

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Operon 2019

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	B ($9 - 6\sqrt{2}$)	1
2	A ($\langle -4, 4 \rangle$)	1
3	D (3)	1
4	C (28%)	1
5	A ($\frac{52}{45}$)	1
6	D ($f(28) > 9$)	1
7	C ($x = -2$)	1
8	B ($m \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$)	1
9	D (125°)	1
10	A (5cm)	1
11	A ($-\frac{2}{3}$ i 10)	1
12	D ($\frac{\sqrt{10}}{10}$)	1
13	D (w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$)	1
14	A (0)	1
15	C ($a_2 = 1$)	1
16	B (4 godzin i 45 minut)	1
17	D (9cm)	1
18	C (4 jednostki w lewo)	1
19	B (ma dokładnie jedno rozwiązanie)	1
20	B ($\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm)	1
21	D ($a = 7, b = 8$)	1
22	A ($24\sqrt{3}\text{cm}^3$)	1
23	C (16cm^2)	1
24	C (5760)	1
25	C (3, 9)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Wartość wyrażenia $(\sqrt{3} - \sqrt{6})^2$ jest równa:

Odpowiedź: B ($9 - 6\sqrt{2}$)

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ możemy zapisać, że:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{6})^2 = \sqrt{3}^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{6}^2 = 3 - 2\sqrt{18} + 6 = 9 - 2\sqrt{18}$$

Takiej odpowiedzi niestety nie mamy, bowiem musimy jeszcze wyłączyć czynnik przed znak pierwiastka, rozpisując $\sqrt{18}$ jako $\sqrt{9 \cdot 2}$. Całość będzie wyglądać następująco:

$$9 - 2\sqrt{18} = 9 - 2\sqrt{9 \cdot 2} = 9 - 2 \cdot 3\sqrt{2} = 9 - 6\sqrt{2}$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Zbiorem rozwiązań nierówności $|x| \leq 4$ jest przedział:

Odpowiedź: A ($\langle -4, 4 \rangle$)

Nierówności z wartością bezwzględną rozwiązujemy w następujący sposób:

$$|x| \leq 4, x \leq 4 \quad \wedge \quad x \geq -4$$

Widzimy wyraźnie, że rozwiązaniem nierówności są liczby, które jednocześnie będą mniejsze lub równe 4 i większe lub równe -4 . To oznacza, że rozwiązaniem tej nierówności jest przedział $\langle -4, 4 \rangle$.

Zadanie 3

0-1 pkt

Liczba $3\log 2 + \log 5^3$ jest równa:

Odpowiedź: D (3)

Korzystając z działań na logarytmach możemy zapisać, że:

$$3\log 2 + \log 5^3 = 3\log 2 + 3\log 5 = 3 \cdot (\log 2 + \log 5) = 3 \cdot \log(2 \cdot 5) = 3 \cdot \log 10 = 3 \cdot 1 = 3$$

Zadanie 4

0-1 pkt

Cenę pewnego towaru obniżono dwukrotnie: najpierw o 20%, a następnie o 10%. Końcowa cena tego towaru jest niższa od ceny początkowej o:

Odpowiedź: C (28%)

Wprowadźmy do zadania proste oznaczenia:

x - początkowa cena towaru

$0,8x$ - cena towaru po pierwszej obniżce

$0,9 \cdot 0,8x = 0,72x$ - cena towaru po drugiej obniżce

Skoro na początku cena towaru wynosiła x , a po dwóch obniżkach wynosi $0,72x$, to końcowa cena tego towaru jest niższa o $x - 0,72x = 0,28x$. Musimy tę wartość wyrazić w procentach, zatem skoro obniżka wyniosła $0,28x$ z x to procentowo będzie ona równa:

$$\frac{0,28x}{x} \cdot 100\% = 28\%$$

Zadanie 5

0-1 pkt

Suma liczb $0,3(7)$ i $0,(7)$ zapisana w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego to:

Odpowiedź: A ($\frac{52}{45}$)

Krok 1. Zapisanie liczby $0,3(7)$ w postaci ułamka zwykłego.

Procedura zamiany ułamków okresowych na zwykłe wygląda następująco:

$$x = 0,3(7) = 0,37777\ldots, 10x = 3,7777\ldots, 100x = 37,7777\ldots, 90x = 37,7777 - 0,3777 = 34$$

Skoro $90x = 34$, to: $x = \frac{34}{90}$. Jako x oznaczyliśmy sobie ułamek okresowy $0,3(7)$, zatem wiemy już, że $0,3(7) = \frac{34}{90}$.

Krok 2. Zapisanie liczby $0,(7)$ w postaci ułamka zwykłego.

Analogicznie jak w poprzedniej sytuacji:

$$x = 0,(7) = 0,7777\ldots, 10x = 7,7777\ldots, 9x = 7,7777 - 0,7777 = 7$$

Skoro $9x = 7$, to $x = \frac{7}{9}$. Jako x oznaczyliśmy sobie ułamek okresowy $0,(7)$, zatem wiemy już, że $0,(7) = \frac{7}{9}$.

Krok 3. Obliczenie sumy liczb.

Na sam koniec musimy dodać do siebie te dwie otrzymane wartości:

$$\frac{34}{90} + \frac{7}{9} = \frac{34}{90} + \frac{70}{90} = \frac{104}{90} = \frac{52}{45}$$

Zadanie 6

0-1 pkt

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej większej od 1 jej największy dzielnik będący liczbą pierwszą. Który zapis jest fałszywy?

Odpowiedź: D ($f(28) > 9$)

Krok 1. Wypisanie największych dzielników (będących liczbami pierwszymi) liczb, które znalazły się w odpowiedziach.

Patrząc się na odpowiedzi musimy ustalić jakie są największe dzielniki (będące liczbami pierwszymi) liczb 21, 22, 25 oraz 28.

Największym dzielnikiem liczby 21, który jest liczbą pierwszą, będzie 7.

Największym dzielnikiem liczby 22, który jest liczbą pierwszą, będzie 11.

Największym dzielnikiem liczby 25, który jest liczbą pierwszą, będzie 5.

Największym dzielnikiem liczby 28, który jest liczbą pierwszą, będzie 7.

Możemy więc zapisać, że:

$$f(21) = 7, f(22) = 11, f(25) = 5, f(28) = 7$$

Krok 2. Weryfikacja poprawności odpowiedzi.

Przeanalizujemy teraz każdą z odpowiedzi:

Odp. A. To prawda, bo $f(22) = 11$ oraz $f(28) = 7$.

Odp. B. To prawda, bo $f(21) = 7$ oraz $f(28) = 7$.

Odp. C. To prawda, bo $f(25) = 5$.

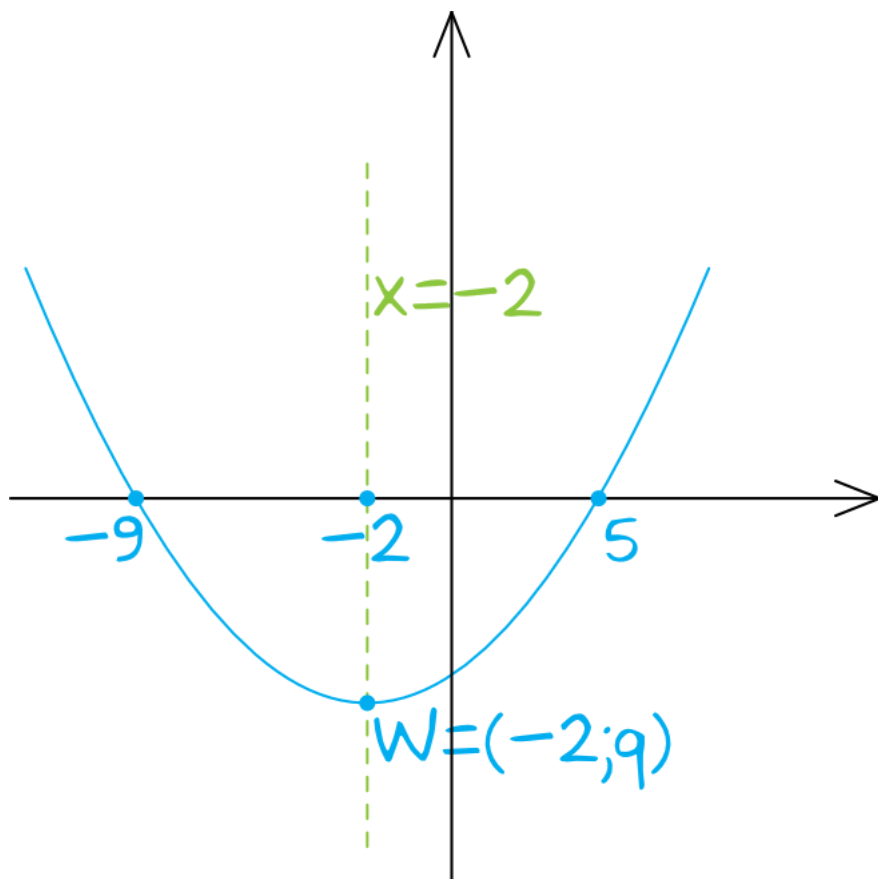
Odp. D. To nieprawda, bo $f(28) = 7$

Szukaliśmy fałszywego zapisu, zatem poprawna jest ostatnia odpowiedź.

