

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Operon 2017

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	A ($-\frac{3}{2}$)	1
2	B ($\langle -13, -12 \rangle$)	1
3	B (4)	1
4	B ($\frac{8}{5}$)	1
5	A ($x = \frac{61}{48}$)	1
6	C ($24\sqrt{3}$)	1
7	B ($A = (-\frac{1}{2}, 2)$)	1
8	D (0)	1
9	D (20°)	1
10	B ($16\sqrt{5}$)	1
11	C ($\begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ k = 3 \end{cases}$)	1
12	C ($f(x) = -x^2 + 4$)	1
13	C ($x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$)	1
14	D ($2\sqrt{3} + 2$)	1
15	C (zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$)	1
16	D ($\langle 0, 5 \rangle$)	1
17	D ($\cos \alpha = -\frac{1}{4}$)	1
18	B ($\frac{5}{16}$)	1
19	B ($36\pi(1 + \sqrt{2})$)	1
20	B (31)	1
21	D (21)	1
22	B ($\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$)	1
23	D ($x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

Liczba $\log_2 \frac{1}{\sqrt{8}}$ jest równa:

Odpowiedź: A ($-\frac{3}{2}$)

Wykonując działania na potęgach, pierwiastkach i logarytmach możemy zapisać, że:

$$\log_2 \frac{1}{\sqrt{8}} = \log_2 (\sqrt{8})^{-1} = \log_2 (8^{\frac{1}{2}})^{-1} = \log_2 8^{-\frac{1}{2}} = \dots = \log_2 (2^3)^{-\frac{1}{2}} = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \log_2 2 = -\frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{3}{2}$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Liczba $a = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$ należy do przedziału:

Odpowiedź: B ($(-13, -12)$)

Idea tego zadania jest tak naprawdę usunięcie niewymierności z mianownika. Za chwilę sobie ten sposób omówimy, ale można to zadanie rozwiązać także na kalkulatorze. Stosując przybliżenie $\sqrt{2} \approx 1,41$ możemy zapisać, że:

$$a = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}, a \approx \frac{14 \cdot 1,41}{1,41-3}, a \approx \frac{19,74}{-1,59}, a \approx -12,42$$

Chcąc rozwiązać to zadanie bardziej matematycznie możemy zapisać, że:

$$a = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}, a = \frac{(14\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2}-3) \cdot (\sqrt{2}+3)}, a = \frac{14 \cdot 2 + 42\sqrt{2}}{2-9}, a = \frac{28+42\sqrt{2}}{-7}, a = -4-6\sqrt{2}, a \approx -4-6 \cdot 1,41, a \approx -12,46$$

W obydwu metodach wyszło nam, że liczba a należy do przedziału $(-13, -12)$.

Zadanie 3

0-1 pkt

Reszta z dzielenia liczby naturalnej x przez 9 jest równa 7. Reszta z dzielenia kwadratu tej liczby przez 9 jest równa:

Odpowiedź: B (4)

Krok 1. Zapisanie liczby x w postaci wyrażenia algebraicznego.

Zastanówmy się co to znaczy, że po podzieleniu liczby x przez 9 mamy resztę równą 7. Przykładowo takimi liczbami mogą być 16, 25 lub też 34. Mielibyśmy wtedy taką sytuację:

$$16 = 9 \cdot 1 + 7, 25 = 9 \cdot 2 + 7, 34 = 9 \cdot 3 + 7$$

To oznacza, że taką liczbę x możemy zapisać jako:

$$x = 9 \cdot k + 7 \quad (k \in N)$$

Krok 2. Obliczenie wartości liczby x^2 .

Teraz naszym zadaniem jest odpowiedzenie na pytanie jaką resztę otrzymamy kiedy to podzielimy x^2 przez 9. Obliczmy zatem najpierw ile jest równe to nasze x^2 , a z pomocą przyjdą nam tutaj wzory skróconego mnożenia.

$$x^2 = (9k + 7)^2, x^2 = 81k^2 + 126k + 49$$

Krok 3. Obliczenie reszty z dzielenia x^2 przez 9.

Wiemy już ile jest równe nasze x^2 i teraz musimy odpowiedzieć na pytanie jaka jest reszta z dzielenia $81k^2 + 126k + 49$ przez 9. Musimy więc zapisać tę naszą liczbę w taki sposób, by przed nawias wyłączyć dziewiątkę, a za nawiasem by mieć jakąś konkretną liczbę naturalną (która będzie resztą z takiego dzielenia). 81 oraz 126 są podzielne przez 9, natomiast 49 podzielne przez 9 nie jest. Z tego też względu będziemy musieli rozbić to 49 na np. $45 + 4$. Całość wyglądać będzie następująco:

$$x^2 = 81k^2 + 126k + 49, x^2 = 81k^2 + 126k + 45 + 4, x^2 = 9 \cdot (9k^2 + 14k + 5) + 4$$

To oznacza, że liczba x^2 podzielona przez 9 daje wynik $9k^2 + 14k + 5$ i resztę równą 4.

Zadanie 4

0-1 pkt

Prosta l przechodzi przez punkty $A = (6, -7)$, $B = (-10, 3)$. Prosta k jest symetralną odcinka AB . Współczynnik kierunkowy prostej k jest równy:

Odpowiedź: B ($\frac{8}{5}$)

Krok 1. Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej l .

Jesteśmy w stanie wyznaczyć pełny wzór prostej l (bo znamy współrzędne dwóch punktów przez które ona przechodzi, więc możemy skorzystać np. z metody układu równań), ale nam do tego zadania wystarczy poznanie współczynnika kierunkowego tej prostej, a wyznaczyć go możemy z następującego wzoru:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad a = \frac{3 - (-7)}{-10 - 6}, \quad a = \frac{3 + 7}{-16}, \quad a = \frac{10}{-16}, \quad a = -\frac{5}{8}$$

Krok 2. Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej k .

Prosta k jest symetralną do odcinka AB . My wiemy, że symetralna do odcinka jest zawsze prostą prostopadłą. Wniosek dla nas z tego płynie taki, że prosta k jest prostopadła do prostej l . Aby dwie proste były względem siebie prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych musi być równy -1 . Skoro więc prosta l ma współczynnik $a = -\frac{5}{8}$, to prosta k będzie miała ten współczynnik równy $a = \frac{8}{5}$, bo $-\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5} = -1$.

Zadanie 5

0-1 pkt

Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$. Liczby a_3, a_5 są wyrazami tego ciągu, a liczby (a_3, x, a_5) tworzą ciąg arytmetyczny. Liczba x jest równa:

Odpowiedź: A ($x = \frac{61}{48}$)

Krok 1. Obliczenie wartości a_3 .

Podstawiając do wzoru $n = 3$ otrzymamy:

$$a_3 = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3 + 3}, \quad a_3 = \frac{6 + 1}{6}, \quad a_3 = \frac{7}{6}$$

Krok 2. Obliczenie wartości a_5 .

Podstawiając do wzoru $n = 5$ otrzymamy:

$$a_5 = \frac{2 \cdot 5 + 1}{5 + 3}, \quad a_5 = \frac{10 + 1}{8}, \quad a_5 = \frac{11}{8}$$

Krok 3. Obliczenie wartości x .

Wiemy, że a_3, x, a_5 są trzema sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego. Z własności ciągów arytmetycznych wynika, że w takiej sytuacji wartość środkowego z tych trzech wyrazów jest równa średniej arytmetycznej dwóch wyrazów skrajnych, czyli w naszym przypadku:

$$x = \frac{a_3 + a_5}{2}, \quad 2x = a_3 + a_5, \quad 2x = \frac{7}{6} + \frac{11}{8}, \quad 2x = \frac{56}{48} + \frac{66}{48}, \quad 2x = \frac{122}{48}, \quad x = \frac{61}{48}$$

Zadanie 6

0-1 pkt

Dana jest funkcja określona wzorem $y = x^2 - 4\sqrt{3}x + 12$. Trzecia potęga jedyne miejsca zerowego tej funkcji to liczba:

Odpowiedź: C ($24\sqrt{3}$)

Krok 1. Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji.

Musimy znaleźć miejsce zerowe tej funkcji (przy okazji możemy wyczytać, że będzie tylko jedno takie miejsce), zatem musimy rozwiązać równanie:

$$x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0$$

Teraz możemy przejść do obliczenia delty, choć jeśli jesteśmy spostrzegawczy to wyjątkowo tutaj liczenie delty możemy pominąć. Dlaczego? Skoro jest jedno miejsce zerowe, to delta na pewno wyjdzie równa 0 (wiemy to bez liczenia). Możemy więc od razu przejść do obliczenia miejsca zerowego ze wzoru $x = \frac{-b}{2a}$. Jeżeli jednak tego nie dostrzegliśmy, to możemy to zadanie rozwiązać jak każde inne:

Współczynniki: $a = 1$, $b = -4\sqrt{3}$, $c = 12$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 16 \cdot 3 - 48 = 48 - 48 = 0$$

Otrzymaliśmy deltę równą 0 zatem mamy tylko jedno rozwiązanie równania kwadratowego:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4\sqrt{3})}{2 \cdot 1} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Krok 2. Podniesienie wyniku do potęgi trzeciej.

Zgodnie z treścią zadania to jeszcze nie jest koniec rozwiązania, bo proszą nas o podanie trzeciej potęgi obliczonej przed chwilą liczby, zatem:

$$(2\sqrt{3})^3 = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

Zadanie 7

0-1 pkt

Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ należy punkt:

Odpowiedź: B ($A = (-\frac{1}{2}, 2)$)

Naszym zadaniem jest podstawienie do wzoru każdego z tych czterech proponowanych punktów. I faktycznie możemy podstawiać po kolei wartości współrzędnych tych punktów, sprawdzając kiedy lewa strona równania będzie równa prawej, ale jak się przyjrzymy odpowiedziom to okaże się, że wystarczy podstawić do tego wzoru $x = -\frac{1}{2}$ oraz $x = 2$ (bo tylko takie mamy współrzędne x-owe w odpowiedziach) i sprawdzić jakie otrzymamy wyniki.

Dla $x = -\frac{1}{2}$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = (4^{-1})^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Dla $x = 2$:

$$f(2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

To oznacza, że do funkcji należy punkt $A = (-\frac{1}{2}, 2)$, bo podstawiając $x = -\frac{1}{2}$ otrzymaliśmy rzeczywiście wartość równą 2.

Zadanie 8

0-1 pkt

Dany jest ciąg geometryczny o wyrazach różnych od 0. Suma siódmego i ósmego wyrazu tego ciągu jest równa 0. Oznacza to, że suma tysiąca początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

Odpowiedź: D (0)

Krok 1. Ustalenie ilorazu ciągu geometrycznego.

Z treści zadania wynika, że:

$$a_7 + a_8 = 0, \quad a_8 = -a_7$$

Teraz musimy się zastanowić co z tego wynika. Skoro ósmy wyraz ma być równy $-a_7$ to znaczy, że ósmy wyraz powstał po pomnożeniu a_7 przez -1 . Czyli z tego wniosek jest taki, że w tym ciągu $q = -1$.

Krok 2. Obliczenie sumy tysiąca początkowych wyrazów.

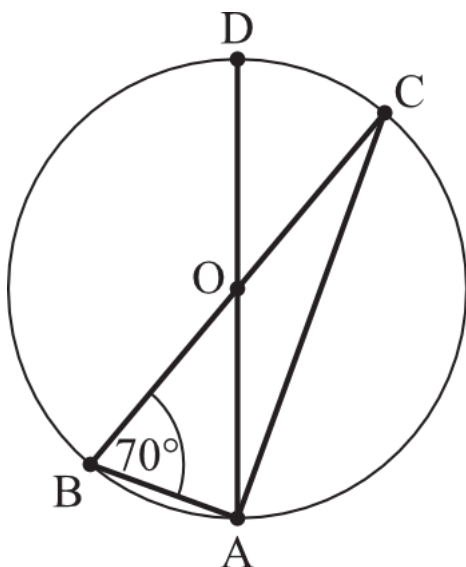
Korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego możemy zapisać, że:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad S_{1000} = a_1 \cdot \frac{1 - (-1)^{1000}}{1 - (-1)}, \quad S_{1000} = a_1 \cdot \frac{1 - 1}{1 + 1}, \quad S_{1000} = a_1 \cdot \frac{0}{2}, \quad S_{1000} = a_1 \cdot 0, \quad S_{1000} = 0$$

Zadanie 9

0-1 pkt

Punkty A, B, C, D należą do okręgu o środku O . Jeśli kąt ABC ma miarę 70° , to kąt DAC ma miarę:



Odpowiedź: D (20°)

Krok 1. Obliczenie miary kąta OAB .

