

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Operon 2018

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	B (7^3)	1
2	B (0)	1
3	B ($-\sqrt{6} - 3$)	1
4	B (1,95%)	1
5	D (należy do przedziału (0; 1))	1
6	A ($x > \frac{1}{3}$)	1
7	C (2)	1
8	D ($\langle -3; 0 \rangle$)	1
9	B ($5\frac{1}{3}$)	1
10	A ($(-\infty; 25)$)	1
11	D ($g(x) = -3^{x-2}$)	1
12	C (1008)	1
13	C ($8 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right]$)	1
14	A ($1\frac{1}{2}$)	1
15	C (90°)	1
16	D (0, 8)	1
17	C (100°)	1
18	A ($K \cdot 2^{3m}$)	1
19	D (6)	1
20	A ($9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$)	1
21	B ($\frac{3}{8}$)	1
22	B ($6\frac{1}{2}$)	1
23	C ($2\sqrt{34}$)	1
24	C (16cm)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Wynikiem działania $49^{-6} : 7^{-15}$ jest:

Odpowiedź: B (7^3)

Zamieniając liczbę 49 na 7^2 oraz korzystając z działań na potęgach możemy zapisać, że:

$$49^{-6} : 7^{-15} = (7^2)^{-6} : 7^{-15} = 7^{-12} : 7^{-15} = , = 7^{-12-(-15)} = 7^{-12+15} = 7^3$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Wyrażenie $\log_3(\log 30 - \log 3)$ jest równe:

Odpowiedź: B (0)

Aby rozwiązać ten logarytm skorzystamy ze wzoru na różnicę logarytmów:

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c} \right)$$

Korzystając z tego wzoru możemy rozisać logarytmy znajdujące się w nawiasie, otrzymując w ten sposób:

$$\log_3(\log 30 - \log 3) = \log_3 \left(\log \frac{30}{3} \right) = \log_3(\log 10)$$

Teraz musimy pamiętać o tym, że jeśli logarytm nie ma zapisanej podstawy, to domyślnie podstawa jest równa 10, czyli $\log 10$ to tak naprawdę $\log_{10} 10$. A ile jest równy $\log_{10} 10$? Taki logarytm jest równy 1, bo $10^1 = 10$. W związku z tym:

$$\log_3(\log 10) = \log_3 1 = 0$$

Wartość tego logarytmu jest równa 0, bo $3^0 = 1$.

Zadanie 3

0-1 pkt

Liczbą odwrotną do liczby $\frac{\sqrt{6}-3}{3}$ jest:

Odpowiedź: B ($-\sqrt{6} - 3$)

Aby otrzymać liczbę odwrotną wystarczy zamienić miejscami licznik z mianownikiem. W ten sposób otrzymamy liczbę $\frac{3}{\sqrt{6}-3}$. To jednak nie koniec zadania, bo dodatkowo będziemy musieli wykonać jeszcze usunięcie niewymierności z mianownika. Całość będzie wyglądać w następujący sposób:

$$\frac{3}{\sqrt{6}-3} = \frac{3 \cdot (\sqrt{6}+3)}{(\sqrt{6}-3) \cdot (\sqrt{6}+3)} = , = \frac{3\sqrt{6}+9}{(6-9)} = \frac{3\sqrt{6}+9}{-3} = -\sqrt{6}-3$$

Zadanie 4

0-1 pkt

Urząd skarbowy został zobowiązany do zwrotu podatku w wysokości 235, 40zł. Kwotę tę zaokrąglono do pełnych dziesiątek złotych. Błąd względny tego zaokrąglenia wyrażony w procentach wyniósł około:

Odpowiedź: B (1, 95%)

Krok 1. Zapisanie danych z treści zadania.

Błąd względny obliczymy korzystając ze wzoru $\delta = \frac{|x-p|}{x}$, gdzie:

δ - błąd względny

x - dokładna wartość

p - wartość przybliżona

W naszym przypadku:

$x = 235, 40$

$p = 240$, bo 240 jest przybliżeniem do pełnych dziesiątek liczby 235, 40

Krok 2. Obliczenie błędu względnego.

Korzystając z powyższych informacji błąd względny obliczymy w następujący sposób:

$$\frac{|235, 40 - 240|}{235, 40} = \frac{|-4, 60|}{235, 40} = \frac{4, 60}{235, 40} \approx 0, 0195 \approx 1, 95\%$$

Zadanie 5

0-1 pkt

Liczba $2 - 2(\sqrt{3} - 1)^2$:

Odpowiedź: D (należy do przedziału (0; 1))

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ możemy zapisać, że:

$$2 - 2(\sqrt{3} - 1)^2 = 2 - 2 \cdot (3 - 2\sqrt{3} + 1) = 2 - 2 \cdot (4 - 2\sqrt{3}) = , = 2 - 8 + 4\sqrt{3} = -6 + 4\sqrt{3} \approx -6 + 6, 92 \approx 0, 92$$

To oznacza, że ta liczba należy do przedziału (0; 1).

Zadanie 6

0-1 pkt

Nierówność $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x < \frac{1}{6}$ jest równoważna nierówności:

Odpowiedź: A ($x > \frac{1}{3}$)

Najprościej będzie rozpocząć rozwiązywanie naszej nierówności od pomnożenia obydwu stron przez 6, pozbedziemy się wtedy wszystkich ułamków. Trzeba tutaj pamiętać, że po lewej stronie mamy odejmowanie, zatem musimy przez 6 wymnożyć każdy jednomian:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x < \frac{1}{6} \quad / \cdot 6, \quad 2 - 3x < 1, \quad -3x < -1 \quad / : (-3), \quad x > \frac{1}{3}$$

Pamiętaj, że dzieląc lub mnożąc nierówność przez liczbę ujemną trzeba zmienić znak na przeciwny, tak jak przy tym ostatnim przekształceniu.

Zadanie 7

0-1 pkt

Liczba różnych rozwiązań równania $\frac{3x(x^2-9)}{x-3} = 0$ wynosi:

Odpowiedź: C (2)

Krok 1. Zapisanie założeń do równania.

Z racji tego, iż nie istnieje w matematyce dzielenie przez 0, to wartość w mianowniku musi być różna od 0. W związku z tym:

$$x - 3 \neq 0, \quad x \neq 3$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.

Po zapisaniu założeń możemy przejść do rozwiązywania równania, zaczynając od wymnożenia obu stron przez wartość, która znajduje się w mianowniku, czyli przez $x - 3$:

$$\frac{3x(x^2-9)}{x-3} = 0 \quad / \cdot (x-3), \quad 3x(x^2-9) = 0$$

Aby to równanie było równe 0, to albo $3x$ albo $x^2 - 9$ musi być równe 0, zatem:

$$3x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 9 = 0, \quad x = 0 \quad \vee \quad x^2 = 9, \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

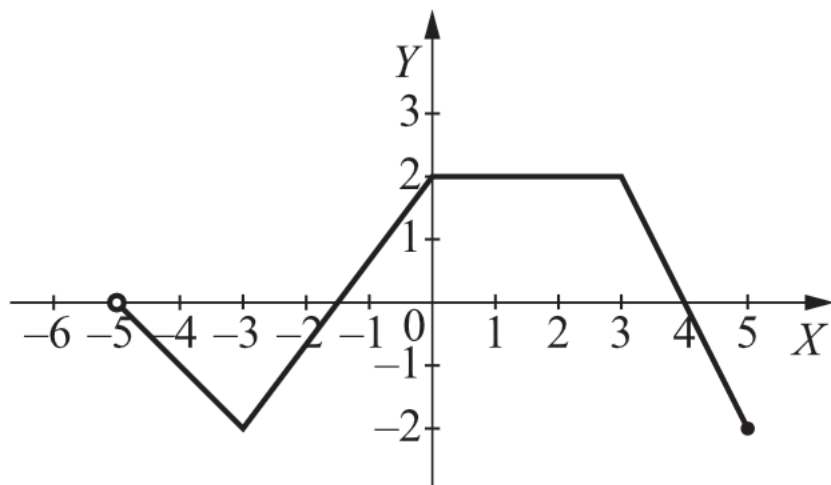
Krok 3. Zapisanie rozwiązań równania.

Musimy teraz zweryfikować nasze rozwiązania i sprawdzić czy jakieś rozwiązanie nie wyklucza się z naszymi założeniami z kroku pierwszego. Okazuje się, że jedno rozwiązanie ($x = 3$) musimy wykluczyć ze względu właśnie na założenia, dlatego równanie ma tylko dwa rozwiązania: $x = 0$ oraz $x = -3$.

Zadanie 8

0-1 pkt

Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji f . Maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca, to:



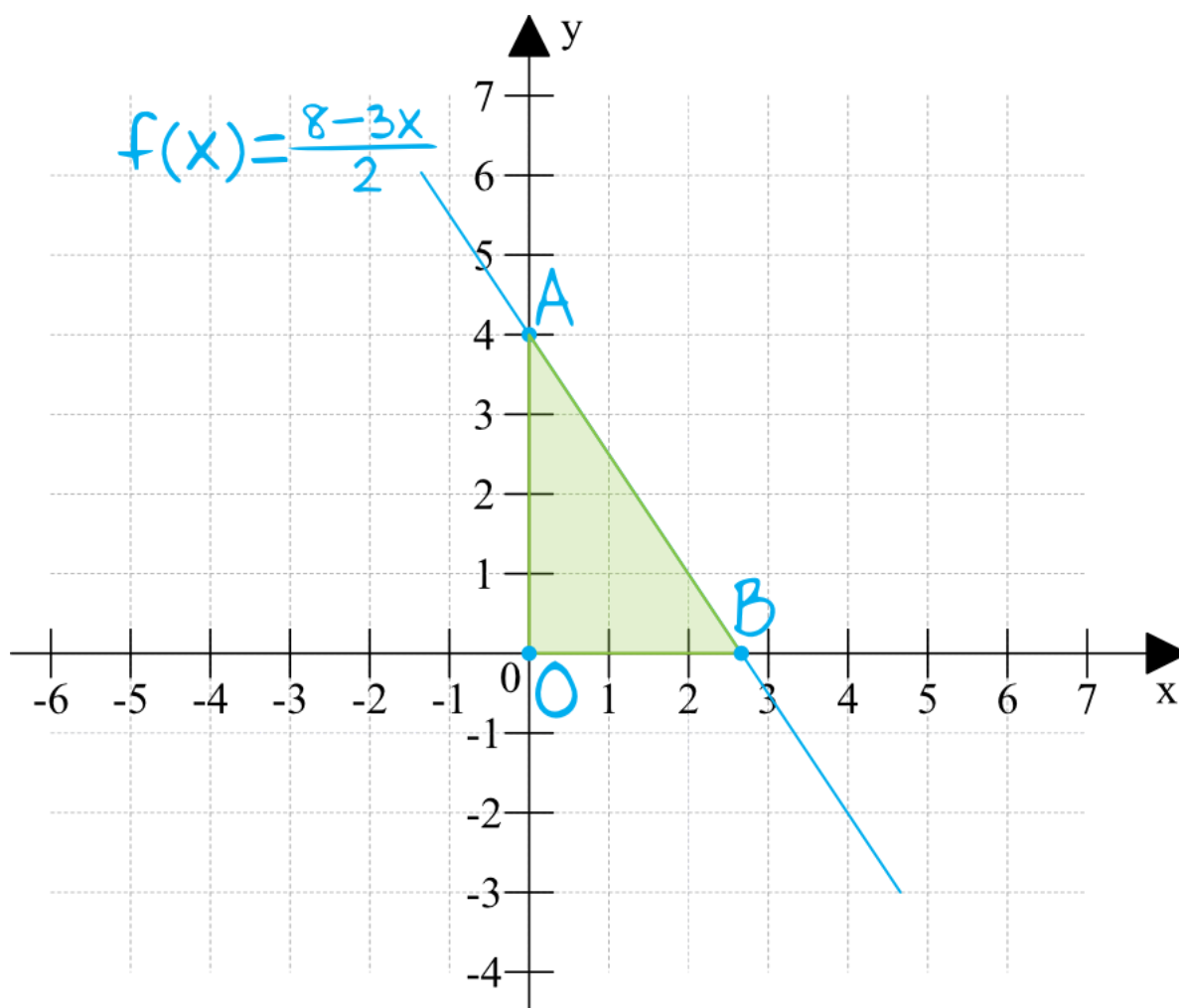
Odpowiedź: D ($(-3; 0)$)

Przedział argumentów dla których funkcja jest rosnąca odczytujemy z osi xśw. Widzimy wyraźnie, że funkcja rośnie od argumentu $x = -3$ aż do argumentu $x = 0$, zatem przedziałem w którym ta funkcja rośnie będzie $(-3; 0)$.