Zadanie 7

0-1 pkt

Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{7}(x-5)(x+9)$ jest prosta o równaniu:



Odpowiedź: C ($x = -2$)

Krok 1. Wyznaczenie miejsc zerowych funkcji.

Wyznaczenie miejsc zerowych funkcji pomoże nam wyznaczyć współrzędną p wierzchołka paraboli $W = (p; q)$, przez którą będzie przechodzić poszukiwana oś symetrii.

Funkcja kwadratowa jest zapisana w postaci iloczynowej, co bardzo ułatwia nam obliczenia. Szukamy miejsc zerowych, czyli musimy tak naprawdę rozwiązać równanie kwadratowe:

$$\frac{1}{7}(x-5)(x+9) = 0$$

Aby wartość równania była równa 0, to któraś z wartości znajdujących się w nawiasach musi być równa 0, zatem:

$$x-5=0 \quad \vee \quad x+9=0, \quad x=5 \quad \vee \quad x=-9$$

Wyszło nam więc, że nasza funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x = -9$ oraz $x = 5$.

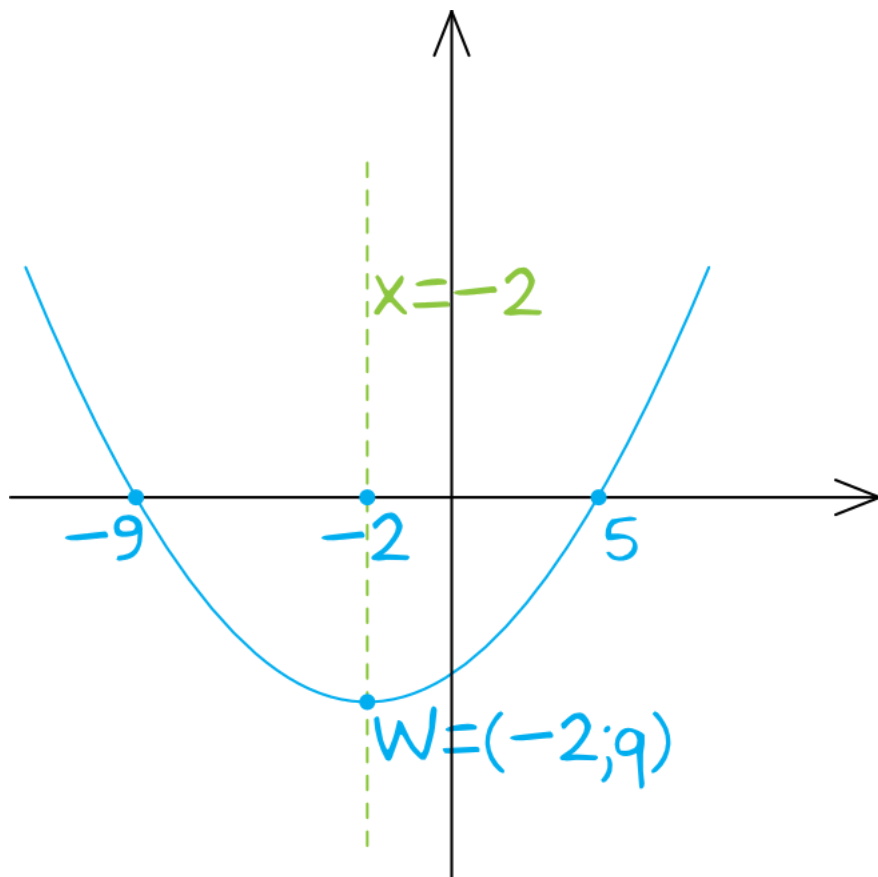
Krok 2. Wyznaczenie współrzędnej p wierzchołka paraboli.

Współrzędną wierzchołka p możemy wyliczyć na różne sposoby. Teoretycznie moglibyśmy nawet przekształcić wzór funkcji do postaci ogólnej i wtedy moglibyśmy skorzystać ze wzoru $p = \frac{-b}{2a}$. My skorzystamy tutaj z szybszej metody, bowiem współrzędna p wierzchołka paraboli jest zawsze dokładnie pośrodku między miejscami zerowymi. Możemy zatem zapisać, że:

$$p = \frac{-9+5}{2}, \quad p = \frac{-4}{2}, \quad p = -2$$

Krok 3. Wyznaczenie równania osi symetrii.

Oś symetrii to prosta, która przechodzi przez współrzędną p i która wygląda w ten sposób:

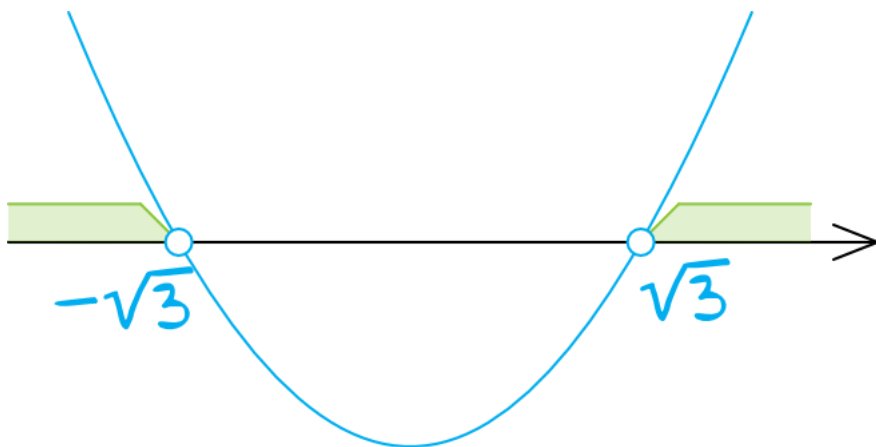


To oznacza, że osią symetrii będzie prosta o równaniu $x = -2$.

Zadanie 8

0-1 pkt

Funkcja liniowa $f(x) = (m^2 - 3)x + 2$ jest rosnąca wtedy, gdy:



Odpowiedź: B ($m \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$)

Krok 1. Zapisanie nierówności.

Aby funkcja liniowa była rosnąca, to współczynnik kierunkowy a musi być większy od 0. W naszym przypadku współczynnik a jest równy $m^2 - 3$, zatem musimy rozwiązać nierówność:

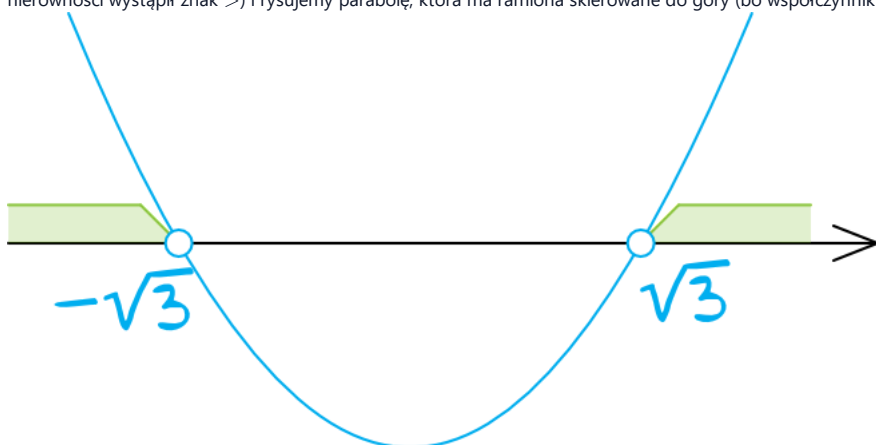
$$m^2 - 3 > 0$$

Krok 2. Rozwiązanie nierówności.

Naszym zadaniem jest teraz rozwiązanie powstałej nierówności kwadratowej. Tradycyjnie na początku musimy obliczyć miejsca zerowe wielomianu, przyrównując wartość $m^2 - 3$ do zera. Możemy to zrobić metodą delty (pamiętając, że w tej sytuacji współczynnik $b = 0$), ale w tym konkretnym przypadku możemy te miejsca zerowe wyznaczyć znacznie szybciej:

$$m^2 - 3 = 0, m^2 = 3, m = \sqrt{3} \vee m = -\sqrt{3}$$

Mając miejsca zerowe możemy przystąpić do rysowania paraboli. Zaznaczamy na osi wyznaczone przed chwilą miejsca zerowe (kropki będą niezamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $>$) i rysujemy parabolę, która ma ramiona skierowane do góry (bo współczynnik a jest dodatni).