Musimy zauważyć, że trójkąt ABO jest trójkątem równoramiennym - jego ramionami są długości promienia poprowadzone z punktu O . Z własności trójkątów równoramiennych wynika, że kąty przy podstawie mają jednakową miarę, zatem:

$$|\angle OAB| = 70^\circ$$

Krok 2. Obliczenie miary kąta BAC .

Teraz spójrzmy na trójkąt ABC . Jest to trójkąt w którym jeden z boków pokrywa się ze średnicą okręgu. Skoro tak, to musi to być trójkąt prostokątny, zatem:

$$|\angle BAC| = 90^\circ$$

Krok 3. Obliczenie miary kąta DAC .

Kąt DAC jest tak naprawdę różnicą między kątem prostym BAC oraz kątem OAB , zatem:

$$|\angle DAC| = |\angle BAC| - |\angle OAB|, \quad |\angle DAC| = 90^\circ - 70^\circ, \quad |\angle DAC| = 20^\circ$$

Trójkąty ABC i DEF są podobne. Obwód trójkąta ABC jest równy 16, a jego pole 12. Pole trójkąta DEF jest równe 60. Zatem obwód trójkąta DEF jest równy:

Odpowiedź: B ($16\sqrt{5}$)

Krok 1. Obliczenie skali podobieństwa.

Jeżeli jeden trójkąt jest podobny do drugiego w skali k , to powierzchnia tego drugiego trójkąta będzie k^2 razy większa od tego pierwszego. W naszym przypadku będziemy więc mogli ułożyć następujące równanie:

$$k^2 = \frac{P_{DEF}}{P_{ABC}}, \quad k^2 = \frac{60}{12}, \quad k^2 = 5, \quad k = \sqrt{5}$$

Krok 2. Obliczenie obwodu trójkąta DEF .

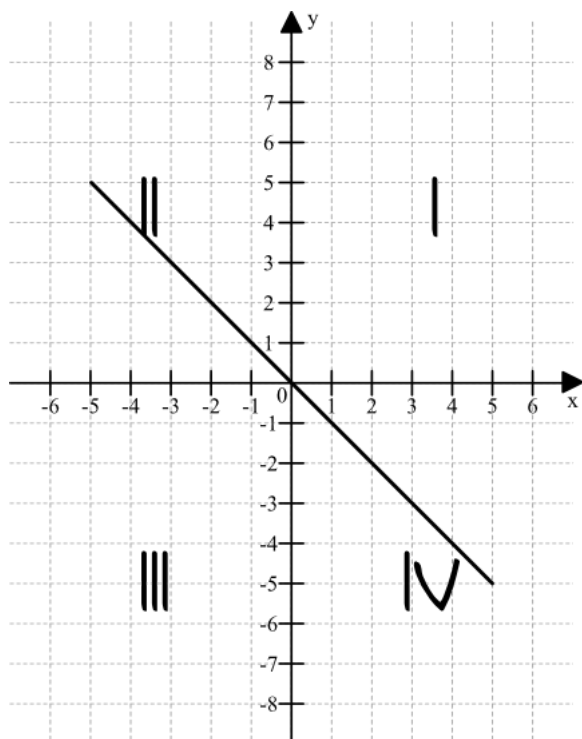
Z naszych obliczeń wynika, że skala podobieństwa jest równa $k = \sqrt{5}$, czyli trójkąt DEF ma $\sqrt{5}$ razy dłuższe boki od trójkąta ABC . Skoro więc trójkąt ABC ma obwód równy 16, to trójkąt DEF ma obwód równy $16\sqrt{5}$. Chcąc zapisać to bardziej matematycznie to otrzymamy:

$$k = \frac{Obw_{DEF}}{Obw_{ABC}}, \quad \sqrt{5} = \frac{Obw_{DEF}}{16} \quad \Bigg/ \cdot 16, \quad Obw_{DEF} = 16\sqrt{5}$$

Zadanie 11

0-1 pkt

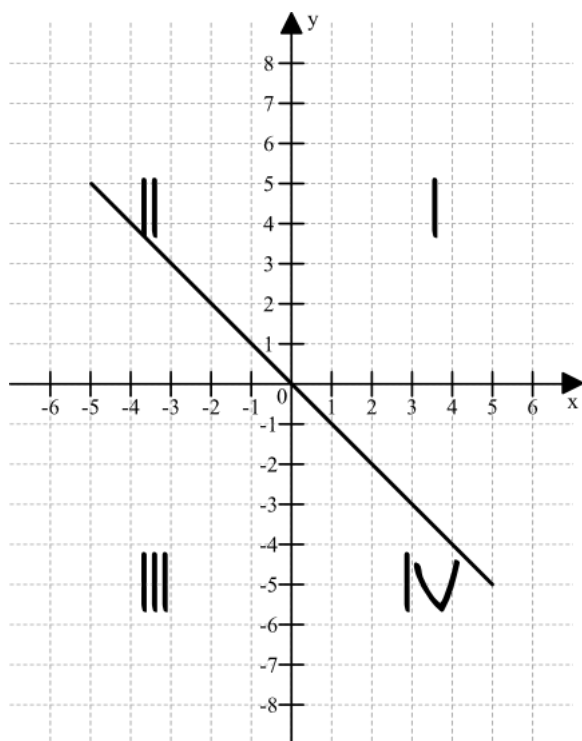
Wykres funkcji $f(x) = (4m - 2)x + k - 3$ przechodzi tylko przez II i IV ćwiartkę układu współrzędnych. Oznacza to, że:



Odpowiedź: C $\left\{ \begin{matrix} m < \frac{1}{2} \\ k = 3 \end{matrix} \right.$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Jeżeli wykres naszej funkcji przechodzi przez II i IV ćwiartkę, to musi wyglądać on w ten sposób:



Krok 2. Ustalenie wartości parametru m .

Z rysunku wynika, że nasza prosta jest malejąca, a skoro tak, to współczynnik kierunkowy a musi być ujemny. W naszym przypadku współczynnik kierunkowy jest równy $4m - 2$, czyli powstanie nam następująca nierówność:

$$a < 0, 4m - 2 < 0, 4m < 2, m < \frac{1}{2}$$

To oznacza, że odpowiedzi A i D możemy od razu odrzucić.

Krok 3. Ustalenie wartości parametru k .

Z rysunku możemy jeszcze wywnioskować, że prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych (nie ma innej możliwości, skoro przechodzi tylko przez te dwie ćwiartki). Mając równanie prostej w postaci $y = ax + b$ współczynnik b mówi nam o tym w którym miejscu prosta przecina oś igreków. W naszym przypadku prosta przecina oś igreków dla $y = 0$, zatem współczynnik $b = 0$. Współczynnikiem b w naszej funkcji jest wyrażenie $k - 3$, zatem:

$$b = 0, \quad k - 3 = 0, \quad k = 3$$

To oznacza, że prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź C.

Zadanie 12

0-1 pkt

Wzór funkcji, której wykres powstaje przez symetrię osiową względem osi OX wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 4$, to:

Odpowiedź: C ($f(x) = -x^2 + 4$)

Jeżeli funkcję $f(x)$ przekształcimy symetralnie względem osi x , to powstanie nam funkcja $-f(x)$. Nasza funkcja wyraża się wzorem $x^2 - 4$, zatem funkcja powstała w wyniku symetrii względem osi x będzie mieć wzór $-(x^2 - 4)$, czyli $-x^2 + 4$.

Zadanie 13

0-1 pkt

Wyrażenie wymierne $W = \frac{x-3}{x^2-4x+4}$ jest określone dla:

Odpowiedź: C ($x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$)

W związku z tym, że w matematyce nie istnieje dzielenie przez zero, to mianownik naszego ułamka musi być różny od zera. To oznacza, że musimy sprawdzić kiedy $x^2 - 4x + 4 = 0$. Z racji tego iż jest to równanie kwadratowe, to najprościej będzie je policzyć tradycyjną metodą delty:

Współczynniki: $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

Delta równa zero oznacza, że równanie ma jedno rozwiązanie:

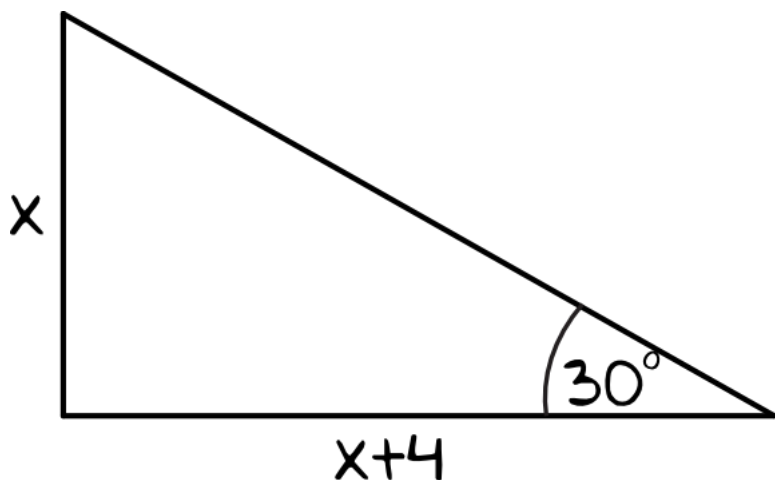
$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Otrzymaliśmy informację, że mianownik jest równy 0 dla $x = 2$, dlatego musimy odrzucić dwójkę z dziedziny funkcji. To oznacza, że dziedziną funkcji jest: $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Zadanie 14

0-1 pkt

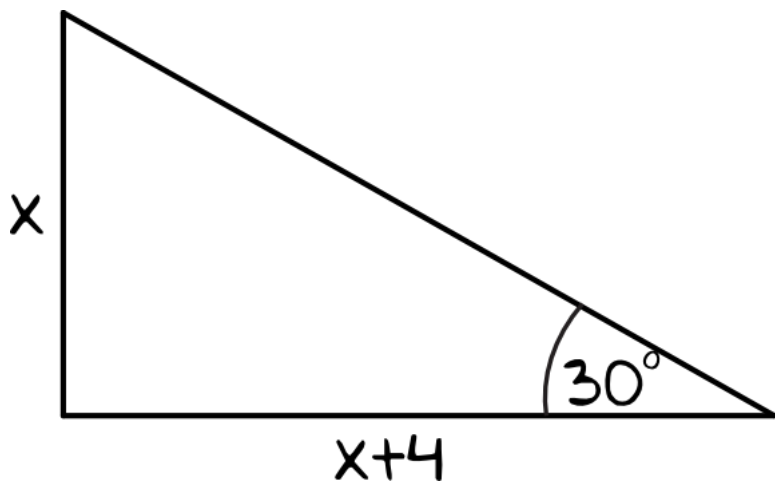
W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne różnią się o 4, a jeden z kątów ma miarę 30° . Krótsza przyprostokątna tego trójkąta ma długość:



Odpowiedź: D $(2\sqrt{3} + 2)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy narysować wskazany trójkąt prostokątny, zaznaczając na nim informacje z treści zadania. Kluczowe jest tutaj umiejscowienie kąta 30° . Jest to na pewno najmniejszy kąt w tym trójkącie, czyli musi leżeć przy dłuższej przyprostokątnej:



Krok 2. Zapisanie i rozwiązanie równania.