Zadanie 9

0-1 pkt

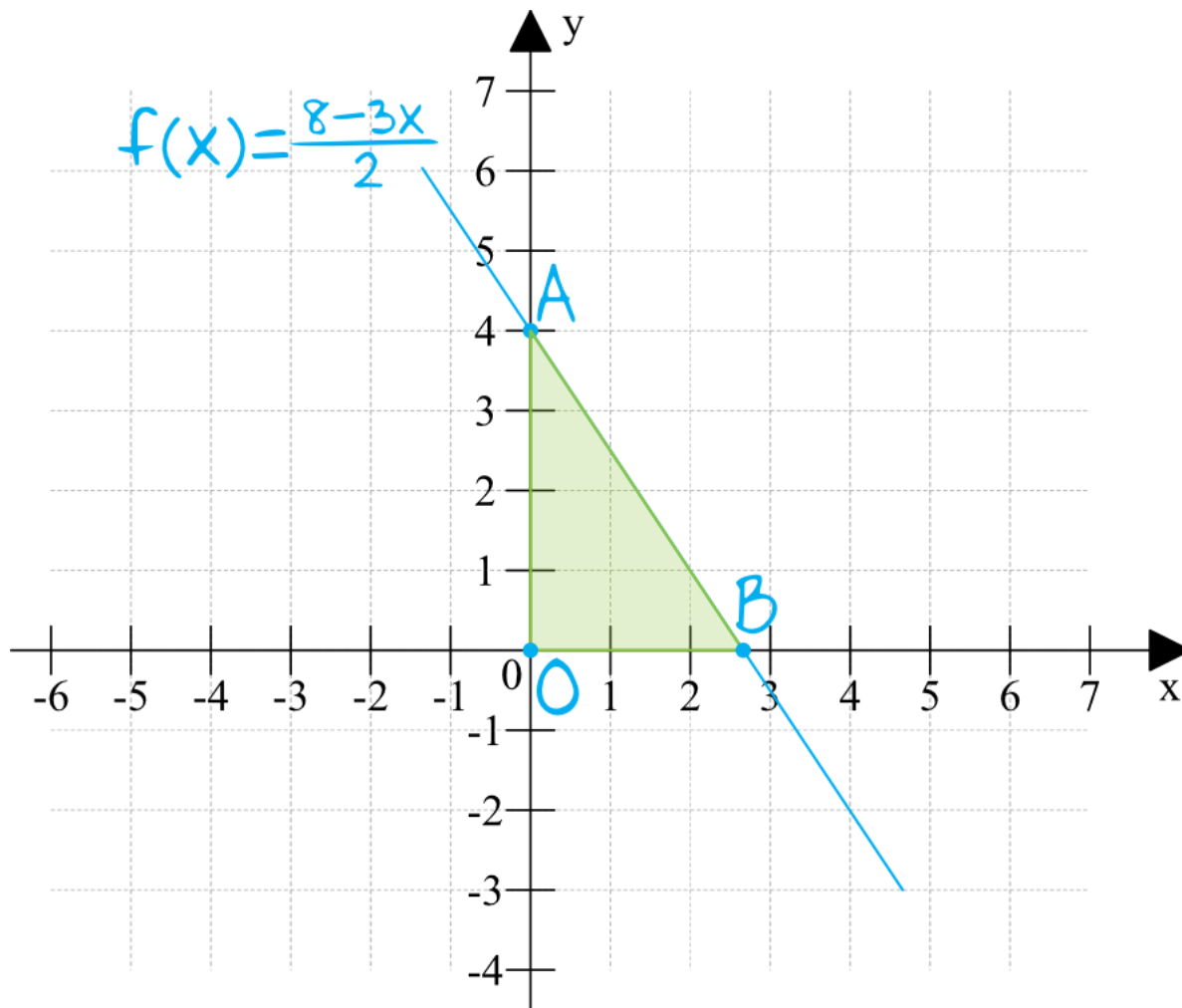
Wykres funkcji liniowej $f(x) = \frac{8-3x}{2}$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B . Pole trójkąta ABO , w którym punkt O jest początkiem układu współrzędnych, wynosi:



Odpowiedź: B ($5\frac{1}{3}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Aby wiedzieć co będziemy liczyć, to zróbmy sobie prosty rysunek pomocniczy:



Z rysunku wynika, że jak poznamy współrzędne punktów A oraz B to tak naprawdę poznamy długości boków naszego trójkąta, a stąd będzie już prosta droga do obliczenia pola figury.

Krok 2. Wyznaczenie współrzędnych punktu A .

Punkt A będzie miejscem przecięcia się funkcji z osią igreków. Funkcja przecina się z osią igreków dla argumentu $x = 0$, zatem już wiemy, że $A = (0; y)$.

Podstawiając $x = 0$ otrzymamy współrzędną igrekową punktu A , czyli:

$$f(0) = \frac{8 - 3 \cdot 0}{2}, \quad f(0) = \frac{8 - 0}{2}, \quad f(0) = \frac{8}{2}, \quad f(0) = 4$$

To oznacza, że funkcja przecina oś igreków w punkcie $A = (0; 4)$.

Krok 3. Wyznaczenie współrzędnych punktu B .

Punkt B będzie miejscem przecięcia się funkcji z osią xków. Funkcja przecina się z osią xków dla wartości $y = 0$, zatem już wiemy, że $B = (x; 0)$. Podstawiając $y = 0$ otrzymamy współrzędną xkową punktu B , czyli:

$$0 = \frac{8 - 3x}{2}, \quad 0 = 8 - 3x, \quad 3x = 8, \quad x = \frac{8}{3}$$

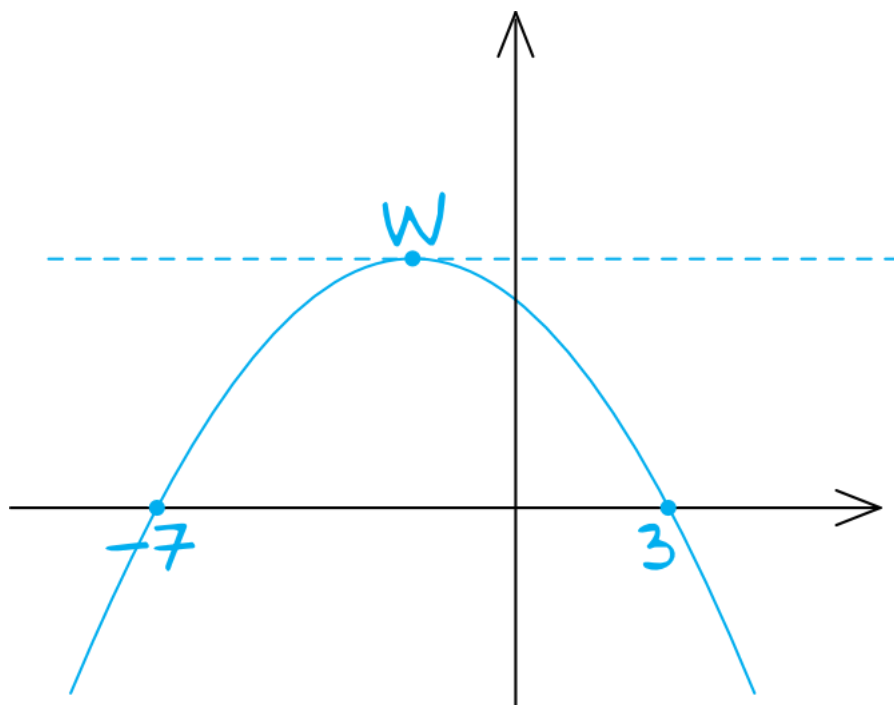
To oznacza, że funkcja przecina oś xków w punkcie $B = (\frac{8}{3}; 0)$.

Krok 4. Obliczenie pola powierzchni trójkąta.

Po wyznaczeniu współrzędnych punktów A oraz B i po spojrzeniu na nasz szkicowy rysunek jasno wynika, że podstawa trójkąta ma długość $a = \frac{8}{3}$, natomiast wysokość trójkąta to $h = 4$. Pole tego trójkąta będzie więc równe:

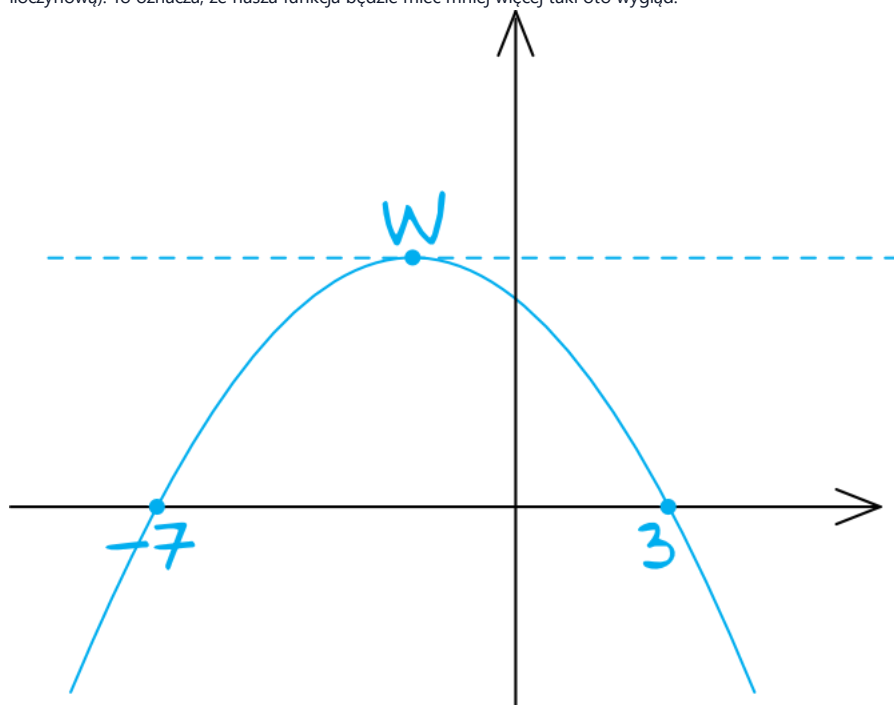
$$P = \frac{1}{2}ah, \quad P = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 4, \quad P = \frac{32}{6}, \quad P = 5\frac{1}{3}$$

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -(x+7)(x-3)$ jest:



Odpowiedź: A $((-\infty; 25])$

Wykresem naszej funkcji kwadratowej będzie parabola o ramionach skierowanych do dołu, bo współczynnik kierunkowy a jest ujemny (mamy minus przed postacią iloczynową). To oznacza, że nasza funkcja będzie mieć mniej więcej taki oto wygląd:



Możemy więc już wywnioskować, że zbiorem wartości będzie przedział od $-\infty$ aż do wartości w wierzchołku paraboli.

Współrzędne wierzchołka możemy zapisać jako $W = (p; q)$. Szukamy wartości przyjmowanej w tym wierzchołku, czyli szukamy współrzędnej q (gdybyśmy szukali odpowiedzi na pytanie dla jakiego argumentu ta wartość jest przyjmowana, to wtedy szukalibyśmy współrzędnej p). I teraz możemy dojść do tej współrzędnej q na dwa sposoby:

I sposób - wyznaczając wartość współrzędnej p i podstawiając ją do wzoru funkcji:

Z postaci iloczynowej możemy odczytać, że miejscami zerowymi naszej funkcji są -7 oraz 3 . Współrzędna p wierzchołka paraboli będzie dokładnie pomiędzy tymi dwoma miejscami zerowymi (to wynika z własności wierzchołka), zatem moglibyśmy zapisać, że:

$$p = \frac{-7+3}{2}, p = \frac{-4}{2}, p = -2$$

Teraz znając wartość $p = -2$ możemy podstawić $x = -2$ do wzoru funkcji, dzięki czemu otrzymamy wartość funkcji przyjmowaną w wierzchołku. Zatem:

$$f(-2) = -(-2 + 7)(-2 - 3), \quad f(-2) = -(5)(-5), \quad f(-2) = 25$$

To oznacza, że wartość przyjmowana w wierzchołku paraboli jest równa 25, czyli zbiorem wartości funkcji będzie $(-\infty; 25]$.

II sposób - obliczając wartość q ze wzoru z tablic:

W tej metodzie skorzystamy ze wzoru:

$$q = \frac{-\Delta}{4a}$$

Aby jednak móc skorzystać z tego wzoru musimy najpierw doprowadzić równanie do postaci ogólnej, a następnie musimy policzyć tak zwaną deltę.

Krok 1. Zapisanie równania w postaci ogólnej.

Aby móc obliczyć wartość q musimy najpierw doprowadzić równanie do postaci ogólnej, zatem:

$$-(x + 7)(x - 3) = -(x^2 - 3x + 7x - 21) = , \quad = -(x^2 + 4x - 21) = -x^2 - 4x + 21$$

Krok 2. Obliczenie delty.

Mając postać ogólną możemy już policzyć deltę, która znalazła się w liczniku wzoru na q , zatem:

Współczynniki: $a = -1$, $b = -4$, $c = 21$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 21 = 16 - (-84) = 16 + 84 = 100$$

Krok 3. Wyznaczenie wartości współrzędnej q .

Znając deltę możemy zapisać, że:

$$q = \frac{-\Delta}{4a}, \quad q = \frac{-100}{4 \cdot (-1)}, \quad q = \frac{-100}{-4}, \quad q = 25$$

To oznacza, że zbiorem wartości tej funkcji będzie przedział $(-\infty; 25]$.

Zadanie 11

0-1 pkt

Wykres funkcji $f(x) = -3^x$ przesunięto równolegle wzdłuż osi OX o dwie jednostki w prawo i otrzymano wykres funkcji $y = g(x)$. Wówczas:

Odpowiedź: D ($g(x) = -3^{x-2}$)

Chcąc zapisać wzór funkcji przesuniętej w prawo/lewo musimy zmienić wartość stojącą przy x . Przesunięcie o dwie jednostki w prawo oznacza, że wartość x należy pomniejszyć o 2 (gdybyśmy przesuwali w lewo, to wartość x należałoby zwiększyć o 2). Skoro więc x znajduje się w potęgzie, to musimy pomniejszyć wykładnik tej potęgi o 2, zatem $g(x) = -3^{x-2}$.

Zadanie 12

0-1 pkt

Dodatnich wyrazów ciągu określonego wzorem $a_n = -2n + 2018$ dla $n \geq 1$ jest:

Odpowiedź: C (1008)

Krok 1. Zapisanie i rozwiązanie nierówności.

Aby sprawdzić ile dodatnich wyrazów ma ten ciąg wystarczy rozwiązać prostą nierówność:

$$-2n + 2018 > 0, \quad -2n > -2018, \quad n < 1009$$

Uwaga na zmianę znaku - kiedy mnożymy lub dzielimy nierówność przez liczbę ujemną, to musimy zmienić znak na przeciwny.