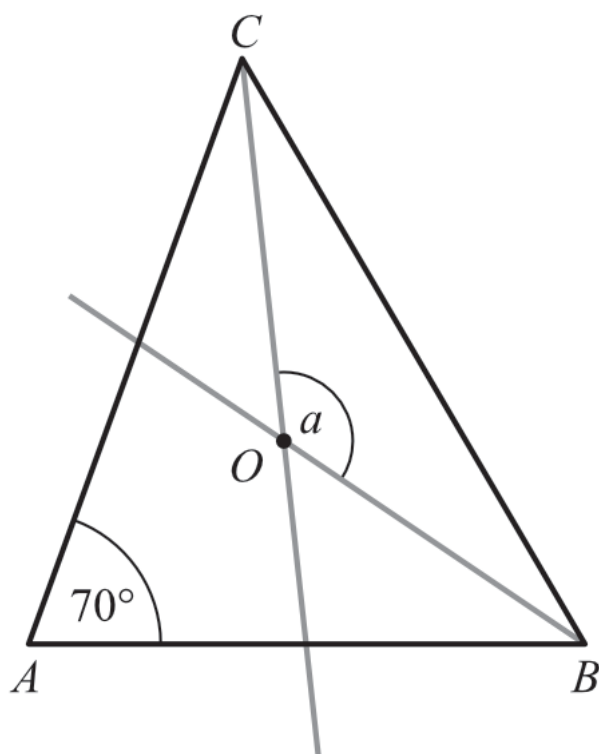


Interesują nas wartości większe od zera, czyli wszystko to, co znalazło się nad osią x-ów. Z rysunku jasno wynika, że rozwiązaniem naszej nierówności (a tym samym całego zadania) jest przedział $m \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.

Zadanie 9

0-1 pkt

W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $AC = BC$ poprowadzono dwusieczne kątów ABC i ACB . Dwusieczne te przecięły się w punkcie O (patrz rysunek).



Jeśli $|\angle BAC| = 70^\circ$, to miara kąta α jest równa:

Odpowiedź: D (125°)

Krok 1. Wyznaczenie miary kąta OBC .

Z treści zadania wynika, że nasz trójkąt jest równoramienny, a skoro tak, to kąty przy jego podstawie będą miały jednakową miarę. To z kolei oznacza, że kąt $|\angle ABC| = 70^\circ$. Przez ten kąt ABC poprowadzono dwusieczną kąta, zatem:

$$|\angle OBC| = 70^\circ : 2, |\angle OBC| = 35^\circ$$

Krok 2. Wyznaczenie miary kąta COB .

Skoro kąty przy podstawie mają po 70° , to:

$$|\angle ACB| = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$$

Przez ten kąt poprowadzono dwusieczną kąta, zatem:

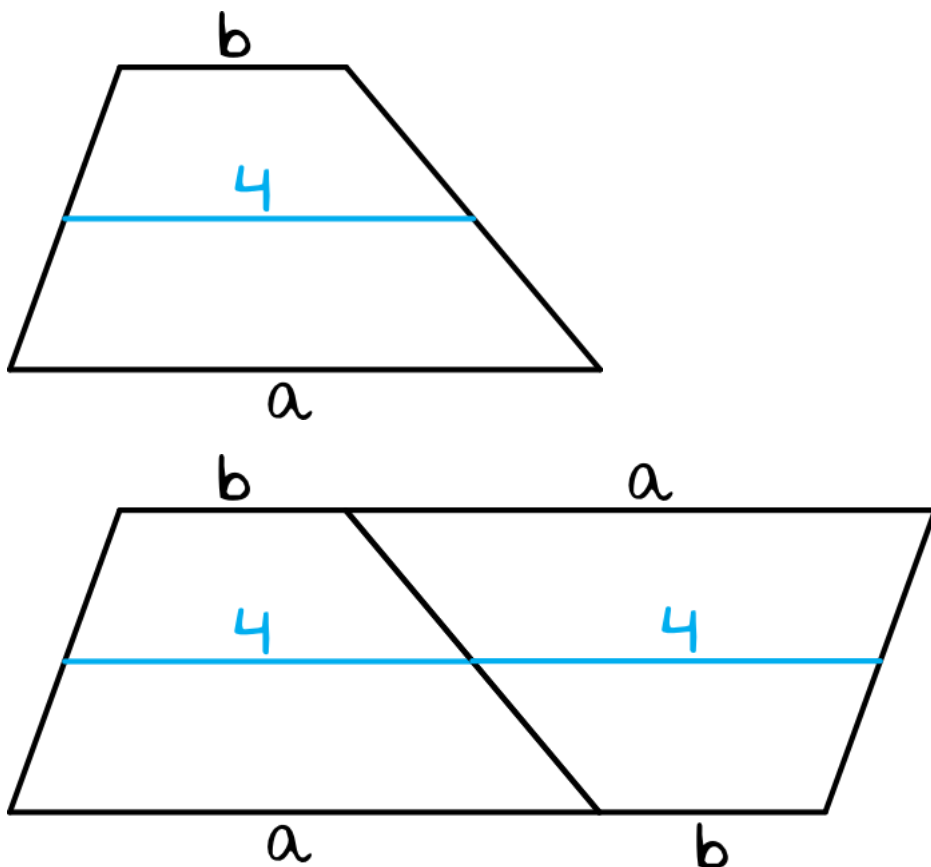
$$|\angle COB| = 40^\circ : 2, |\angle COB| = 20^\circ$$

Krok 3. Wyznaczenie miary kąta α .

Spójrzmy na trójkąt COB . Znamy już miary dwóch kątów w tym trójkącie, zatem:

$$\alpha = 180^\circ - 35^\circ - 20^\circ, \alpha = 125^\circ$$

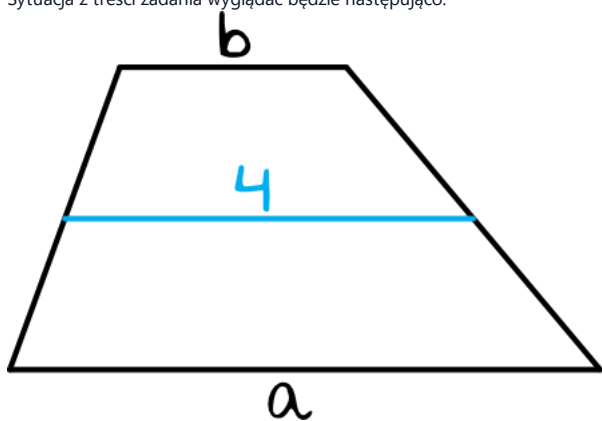
Pole trapezu, jest równe 20cm^2 , a odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 4cm . Wysokość tego trapezu jest równa:



Odpowiedź: A (5cm)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

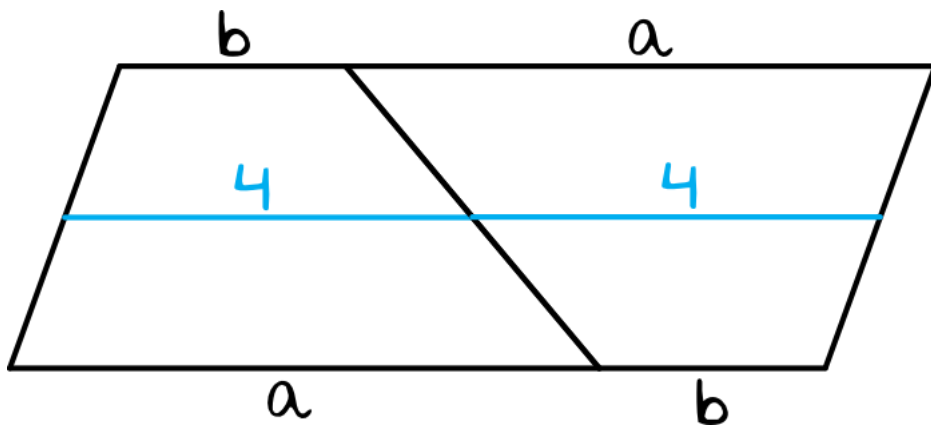
Sytuacja z treści zadania wyglądać będzie następująco:



Wskazany odcinek o długości 4cm łączy środki ramion trapezu. Z własności trapezów wynika, że długość łącząca środki trapezu jest równa połowie długości sumy dolnej i górnej podstawy, czyli że:

$$\frac{a+b}{2} = 4, \quad a+b = 8$$

Jeżeli jednak nie pamiętamy o tej własności (a nie ukrywajmy, jest ona bardzo specyficzna i rzadko wykorzystywana), to wystarczy dorysować sobie obok drugi (odwrócony) trapez i wtedy dostrzeżemy, że $a+b = 2 \cdot 4 = 8$.



Krok 2. Obliczenie wysokości trapezu.