Korzystając z funkcji trygonometrycznych (a konkretniej z tangensa) możemy zapisać, że:

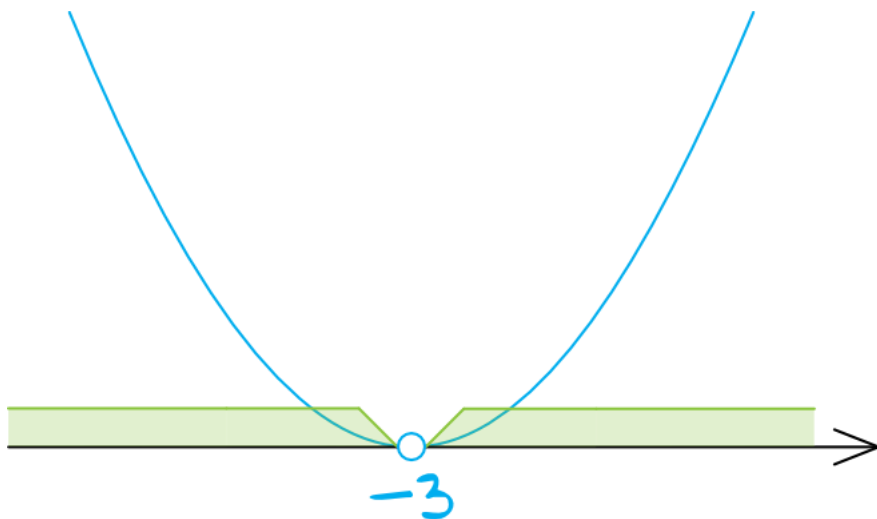
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{x+4}, \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{x+4}$$

Mnożąc na krzyż otrzymamy:

$$3x = \sqrt{3}(x+4), \quad 3x = \sqrt{3}x + 4\sqrt{3}, \quad 3x - \sqrt{3}x = 4\sqrt{3}, \quad (3 - \sqrt{3})x = 4\sqrt{3}, \quad x = \frac{4\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}, \quad x = \frac{(4\sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})}, \quad x = \frac{12\sqrt{3} + 12}{9 - 3}, \quad x = \frac{12\sqrt{3} + 12}{6}$$

Zadanie 15

0-1 pkt

Rozwiązaniem nierówności $(3x + 9)^2 > 0$ jest:**Odpowiedź:** C (zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$)

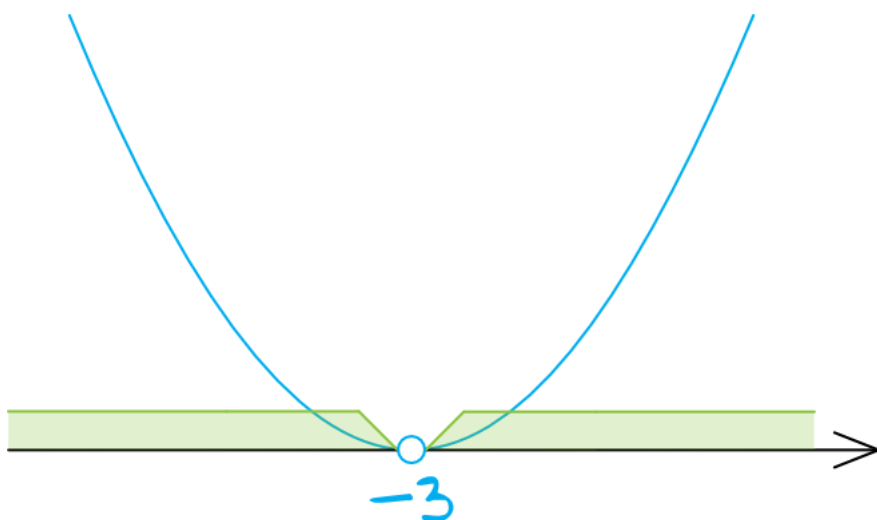
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Jak to w standardowej nierówności kwadratowej bywa - na początku musimy obliczyć miejsca zerowe. Nie musimy tutaj potęgować tego wyrażenia w nawiasie. Wyrażenie $(3x + 9)^2$ będzie równe 0 tylko i wyłącznie wtedy, kiedy wartość w nawiasie będzie równa 0. Zatem:

$$3x + 9 = 0, \quad 3x = -9, \quad x = -3$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Gdybyśmy wykonali potęgowanie, to przed x^2 nie stałaby żadna wartość ujemna, zatem współczynnik kierunkowy a jest dodatni, a co za tym idzie, parabola będzie mieć ramiona skierowane do góry. Zaznaczamy na osi miejsce zerowe (kropka niezamalowana, bo w nierówności wystąpił znak $>$) i szkicujemy parabolę:



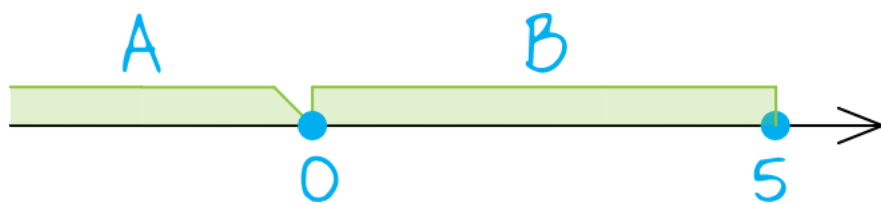
Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas wartości większe od zera, czyli wszystko to, co znalazło się nad osią x-ów. Widzimy wyraźnie, że w takim razie nierówność spełnia praktycznie każda liczba, oprócz -3 (bo dla $x = -3$ mamy wartość równą 0). Dlatego też rozwiązaniem tej nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych bez -3 .

Zadanie 16

0-1 pkt

Jeśli $A = (-\infty, 0)$ i $B = \langle 0, 5 \rangle$ to różnica przedziałów B i A jest równa:



Odpowiedź: D ($\langle 0, 5 \rangle$)

Najlepiej jest narysować sobie tę sytuację:

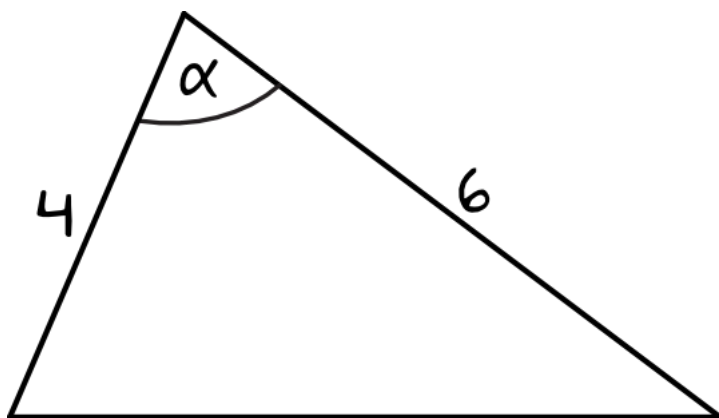


Interesuje nas różnica przedziałów B i A , czyli innymi słowy: patrzymy co mieści się w przedziale B i usuwamy z tego przedziału B wszystkie wartości, które są w A . W naszym przypadku przedziały A oraz B w ogóle nie mają ze sobą punktów wspólnych, zatem niczego z przedziału B nie usuniemy. Stąd też różnica przedziałów B i A jest równa $\langle 0, 5 \rangle$.

Zadanie 17

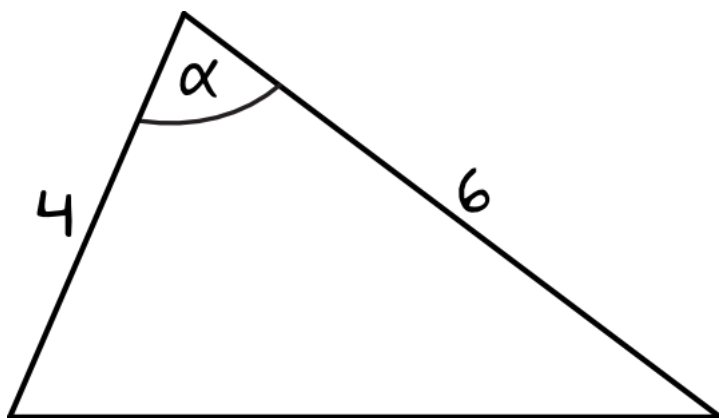
0-1 pkt

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości 4 i 6. Pole tego trójkąta jest równe $3\sqrt{15}$. Oznacza to, że jeśli kąt między bokami o długościach 4 i 6 ma miarę $\alpha > 90^\circ$, to:



Odpowiedź: D ($\cos \alpha = -\frac{1}{4}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.



Krok 2. Wyznaczenie wartości $\sin \alpha$.

W tym zadaniu skorzystamy z tak zwanego wzoru na pole trójkąta z sinusem i to z niego będziemy próbować wyznaczyć informacje na temat kąta α :

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha, \quad 3\sqrt{15} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin \alpha, \quad 3\sqrt{15} = 12 \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{3\sqrt{15}}{12}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Krok 3. Wyznaczenie wartości $\cos \alpha$.

Znając wartość sinusa możemy obliczyć wartość cosinusa, a zrobimy to wykorzystując tak zwaną jedynkę trygonometryczną.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{15}{16} + \cos^2 \alpha = 1, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{16}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{4} \quad \vee \quad \cos \alpha = -\frac{1}{4}$$

W związku z tym, że nasz kąt α jest kątem rozwartym (bo tak wynika z zadania) to musimy odrzucić dodatnie rozwiązanie cosinusa, bo dla kątów rozwartych cosinus przyjmuje jedynie ujemne wyniki. Z tego też względu zostaje nam jedynie $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Zadanie 18

0-1 pkt

Rzucono cztery razy monetą. Prawdopodobieństwo tego, że wypadnie co najwyżej 1 orzeł, jest równe:

Odpowiedź: B ($\frac{5}{16}$)

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

W każdym rzucie może выпаść jeden z dwóch wyników - orzeł lub reszka. Skoro rzucamy monetą czterokrotnie, to zgodnie z regułą mnożenia $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Sprzyjającymi zdarzeniami są wszystkie te sytuacje w których wypadnie co najwyżej jeden orzeł. Co najwyżej, czyli wypadnie raz lub nie wypadnie ani razu. Wypiszmy te zdarzenia:

$$(ORRR), (RORR), (RROR), (RRRO), (RRRR)$$

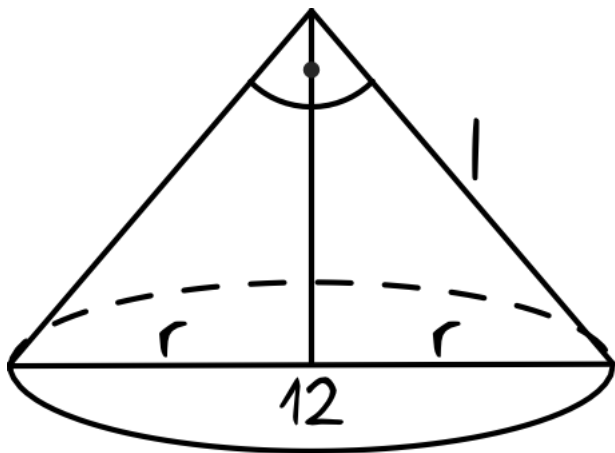
To oznacza, że tylko 5 przypadków spełnia warunki zadania, stąd też możemy napisać, że $|A| = 5$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{16}$$

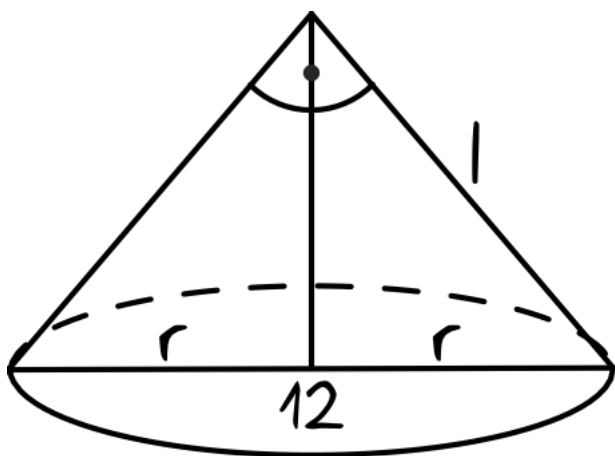
Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej długości 12. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe:



Odpowiedź: B ($36\pi(1 + \sqrt{2})$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy narysować tę sytuację, zaznaczając poprawnie wszystkie informacje z treści zadania:



Krok 2. Obliczenie długości promienia podstawy.