Krok 2. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Wiemy, że w ciągach n jest liczbą naturalną. Musimy więc ustalić ile jest liczb naturalnych mniejszych od 1009 (bo n wyszło nam mniejsze od 1009). Takich liczb będzie oczywiście 1008 (od 1 do 1008), zatem tyle też będziemy mieli dodatnich wyrazów naszego ciągu.

Zadanie 13

0-1 pkt

Sumę n początkowych wyrazów ciągu $(4, 6, 9, \dots)$ można obliczyć ze wzoru:

Odpowiedź: C $(8 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right])$

Krok 1. Ustalenie jaki jest to ciąg.

Musimy na początku ustalić jaki jest to ciąg i jakie są jego kluczowe parametry. Na pewno nie jest to ciąg arytmetyczny, bo drugi wyraz jest o 2 większy od pierwszego, a trzeci wyraz jest o 3 większy od drugiego. Powinniśmy dostrzec, że nasz ciąg jest geometryczny, bo każdy wyraz jest 1,5 razy większy od poprzedniego. Iloraz ciągu możemy nawet obliczyć w następujący sposób:

$$q = \frac{a_2}{a_1}, q = \frac{6}{4}, q = \frac{3}{2}$$

Możemy więc powiedzieć, że nasz ciąg jest geometryczny, a kluczowymi liczbami dla tego ciągu będą $q = \frac{3}{2}$ oraz $a_1 = 4$.

Krok 2. Obliczenie sumy n początkowych wyrazów.

Korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów i podstawiając dane, które przed chwilą sobie wyznaczyliśmy otrzymamy:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, S_n = 4 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}}, S_n = 4 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{-\frac{1}{2}}, S_n = 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) : \left(-\frac{1}{2}\right), S_n = 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) \cdot (-2), S_n = -8 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$$

Musimy się jeszcze dopasować do proponowanych odpowiedzi i aby lepiej zrozumieć to przekształcenie to możemy zamienić -8 na $8 \cdot (-1)$, otrzymując:

$$S_n = 8 \cdot (-1) \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right), S_n = 8 \cdot \left(-1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right), S_n = 8 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)$$

Zadanie 14

0-1 pkt

W pewnym ciągu arytmetycznym suma dwóch pierwszych wyrazów jest równa $5\frac{1}{2}$, a suma trzech pierwszych wyrazów jest równa 12. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

Odpowiedź: A $(1\frac{1}{2})$

Krok 1. Rozpisanie sumy dwóch i trzech pierwszych wyrazów.

Suma dwóch pierwszych wyrazów to tak naprawdę $a_1 + a_2$. Suma trzech pierwszych wyrazów to $a_1 + a_2 + a_3$. Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego możemy napisać, że $a_2 = a_1 + r$ oraz $a_3 = a_1 + 2r$. Jeżeli tak rozpiszemy sobie tę sytuację to otrzymamy:

$$a_1 + a_2 = 5\frac{1}{2}, a_1 + a_1 + r = 5\frac{1}{2}, 2a_1 + r = 5\frac{1}{2}, \text{ oraz }, a_1 + a_2 + a_3 = 12, a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 12, 3a_1 + 3r = 12$$

Krok 2. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu arytmetycznego.

Z naszych równań otrzymanych w pierwszym kroku możemy ułożyć teraz układ równań:

$$\begin{cases} 2a_1 + r = 5\frac{1}{2} \\ 3a_1 + 3r = 12 \end{cases}$$

Ten układ równań najlepiej jest rozwiązać metodą podstawiania, wyznaczając wartość r z pierwszego równania:

$$\begin{cases} r = 5\frac{1}{2} - 2a_1 \\ 3a_1 + 3r = 12 \end{cases}$$

Podstawiając teraz pierwsze równanie do drugiego otrzymamy:

$$3a_1 + 3 \cdot \left(5\frac{1}{2} - 2a_1\right) = 12, 3a_1 + 16\frac{1}{2} - 6a_1 = 12, -3a_1 = -4\frac{1}{2}, a_1 = 1\frac{1}{2}$$

Zadanie 15

0-1 pkt

Dla pewnego kąta wypukłego α mamy $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Kąt α ma miarę:

Odpowiedź: C (90°)

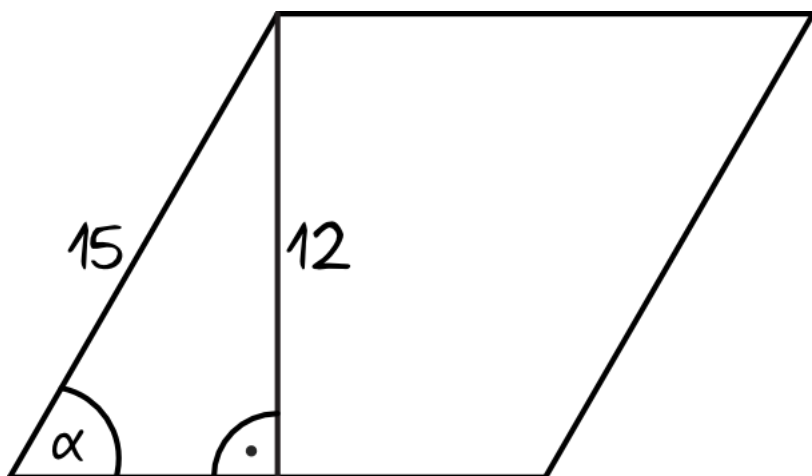
Tangens przyjmuje wartość $\frac{\sqrt{3}}{3}$ dla kąta 30° . W związku z tym:

$$\frac{\alpha}{3} = 30^\circ, \alpha = 90^\circ$$

Zadanie 16

0-1 pkt

Wysokość rombu jest równa 12, a jego pole jest równe 180. Sinus kąta ostrego rombu wynosi:



Odpowiedź: D (0, 8)

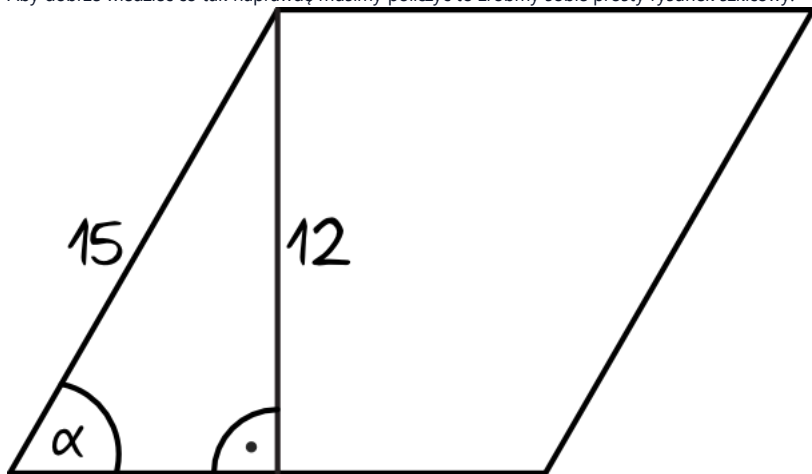
Krok 1. Obliczenie długości boku rombu.

Pole rombu możemy obliczyć ze wzoru $P = ah$. Skoro $P = 180$ oraz $h = 12$, to:

$$180 = a \cdot 12, a = 15$$

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Aby dobrze wiedzieć co tak naprawdę musimy policzyć to zróbmy sobie prosty rysunek szkicowy:



Krok 3. Obliczenie sinusa kąta ostrego rombu.

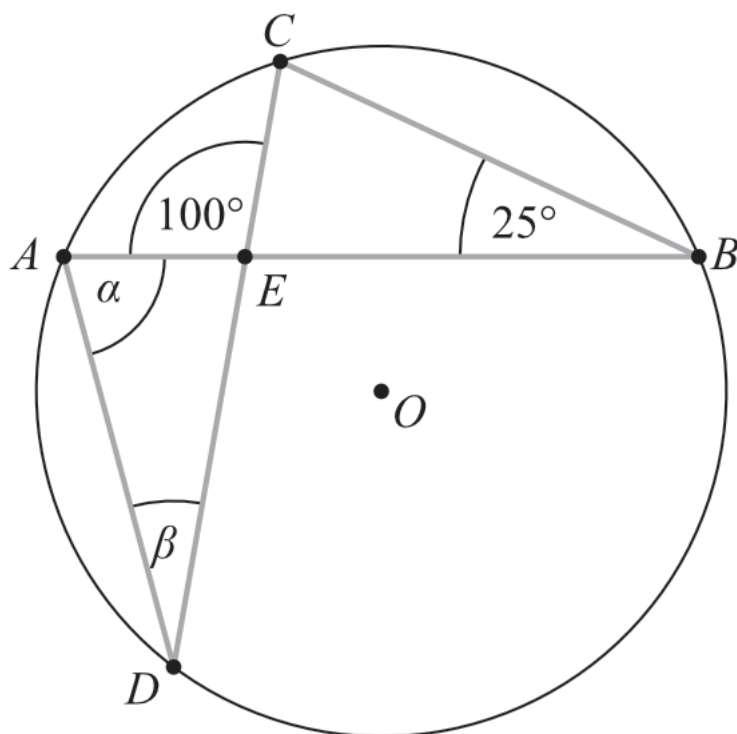
Sinus kąta ostrego będzie równy stosunkowi długości przyprostokątnej naprzeciwko kąta α względem długości przeciwprostokątnej, zatem:

$$\sin \alpha = \frac{12}{15}, \sin \alpha = \frac{4}{5}, \sin \alpha = 0,8$$

Zadanie 17

0-1 pkt

Punkty A, B, C i D należą do okręgu o środku w punkcie O (patrz rys.). Suma $\alpha + \beta$ wynosi:



Odpowiedź: C (100°)

Krok 1. Obliczenie miary kąta DEA .

Kąty DEA oraz AEC są kątami przyległymi. Z własności kątów przyległych wynika, że suma ich miar jest równa 180° , zatem:

$$|\angle DEA| = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Krok 2. Obliczenie sumy miar kątów $\alpha + \beta$.

Spójrzmy na trójkąt ADE . Wiemy już, że miara kąta DEA jest równa 80° . Skoro więc suma miar kątów w trójkącie musi być równa 180° , to:

$$\alpha + \beta + |\angle DEA| = 180^\circ, \quad \alpha + \beta + 80^\circ = 180^\circ, \quad \alpha + \beta = 100^\circ$$

Zadanie 18

0-1 pkt

Obserwowana w laboratorium populacja bakterii podwaja swoją liczebność co 20 minut. Początkowa liczba bakterii wynosiła K sztuk. Oznacza to, że po upływie n godzin liczebność populacji wyniesie:

Odpowiedź: A ($K \cdot 2^{3n}$)

Najlepiej będzie rozpisać sobie poszczególne fazy rozrostu populacji bakterii:

- Na początku mamy K bakterii.
- Po upływie 1 okresu (czyli po 20 minutach) mamy $K \cdot 2$ bakterii.
- Po upływie 2 okresów (czyli po 40 minutach) mamy $K \cdot 2 \cdot 2 = K \cdot 2^2$ bakterii.
- Po upływie 3 okresów (czyli po 60 minutach) mamy $K \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = K \cdot 2^3$ bakterii.

Rozpisując to w ten sposób powinniśmy dostrzec, że:

- Po jednej godzinie mamy $K \cdot 2^3$ bakterii.
- Po dwóch godzinach mielibyśmy $K \cdot 2^6$ bakterii.
- Po trzech godzinach mielibyśmy $K \cdot 2^9$ bakterii.
- Po czterech godzinach mielibyśmy $K \cdot 2^{12}$ bakterii.

I tu już powinniśmy zauważyć, że po n godzinach mielibyśmy $K \cdot 2^{3n}$ bakterii.

Zadanie 19

0-1 pkt

Przeciwległe wierzchołki kwadratu mają współrzędne $A = (1, -3)$ i $C = (-5, 3)$. Bok kwadratu ma długość:

Odpowiedź: D (6)

Krok 1. Obliczenie długości odcinka AC .

Znając współrzędne punktów A oraz C możemy obliczyć długość odcinka AC korzystając z następującego wzoru:

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}, |AC| = \sqrt{(-5 - 1)^2 + (3 - (-3))^2}, |AC| = \sqrt{(-6)^2 + (3 + 3)^2}, |AC| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2}, |AC| = \sqrt{36 + 36}, |AC| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Krok 2. Obliczenie długości boku kwadratu.

Odcinek AC jest przekątną kwadratu. Z własności kwadratów wynika, że kwadrat o boku a ma przekątną o długości $a\sqrt{2}$. W związku z tym:

$$a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}, a = 6$$

Zadanie 20

0-1 pkt

Ilość wszystkich liczb czterocyfrowych, w których cyfry się nie powtarzają, wynosi:

Odpowiedź: A ($9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$)

Zastanówmy się na ile różnych sposobów możemy wpisać każdą z cyfr naszej liczby czterocyfrowej (rząd tysięcy, setek, dziesiątek, jedności):

- w rzędzie tysięcy może znaleźć się każda cyfra oprócz 0, bo nie ma takiej liczby jak 0328. To oznacza, że mamy 9 możliwości uzupełnienia rzędu tysięcy.
- w rzędzie setek może znaleźć się każda z dziesięciu cyfr od 0 do 9, oprócz tej która była w rzędzie tysięcy (bo cyfry mają się nie powtarzać). To oznacza, że mamy $10 - 1 = 9$ możliwości uzupełnienia rzędu setek.
- w rzędzie dziesiątek może znaleźć się każda z dziesięciu cyfr od 0 do 9, oprócz tych dwóch które były w rzędzie tysięcy oraz setek. To oznacza, że mamy $10 - 2 = 8$ możliwości uzupełnienia rzędu setek.
- w rzędzie jedności może znaleźć się każda z dziesięciu cyfr od 0 do 9, oprócz tych trzech które były w rzędzie tysięcy, setek oraz dziesiątek. To oznacza, że mamy $10 - 3 = 7$ możliwości uzupełnienia rzędu setek.