Korzystając ze wzoru na pole trapezu i wiedząc, że $P = 20\text{cm}^2$ oraz że $a + b = 8$ możemy obliczyć wysokość trapezu:

$$P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h, 20 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h, 20 = 4 \cdot h, h = 5[\text{cm}]$$

Zadanie 11

0-1 pkt

Rozwiązaniem równania $(2x - 5)(3x + 2) = (3x + 2)(x + 5)$ są liczby:

Odpowiedź: A $(-\frac{2}{3}$ i $10)$

Nie możemy podzielić obydwu stron równania przez $(3x + 2)$, bo nie mamy pewności, że przypadkiem nie podzielimy tego równania przez 0. To równanie należy rozwiązać w następujący sposób:

$$(2x - 5)(3x + 2) = (3x + 2)(x + 5), (2x - 5)(3x + 2) - (3x + 2)(x + 5) = 0, (3x + 2) \cdot [(2x - 5) - (x + 5)] = 0, (3x + 2) \cdot [(2x - 5) - x - 5] = 0,$$

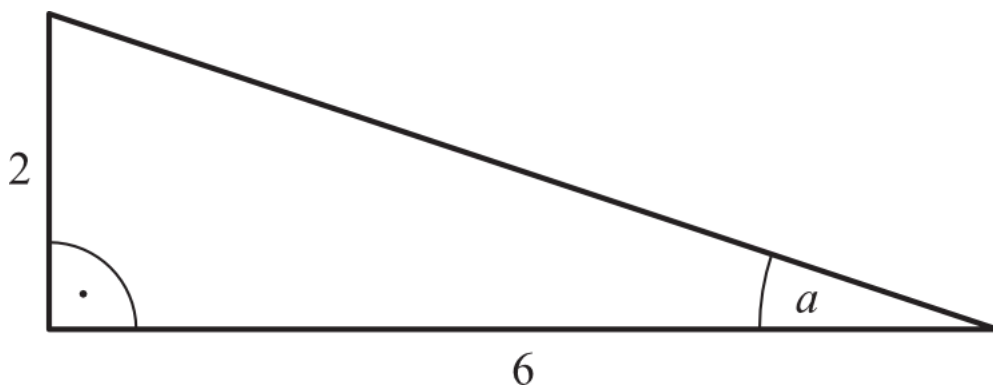
Powstało nam równanie kwadratowe w postaci iloczynowej. Aby to równanie było równe 0, to któryś z nawiasów musi nam to równanie wyzerować, zatem:

$$3x + 2 = 0 \quad \vee \quad x - 10 = 0, 3x = -2 \quad \vee \quad x = 10, x = -\frac{2}{3} \quad \vee \quad x = 10$$

Zadanie 12

0-1 pkt

W trójkącie przedstawionym na rysunku sinus kąta ostrego α jest równy:



Odpowiedź: D ($-\frac{\sqrt{10}}{10}$)

Krok 1. Obliczenie długości przeciwprostokątnej trójkąta.

Do obliczenia sinusa potrzebujemy poznać długość przeciwprostokątnej trójkąta, a poznamy ją korzystając z Twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad 2^2 + 6^2 = c^2, \quad 4 + 36 = c^2, \quad c^2 = 40, \quad c = \sqrt{40} \quad \vee \quad c = -\sqrt{40}$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, bo długość przeciwprostokątnej jest dodatnia. To oznacza, że $c = \sqrt{40}$, co po wyłączeniu czynnika przed znak pierwiastka możemy jeszcze zapisać jako:

$$c = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$$

Krok 2. Obliczenie wartości sinusa.

Sinus odpowiada stosunkowi długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej, zatem:

$$\sin \alpha = \frac{2}{2\sqrt{10}}, \quad \sin \alpha = 2 : 2\sqrt{10}, \quad \sin \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{10}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

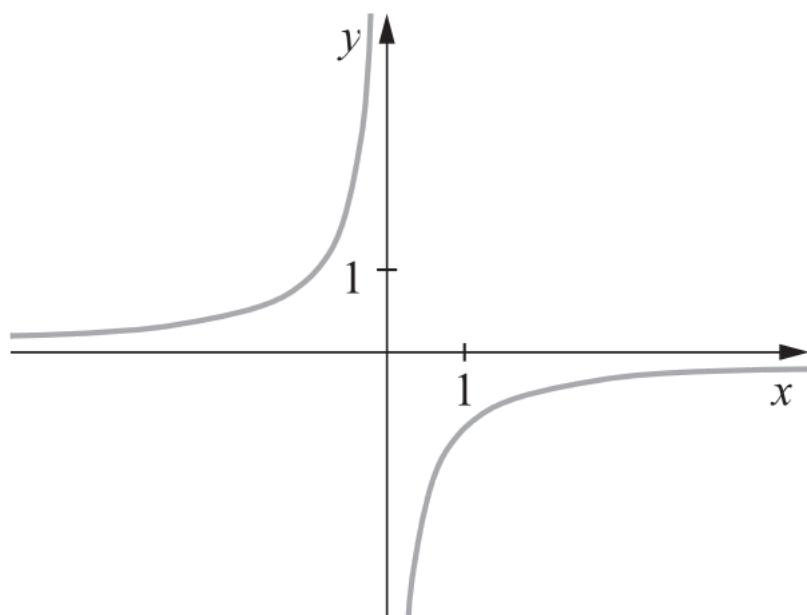
Nasz wynik jest już poprawny, ale aby dopasować się do odpowiedzi musimy jeszcze usunąć niewymierność z mianownika, mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{10}$:

$$\sin \alpha = \frac{1 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Zadanie 13

0-1 pkt

Funkcja, której wykres przedstawiono na rysunku jest rosnąca:



Odpowiedź: D (w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$)

Na rysunku mamy przedstawioną jedną z form wykresu funkcji typu $f(x) = \frac{a}{x}$ (tak zwana proporcjonalność odwrotna). Ten wykres nazywamy hiperbolą. Na rysunku widzimy wyraźnie, że funkcja jest rosnąca zarówno w swoim pierwszym fragmencie, jak i drugim. To oznacza, że funkcja jest rosnąca zarówno w przedziale $(-\infty, 0)$ jak i $(0, +\infty)$.

Zadanie 14

0-1 pkt

Szósty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy zero. Suma jedenastu wyrazów tego ciągu ma wartość:

Odpowiedź: A (0)

Krok 1. Rozpisanie wartości pierwszego wyrazu.

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego możemy zapisać, że:

$$a_6 = a_1 + 5r, \text{ czyli: } a_1 = a_6 - 5r$$

Skoro a_6 jest równe 0, to wychodzi nam, że:

$$a_1 = 0 - 5r, a_1 = -5r$$

Krok 2. Obliczenie sumy jedenastu pierwszych wyrazów tego ciągu.

Korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego możemy zapisać, że:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n, S_{11} = \frac{2a_1 + (11-1)r}{2} \cdot 11, S_{11} = \frac{2 \cdot (-5r) + 10r}{2} \cdot 11, S_{11} = \frac{-10r + 10r}{2} \cdot 11, S_{11} = \frac{0}{2} \cdot 11, S_{11} = 0$$

Zadanie 15

0-1 pkt

W ciągu geometrycznym, który ma sześć wyrazów, dane są $a_3 = \frac{1}{2}$ i $a_6 = \frac{1}{16}$. Zatem:

Odpowiedź: C ($a_2 = 1$)

Krok 1. Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego.

Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego wiemy, że:

$$a_6 = a_3 \cdot q^3$$

Podstawiając do powyższego wzoru dane z treści zadania otrzymamy:

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot q^3 \quad / : \cdot 2, \quad q^3 = \frac{1}{8}, \quad q = \frac{1}{2}$$

Krok 2. Obliczenie wartości drugiego wyrazu ciągu geometrycznego.

Patrząc się na odpowiedzi widzimy, że szukamy wartości drugiego wyrazu. Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego wiemy, że:

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

Skoro $a_3 = \frac{1}{2}$ oraz $q = \frac{1}{2}$, to:

$$\frac{1}{2} = a_2 \cdot \frac{1}{2} \quad / : \cdot 2, \quad a_2 = 1$$

Zadanie 16

0-1 pkt

Sześciu robotników wykonało pewną pracę w ciągu 6 godzin i 20 minut. Ośmiu robotników pracujących z taką samą wydajnością wykona tę samą pracę w ciągu:

Odpowiedź: B (4 godzin i 45 minut)

Wbrew pozorom nie można tego zadania rozwiązać tak jak rozwiązujemy standardowe proporcje. W tym zadaniu mamy do czynienia z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Jak więc to powinniśmy rozwiązać? Wiemy, że 6 robotników wykonuje pracę w ciągu 6 godzin i 20 minut, czyli w ciągu 380 minut. To oznacza, że łączny czas pracy wszystkich pracowników jest równy:

$$6 \cdot 380 \text{ minut} = 2280 \text{ minut}$$

Otrzymaliśmy informację, że gdybyśmy mieli zatrudnionego tylko jednego robotnika, to wykonałby on pracę w 2280 minut. Skoro mamy mieć ośmiu robotników (a czas pracy rozłoży się równo na każdą z tych osób), to praca zostanie wykonana osiem razy szybciej czyli w:

$$2280 \text{ minut} : 8 = 285 \text{ minut}$$

Musimy jeszcze zamienić minuty na godziny. 285 minut to 4 godziny i 45 minut i taka też jest poszukiwana przez nas odpowiedź.