Przeciwprostokątna trójkąta jest jednocześnie średnicą naszego okręgu znajdującego się w podstawie, zatem promień tego okręgu będzie równy:

$$r = 12 : 2 = 6$$

Krok 3. Obliczenie długości tworzącej stożka.

Skoro jest tutaj trójkąt prostokątny, to możemy skorzystać z Twierdzenia Pitagorasa:

$$l^2 + l^2 = 12^2, \quad 2l^2 = 144, \quad l^2 = 72, \quad l = \sqrt{72} \quad \vee \quad l = -\sqrt{72}$$

Ujemną długość oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $l = \sqrt{72}$ i możemy jeszcze ten zapis nieco uprościć wyłączając czynnik przed znak pierwiastka:

$$l = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

Krok 4. Obliczenie pola powierzchni całkowitej.

Mamy już wszystkie potrzebne dane, zatem możemy przejść do obliczenia pola powierzchni całkowitej:

$$P_c = P_p + P_b, \quad P_c = \pi r^2 + \pi r l, \quad P_c = \pi r^2 + \pi r l, \quad P_c = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2}, \quad P_c = 36\pi + 36\sqrt{2}\pi, \quad P_c = 36\pi(1 + \sqrt{2})$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wyraża się wzorem $S_n = 3n^2 + 4n$. Piąty wyraz tego ciągu jest równy:

Odpowiedź: B (31)

Zastanówmy się jak podejść do tego zadania. Gdybyśmy podstawili $n = 5$ do wzoru z treści zadania to uzyskamy odpowiedź na pytanie jaka jest suma pięciu wyrazów tego ciągu, czyli dowiemy się ile jest równe $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$. My chcemy się dowiedzieć ile jest równy konkretnie ten piąty wyraz. Gdybyśmy podstawili $n = 4$, to dowiemy się ile jest równa suma czterech wyrazów tego ciągu, czyli ile jest równe $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Jak widać, różnica między sumą pięciu wyrazów i sumą czterech wyrazów jest równa właśnie wartości piątego wyrazu i to będzie klucz do rozwiązania tego zadania.

Krok 1. Obliczenie sumy pięciu początkowych wyrazów.

Podstawiając do wzoru $S_n = 3n^2 + 4n$ wartość $n = 5$ otrzymamy:

$$S_5 = 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5, S_5 = 3 \cdot 25 + 20, S_5 = 75 + 20, S_5 = 95$$

Krok 2. Obliczenie sumy czterech początkowych wyrazów.

Podstawiając teraz $n = 4$ otrzymamy:

$$S_4 = 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4, S_4 = 3 \cdot 16 + 16, S_4 = 48 + 16, S_4 = 64$$

Krok 3. Obliczenie wartości piątego wyrazu.

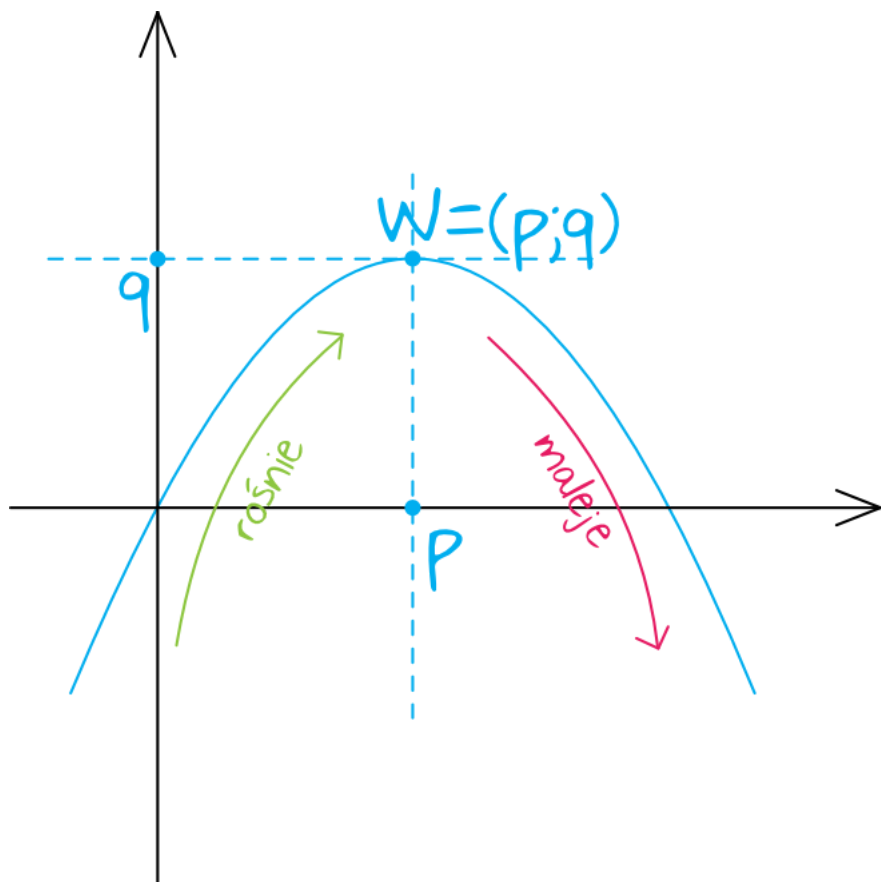
Zgodnie z planem działania, wartość piątego wyrazu będzie równa różnicy między S_5 i S_4 , zatem:

$$a_5 = S_5 - S_4, a_5 = 95 - 64, a_5 = 31$$

Zadanie 21

0-1 pkt

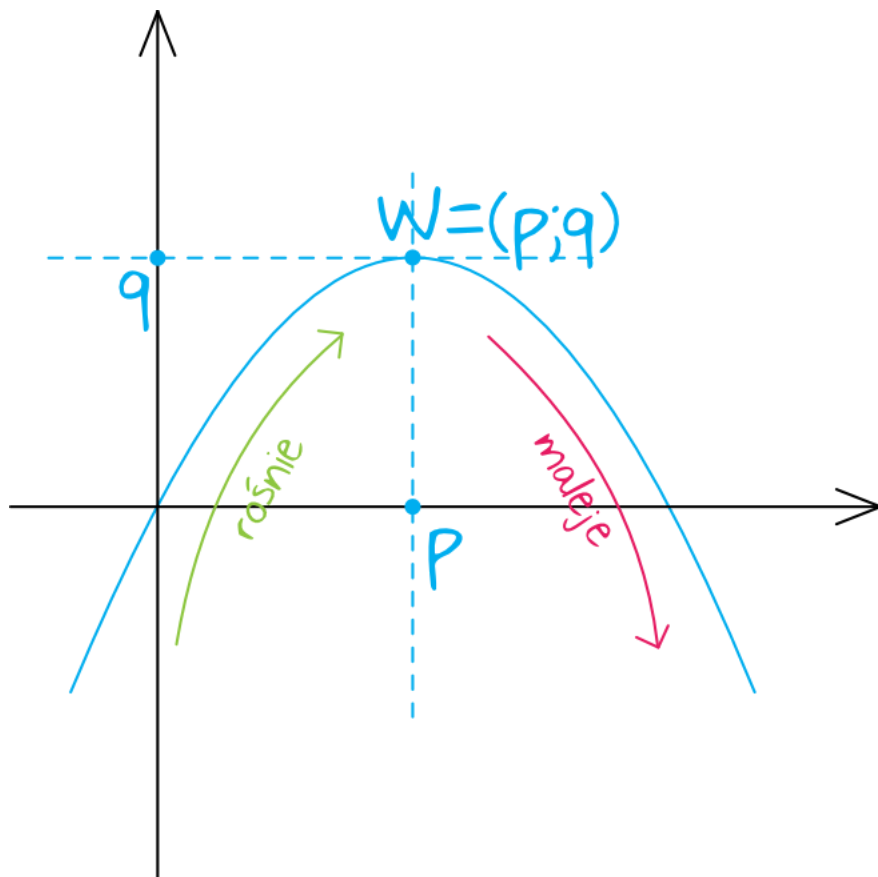
Funkcja $f(x) = (m+3)x^2 + 16x + 5$ osiąga wartość największą dla $x = 2$. Oznacza to, że największa wartość tej funkcji jest równa:



Odpowiedź: D (21)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zastanówmy się jak musi wyglądać wykres naszej funkcji. Skoro funkcja kwadratowa przyjmuje jakąś największą konkretną wartość, to całość musi wyglądać mniej więcej w ten sposób:



Skąd wiadomo, że ramiona tej paraboli będą skierowane do dołu? Gdyby skierowane były do góry, to ramiona sięgałyby nieskończoności, czyli funkcja miałaby wtedy nieskończenie wielką największą wartość dla nieskończenie wielkiego argumentu x . Taka sytuacja nam nie odpowiada, bo wiemy że największa wartość osiągnięta jest dla $x = 2$. Nie ma więc innego wyjścia, funkcja musi mieć ramiona skierowane do dołu, wtedy swoją największą wartość osiągnie w wierzchołku paraboli.

Krok 2. Obliczenie wartości parametru m .

Wiemy, że funkcja przyjmuje największą wartość dla $x = 2$, a to zgodnie z rysunkiem oznacza, że współrzędna xowa wierzchołka paraboli (zapisywana jako p) jest równa 2. Czyli $p = 2$.

Ze wzorów z tablic możemy odczytać, że współrzędną p da się obliczyć korzystając ze wzoru $p = \frac{-b}{2a}$ i to pozwoli nam wyznaczyć wartość parametru m , który ukrył się we współczynniku a . Zatem:

$$p = \frac{-b}{2a}, 2 = \frac{-16}{2 \cdot (m+3)}, 2 = \frac{-16}{2m+6} \quad / \cdot (2m+6), 4m+12 = -16, 4m = -28, m = -7$$

Krok 3. Zapisanie wzoru funkcji.