Teraz zgodnie z regułą mnożenia możemy zapisać, że liczba wszystkich interesujących nas liczb czterocyfrowych będzie równa:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Zadanie 21

0-1 pkt

Rzucono trzy razy monetą symetryczną. Prawdopodobieństwo uzyskania jednej reszki wynosi:

Odpowiedź: B ($\frac{3}{8}$)

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Na każdej monetce może nam wypaść orzeł lub reszka. Skoro rzucamy naszą monetą trzykrotnie to wszystkich możliwych kombinacji zgodnie z regułą mnożenia będziemy mieć:

$$|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Interesuje nas sytuacja w której raz wypadnie reszka, czyli sprzyjającymi zdarzeniami będą:

$$(ROO), (ORO), (OOR)$$

Są to trzy zdarzenia, zatem $|A| = 3$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

Zadanie 22

0-1 pkt

Średnia arytmetyczna zestawu liczb 5, 8, 1, 3, x , 8 wynosi 6. Mediana tego zestawu jest równa:

Odpowiedź: B ($6\frac{1}{2}$)

Krok 1. Obliczenie wartości niewiadomej x .

Mamy sześć cyfr i ich średnia arytmetyczna jest równa 6. Korzystając ze wzoru na średnią arytmetyczną możemy zapisać, że:

$$\frac{5 + 8 + 1 + 3 + x + 8}{6} = 6, \quad \frac{25 + x}{6} = 6, \quad 25 + x = 36, \quad x = 11$$

Krok 2. Uporządkowanie wszystkich liczb.

Aby obliczyć medianę musimy na początku uporządkować liczby w porządku niemalejącym, czyli w kolejności od najmniejszej do największej, zatem:

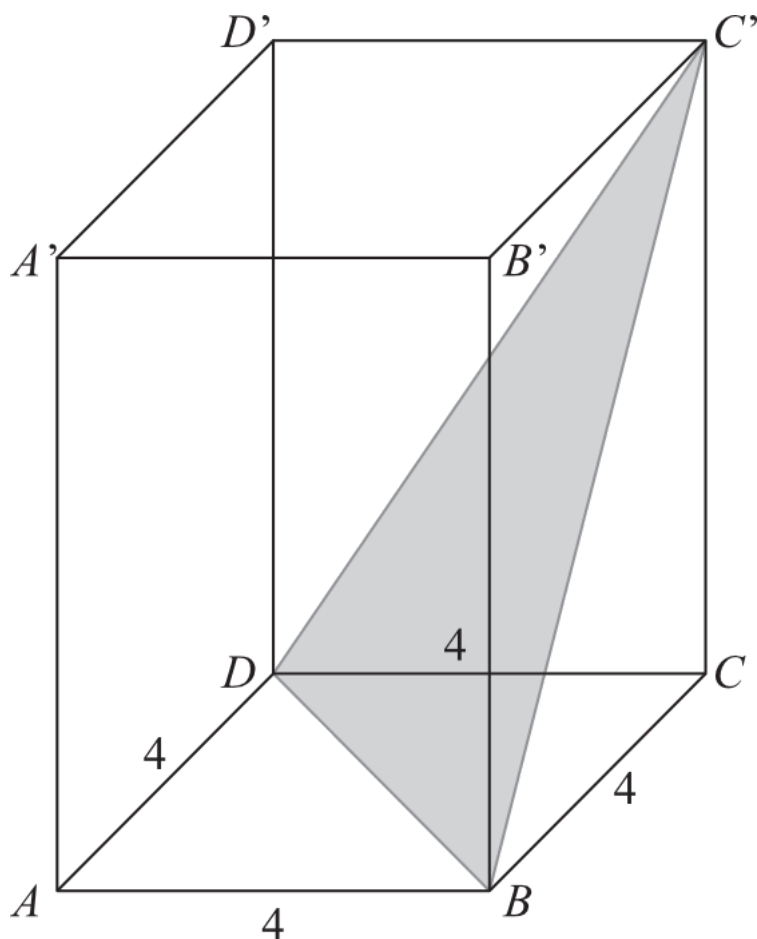
$$1, 3, 5, 8, 8, 11$$

Krok 3. Wyznaczenie mediany.

Mamy sześć liczb, czyli jest to parzysta ilość wyrazów. To oznacza, że medianą jest średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów, zatem:

$$m = \frac{5 + 8}{2}, \quad m = \frac{13}{2}, \quad m = 6,5$$

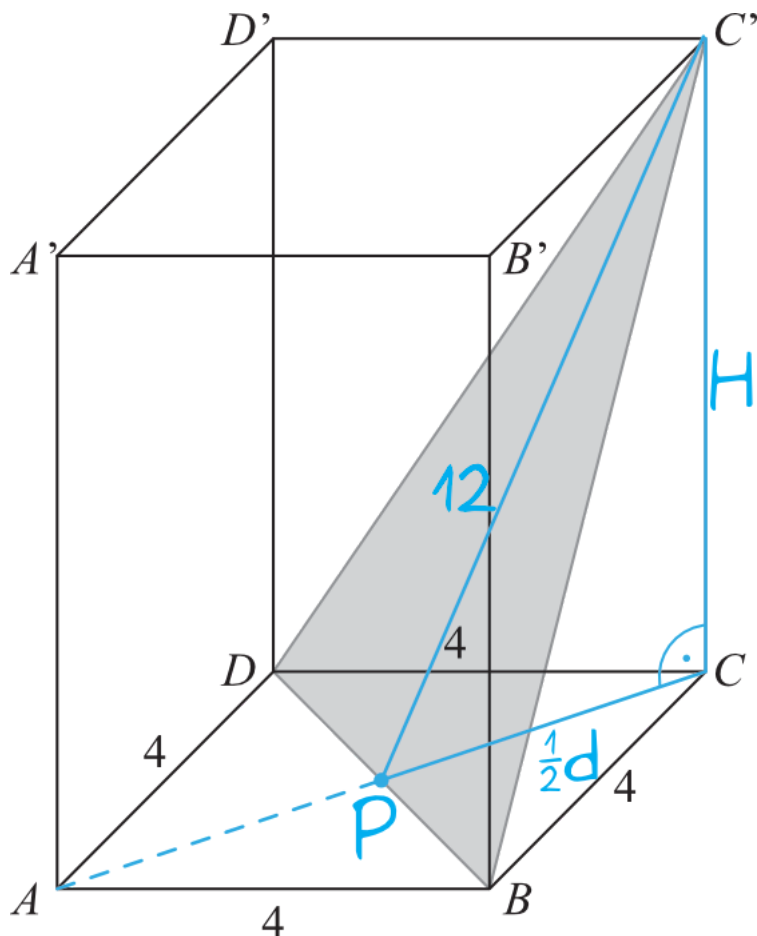
Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy równej 4. Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną BD podstawy i wierzchołek C' . Otrzymany przekrój jest trójkątem, którego wysokość poprowadzona z wierzchołka C' jest równa 12. Wysokość graniastosłupa jest równa:



Odpowiedź: C ($2\sqrt{34}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zaznaczając na rysunku kluczowy trójkąt prostokątny otrzymamy następującą sytuację:



Krok 2. Obliczenie długości przekątnej podstawy.

Graniastosłup jest prawidłowy, czyli w podstawie ma figurę foremną. W tym przypadku będzie to kwadrat. Wiemy, że kwadrat o boku a ma przekątną o długości $a\sqrt{2}$, zatem skoro bok kwadratu ma długość 4, to przekątna będzie mieć długość $d = 4\sqrt{2}$.

Krok 3. Obliczenie długości połowy przekątnej podstawy.

Jak spojrzymy na nasz trójkąt prostokątny zaznaczony na rysunku szkicowym, to zauważymy że do obliczenia długości wysokości bryły potrzebujemy połowy przekątnej podstawy. Skoro tak, to piszemy, że:

$$PC = 4\sqrt{2} : 2, PC = 2\sqrt{2}$$

Krok 4. Obliczenie długości wysokości graniastosłupa.

Patrząc się na zaznaczony niebieski trójkąt prostokątny i korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$(2\sqrt{2})^2 + H^2 = 12^2, 4 \cdot 2 + H^2 = 144, 8 + H^2 = 144, H^2 = 136, H = \sqrt{136} \vee H = -\sqrt{136}$$

Wysokość nie może być ujemna, zatem zostaje nam jedynie $H = \sqrt{136}$. Aby dopasować się do odpowiedzi, to musimy jeszcze wyłączyć czynnik przed znak pierwiastka, czyli:

$$H = \sqrt{136} = H = \sqrt{4 \cdot 34} = 2\sqrt{34}$$

Kula o promieniu 6 cm i walec o wysokości równej $4,5\text{ cm}$ mają równe objętości. Średnica podstawy walca ma długość:

Odpowiedź: C (16 cm)

Krok 1. Obliczenie długości promienia podstawy walca.

Wzór na objętość kuli to $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. Wzór na objętość walca to $V = \pi r^2 \cdot H$. Te objętości mają być sobie równe, zatem powstaje nam do rozwiązania następujące równanie:

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \pi r^2 \cdot H$$

Podstawiając teraz do objętości kuli wartość $r = 6\text{ cm}$ oraz do objętości walca wartość $H = 4,5\text{ cm}$ otrzymamy:

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = \pi r^2 \cdot 4,5 \quad / : \pi, \quad \frac{4}{3} \cdot 6^3 = r^2 \cdot 4,5, \quad \frac{4}{3} \cdot 216 = r^2 \cdot 4,5 \quad / : 4,5, \quad \frac{4}{3} \cdot 48 = r^2, \quad 64 = r^2, \quad r = 8 \quad \vee \quad r = -8$$

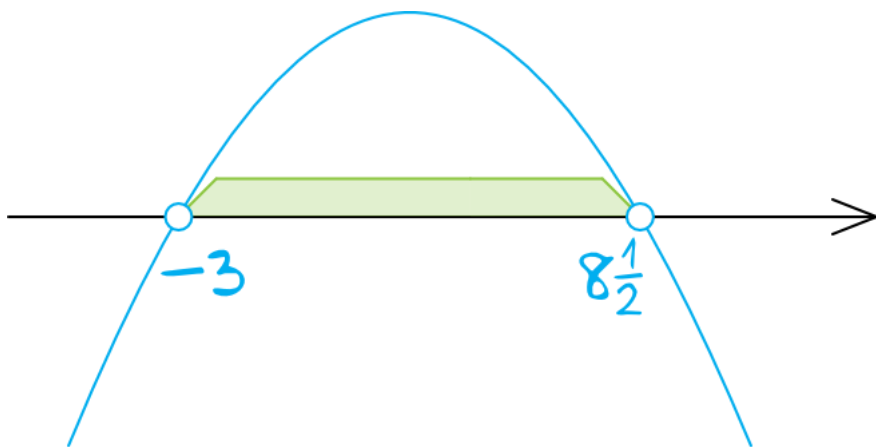
Długość promienia nie może być ujemna, zatem zostaje nam jedynie $r = 8$, czyli promień ma długość 8 cm .

Krok 2. Obliczenie długości średnicy podstawy walca.

Obliczyliśmy, że promień walca ma długość 8 cm , ale nas w zadaniu proszą o podanie długości średnicy. Średnica jest dwukrotnie dłuższa od promienia, zatem jej długość będzie równa $2 \cdot 8\text{ cm} = 16\text{ cm}$.

Zadanie 25

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $(2x - 5)(3 - x) > -66$.**Odpowiedź:** $x \in (-3; 8\frac{1}{2})$

Krok 1. Doprowadzenie nierówności do postaci ogólnej.

Zanim zacniemy liczyć deltę, to musimy przenieść wszystkie wyrazy na lewą stronę, doprowadzając nierówność do postaci ogólnej, zatem:

$$(2x - 5)(3 - x) > -66, 6x - 2x^2 - 15 + 5x > -66, 6x - 2x^2 - 15 + 5x + 66 > 0, -2x^2 + 11x + 51 > 0$$

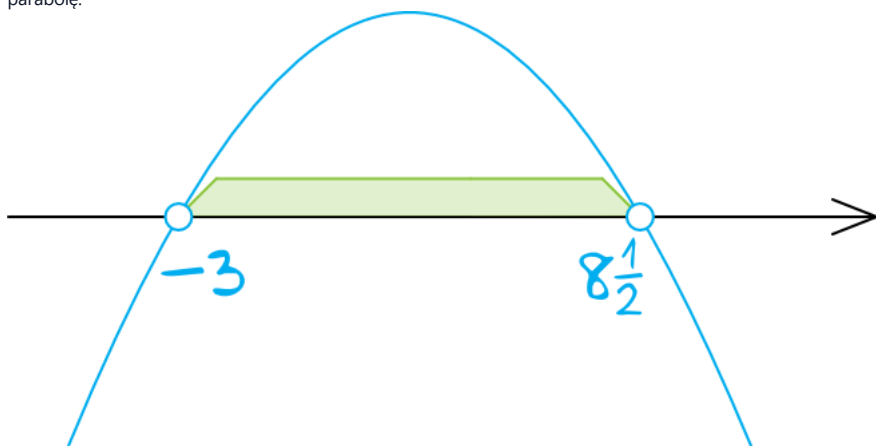
Krok 2. Wyznaczenie miejsc zerowych.