Zadanie 17

0-1 pkt

Stosunek obwodów dwóch sześciokątów foremnych wynosi $\frac{3}{4}$ a długość boku większego z nich jest równa 12cm . Mniejszy sześciokąt foremny ma bok długości:

Odpowiedź: D (9cm)

Z treści zadania wynika, że skala podobieństwa dwóch figur jest równa $k = \frac{3}{4}$. Skoro więc bok większego sześciokąta foremnego ma długość 12cm , to bok mniejszego sześciokąta (oznaczymy go sobie jako a) będzie mieć długość:

$$a = k \cdot 12\text{cm}, \quad a = \frac{3}{4} \cdot 12\text{cm}, \quad a = 9\text{cm}$$

Zadanie 18

0-1 pkt

Funkcję $f(x)$ przesunięto wzdłuż osi układu współrzędnych, otrzymując funkcję o wzorze $g(x) = f(x + 4)$. Wobec tego funkcję $f(x)$ przesunięto o:

Odpowiedź: C (4 jednostki w lewo)

Z działu dotyczącego przekształceń wykresów funkcji wiemy, że zwiększając wartość argumentu x o jakąś wartość, otrzymamy przesunięcie funkcji w lewo (to jest ten mniej intuicyjny przypadek przesunąć w lewo/prawo). Zapis typu $f(x + 4)$ oznacza więc przesunięcie funkcji $f(x)$ o 4 jednostki w lewo.

Zadanie 19

0-1 pkt

Równanie $\frac{x^2-9}{x-3} = 0$:**Odpowiedź: B (ma dokładnie jedno rozwiązanie)**

Krok 1. Wprowadzenie założeń do zadania.

Z racji tego, iż na matematyce nie istnieje dzielenie przez 0, to wartość w mianowniku musi być różna od 0. To oznacza, że:

$$x - 3 \neq 0, x \neq 3$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.

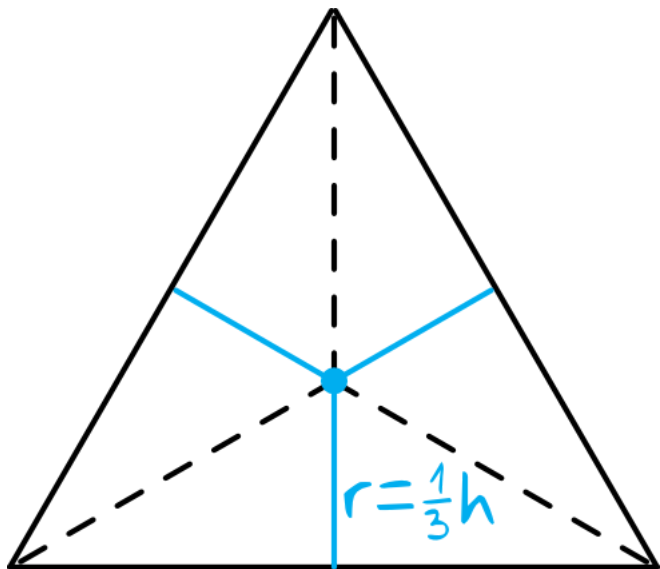
Teraz bez przeszkód możemy przejść do obliczeń, a całość najprościej będzie po prostu wymnożyć przez $x - 3$, otrzymując:

$$\frac{x^2-9}{x-3} = 0 \quad / \cdot (x-3), \quad x^2-9 = 0, \quad x^2 = 9, \quad x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

Krok 3. Weryfikacja otrzymanego wyniku.

Musimy jeszcze sprawdzić, czy nasze rozwiązanie jest zgodne z założeniami. Okazuje się, że jedno z rozwiązań, a konkretnie $x = 3$, musimy odrzucić właśnie ze względu na założenia. To oznacza, że to równanie ma tylko jedno rozwiązanie i jest nim $x = -3$.

Bok trójkąta równobocznego ma długość 8 cm . Odległość środka ciężkości tego trójkąta od jego boków jest równa:



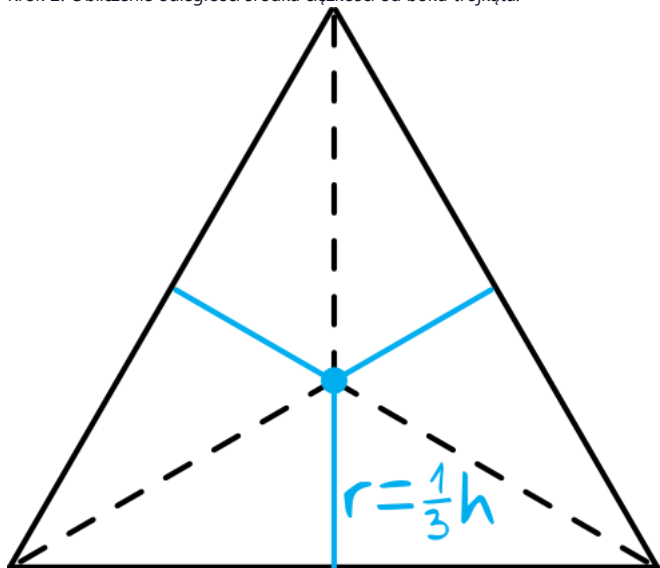
Odpowiedź: B ($\frac{4\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$)

Krok 1. Obliczenie wysokości trójkąta równobocznego.

Trójkąt równoboczny o boku 8 cm ma wysokość o długości:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, h = \frac{8\sqrt{3}\text{ cm}}{2}, h = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

Krok 2. Obliczenie odległości środka ciężkości od boku trójkąta.



Środek ciężkości to tak naprawdę miejsce przecięcia się wszystkich wysokości trójkąta równobocznego. Z własności trójkątów równobocznych wiemy, że odległość od takiego punktu do boku trójkąta jest równa $\frac{1}{3}h$, zatem:

$$x = \frac{1}{3}h, x = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3}\text{ cm}, x = \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$$

Zadanie 21

0-1 pkt

Mediana uporządkowanego zestawu danych: 4, 6, a , b , 8, 9 wynosi 7, 5. Brakującymi wartościami a i b mogą być:

Odpowiedź: D ($a = 7, b = 8$)

Wiemy, że nasz zestaw danych jest uporządkowany. Zestaw ma parzystą ilość wyrazów, zatem medianą będzie średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów. W tym przypadku środkowymi wyrazami są właśnie a oraz b . Wiemy, że mediana musi być równa 7, 5, zatem:

$$\frac{a+b}{2} = 7,5, \quad a+b = 15$$

To oznacza, że szukamy takich liczb a oraz b , których suma daje wynik równy 15 (biorąc oczywiście pod uwagę fakt, że jedna i druga liczba musi być większa lub równa 6 i mniejsza lub równa 8). Pasującą parą liczb będzie w takim razie ta z ostatniej odpowiedzi, czyli $a = 7, b = 8$ bo tylko tutaj suma liczb jest równa 15.

Zadanie 22

0-1 pkt

Przekątna sześcianu ma długość 6cm . Objętość tego sześcianu jest równa:

Odpowiedź: A ($24\sqrt{3}\text{cm}^3$)

Krok 1. Obliczenie długości krawędzi sześcianu.

Sześcian o krawędzi a ma przekątną o długości $s = a\sqrt{3}$. Wiemy, że przekątna naszego sześcianu ma długość 6cm , zatem:

$$a\sqrt{3} = 6, \quad a = \frac{6}{\sqrt{3}}, \quad a = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}, \quad a = \frac{6\sqrt{3}}{3}, \quad a = 2\sqrt{3}[\text{cm}]$$

Krok 2. Obliczenie objętości sześcianu.

