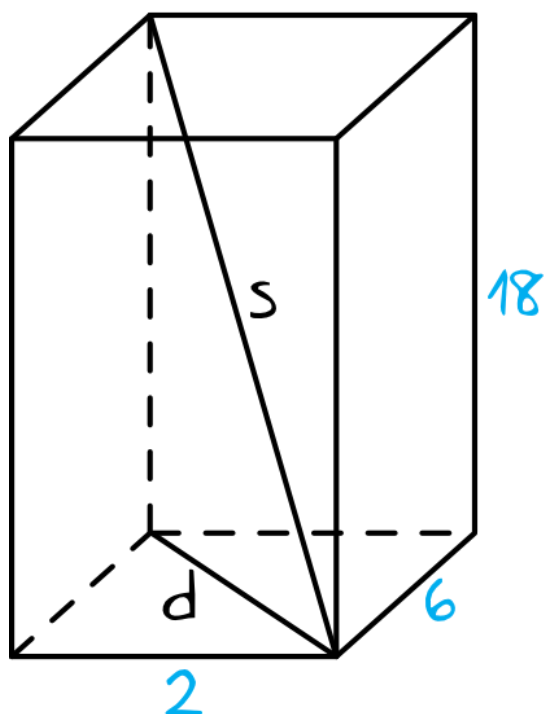
V wersja: $6, 6, 6 \Rightarrow q = 1$

I, IV oraz V wersję musimy odrzucić, ponieważ iloraz ciągu ma być liczbą pierwszą, a zarówno 1, jak i 1, 5 jak i 6 nie są takimi liczbami. To oznacza, że warunki naszego zadania spełniają dwa prostopadłościany: $2 \times 6 \times 18$ oraz $3 \times 6 \times 12$.

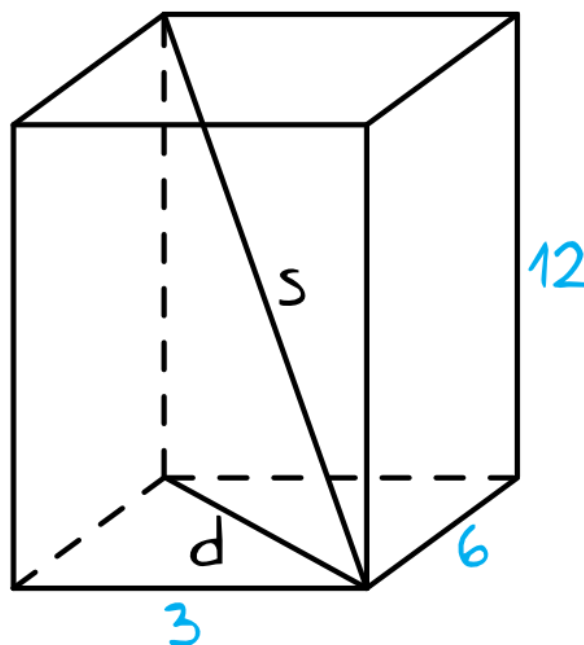
Krok 3. Obliczenie długości przekątnej prostopadłościanu.

Mamy dwa prostopadłościany spełniające warunki zadania, więc i dwie przekątne będziemy musieli obliczyć. Spójrzmy na rysunek pomocniczy:

I wariant
 $2 \times 6 \times 18$



II wariant
 $3 \times 6 \times 12$



Do wyznaczenia długości przekątnej prostopadłościanu potrzebujemy znać długość przekątnej podstawy. Obliczmy zatem tę długość w pierwszym i drugim wariancie:

I wariant - $2 \times 6 \times 18$

$$2^2 + 6^2 = d^2, 4 + 36 = d^2, d^2 = 40, d = \sqrt{40} \quad \vee \quad d = -\sqrt{40}$$

Ujemny wynik odrzucamy, zatem zostaje nam $d = \sqrt{40}$ (i póki co możemy to zostawić w takiej postaci).

II wariant - $3 \times 6 \times 12$

$$3^2 + 6^2 = d^2, 9 + 36 = d^2, d^2 = 45, d = \sqrt{45} \quad \vee \quad d = -\sqrt{45}$$

I tutaj także ujemny wynik odrzucamy, zatem zostaje nam $d = \sqrt{45}$.

Teraz mając długości przekątnych podstawy, możemy obliczyć długości przekątnych całego prostopadłościanu:

I wariant - $2 \times 6 \times 18$

$$18^2 + (\sqrt{40})^2 = s^2, 324 + 40 = s^2, s^2 = 364, s = \sqrt{364} \quad \vee \quad s = -\sqrt{364}$$

Ujemny wynik odrzucamy, zatem zostaje nam $s = \sqrt{364}$, co możemy jeszcze rozpisać jako $s = \sqrt{4 \cdot 91} = 2\sqrt{91}$

II wariant - $3 \times 6 \times 12$

$$12^2 + (\sqrt{45})^2 = s^2, 144 + 45 = s^2, s^2 = 189, s = \sqrt{189} \quad \vee \quad s = -\sqrt{189}$$

Ujemny wynik odrzucamy, zatem zostaje nam $s = \sqrt{189}$, co możemy jeszcze rozpisać jako $s = \sqrt{9 \cdot 21} = 3\sqrt{21}$.