Teraz zgodnie z zasadami rozwiązywania nierówności szukamy miejsc zerowych, czyli przyrównujemy wartość $-2x^2 + 11x + 51$ do zera. Mamy więc do rozwiązania równanie kwadratowe w postaci ogólnej $-2x^2 + 11x + 51 = 0$, które rozwiążemy klasycznie obliczając deltę:Współczynniki: $a = -2$, $b = 11$, $c = 51$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 11^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 51 = 121 - (-408) = 121 + 408 = 529, \sqrt{\Delta} = \sqrt{529} = 23$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 - 23}{2 \cdot (-2)} = \frac{-34}{-4} = 8\frac{1}{2}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 + 23}{2 \cdot (-2)} = \frac{12}{-4} = -3$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Parabola będzie mieć ramiona skierowane do dołu, bo współczynnik kierunkowy a jest ujemny. Rysujemy oś, zaznaczamy wyznaczone miejsce zerowe i szkicujemy parabolę:

Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

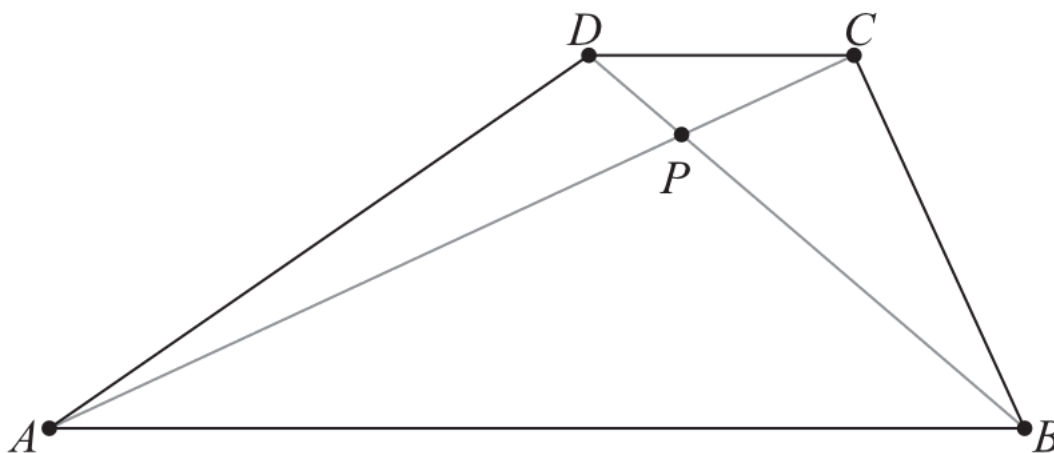
Interesują nas wartości większe od zera, zatem patrzymy się na to co jest nad osią. To oznacza, że rozwiązaniem nierówności jest przedział.

$$x \in \left(-3; 8\frac{1}{2}\right)$$

Zadanie 26

0-2 pkt

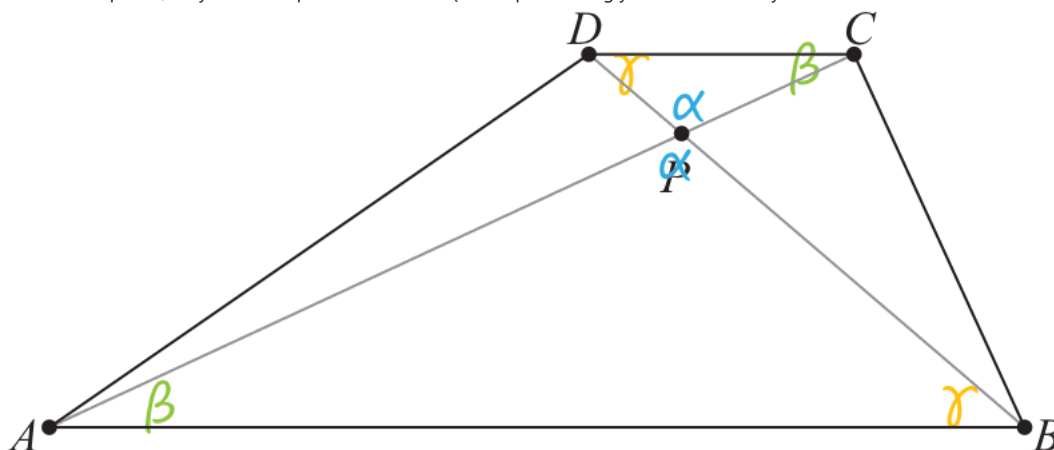
W trapezie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie P . Punkt P dzieli przekątne na odcinki długości: $|AP| = 8$, $|PC| = 3$ i $|BP| = 12$. Długości podstaw AB i CD trapezu różnią się o 15. Oblicz długość odcinka DP oraz długości podstaw AB i CD trapezu.



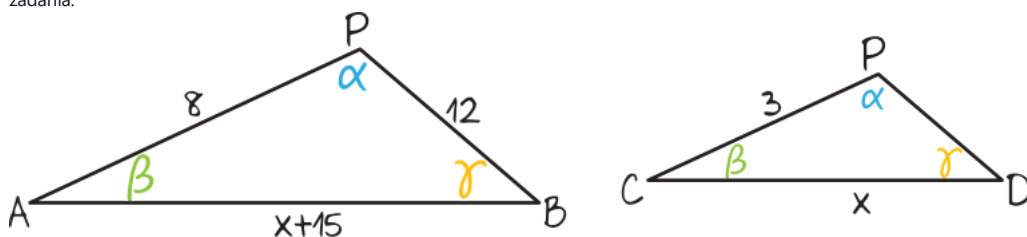
Odpowiedź: $|DP| = 4, 5$; $|CD|$

Krok 1. Dostrzeżenie trójkątów podobnych.

W naszym trapezie trójkąty ABP oraz DCP są trójkątami podobnymi, bo mają one identyczne miary kątów (cecha kąt-kąt-kąt). Ogólnie warto pamiętać o tej własności trapezów, a wynika ona wprost z własności kątów naprzemianległych i wierzchołkowych:



Aby łatwiej było dostrzec poszczególne zależności w trójkątach podobnych, to narysujmy sobie te dwa trójkąty obok siebie, zaznaczając przy okazji wymiary z treści zadania:



Krok 2. Wyznaczenie długości odcinka DP .

Skoro trójkąty ABP oraz DCP są podobne to możemy ułożyć następującą proporcję:

$$\frac{|BP|}{|DP|} = \frac{|AP|}{|CP|}, \quad \frac{12}{|DP|} = \frac{8}{3}$$

Mnożąc teraz na krzyż otrzymamy:

$$12 \cdot 3 = |DP| \cdot 8, \quad 8|DP| = 36, \quad |DP| = 4,5$$

Krok 3. Obliczenie długości podstawy CD .

Ponownie korzystając z trójkątów podobnych i z informacji o tym, że podstawy AB oraz CD różnią się o 15 możemy zapisać, że:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AP|}{|CP|}, \frac{x+15}{x} = \frac{8}{3}$$

Mnożąc na krzyż otrzymamy:

$$(x+15) \cdot 3 = x \cdot 8, 3x+45 = 8x, 45 = 5x, x = 9$$

To oznacza, że $|CD| = 9$.

Krok 4. Obliczenie długości podstawy AB .

Podstawa AB jest o 15 dłuższa od podstawy CD , zatem:

$$|AB| = |CD| + 15, |AB| = 9 + 15, |AB| = 24$$

Uwaga: To zadanie ma zaszyty w sobie pewien ciekawy błąd, bowiem taki trapez nie istnieje. Skąd to wiemy? Jak spojrzymy na trójkąt ABP to zauważymy, że jego boki mają długość 24, 12, 8. Taki trójkąt nie może istnieć, bo jedną z własności trójkątów jest to, że suma dwóch krótszych boków trójkąta musi być większa niż długość najdłuższego boku trójkąta. W naszym przypadku suma dwóch najkrótszych boków jest równa $8 + 12 = 20$, czyli jest mniejsza od 24. To jest dowód na to, że trapez o wymiarach boków z treści zadania tak naprawdę nie istnieje.

Zadanie 27

0-2 pkt

Wykaż, że jeżeli liczby a i b są kolejnymi liczbami naturalnymi, to liczba $(a + \frac{1}{2}b)^2 - (a - \frac{1}{2}b)^2$ jest podzielna przez 4.

Odpowiedź: Udowodniono rozpisuj

Krok 1. Rozpisanie liczby z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.

Korzystając z wzorów skróconego mnożenia otrzymamy:

$$\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 - \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 = , = \left(a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2\right) - \left(a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2\right) = , = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 - a^2 + ab - \frac{1}{4}b^2 = 2ab$$

Krok 2. Zakończenie dowodzenia.

Jeżeli liczby a oraz b są kolejnymi liczbami naturalnymi, to jedna z nich jest liczbą parzystą. Pomnożenie liczby parzystej przez 2 (a pomnożymy ją przez 2, bo mamy zapis $2ab$) sprawi, że ta liczba na pewno będzie podzielna przez 4. W ten sposób dowodzenie można uznać za zakończone.

Zadanie 28

0-2 pkt

Wiedząc, że kąt α jest rozwarty oraz $\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$, oblicz $\operatorname{tg} \alpha$.

Odpowiedź: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

Krok 1. Obliczenie wartości sinusa.

Wiedząc, że $\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$ możemy bez przeszkód obliczyć wartość samego sinusa:

$$\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}, \sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \vee \quad \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

Krok 2. Obliczenie wartości cosinusa.

Korzystając z jedynki trygonometrycznej oraz informacji o tym, że $\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$ otrzymamy:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1, \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}, \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \vee \quad \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

Z treści zadania wynika, że kąt α jest rozwarty, a dla kątów rozwartych cosinus przyjmuje ujemne wartości. Zatem dodatnie rozwiązanie musimy odrzucić i zostaje nam $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Krok 3. Obliczenie wartości tangensa.

Znając wartość sinusa oraz cosinusa możemy już bez przeszkód obliczyć wartość tangensa:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} : \left(-\frac{4}{5}\right), \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right), \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$$

Dana jest funkcja $f(x) = -3x^2 + bx + c$ dla $x \in \mathbb{R}$. Prosta o równaniu $x = 2$ jest osią symetrii paraboli będącej jej wykresem, a zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty; 21]$. Wyznacz współczynniki b i c .

Odpowiedź: $b = 12$, $c = 9$

Krok 1. Odczytanie współrzędnych wierzchołka paraboli.

Choć nie jest to zapisane wprost, to z treści zadania możemy wyczytać współrzędne wierzchołka paraboli $W = (p; q)$. Oś symetrii paraboli wskazuje nam pierwszą współrzędną, czyli współrzędną p , bowiem oś symetrii przechodzi właśnie przez wierzchołek. Skoro osią symetrii jest prosta $x = 2$, to pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będzie równa właśnie $p = 2$.

Drugą współrzędną wskazuje nam zbiór wartości funkcji. Funkcja zawsze ma najmniejszą lub największą wartość w swoim wierzchołku. Skoro maksymalną wartością przyjmowaną przez naszą funkcję jest 21, to taka też będzie druga współrzędna wierzchołka paraboli, czyli $q = 21$.

Możemy więc stwierdzić, że $W = (2; 21)$.

Krok 2. Zapisanie wzoru funkcji w postaci kanonicznej.

Znając współrzędne wierzchołka paraboli możemy zapisać wzór funkcji w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

Wiemy, że $a = -3$, bo wynika to z zapisu funkcji w postaci ogólnej $f(x) = -3x^2 + bx + c$. Wiemy też jakie są współrzędne wierzchołka, czyli $p = 2$ oraz $q = 21$, zatem:

$$f(x) = -3(x - 2)^2 + 21$$

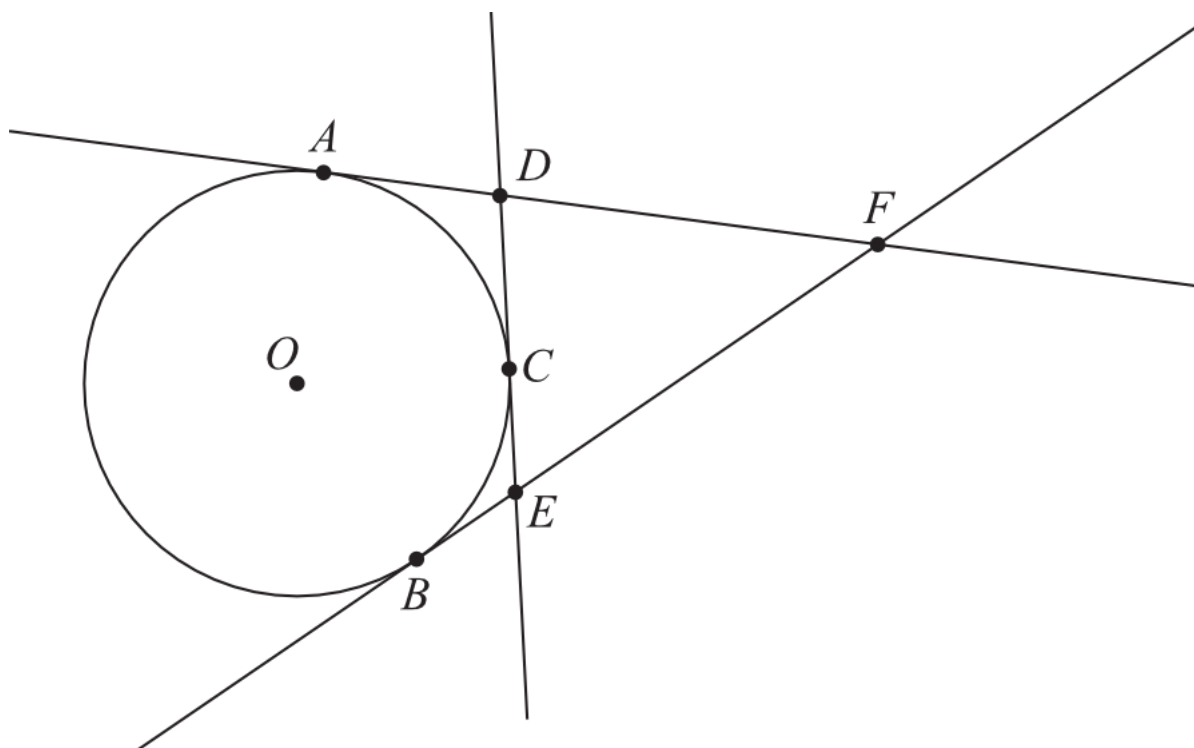
Krok 3. Zapisanie wzoru funkcji w postaci ogólnej i odczytanie współczynników b oraz c .