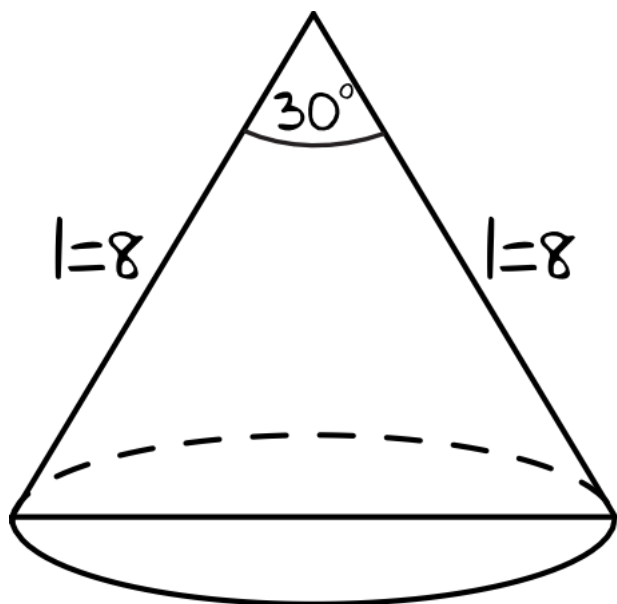
Wiedząc, że $a = 2\sqrt{3}\text{cm}$ możemy bez przeszkód obliczyć objętość tego sześcianu:

$$V = a^3, \quad V = (2\sqrt{3})^3, \quad V = 2^3 \cdot \sqrt{3}^3, \quad V = 8 \cdot 3\sqrt{3}, \quad V = 24\sqrt{3}[\text{cm}^3]$$

Zadanie 23

0-1 pkt

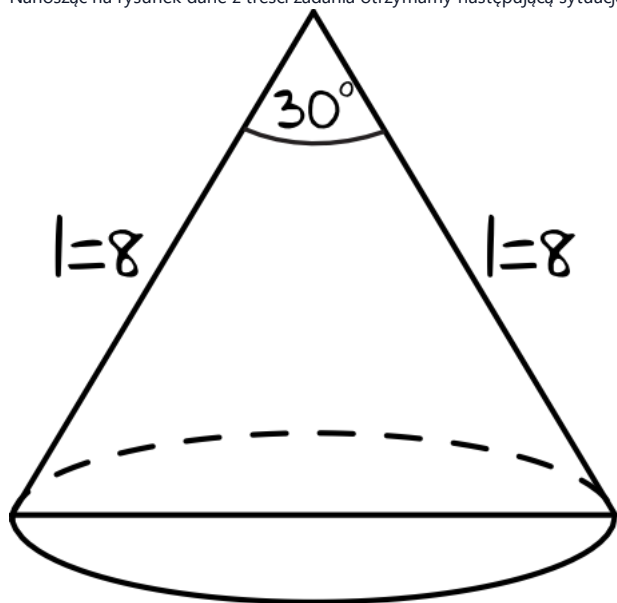
Kąt rozwarcia stożka jest równy 30° , a tworząca tego stożka ma długość 8 cm . Pole przekroju osiowego tego stożka wynosi:



Odpowiedź: C (16 cm^2)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanosząc na rysunek dane z treści zadania otrzymamy następującą sytuację:



Krok 2. Obliczenie pola przekroju osiowego.

Na rysunku widzimy, że w przekroju osiowym mamy trójkąt równoramienny w którym ramiona mają długość 8. Kąt między tymi ramionami ma miarę 30° . Chcąc więc obliczyć pole tego trójkąta możemy skorzystać ze sprytnego wzoru na pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha, \quad P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ, \quad P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}, \quad P = 16[\text{cm}^2]$$

Zadanie 24

0-1 pkt

Trzycyfrowy kod aktywacyjny bramy wejściowej ma następującą postać: litera, cyfra, litera. Litera jest wybierana spośród 24 liter alfabetu i może się w kodzie powtarzać, a cyfra jest dowolna. Ile różnych kodów można w ten sposób utworzyć?

Odpowiedź: C (5760)

Ustalmy na ile różnych sposobów możemy uzupełnić każdą z cyfr kodu aktywacyjnego.

- Na pierwszym miejscu może znaleźć się jedna z 24 liter. Mamy więc 24 możliwości uzupełnienia pierwszej cyfry kodu.
- Na drugim miejscu może znaleźć się jedna z 10 cyfr (od 0 do 9). Mamy więc 10 możliwości uzupełnienia drugiej cyfry kodu.
- Na trzecim miejscu może znaleźć się jedna z 24 liter. Mamy więc 24 możliwości uzupełnienia trzeciej cyfry kodu.

To oznacza, że zgodnie z regułą mnożenia wszystkich możliwych kodów będziemy mieć:

$$|A| = 24 \cdot 10 \cdot 24 = 5760$$

Zadanie 25

0-1 pkt

Rzucono 10 razy standardową sześcienną kostką do gry. Średnia arytmetyczna liczb oczek uzyskanych w pierwszych 6 rzutach była równa 3,5, a średnia arytmetyczna liczb oczek uzyskanych w kolejnych 4 rzutach to 4,5. Średnia arytmetyczna liczb oczek w 10 rzutach wynosi:

Odpowiedź: C (3,9)

Krok 1. Obliczenie sumy oczek w pierwszych sześciu rzutach.

Skoro średnia arytmetyczna pierwszych sześciu rzutów jest równa 3,5, to suma wszystkich oczek jakie wypadły w tych rzutach będzie równa:

$$6 \cdot 3,5 = 21$$

Krok 2. Obliczenie sumy oczek w ostatnich czterech rzutach.

Skoro średnia arytmetyczna ostatnich czterech rzutów jest równa 4,5, to suma wszystkich oczek jakie wypadły w tych rzutach będzie równa:

$$4 \cdot 4,5 = 18$$

Krok 3. Obliczenie średniej arytmetycznej wszystkich rzutów.

Z informacji obliczonych w pierwszym i drugim kroku wynika, że w dziesięciu rzutach wyrzuciliśmy $21 + 18 = 39$ oczek. To oznacza, że średnia arytmetyczna liczby oczek jest równa:

$$\bar{s} = \frac{39}{10}, \bar{s} = 3,9$$

Zadanie 26

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $2^{13} \cdot x - 3 \cdot 4^6 < 8^4(3x - 5)$.

Odpowiedź: $x \in (2; +\infty)$

Korzystając z działań na potęgach możemy zapisać, że:

$$2^{13} \cdot x - 3 \cdot 4^6 < 8^4(3x - 5), \quad 2^{13} \cdot x - 3 \cdot (2^2)^6 < (2^3)^4 \cdot (3x - 5), \quad 2^{13} \cdot x - 3 \cdot 2^{12} < 2^{12} \cdot (3x - 5) \quad \Bigg/ : 2^{12}, \quad \frac{2^{13} \cdot x}{2^{12}} - 3 < 3x - 5, \quad 2x - 3 < 3x - 5,$$

Pamiętaj, że mnożąc lub dzieląc nierówność przez liczbę ujemną należy zmienić znak nierówności na przeciwny, tak jak przy tym ostatnim przekształceniu.

To oznacza, że rozwiązaniem nierówności jest $x > 2$, co możemy jeszcze zapisać jako $x \in (2; +\infty)$.

Zadanie 27

0-2 pkt

Na trójkącie o bokach długości $\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{10}$ opisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu.

Odpowiedź: $\left(r = \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

Krok 1. Dostrzeżenie tego, iż jest to trójkąt prostokątny.

Powinniśmy dostrzec, że trójkąt o wskazanych bokach jest trójkątem prostokątnym. Przeciwprostokątną takiego trójkąta jest najdłuższy bok, czyli w tym przypadku $\sqrt{15}$. To, że jest to trójkąt prostokątny możemy udowodnić z Twierdzenia Pitagorasa.

$$\sqrt{5}^2 + \sqrt{10}^2 = \sqrt{15}^2, \quad 5 + 10 = 15, \quad 15 = 15, \quad L = P$$

Skoro lewa strona jest równa prawej, to możemy być pewni, że ten trójkąt jest jak najbardziej prostokątny.

Krok 2. Obliczenie długości promienia okręgu.

Okrąg opisany na trójkącie prostokątnym ma pewną specyficzną własność. Długość średnicy takiego okręgu jest zawsze równa długości przeciwprostokątnej trójkąta. My wiemy, że nasza przeciwprostokątna ma długość $\sqrt{15}$, zatem średnica okręgu będzie równa $d = \sqrt{15}$. Nas interesuje poznanie długości promienia, a skoro promień jest zawsze dwa razy krótszy od średnicy, to:

$$r = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Zadanie 28

0-2 pkt

Sprawdź, czy punkty $A = (-2, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (2\sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$ są współliniowe.

Odpowiedź: Punkty są współlinio

Krok 1. Wyznaczenie równania prostej AB .

Znając współrzędne punktów A oraz B możemy bez problemów wyznaczyć równanie prostej, która przez te punkty przechodzi. Możemy w tym celu skorzystać z długiego wzoru dostępnego w tablicach maturalnych lub też możemy zbudować odpowiedni układ równań. Podstawiając do postaci $y = ax + b$ współrzędne punktów A oraz B otrzymamy:

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \\ 5 = 2a + b \end{cases},$$

Odejmując te równania stronami otrzymamy:

$$-2 = -4a, \quad a = \frac{1}{2}$$

Znamy już wartość współczynnika a . Wartość współczynnika b obliczymy podstawiając do dowolnego równania (np. drugiego) wyznaczoną przed chwilą wartość $a = \frac{1}{2}$. Otrzymamy zatem:

$$5 = 2a + b, \quad 5 = 2 \cdot \frac{1}{2} + b, \quad 5 = 1 + b, \quad b = 4$$

Mamy już obliczone wartości obydwu współczynników, zatem możemy zapisać, że równaniem prostej przechodzącej przez punkty A oraz B będzie $y = \frac{1}{2}x + 4$.

Krok 2. Sprawdzenie, czy punkt C leży na prostej AB .