Skoro $m = -7$, to wzór naszej funkcji będzie następujący:

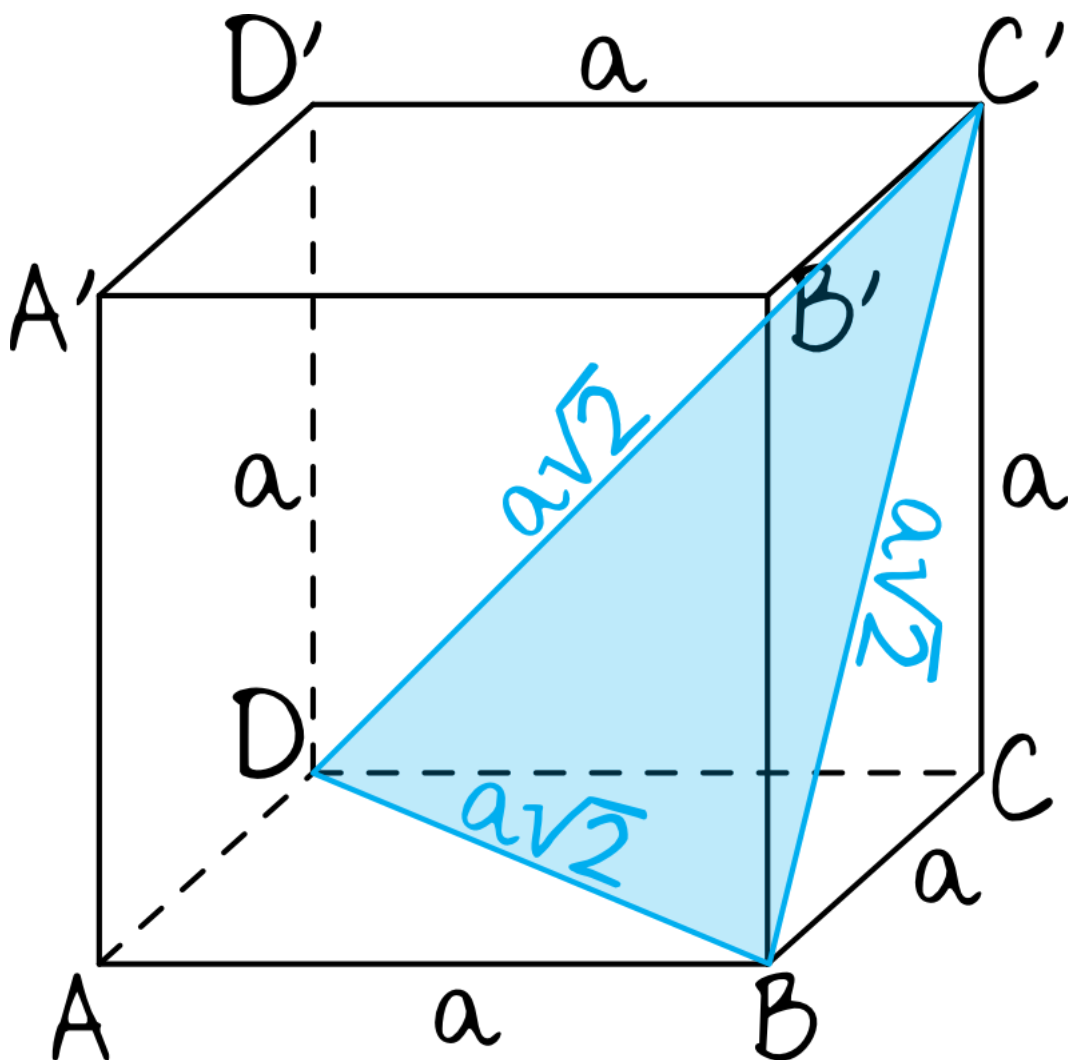
$$f(x) = (m+3)x^2 + 16x + 5, f(x) = (-7+3)x^2 + 16x + 5, f(x) = -4x^2 + 16x + 5$$

Krok 4. Obliczenie największej wartości tej funkcji.

Wiemy, że największą wartość ta funkcja osiąga dla $x = 2$, zatem:

$$f(2) = -4 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 + 5, f(2) = -4 \cdot 4 + 32 + 5, f(2) = -16 + 32 + 5, f(2) = 16 + 5, f(2) = 21$$

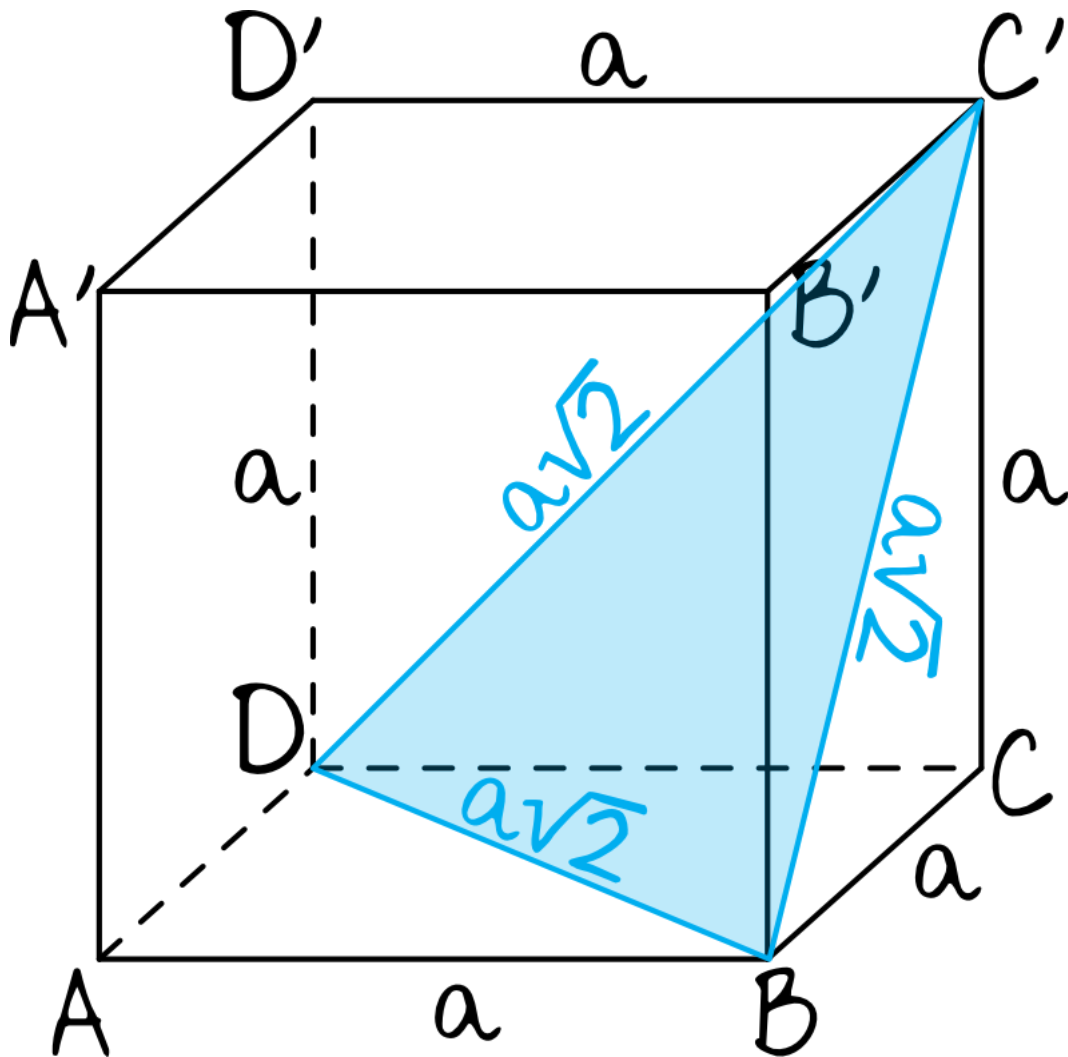
Sześcian $ABCD A' B' C' D'$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną BD dolnej podstawy i wierzchołek C' górnej podstawy. Jeśli a jest krawędzią tego sześcianu, to pole otrzymanego przekroju jest równe:



Odpowiedź: B ($\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zaznaczmy sobie przekrój, którego pole musimy policzyć i nanieśmy na rysunek dane, które pozwolą nam wykonać obliczenia.



Okazuje się, że każdy bok trójkąta jest przekątną jakiegoś kwadratu, a z własności kwadratów wiemy, że kwadrat o boku a ma przekątną o długości $a\sqrt{2}$ (stąd też te miary pojawiły się już na rysunku). To z kolei prowadzi nas do bardzo ciekawego wniosku, a mianowicie że jest to trójkąt równoboczny o bokach długości $a\sqrt{2}$.

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni przekroju.

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ możemy bez problemu obliczyć pole naszego przekroju. Trzeba tylko być ostrożnym, bo trochę niefortunnie mamy tutaj zbieżność symboli i pod a będziemy podstawiać długość $a\sqrt{2}$.

$$P = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}, P = \frac{a^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{4}, P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}, P = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$$

Zadanie 23

0-1 pkt

Jeśli $x + \frac{1}{x} = 6$, to:

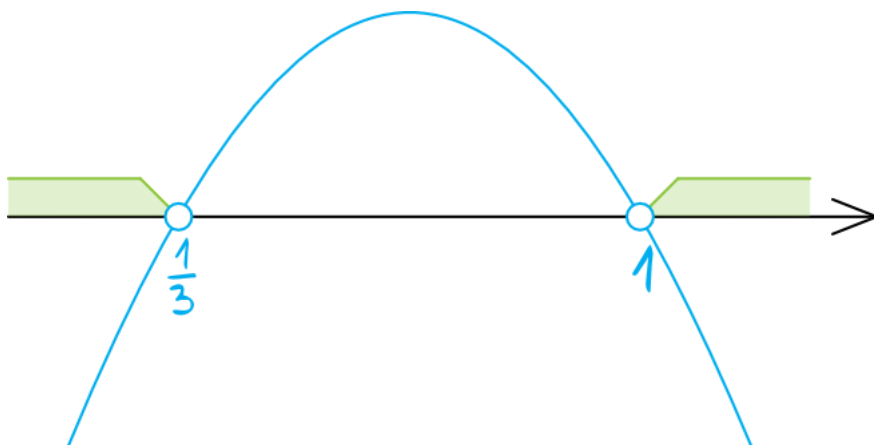
Odpowiedź: D ($x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$)

Widzimy po odpowiedziach, że będziemy musieli przekształcić to nasze wyrażenie w taki sposób, by pojawiły się kwadraty przy x'sach, zatem korzystając ze wzorów skróconego mnożenia spróbujemy przekształcić to nasze równanie do poszukiwanej postaci:

$$x + \frac{1}{x} = 6 \quad \Bigg/ \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 6^2, \quad x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1^2}{x^2} = 36, \quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 36, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$$

Zadanie 24

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $(4x - 1)^2 < (2 - 5x)^2$.**Odpowiedź:** $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$

Krok 1. Zapisanie nierówności w postaci ogólnej.

Aby przystąpić do wykonywania obliczeń musimy zapisać tę nierówność w postaci ogólnej. Musimy zatem wykonać potęgowanie i przenieść wszystkie wyrazy na lewą stronę, pozostawiając po prawej stronie samo zero.

Uwaga: Jeżeli przeniesiemy $(2 - 5x)^2$ na lewą stronę to nie powstanie nam wbrew pozorom postać iloczynowa, z której to potem łatwo wyznaczymy miejsca zerowe. Po przeniesieniu po lewej stronie powstanie nam $(4x - 1)^2 - (2 - 5x)^2$. Gdyby zamiast minusa między nawiasami było mnożenie, to wtedy byłaby to postać iloczynowa, a tak to niestety musimy wykonywać potęgowanie i potem liczyć całość z delty.

$$(4x - 1)^2 < (2 - 5x)^2, 16x^2 - 8x + 1 < 4 - 20x + 25x^2, -9x^2 + 12x - 3 < 0$$

Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

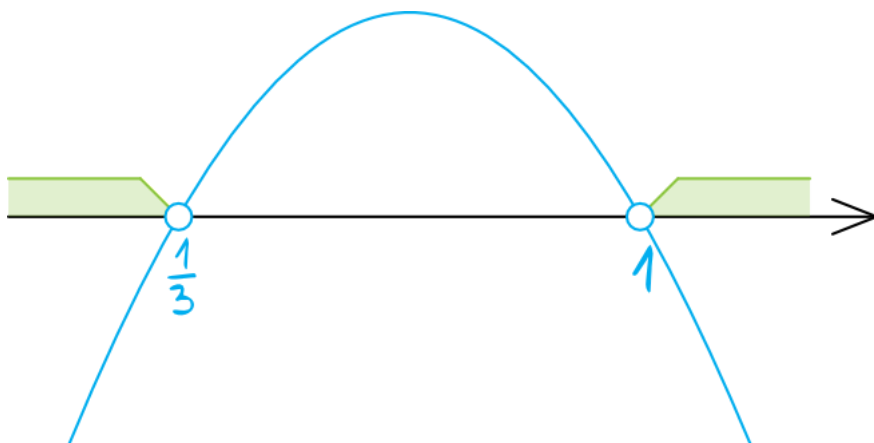
Współczynniki: $a = -9$, $b = 12$, $c = -3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-3) = 144 - 108 = 36, \sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 - 6}{2 \cdot (-9)} = \frac{-18}{-18} = 1, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 + 6}{2 \cdot (-9)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

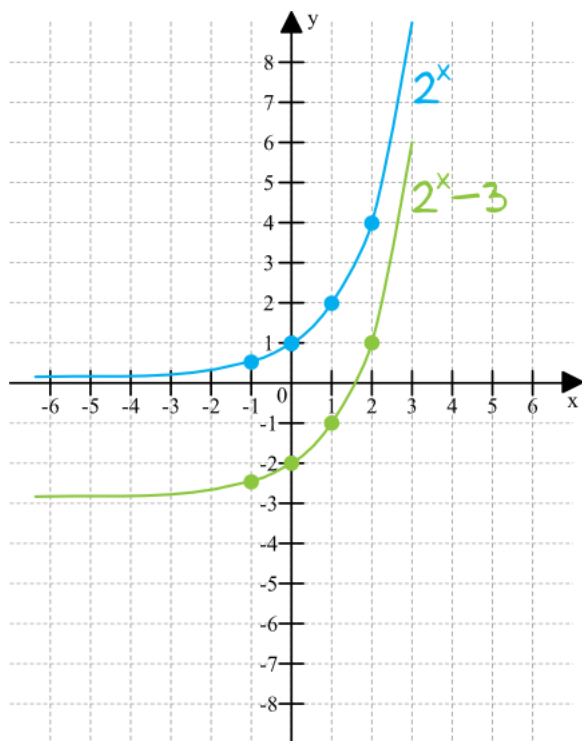
Współczynnik a był ujemny, więc parabola będzie mieć ramiona skierowane do dołu. Zaznaczamy na osi wyliczone przed chwilą miejsca zerowe (z pustymi kropkami, bo w nierówności wystąpił znak $<$).