Teraz znając już wzór funkcji w postaci kanonicznej możemy przekształcić go do postaci ogólnej z której to potem odczytamy potrzebne współczynniki.

$$f(x) = -3(x - 2)^2 + 21, \quad f(x) = -3(x^2 - 4x + 4) + 21, \quad f(x) = -3x^2 + 12x - 12 + 21, \quad f(x) = -3x^2 + 12x + 9$$

To oznacza, że współczynnik $b = 12$ oraz $c = 9$.

Do okręgu o środku w punkcie O poprowadzono z trzech punktów A, B i C leżących na okręgu styczne, które przecięły się w punktach D, E i F (zobacz rysunek). Wykaż, że jeżeli $|AF| = x$, to obwód trójkąta DEF jest równy $2x$.



Odpowiedź: Udowodniono korzysta

Krok 1. Dostrzeżenie odcinków o jednakowej długości.

Z własności stycznych do okręgu powinniśmy zauważyć trzy pary boków o identycznych miarach:

$$|DC| = |AD|, |CE| = |BE|, |AF| = |BF|$$

Krok 2. Rozpisanie długości obwodu trójkąta.

Patrząc się na rysunek możemy zapisać, że obwód trójkąta będzie równy:

$$Obw = |EF| + |DF| + |DC| + |CE|$$

W pierwszym kroku zapisaliśmy sobie, że odcinek DC ma taką samą miarę jak odcinek AD oraz że odcinek CE ma taką samą miarę jak odcinek BE . Podmieniając te dwa odcinki w naszym powyższym zapisie otrzymamy:

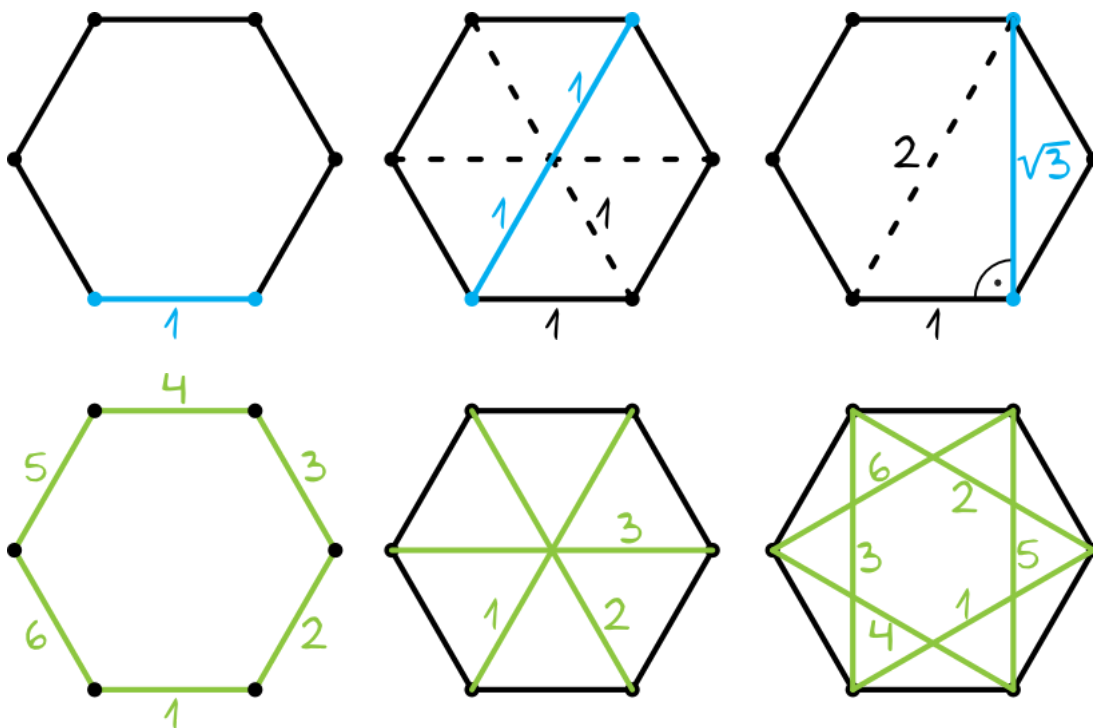
$$Obw = |EF| + |DF| + |AD| + |BE|$$

Teraz spójrzmy na nasze działanie. Z treści zadania wynika, że odcinek AF ma długość x , a na odcinek AF składa się suma $|AD| + |DF|$. Podobnie jest z odcinkiem BF na którego składa się suma $|BE| + |EF|$. To by oznaczało, że:

$$Obw = |AF| + |BF|, Obw = x + x, Obw = 2x$$

Otrzymaliśmy oczekiwaną wartość, zatem dowodzenie można uznać za zakończone.

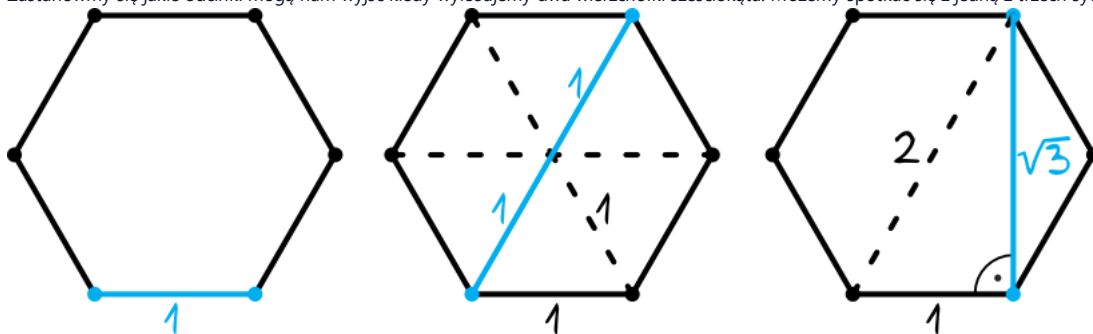
Spośród wszystkich wierzchołków sześciokąta foremnego o krawędzi 1 losujemy dowolne dwa. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane wierzchołki utworzą odcinek, którego długość jest liczbą niewymierną.



Odpowiedź: $P(A) = \frac{2}{5}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zastanówmy się jakie odcinki mogą nam wyjść kiedy wylosujemy dwa wierzchołki sześciokąta. Możemy spotkać się z jedną z trzech sytuacji:

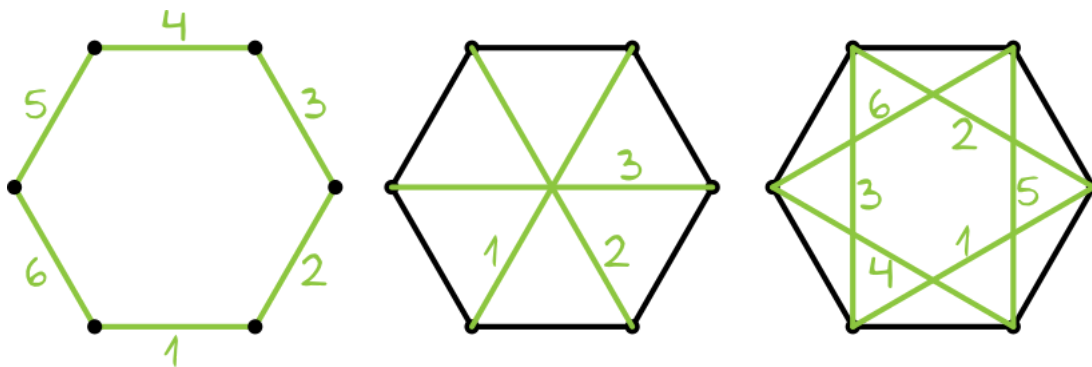


- w pierwszej sytuacji kiedy wylosowane punkty są sąsiadującymi wierzchołkami to otrzymamy odcinek o długości 1.
- w drugiej sytuacji wylosowane punkty mogą utworzyć dłuższą przekątną sześciokąta. Jej długość jest równa $1 + 1 = 2$, co widać wyraźnie na naszym rysunku (dłuższe przekątne podzieliły nam sześciokąt na sześć trójkątów równobocznych).
- w trzeciej sytuacji wylosowane punkty mogą utworzyć krótszą przekątną sześciokąta. Jej długość jest zgodnie z własnościami trójkątów o kątach 30° , 60° , 90° równa $\sqrt{3}$.

Krok 2. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Analizując nasz sześciokąt możemy dostrzec, że losując dwa dowolne wierzchołki możemy otrzymać:

- 6 boków o długości 1 (to będą boki sześciokąta)
- 3 dłuższe przekątne o długości 2
- 6 krótszych przekątnych o długości $\sqrt{3}$ (utworzą one taką gwiazdkę)



Łącznie jest to $6 + 3 + 6 = 15$ różnych odcinków. Możemy więc zapisać, że $|\Omega| = 15$.

Krok 3. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Zdarzeniami sprzyjającymi będzie wylosowanie odcinka o długości niewymiernej, czyli w tym przypadku o długości $\sqrt{3}$. Mamy takich 6 odcinków, zatem $|A| = 6$.

Krok 4. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

UWAGA: Zadanie jest dość mylące, bowiem tak prawdę mówiąc nigdzie nie jest powiedziane, że nie można byłoby wylosować dwóch tych samych wierzchołków i tym samym długość takiego odcinka byłaby równa 0. Powiększyłaby nam się w ten sposób o 6 liczba możliwych zdarzeń elementarnych. Moim zdaniem jeżeli ktoś na prawdziwej maturze obliczyłby to zadanie w taki sposób, otrzymując prawdopodobieństwo równe $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$, to zadanie też byłoby uznane.

Dany jest skończony, pięciowyrazowy ciąg $(4a - 5; a; b; b + 2; 9)$. Trzy pierwsze wyrazy tego ciągu są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a trzy ostatnie są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz a i b .

Odpowiedź: $a = 2, b = 1$ lub $\sqrt{a}$

Krok 1. Zapisanie równań wynikających z własności ciągów.

Dla trzech następujących po sobie wyrazów ciągu arytmetycznego zachodzi następująca zależność:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Skoro trzy pierwsze wyrazy, czyli $4a - 5; a; b$, są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to korzystając z powyższej własności otrzymamy równanie:

$$a = \frac{4a - 5 + b}{2}$$

Dla trzech następujących po sobie wyrazów ciągu geometrycznego zachodzi następująca zależność:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Skoro trzy ostatnie wyrazy, czyli $b; b + 2; 9$, są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to korzystając z powyższej własności otrzymamy równanie:

$$(b + 2)^2 = b \cdot 9, \quad b^2 + 4b + 4 = 9b, \quad b^2 - 5b + 4 = 0$$

Krok 2. Obliczenie wartości b .

Z zależności wynikającej z własności ciągów geometrycznych otrzymaliśmy równanie kwadratowe $b^2 - 5b + 4 = 0$. Rozwiązaniem tego równania będzie nasza niewiadoma b . Skoro tak, to rozwiążmy to równanie, wykorzystując niezawodną deltę:

Współczynniki: $a = 1, b = -5, c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$b_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - 3}{2 \cdot 1} = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad b_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + 3}{2 \cdot 1} = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Wyszło nam więc, że są dwie możliwości $b = 1$ oraz $b = 4$ i żadnej z nich nie możemy wykluczyć. Obydwie otrzymane odpowiedzi są jak najbardziej prawidłowe.

Krok 3. Obliczenie wartości a .