Musimy teraz sprawdzić, czy punkt C leży na prostej AB . Jeżeli tak, to rzeczywiście wszystkie wskazane punkty są współliniowe. Podstawmy zatem do równania prostej AB współrzędne punktu C , czyli $x = 2\sqrt{2}$ oraz $y = 4 + \sqrt{2}$:

$$y = \frac{1}{2}x + 4, \quad 4 + \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} + 4, \quad 4 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 4, \quad L = P$$

Lewa strona jest równa stronie prawej, a to oznacza, że punkt C leży na prostej AB . Wniosek z tego płynie taki, że wszystkie trzy punkty są współliniowe i leżą na prostej $y = \frac{1}{2}x + 4$.

Zadanie 29

0-2 pkt

Uzasadnij, że równanie $x^2 + (a - 1)x - a = 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

Odpowiedź: Udowodniono obliczając

Krok 1. Obliczenie delty.

Liczba rozwiązań równania kwadratowego jest zależna od wartości delty. Spróbujmy zatem ją policzyć, tak jak robimy to przy rozwiązywaniu standardowego równania kwadratowego:

Współczynniki: $a = 1$, $b = a - 1$, $c = -a$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) = a^2 - 2a + 1 + 4a = a^2 + 2a + 1$$

Krok 2. Interpretacja otrzymanej delty.

Delta wyszła nam równa $a^2 + 2a + 1$. Powinniśmy dostrzec, że tę postać da się "zwinąć" przy użyciu wzorów skróconego mnożenia do postaci $(a + 1)^2$.

Z racji tego, iż każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu daje wynik dodatni lub równy zero, to możemy być pewni, że $(a + 1)^2$ jest na pewno większe lub równe zero. Z naszej analizy wynika więc, że delta jest zawsze większa lub równa zero, a skoro tak, to równanie kwadratowe zawsze będzie mieć dwa lub jedno rozwiązanie. W ten sposób udowodniliśmy, że to równanie ma zawsze przynajmniej jedno rozwiązanie.

Zadanie 30

0-2 pkt

Suma długości boku kwadratu i jego przekątnej jest równa 1. Oblicz długość przekątnej tego kwadratu. Wynik zapisz w postaci $a + b\sqrt{c}$.

Odpowiedź: $d = 2 - \sqrt{2}$

Krok 1. Ułożenie równania.

Z własności kwadratów wiemy, że kwadrat o boku a ma przekątną o długości $a\sqrt{2}$. Skoro suma długości boku i przekątnej jest równa 1, to możemy ułożyć następujące równanie:

$$a + a\sqrt{2} = 1$$

Krok 2. Obliczenie długości boku kwadratu.

Rozwiązanie naszego równania zaczynamy od wyłączenia wspólnego czynnika przed nawias:

$$a + a\sqrt{2} = 1, a \cdot (1 + \sqrt{2}) = 1, a = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Teraz musimy pozbyć się niewymierności z mianownika. Aby pozbyć się tej niewymierności to musimy licznik oraz mianownik pomnożyć przez $1 - \sqrt{2}$, dzięki czemu w mianowniku skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Całość będzie wyglądać następująco:

$$a = \frac{1 \cdot (1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2})}, a = \frac{1 - \sqrt{2}}{1^2 - \sqrt{2}^2}, a = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2}, a = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1}, a = -1 + \sqrt{2}, a = \sqrt{2} - 1$$

Krok 3. Obliczenie długości przekątnej kwadratu.

Wiemy już, że nasz kwadrat ma bok o długości $a = \sqrt{2} - 1$, zatem przekątna tego kwadratu będzie miała długość:

$$d = a\sqrt{2}, d = (\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{2}, d = 2 - \sqrt{2}$$

Zadanie 31

0-2 pkt

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba oczek w drugim rzucie jest o dwa większa od liczby oczek w pierwszym rzucie.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{9}$

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Każdy rzut kostką to możliwość otrzymania jednego z sześciu wyników. Takich rzutów wykonujemy dwa. To oznacza, że zgodnie z regułą mnożenia liczba zdarzeń elementarnych będzie równa:

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Zdarzeniem sprzyjającym są sytuacje w których liczba oczek w drugim rzucie jest o dwa większa od liczby oczek w pierwszym rzucie. Wypiszmy zatem te możliwości, bo nie jest ich wiele:

$$(1; 3), (2; 4), (3; 5), (4; 6)$$

Widzimy, że są tylko cztery interesujące nas przypadki. W związku z tym zdarzeń sprzyjających mamy $|A| = 4$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Zadanie 32

0-4 pkt

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = -4$. Jeśli pierwszą i drugą liczbę powiększymy o 3, a trzecią powiększymy o 4, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz liczby tworzące ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny.

**Odpowiedź: Ciąg arytmetyczny: **

Krok 1. Zapisanie wyrazów ciągu arytmetycznego.

Z treści zadania wynika, że różnica ciągu arytmetycznego jest równa $r = -4$. Skoro tak, to możemy zapisać, że:

Pierwszy wyraz ciągu arytm.: a_1

Drugi wyraz ciągu arytm.: $a_1 - 4$

Trzeci wyraz ciągu arytm.: $a_1 - 2 \cdot 4 = a_1 - 8$

Krok 2. Zapisanie wyrazów ciągu geometrycznego.

Zgodnie z treścią zadania możemy zapisać, że:

Pierwszy wyraz ciągu geom.: $a_1 + 3$

Drugi wyraz ciągu geom.: $a_1 - 4 + 3 = a_1 - 1$

Trzeci wyraz ciągu geom.: $a_1 - 8 + 4 = a_1 - 4$

Krok 3. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu.

W ciągu geometrycznym dla trzech kolejnych wyrazów zachodzi następująca równość:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Podstawiając zapisane przed chwilą wyrazy ciągu geometrycznego otrzymamy:

$$(a_1 - 1)^2 = (a_1 + 3) \cdot (a_1 - 4), \quad a_1^2 - 2a_1 + 1^2 = a_1^2 - 4a_1 + 3a_1 - 12, \quad -2a_1 + 1 = -a_1 - 12, \quad -a_1 = -13, \quad a_1 = 13$$

Krok 4. Obliczenie wartości wyrazów ciągu arytmetycznego oraz geometrycznego.

Korzystając z oznaczeń, które zapisaliśmy sobie w pierwszym i drugim kroku otrzymamy:

Pierwszy wyraz ciągu arytm.: 13

Drugi wyraz ciągu arytm.: $13 - 4 = 9$

Trzeci wyraz ciągu arytm.: $13 - 8 = 5$

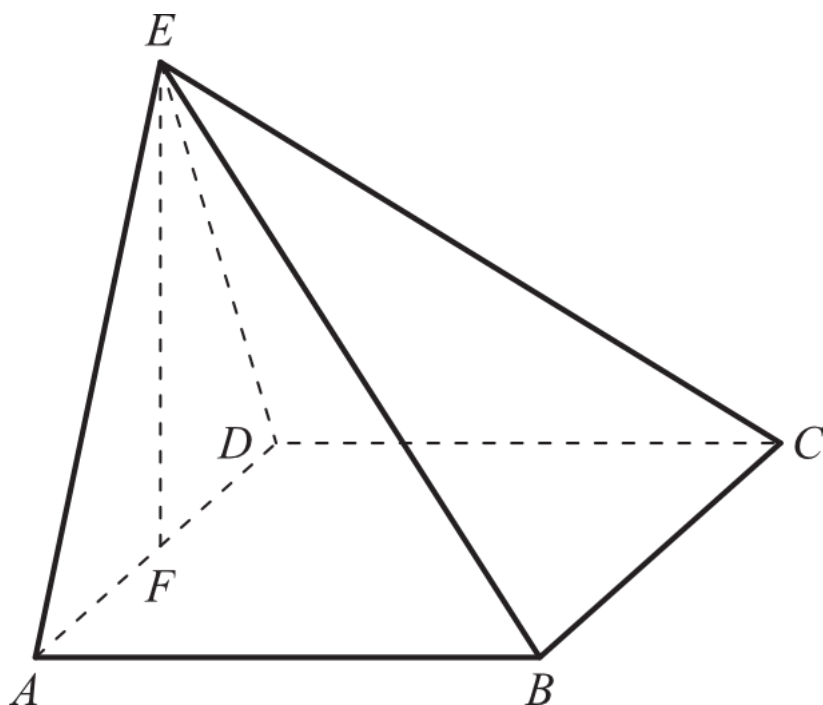
Pierwszy wyraz ciągu geom.: $13 + 3 = 16$

Drugi wyraz ciągu geom.: $13 - 1 = 12$

Trzeci wyraz ciągu geom.: $13 - 4 = 9$

Możemy więc powiedzieć, że ciąg arytmetyczny tworzą liczby 13, 9, 5, a ciąg geometryczny tworzą liczby 16, 12, 9.