Szukamy argumentów dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od zera, a więc interesować nas będzie suma przedziałów:

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$$

Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2^x - 3$. Podaj zbiór wartości tej funkcji.



Odpowiedź: $y \in (-3; +\infty)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku wykresu funkcji.

Podana w zadaniu funkcja jest tak naprawdę funkcją wykładniczą 2^x , która jest przesunięta o 3 jednostki w dół. Musimy więc narysować najpierw naszą funkcję wykładniczą, a następnie wykonać jej przesunięcie. Aby narysować wykres funkcji wykładniczej 2^x dobrze jest obliczyć i zaznaczyć najbardziej charakterystyczne punkty przez które taki wykres przechodzi. Z racji tego iż jest to zadanie otwarte, to powinniśmy wykonać ten wykres dość szczegółowo, stąd też policzymy sobie kilka takich kluczowych miejsc:

Dla $x = 0$ funkcja 2^x przyjmuje wartość $2^0 = 1$

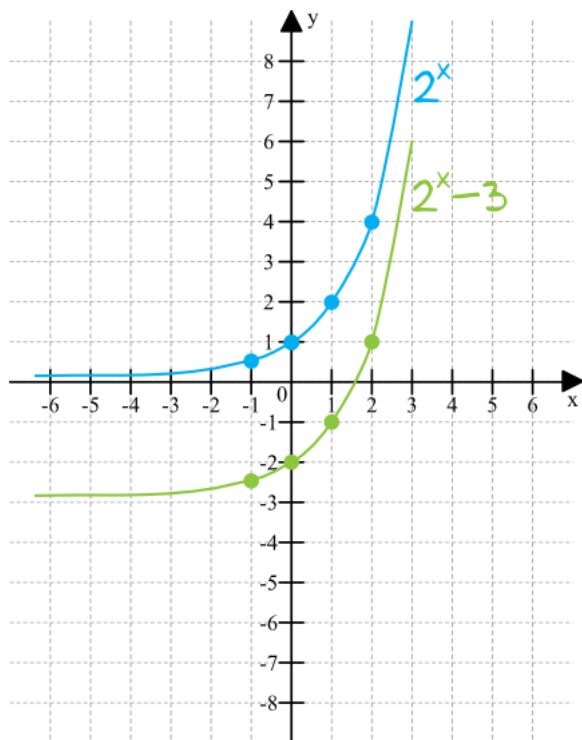
Dla $x = 1$ funkcja 2^x przyjmuje wartość $2^1 = 2$

Dla $x = 2$ funkcja 2^x przyjmuje wartość $2^2 = 4$

Dla $x = -1$ funkcja 2^x przyjmuje wartość $2^{-1} = \frac{1}{2}$

Dla $x = -2$ funkcja 2^x przyjmuje wartość $2^{-2} = \frac{1}{4}$

Teraz możemy narysować wykres funkcji 2^x (linia niebieska), a następnie przesunąć każdy z punktów o trzy jednostki w dół otrzymując wykres funkcji $2^x - 3$ (linia zielona).



Krok 2. Odczytanie zbioru wartości funkcji.

Zbiór wartości odczytujemy z osi igreków. Widzimy wyraźnie, że nasza zielona funkcja zbliża się do $y = -3$, ale nigdy tej linii nie osiągnie. To oznacza, że zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2^x - 3$ jest $y \in (-3; +\infty)$.

Zadanie 26

0-2 pkt

Wykaż, że jeśli liczba rzeczywista a spełnia warunek $a < 1$, to $\frac{1}{1-a} \geq 4a$.

Odpowiedź: Udowodniono przekształ

Krok 1. Ustalenie znaku wyrażenia $1 - a$.

Na początku musimy ustalić, czy $1 - a$ jest liczbą dodatnią, czy ujemną. To jest wbrew pozorom klucz do poprawnego rozwiązania tego zadania. Dlaczego? To co chcielibyśmy zrobić na samym początku przy rozwiązywaniu tej nierówności to wymnożyć jedną i drugą stronę przez wartość $1 - a$. I to jest dobry pomysł, pod warunkiem że jesteśmy pewni czy nasza wartość $1 - a$ jest dodatnia, czy też ujemna. Jeżeli $1 - a$ byłoby ujemne, to musielibyśmy zmienić znak nierówności na przeciwny, stąd też tak ważne jest to aby ustalić znak tego wyrażenia.

Z założeń wynika, że $a < 1$. W związku z tym:

$$a < 1, 0 < 1 - a, 1 - a > 0$$

Wartość $1 - a$ jest zawsze większa od zera, zatem wykonując mnożenie przez obie strony nierówności nie musimy zmieniać znaku.

Krok 2. Rozwiązanie nierówności.

$$\frac{1}{1-a} \geq 4a \quad / \cdot (1-a), 1 \geq 4a(1-a), 1 \geq 4a - 4a^2, 4a^2 - 4a + 1 \geq 0, (2a-1)^2 \geq 0$$

Z racji tego iż każda liczba podniesiona do kwadratu jest większa lub równa zero, to dowód możemy uznać za zakończony.

Zadanie 27

0-2 pkt

Wyznacz współczynniki b, c we wzorze funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$, jeśli wiesz, że miejsca zerowe tej funkcji są równe (-4) i 2 .

Odpowiedź: $b = 2, c = -8$

Krok 1. Zapisanie wzoru w postaci iloczynowej.

Podana w treści zadania funkcja jest przedstawiona w postaci ogólnej w której brakuje współczynników b oraz c . Jedyne co wiemy z podanej postaci ogólnej, to że $a = 1$ (bo przed x^2 nie stoi żadna inna liczba).

Dlatego też skorzystamy z informacji na temat miejsc zerowych i zapiszemy wzór tej funkcji w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), f(x) = 1 \cdot (x - (-4))(x - 2), f(x) = 1 \cdot (x - (-4))(x - 2), f(x) = (x + 4)(x - 2)$$

Krok 2. Zapisanie wzoru w postaci ogólnej.

Wymnażając teraz poszczególne nawiasy otrzymamy postać ogólną:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4x - 8, f(x) = x^2 + 2x - 8$$

Mając postać ogólną możemy teraz stwierdzić, że $b = 2$ oraz $c = -8$.

Zadanie 28

0-2 pkt

Wykaż, że jeśli liczby $(3^a, 3^b, 3^c)$ tworzą ciąg geometryczny, to liczby (a, b, c) tworzą ciąg arytmetyczny.

Odpowiedź: Udowodniono korzystając

Krok 1. Skorzystanie z własności trzech sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego.

Dla trzech sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego zachodzi równość:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Podstawiając wyrazy z treści zadania otrzymamy:

$$(3^b)^2 = 3^a \cdot 3^c, 3^{2b} = 3^{a+c}$$

Krok 2. Zakończenie dowodzenia.

Otrzymaliśmy równanie w którym po lewej i prawej stronie znajduje się trójka w podstawie potęgi. Skoro tak, to możemy "skrócić" te trójki i zostaje nam proste równanie:

$$2b = a + c, b = \frac{a + c}{2}$$

Otrzymaliśmy informację, że b jest równe $\frac{a+c}{2}$, czyli jest to dokładnie ta sama zależność, która charakteryzuje ciągi arytmetyczne, bowiem w ciągach arytmetycznych dla trzech sąsiednich wyrazów zachodzi równość:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}, b = \frac{a + c}{2}$$

To oznacza, że dowodzenie możemy uznać za skończone.

Rzucono trzy razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek jest równa co najmniej 16.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{108}$

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

W każdym rzucie może выпаść jeden z sześciu wyników - 1, 2, 3, 4, 5, 6. My rzucamy taką kostką trzykrotnie, zatem zgodnie z regułą mnożenia wszystkich możliwych zdarzeń mamy $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Sprzyjającymi zdarzeniami są wszystkie te sytuacje w których otrzymamy przynajmniej 16 oczek. Wbrew pozorom tak wielu tych zdarzeń nie będzie, bo przecież maksymalnie możemy wyrzucić 18 oczek. W związku z tym pasującymi zdarzeniami są:

$(6, 6, 6)$, $(5, 6, 6)$, $(6, 5, 6)$, $(6, 6, 5)$, $(6, 5, 5)$, $(5, 6, 5)$, $(5, 5, 6)$, $(4, 6, 6)$, $(6, 4, 6)$, $(6, 6, 4)$

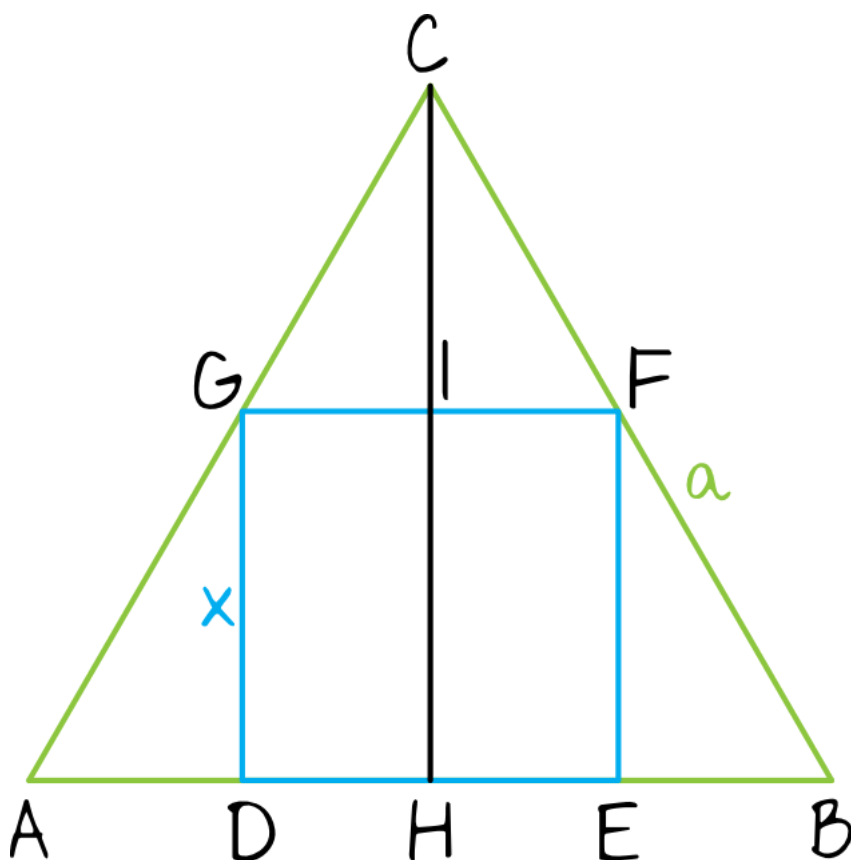
To oznacza, że tylko 10 przypadków spełnia warunki zadania, stąd też możemy napisać, że $|A| = 10$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