W pierwszym kroku korzystając z własności ciągów arytmetycznych otrzymaliśmy równanie $a = \frac{4a - 5 + b}{2}$. Skoro znamy już wartość b , to możemy teraz obliczyć wartość a . Z racji tego, że otrzymaliśmy dwa warianty naszej liczby b , to musimy to uwzględnić przy wyznaczaniu wartości a :

Jeżeli $b = 1$, to:

$$a = \frac{4a - 5 + b}{2}, \quad a = \frac{4a - 5 + 1}{2}, \quad a = \frac{4a - 4}{2}, \quad 2a = 4a - 4, \quad -2a = -4, \quad a = 2$$

Jeżeli $b = 4$, to:

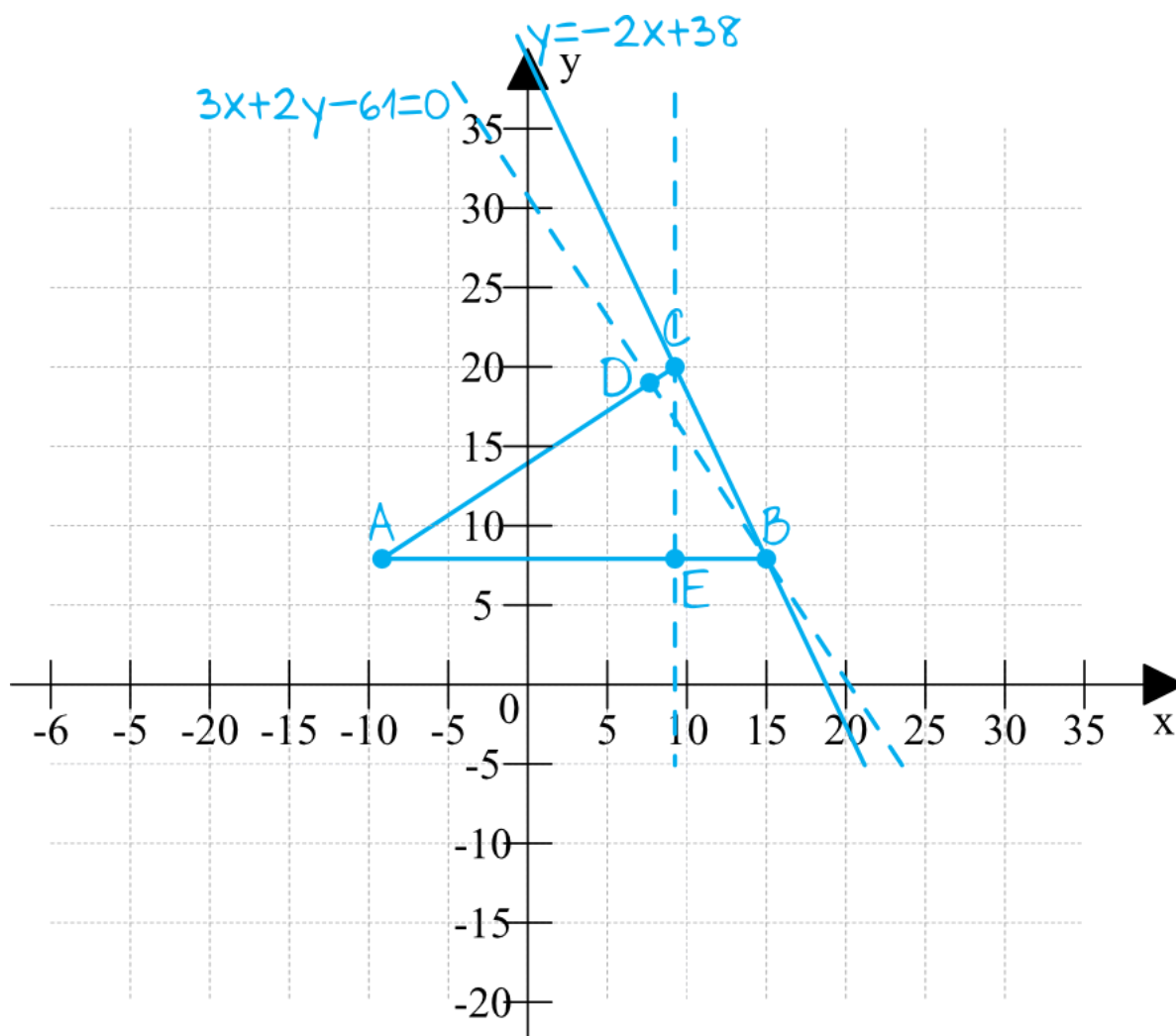
$$a = \frac{4a - 5 + b}{2}, \quad a = \frac{4a - 5 + 4}{2}, \quad a = \frac{4a - 1}{2}, \quad 2a = 4a - 1, \quad -2a = -1, \quad a = \frac{1}{2}$$

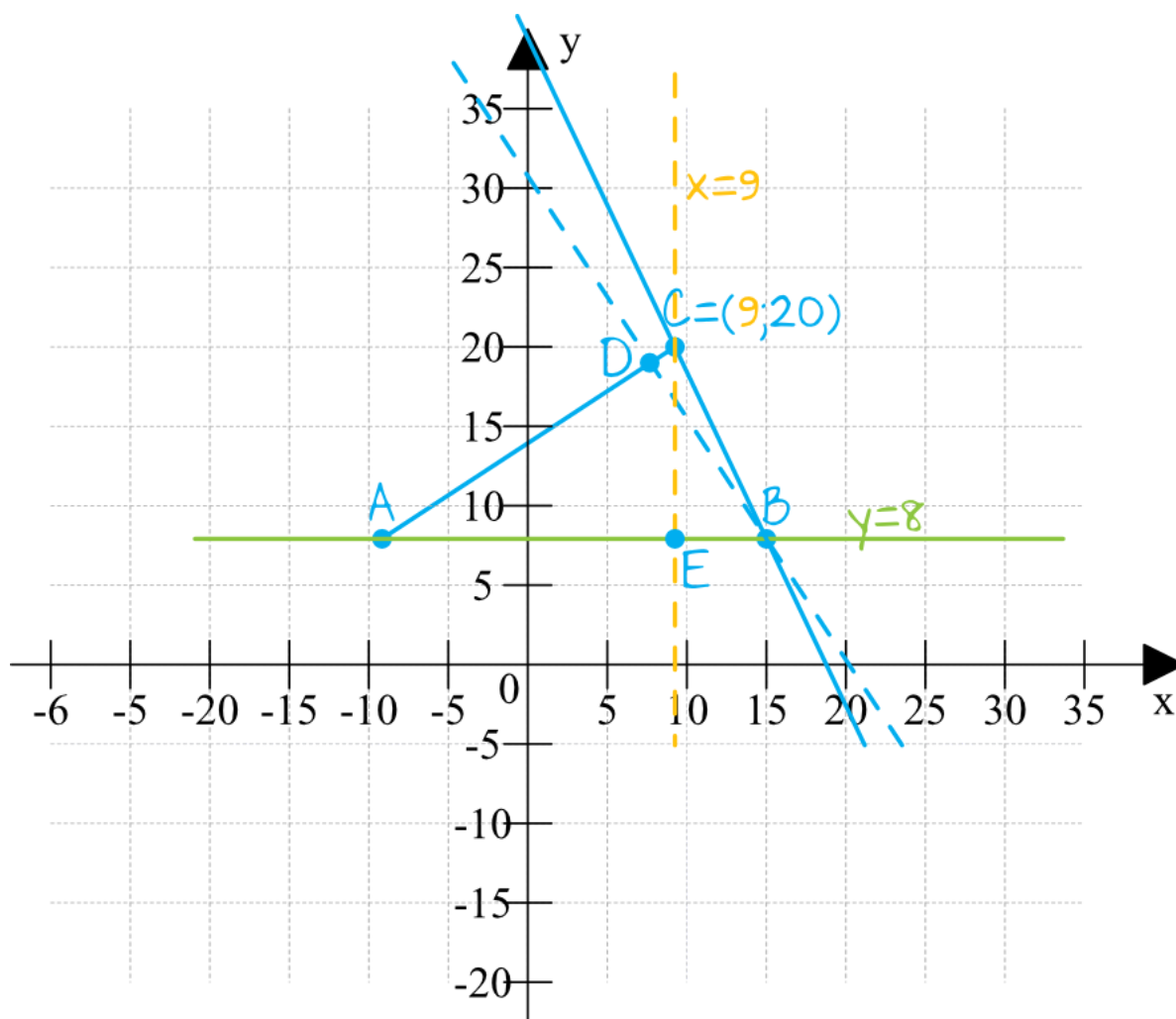
I tu ponownie, żadnego rozwiązania nie możemy wykluczyć. To z kolei oznacza, że to zadanie ma dwa rozwiązania: $a = 2, b = 1$ lub też $a = \frac{1}{2}, b = 4$.

Zadanie 33

0-4 pkt

Dany jest trójkąt ABC , w którym $A = (-9, 8)$. Bok BC tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = -2x + 38$. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka B ma równanie $3x + 2y - 61 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C oraz napisz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C .

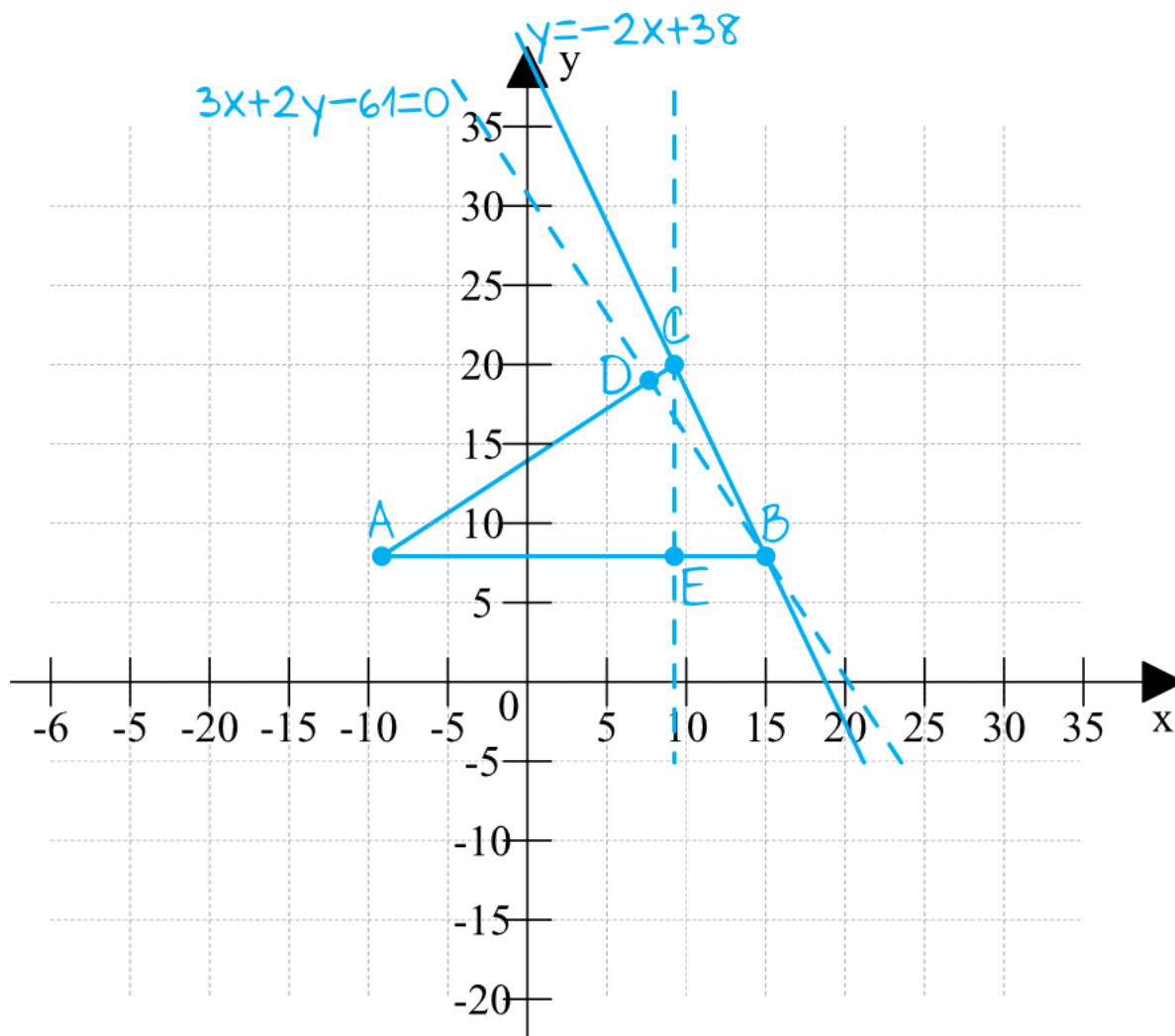




Odpowiedź: $B = (15, 8)$, $\setminus C = (9, 20)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Narysujmy sobie szkic całej sytuacji, tak aby mieć lepszy podgląd na to co trzeba zrobić:



Liniami przerywanymi zostały narysowane wysokości opuszczone z wierzchołka B oraz C .

Krok 2. Wyznaczenie współrzędnych punktu B .

Z treści zadania (i tym samym z rysunku) wynika, że proste o równaniu $y = -2x + 38$ oraz $3x + 2y - 61 = 0$ przecinają się w punkcie B . Zgodnie z tak zwaną geometryczną interpretacją układu równań wiemy, że rozwiązaniem układu równań zbudowanego z dwóch prostych będzie miejsce ich przecięcia. W ten sposób będziemy mogli wyznaczyć współrzędne punktu B , zatem:

$$\begin{cases} y = -2x + 38 \\ 3x + 2y - 61 = 0 \end{cases}$$

Podstawiając pierwsze równanie do drugiego otrzymamy:

$$3x + 2 \cdot (-2x + 38) - 61 = 0, 3x - 4x + 76 - 61 = 0, -x + 15 = 0, x = 15$$

Znając wartość x możemy teraz obliczyć wartość y , podstawiając do dowolnego z równań (np. pierwszego) wartość $x = 15$:

$$y = -2x + 38, y = -2 \cdot 15 + 38, y = -30 + 38, y = 8$$

To oznacza, że $B = (15, 8)$.

Krok 3. Zapisanie równania prostej BD w postaci kierunkowej.

Prosta BD będąca wysokością poprowadzoną z wierzchołka B jest zapisana w postaci ogólnej, a my za chwilę będziemy potrzebować postaci kierunkowej (do wyznaczenia prostej prostopadłej). W związku z tym już teraz przekształćmy ten zapis do wspomnianej postaci kierunkowej:

$$3x + 2y - 61 = 0, 2y = -3x + 61, y = -\frac{3}{2}x + 30\frac{1}{2}$$

Krok 4. Wyznaczenie równania prostej AC .

Wiemy, że prosta AC jest prostopadła do prostej BD . Z własności prostych prostopadłych wynika, że aby dwie proste były względem prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych musi być równy -1 . Prosta BD ma współczynnik kierunkowy równy $a = -\frac{3}{2}$, zatem prosta AC , czyli prosta prostopadła, będzie mieć ten współczynnik równy $a = \frac{2}{3}$, bo $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$. To oznacza, że prosta AC wyraża się równaniem $y = \frac{2}{3}x + b$. Brakuje nam jeszcze wartości współczynnika b , a poznamy go podstawiając do tego równania współrzędne punktu A , czyli $x = -9$ oraz $y = 8$:

$$y = \frac{2}{3}x + b, 8 = \frac{2}{3} \cdot (-9) + b, 8 = -6 + b, b = 14$$

Skoro współczynnik $b = 14$ to prosta AC wyraża się równaniem $y = \frac{2}{3}x + 14$.