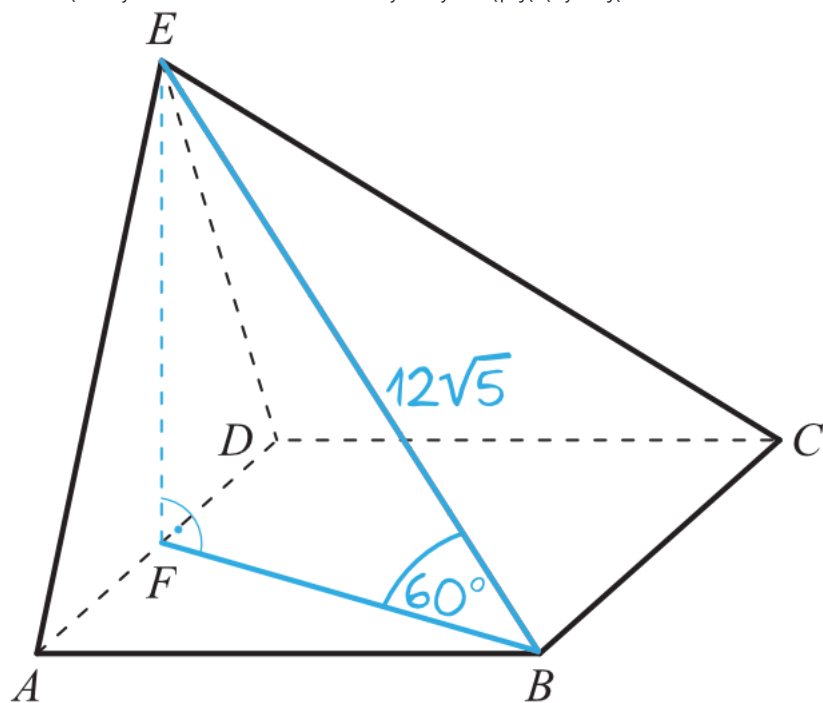
Podstawą ostrosłupa $ABCDE$ jest kwadrat, a spodek F wysokości EF ostrosłupa jest środkiem krawędzi AD (patrz rysunek). Ponadto wiadomo, że każda z dwóch dłuższych krawędzi bocznych tego ostrosłupa ma długość $12\sqrt{5}\text{ cm}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Odpowiedź: $V=288\sqrt{15}\text{ cm}^3$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

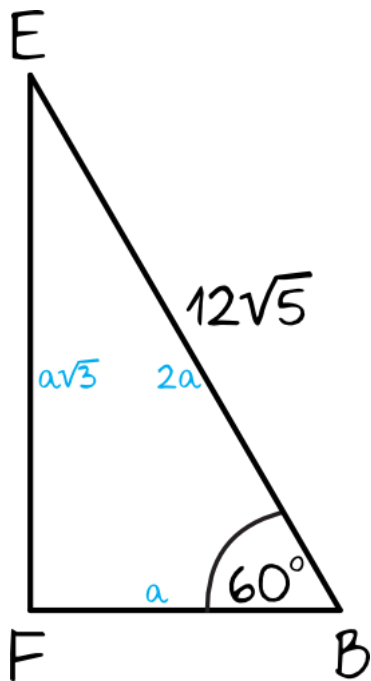
Nanosząc na rysunek dane z treści zadania otrzymamy następującą sytuację:



Tutaj kluczowy staje się trójkąt EFB , który jest trójkątem prostokątnym, a dokładniej rzecz ujmując jest to trójkąt prostokątny o kątach 30° , 60° , 90° .

Krok 2. Obliczenie długości odcinków FB oraz EF .

Spójrzmy na nasz trójkąt EFB . Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $12\sqrt{5}$. Za pomocą funkcji trygonometrycznych lub też własności trójkątów o kątach 30° , 60° , 90° jesteśmy w stanie wyznaczyć pozostałe boki tego trójkąta. Spróbujmy może skorzystać z własności takich trójkątów i zacznijmy od wyznaczenia długości odcinka FB .



Zgodnie z własnościami trójkątów o kątach 30° , 60° , 90° , odcinek FB jest dwukrotnie krótszy od przeciwprostokątnej, zatem:

$$FB = 12\sqrt{5} : 2, \quad FB = 6\sqrt{5}$$

Teraz wyznaczmy długość odcinka EF (która jest jednocześnie wysokością naszego ostrosłupa). Ją moglibyśmy wyznaczyć nawet z Twierdzenia Pitagorasa, ale trzymając się własności trójkątów o kątach 30° , 60° , 90° wiemy, że ten odcinek będzie $\sqrt{3}$ razy większy od przyprostokątnej FB . W związku z tym:

$$EF = 6\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}, \quad EF = 6\sqrt{15}$$

Skoro odcinek EF jest wysokością ostrosłupa, to możemy od razu zapisać, że $H = 6\sqrt{15}$.

Krok 3. Obliczenie długości krawędzi podstawy.

Spójrzmy na trójkąt ABF . Na pewno jest to trójkąt prostokątny, bo kąt FAB jest kątem kwadratu znajdującego się w podstawie.

Znamy długość przeciwprostokątnej tego trójkąta, czyli $FB = 6\sqrt{5}$. Jeżeli odcinek AB oznaczmy jako a , to odcinek AF będziemy mogli zapisać jako $\frac{1}{2}a$. W związku z tym zgodnie z Twierdzeniem Pitagorasa otrzymamy:

$$a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = (6\sqrt{5})^2, \quad a^2 + \frac{1}{4}a^2 = 36 \cdot 5, \quad \frac{5}{4}a^2 = 180, \quad a^2 = 144, \quad a = 12 \quad \vee \quad a = -12$$

Ujemną długość oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $a = 12$.

Krok 4. Obliczenie objętości ostrosłupa.

Wiemy już, że w podstawie ostrosłupa jest kwadrat o boku $a = 12$, a wysokość ostrosłupa to $H = 6\sqrt{15}$. Znając te dane możemy przystąpić do liczenia objętości:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H, \quad V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H, \quad V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 6\sqrt{15}, \quad V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 6\sqrt{15}, \quad V = 48 \cdot 6\sqrt{15}, \quad V = 288\sqrt{15}[\text{cm}^3]$$

W gospodarstwie ogrodniczym zapakowano 480 róż do pewnej liczby kartonów. Gdyby jednak do każdego kartonu włożono o 3 róże mniej, to do zapakowania tej samej ilości róż należałoby użyć o 8 kartonów więcej. Do ilu kartonów zapakowano pierwotnie róże i ile róż było w każdym kartonie?

**Odpowiedź: Róże zapakowano do **

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

Wprowadźmy sobie do zadania proste oznaczenia:

x - liczba róż w pojedynczym kartonie

y - liczba kartonów

Wiemy, że zapakowano 480 róż, zatem możemy zapisać, że:

$$x \cdot y = 480$$

Dodatkowo wiemy, że gdyby do kartonu włożono o 3 róże mniej, to trzeba byłoby użyć 8 kartonów więcej, czyli:

$$(x - 3)(y + 8) = 480$$

Krok 2. Zapisanie i rozwiązanie układu równań

Z dwóch zapisanych równań w poprzednim kroku możemy zbudować następujący układ równań.

$$\begin{cases} x \cdot y = 480 \\ (x - 3)(y + 8) = 480 \end{cases}$$

Ten układ równań najszybciej rozwiążemy metodą podstawiania, wyznaczając np. wartość x z pierwszego równania:

$$\begin{cases} x = \frac{480}{y} \\ (x - 3)(y + 8) = 480 \end{cases}$$

Podstawiając teraz pierwsze równanie do drugiego otrzymamy:

$$\left(\frac{480}{y} - 3\right)(y + 8) = 480, \quad \cancel{480} + \frac{3840}{y} - 3y - 24 = \cancel{480}, \quad -3y - 24 + \frac{3840}{y} = 0 \quad \bigg/ \cdot y, \quad -3y^2 - 24y + 3840 = 0 \quad \bigg/ : (-3), \quad y^2 + 8y - 1280 =$$

Ostatnie dzielenie przez -3 nie było konieczne, ale dzięki temu za chwilę będziemy działać na nieco mniejszych liczbach.

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Powstało nam równanie kwadratowe, które klasycznie obliczymy za pomocą delty:

Współczynniki: $a = 1$, $b = 8$, $c = -1280$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1280) = 64 - (-5120) = 5184, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{5184} = 72$$

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 72}{2 \cdot 1} = \frac{-80}{2} = -40, \quad y_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + 72}{2 \cdot 1} = \frac{64}{2} = 32$$

Krok 4. Określenie liczby kartonów oraz róż w pojedynczym kartonie.

Zacznijmy od liczby kartonów. Z równania kwadratowego wyszło nam, że $y = -40$ oraz $y = 32$. Oczywiście ujemne rozwiązanie musimy odrzucić, bo liczba kartonów nie może być ujemna. W związku z tym już wiemy, że $y = 32$, czyli że pierwotnie były 32 kartony. Musimy jeszcze obliczyć ilość róż, zatem korzystając z dowolnego równania z układu równań (np. z pierwszego) wyjdzie nam, że:

$$x \cdot y = 480, \quad x \cdot 32 = 480, \quad x = 15$$

To oznacza, że w pojedynczym kartonie znalazło się 15 róż, a samych kartonów było pierwotnie 32.