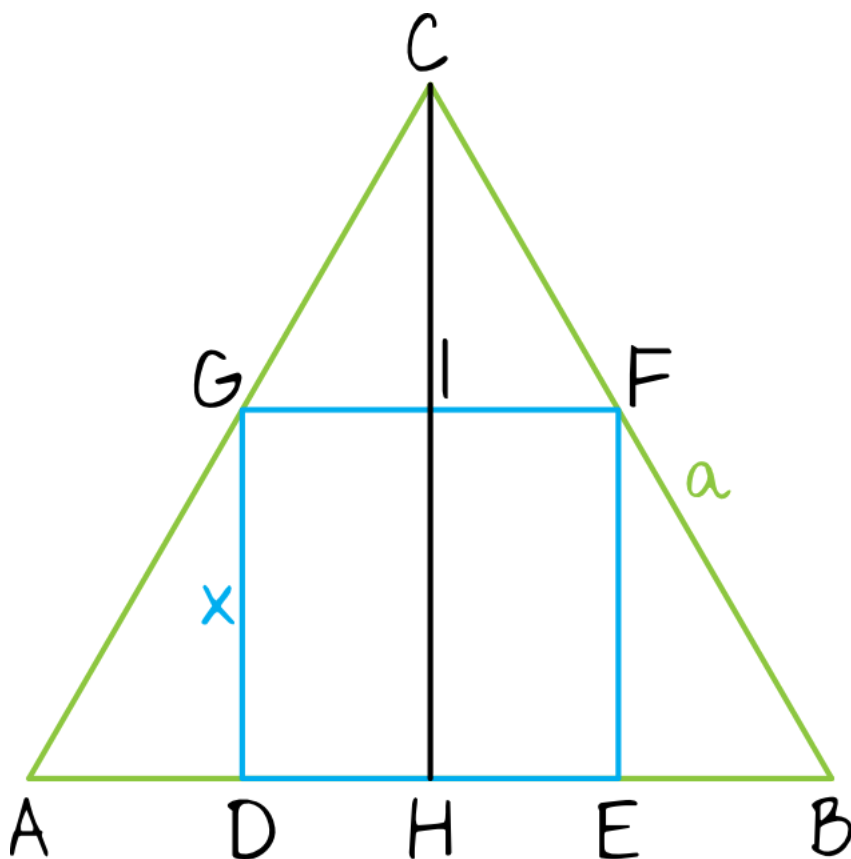
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

Wyznacz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a w ten sposób, że jeden bok kwadratu jest zawarty w boku trójkąta, a dwa wierzchołki kwadratu należą do pozostałych boków trójkąta.



Odpowiedź: $x = a(2\sqrt{3} - 3)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.
Spróbujmy sobie zwizualizować całą sytuację:



Krok 2. Dostrzeżenie trójkątów podobnych.

Skoro odcinek FG jest równoległy do podstawy AB , to trójkąt GFC jest podobny do trójkąta ABC . To z kolei oznacza, że trójkąt GFC jest także równoboczny.

Krok 3. Zapisanie równania.

Z własności trójkątów równobocznych wiemy, że:

$$|CH| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Skoro GFC jest także trójkątem równobocznym o boku długości x , to:

$$|CI| = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Patrząc się na rysunek możemy dodatkowo stwierdzić, że:

$$|CI| = |CH| - x$$

Łącząc teraz wyrażenia zapisane przed chwilą otrzymujemy równanie:

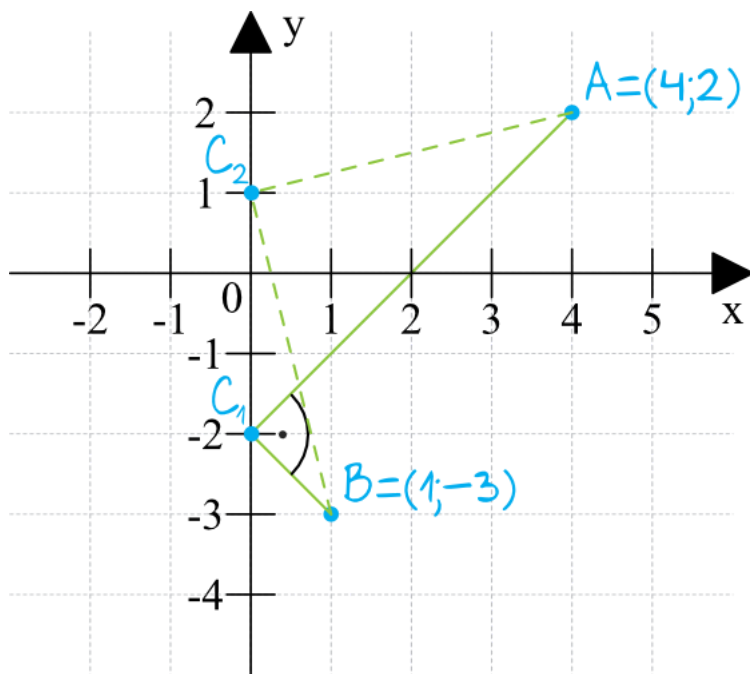
$$\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x$$

Krok 4. Rozwiązanie powstałego równania.

Najlepiej jest całość najpierw wymnożyć przez 2, aby pozbyć się ułamków, a następnie przenieść x na lewą stronę:

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x \quad \left| \cdot 2 \right., \quad x\sqrt{3} = a\sqrt{3} - 2x, \quad x\sqrt{3} + 2x = a\sqrt{3}, \quad x(2 + \sqrt{3}) = a\sqrt{3} \quad \left| : (2 + \sqrt{3}) \right., \quad x = \frac{a\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}, \quad x = \frac{a\sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})}, \quad x =$$

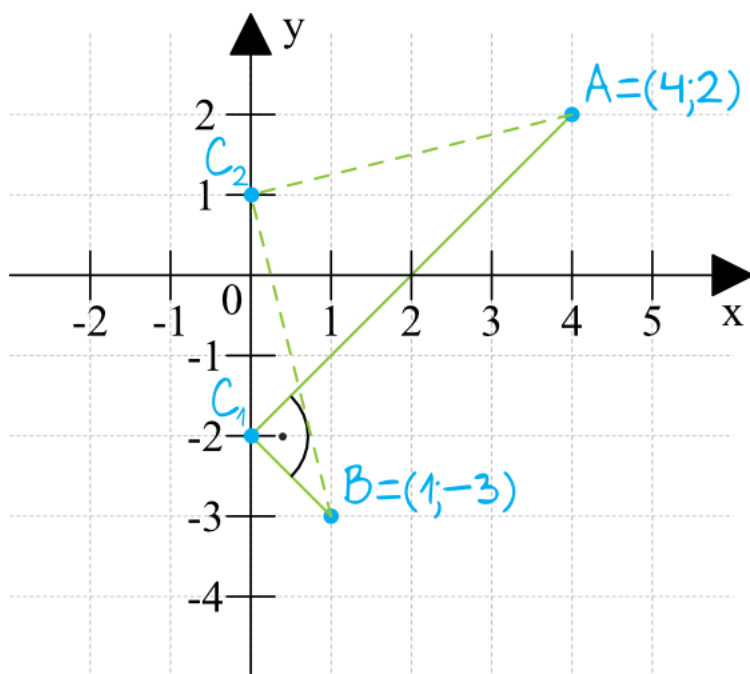
Dane są punkty $A = (4, 2)$ i $B = (1, -3)$. Wyznacz współrzędne punktu C należącego do osi OY , tak aby $|\angle ACB| = 90^\circ$.



Odpowiedź: $\setminus C=(0;-2) \setminus \text{or } C=(0$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zaznaczmy w układzie współrzędnych wskazane punkty i spróbujmy wskazać przybliżoną pozycję punktu C , tak aby powstał nam kąt 90° .



Ten konkretny rysunek już nam nieco zdradza, że będą dwa rozwiązania tego zadania, aczkolwiek nic się nie stanie kiedy nasz szkic uwzględni tylko jedną opcję (wszystko i tak wyjdzie w trakcie liczenia). Sam rysunek ma nam tylko przybliżyć omawianą sytuację.

To co jest bardzo ważne i co powinno wynikać ze szkicu, to fakt że punkt C jest na osi OY , a skoro tak, to jedną z jego współrzędnych już znamy i jest to $x = 0$. Możemy nawet zapisać, że $C = (0; y)$. W związku z tym musimy tak naprawdę policzyć tylko współrzędną igrekową tego punktu, która w dalszej części zadania będzie oznaczana właśnie symbolem y .

Krok 2. Wyznaczenie współczynników kierunkowych prostej AC oraz BC .

Korzystając ze wzoru na współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez dwa punkty możemy zapisać, że:

$$a_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}, \quad a_{AC} = \frac{y - 2}{0 - 4}, \quad a_{AC} = \frac{y - 2}{-4}$$

$$a_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}, \quad a_{BC} = \frac{y - (-3)}{0 - 1}, \quad a_{BC} = \frac{y + 3}{-1}$$

Krok 3. Ułożenie i rozwiązanie równania.

Skoro proste AC oraz BC przecinają się pod kątem prostym, to iloczyn ich współczynników kierunkowych musi być równy -1 . W związku z tym:

$$a_{AC} \cdot a_{BC} = -1, \quad \frac{y-2}{-4} \cdot \frac{y+3}{-1} = -1, \quad \frac{(y-2) \cdot (y+3)}{4} = -1, \quad (y-2) \cdot (y+3) = -4, \quad y^2 + 3y - 2y - 6 = -4, \quad y^2 + y - 2 = 0$$

Krok 4. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Powstało nam równanie kwadratowe, zatem:

Współczynniki: $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 - (-8) = 1 + 8 = 9, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2, \quad y_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Krok 5. Analiza otrzymanego wyniku i zapisanie rozwiązania zadania.