Krok 5. Wyznaczenie współrzędnej punktu C .

Zastosujemy identyczny zabieg co przy wyznaczaniu współrzędnych punktu B . Punkt C jest miejscem przecięcia się prostych $y = -2x + 38$ oraz $y = \frac{2}{3}x + 14$, zatem jego współrzędne obliczymy rozwiązując następujący układ równań:

$$\begin{cases} y = -2x + 38 \\ y = \frac{2}{3}x + 14 \end{cases}$$

Podstawiając pierwsze równanie do drugiego otrzymamy:

$$-2x + 38 = \frac{2}{3}x + 14 \quad \bigg/ \cdot 3, \quad -6x + 114 = 2x + 42, \quad -8x = -72, \quad x = 9$$

Znając wartość x możemy teraz obliczyć wartość y , podstawiając do dowolnego z równań (np. pierwszego) wartość $x = 9$:

$$y = -2x + 38, y = -2 \cdot 9 + 38, y = -18 + 38, y = 20$$

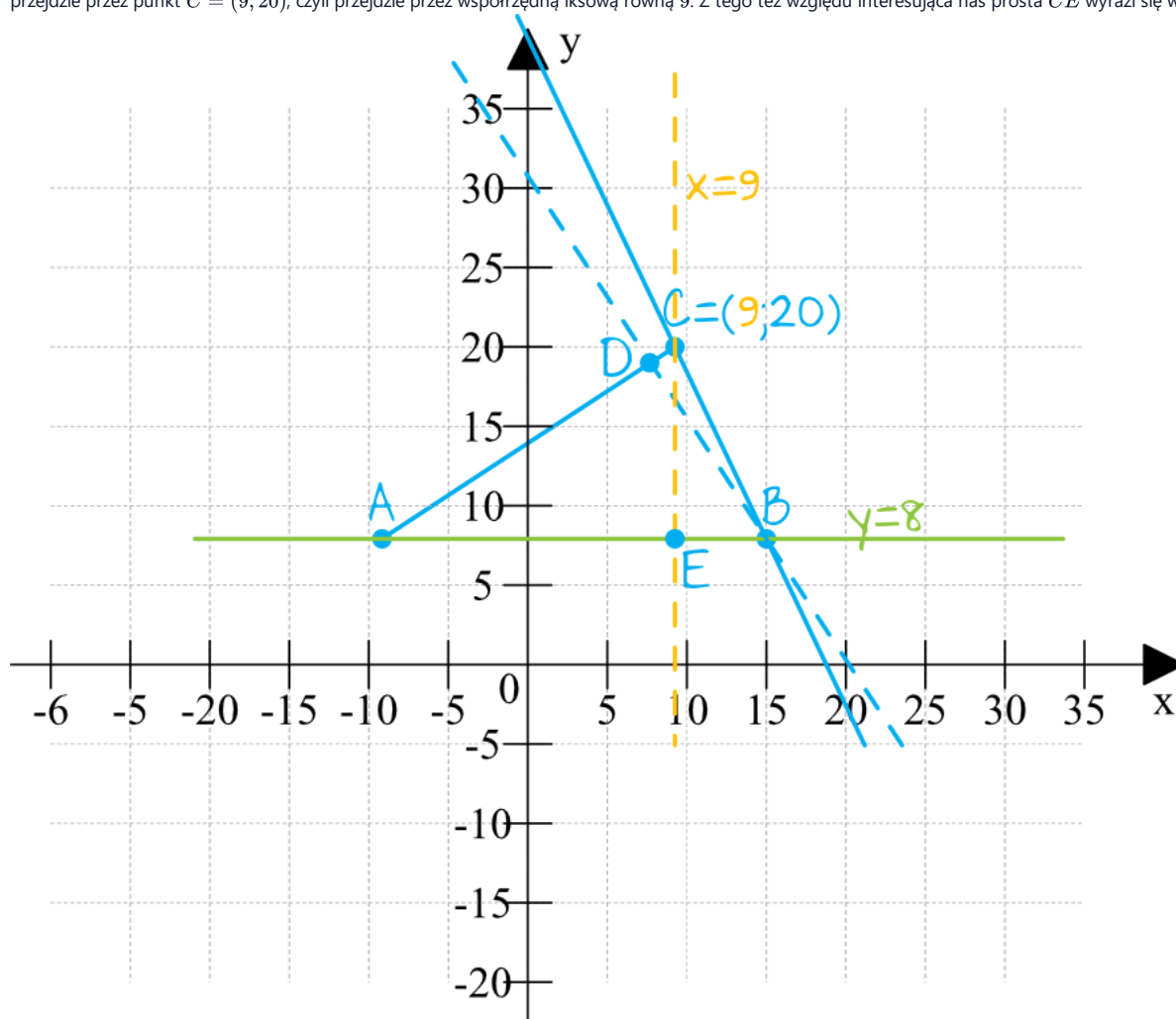
To oznacza, że $C = (9, 20)$.

Krok 6. Wyznaczenie równania prostej CE .

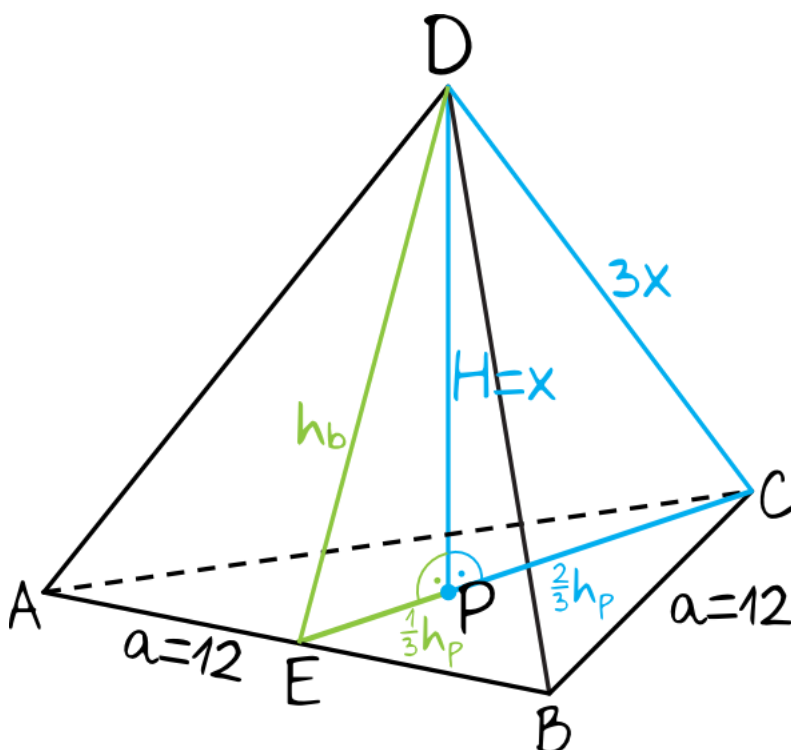
Poszukiwana przez nas prosta CE (czyli wysokość opuszczona z wierzchołka C) jest prostopadła do prostej AB . Teoretycznie powinniśmy najpierw obliczyć jakie jest równanie prostej AB , a potem obliczyć równanie prostej CE , ale da się poznać wzór tej prostej znacznie szybciej.

Powinniśmy zauważyć, że punkty A i B mają jednakową współrzędną y , czyli leżą "na tej samej linii". Bez żadnych więc obliczeń możemy zapisać, że prosta AB wyraża się równaniem $y = 8$. Prostymi prostopadłymi do tej prostej byłyby więc np. $x = 1$, $x = 3$ czy też $x = 7$. Nas interesuje taka prosta prostopadła, która

przejdzie przez punkt $C' = (9, 20)$, czyli przejdzie przez współrzędną x równą 9. Z tego też względu interesująca nas prosta CE wyrazi się wzorem $x = 9$.



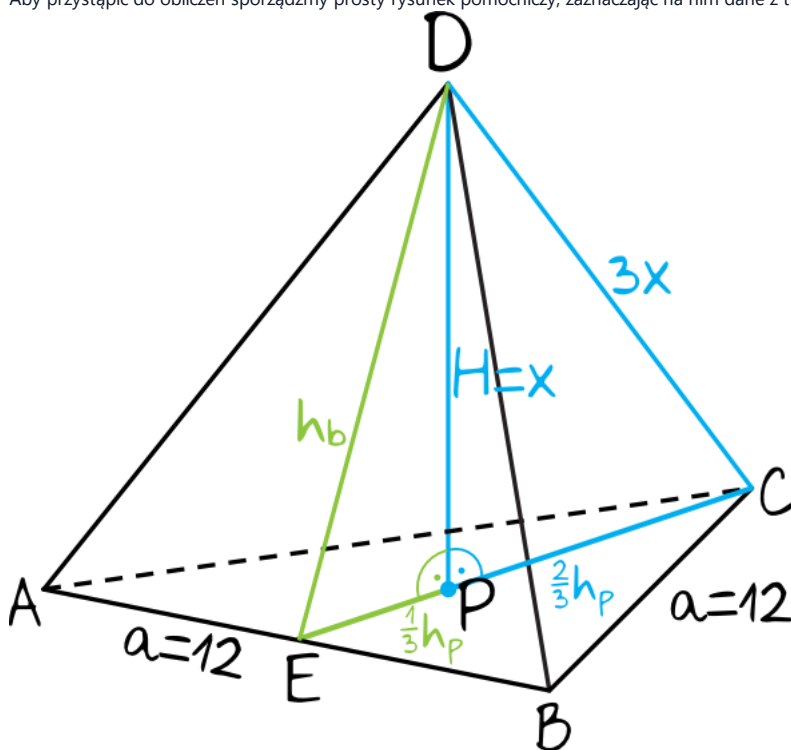
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna jest trzy razy dłuższa od wysokości ostrosłupa. Krawędź podstawy ma długość 12. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.



Odpowiedź: $V = 36\sqrt{2}$ ora

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Aby przystąpić do obliczeń sporządźmy prosty rysunek pomocniczy, zaznaczając na nim dane z treści zadania:



Krok 2. Obliczenie wysokości trójkąta znajdującego się w podstawie.

Ostrosłup jest prawidłowy, zatem w podstawie musi znaleźć się trójkąt równoboczny. Wiemy, że bok tego trójkąta ma długość $a = 12$, zatem wysokość podstawy będzie równa:

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}, h_p = \frac{12\sqrt{3}}{2}, h_p = 6\sqrt{3}$$

Krok 3. Obliczenie długości dolnej przyprostokątnej niebieskiego trójkąta prostokątnego.

Zgodnie z naszym rysunkiem (i zgodnie z własnościami trójkątów równobocznych), dolna przyprostokątna niebieskiego trójkąta prostokątnego stanowi $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego, który znalazł się w podstawie. W związku z tym:

$$PC = \frac{2}{3}h_p, PC = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3}, PC = 4\sqrt{3}$$

Krok 4. Obliczenie wysokości ostrosłupa.

Ponownie spoglądamy na niebieski trójkąt prostokątny. Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy teraz zapisać, że:

$$|PC|^2 + |PD|^2 = |CD|^2, (4\sqrt{3})^2 + x^2 = (3x)^2, 16 \cdot 3 + x^2 = 9x^2, 8x^2 = 48, x^2 = 6, x = \sqrt{6} \quad \vee \quad x = -\sqrt{6}$$

Ujemną wartość oczywiście odrzucamy, bo wysokość nie może być ujemna, czyli już wiemy, że wysokość naszego ostrosłupa to $H = \sqrt{6}$.

Krok 5. Obliczenie długości dolnej przyprostokątnej zielonego trójkąta prostokątnego.

Zgodnie z naszym rysunkiem dolna przyprostokątna zielonego trójkąta prostokątnego ma długość $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego, który znalazł się w podstawie, zatem:

$$EP = \frac{1}{3}h_p, EP = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3}, EP = 2\sqrt{3}$$

Krok 6. Obliczenie wysokości ściany bocznej.

Do obliczenia pola powierzchni bocznej musimy znać wysokość ściany bocznej. W tym celu spoglądamy na nasz zielony trójkąt prostokątny i korzystając z Twierdzenia Pitagorasa otrzymamy:

$$|EP|^2 + |PD|^2 = |ED|^2, (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 = |ED|^2, 4 \cdot 3 + 6 = |ED|^2, 12 + 6 = |ED|^2, |ED|^2 = 18, |ED| = \sqrt{18} \quad \vee \quad |ED| = -\sqrt{18}$$

Długość odcinka nie może być ujemna, zatem zostaje nam $|ED| = \sqrt{18}$, co możemy jeszcze rozpisać jako $|ED| = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$. To oznacza, że wysokość ściany bocznej jest równa $h_b = 3\sqrt{2}$.

Krok 7. Obliczenie objętości ostrosłupa.

Mamy już komplet informacji na temat naszego ostrosłupa. Wiemy, że w podstawie jest trójkąt równoboczny o boku $a = 12$, wiemy też że $H = \sqrt{6}$, zatem:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H, V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H, V = \frac{1}{3} \cdot \frac{144\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6}, V = \frac{1}{3} \cdot \frac{144\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6}, V = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}, V = 12\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}, V = 12\sqrt{18}, V = 12\sqrt{9 \cdot 2}$$

Krok 8. Obliczenie pola powierzchni bocznej.

Na pole powierzchni bocznej składają się 3 ściany, każda z nich ma podstawę o długości $a = 12$ oraz wysokość $h_b = 3\sqrt{2}$. W związku z tym:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2}ah, P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3\sqrt{2}, P_b = 18 \cdot 3\sqrt{2}, P_b = 54\sqrt{2}$$