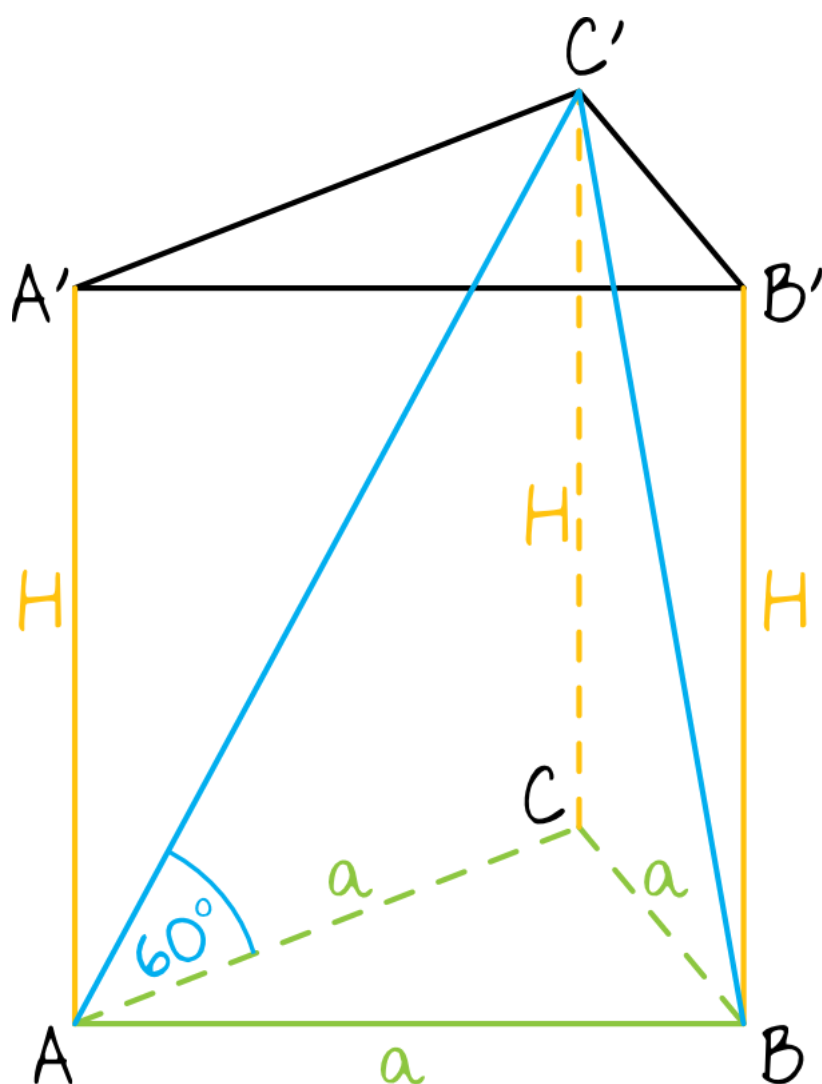
Otrzymaliśmy dwie możliwości współrzędnej igrekowej punktu C . Żadnej z nich nie możemy odrzucić, a to oznacza, że to zadanie ma dwa rozwiązania:

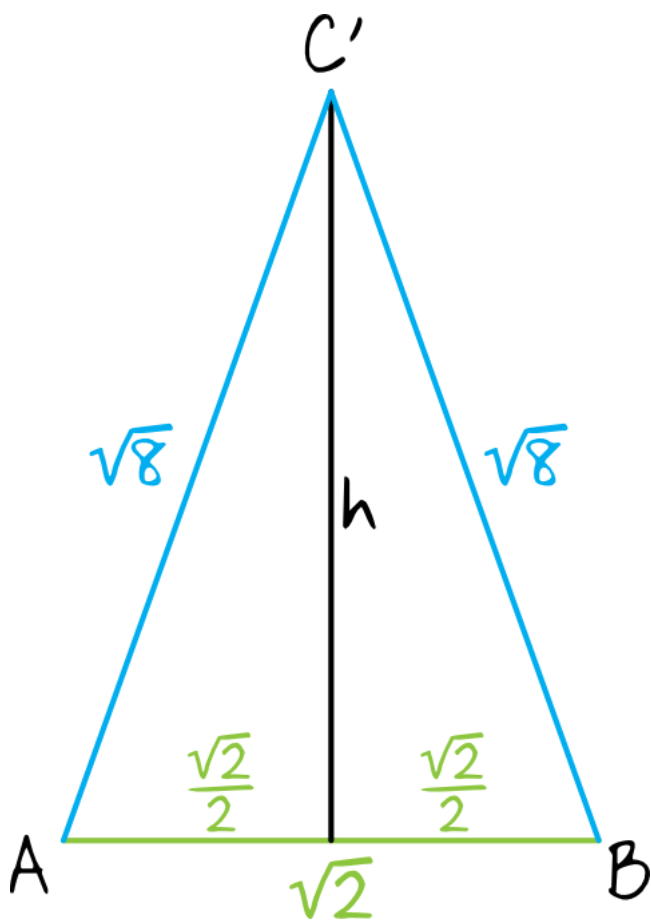
$$C = (0; -2) \quad \vee \quad C = (0; 1)$$

Zadanie 32

0-6 pkt

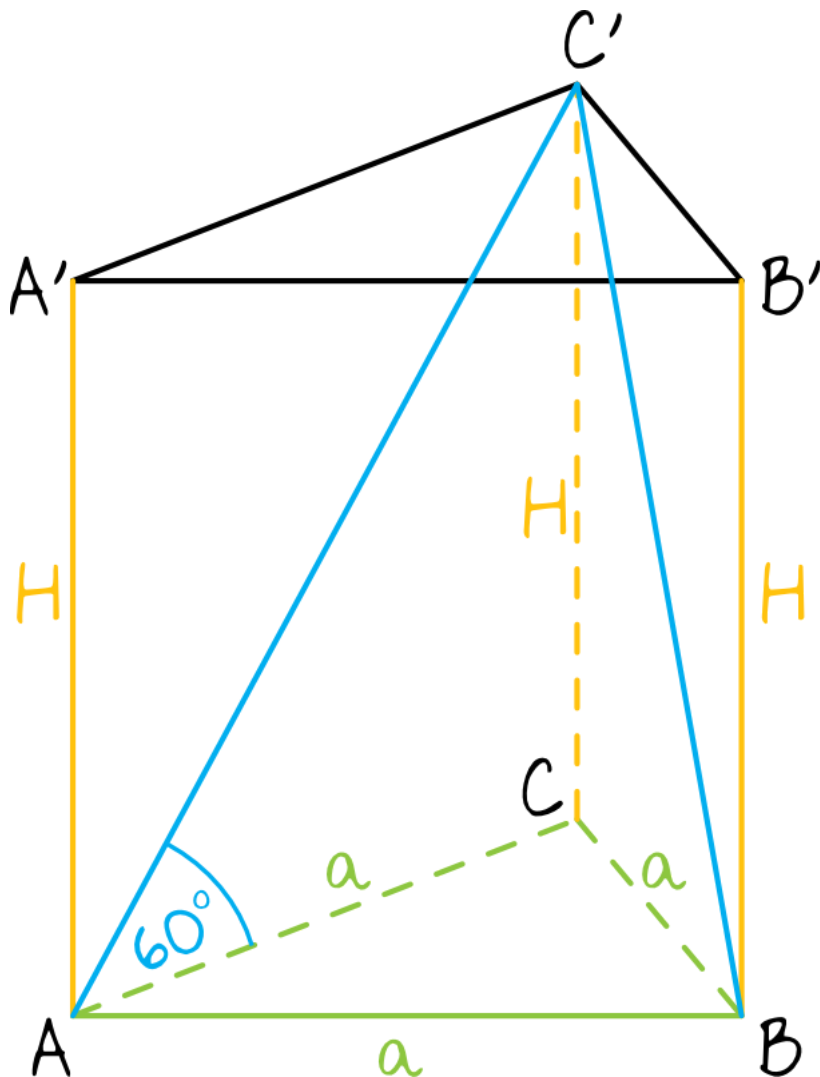
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o dolnej podstawie ABC i górnej $A'B'C'$. Przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt 60° . Pole ściany bocznej graniastosłupa jest równe $2\sqrt{3}$. Oblicz pole trójkąta ABC' .





Odpowiedź: $\left(P=\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.



Krok 2. Zapisanie zależności między wysokością graniastopu a długością podstawy.

Spójrzmy na trójkąt ACC' . Jest to na pewno trójkąt prostokątny w którym jak widzimy przyprostokątne mają długość a oraz H . Korzystając z funkcji trygonometrycznych (a konkretnie z tangensa) możemy zapisać, że:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{a}, \sqrt{3} = \frac{H}{a}, H = a\sqrt{3}$$

Krok 3. Obliczenie długości krawędzi podstawy.

Skorzystamy z informacji, która mówi nam, że ściana boczna będąca prostokątem o bokach a oraz H ma pole równe $2\sqrt{3}$. Wiedząc, że $H = a\sqrt{3}$ możemy zapisać, że:

$$P = a \cdot H, 2\sqrt{3} = a \cdot a\sqrt{3}, 2\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} \quad / : \sqrt{3}, a^2 = 2, a = \sqrt{2} \quad \vee \quad a = -\sqrt{2}$$

Ujemne rozwiązanie oczywiście odrzucamy, bo długość nie może być ujemna. Zostaje nam zatem $a = \sqrt{2}$.

Krok 4. Obliczenie wysokości graniastopu.

Skoro $a = \sqrt{2}$, a wiemy że $H = a\sqrt{3}$, to znaczy że:

$$H = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}, H = \sqrt{6}$$

Krok 5. Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej.

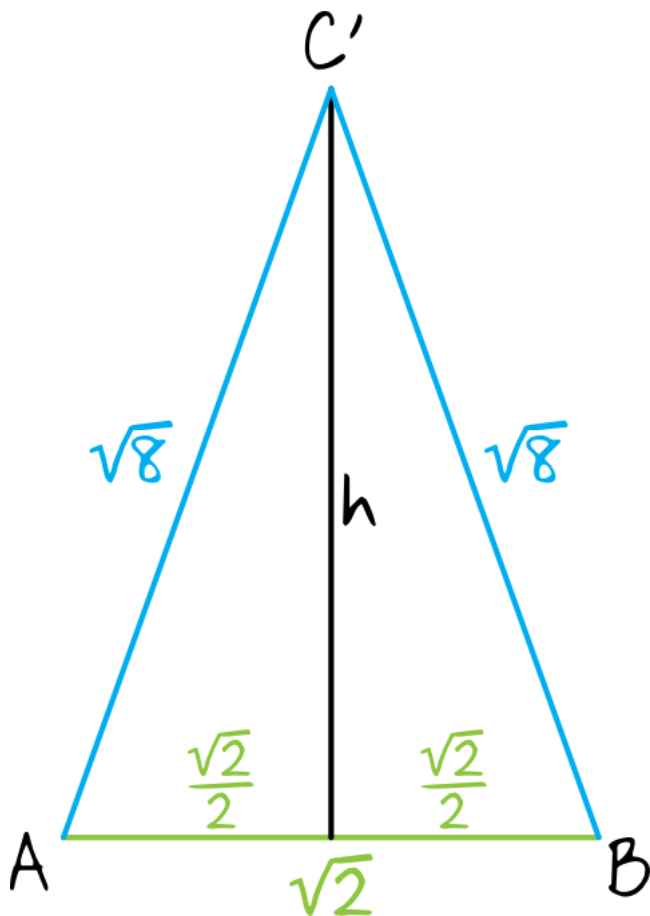
Skoro znamy długość a oraz H to jesteśmy w stanie obliczyć długość przekątnej ściany bocznej, czyli długość odcinka AC' . Zrobimy to korzystając z Twierdzenia Pitagorasa:

$$(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 = |AC'|^2, 2 + 6 = |AC'|^2, |AC'|^2 = 8, |AC'| = \sqrt{8} \quad \vee \quad |AC'| = -\sqrt{8}$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy, zatem zostaje nam $|AC'| = \sqrt{8}$.

Krok 6. Obliczenie wysokości trójkąta ABC' .

Dla przejrzystości obliczeń naskicujmy sobie nasz kluczowy trójkąt ABC' i nanieśmy na niego dane, które obliczyliśmy w poprzednich krokach:



Teraz naszym zadaniem jest obliczenie pola powierzchni tego trójkąta, a aby to uczynić musimy poznać jeszcze jego wysokość. Widzimy, że to jest trójkąt równoramienny, dlatego mamy pewność że wysokość dzieli nam podstawę na dwie równe części. To pozwoli nam teraz obliczyć wysokość trójkąta korzystając z Twierdzenia Pitagorasa:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2 = (\sqrt{8})^2, \quad \frac{2}{4} + h^2 = 8, \quad h^2 = \frac{15}{2}, \quad h = \sqrt{\frac{15}{2}} \quad \vee \quad h = -\sqrt{\frac{15}{2}}$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy, bo wysokość musi być dodatnia. Zostaje nam zatem $h = \sqrt{\frac{15}{2}}$.

Krok 7. Obliczenie pola trójkąta ABC' .

Mamy już komplet danych, bowiem wiemy że podstawa trójkąta ABC' ma długość $a = \sqrt{2}$, wiemy też że $h = \sqrt{\frac{15}{2}}$, zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h, \quad P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{15}{2}}, \quad P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}, \quad P = \frac{\sqrt{15}}{2}$$