

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Operon 2016

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	B (2)	1
2	D ($\frac{a-b}{2} = 1$)	1
3	A (o 10% mniejsza niż w październiku)	1
4	D ((-2, 2))	1
5	B (ma jedno rozwiązanie)	1
6	C (0)	1
7	C (3)	1
8	D (4)	1
9	C (0)	1
10	D ($P = (1, 0)$)	1
11	C ($f(2) = 0$)	1
12	A (jest rosnąca)	1
13	B ($\langle 2, +\infty \rangle$)	1
14	C (1)	1
15	D (3)	1
16	A (15800)	1
17	C ($a_2 = 6$)	1
18	B (4)	1
19	A (8)	1
20	D ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$)	1
21	C ($51^\circ < \alpha < 70^\circ$)	1
22	D (5π)	1
23	B ($2a$)	1
24	A (40)	1
25	C (19, 5)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Druga potęga liczby $\frac{\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \cdot 4^{-\frac{1}{4}}}{0,25}$ jest równa:

Odpowiedź: B (2)

Wykonując działania na potęgach i pierwiastkach otrzymamy:

$$\frac{\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \cdot 4^{-\frac{1}{4}}}{0,25} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot (2^2)^{-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} = , = \frac{-2^{-1} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}}{2^{-2}} = \frac{-1 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}}{2^{-2}} = , = \frac{-1 \cdot 2^{-1-\frac{1}{2}}}{2^{-2}} = \frac{-1 \cdot 2^{-\frac{3}{2}}}{2^{-2}} = , = -1 \cdot 2^{-\frac{3}{2}} : 2^{-2} = -1 \cdot 2^{-\frac{3}{2}-(-2)} = , = -1 \cdot$$

W zadaniu proszą nas o podanie drugiej potęgi otrzymanej liczby, czyli proszą nas tak naprawdę o podniesienie otrzymanego wyniku do kwadratu:

$$(-\sqrt{2})^2 = 2$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Wiadomo, że $\log_5 50 = a$ i $\log_5 2 = b$. Zatem:

Odpowiedź: D ($\frac{a-b}{2} = 1$)

Jedyną prawdziwą równością jest ta z ostatniej odpowiedzi:

$$\frac{\log_5 50 - \log_5 2}{2} = \frac{\log_5 \frac{50}{2}}{2} = \frac{\log_5 25}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Zadanie 3

0-1 pkt

W listopadzie pensja pana Jana była o 10% większa niż w październiku. W grudniu pensja pana Jana zmalała i wynosiła o 40% mniej niż w październiku. Średnia arytmetyczna pensji pana Jana w październiku, listopadzie i grudniu była:

Odpowiedź: A (o 10% mniejsza niż w październiku)

Krok 1. Wprowadzenie poprawnych oznaczeń.

x - pensja w październiku

$1,1x$ - pensja w listopadzie

$0,6x$ - pensja w grudniu

Krok 2. Obliczenie średniej arytmetycznej.

Średnia arytmetyczna pensji wynosi:

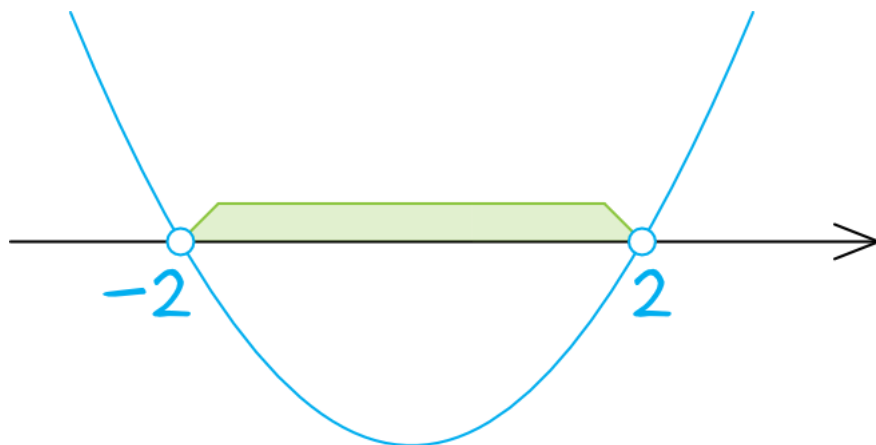
$$\frac{x + 1,1x + 0,6x}{3} = \frac{2,7x}{3} = 0,9x$$

Skoro w październiku pan Jan zarabiał x , a średnia zarobków z trzech miesięcy jest równa $0,9x$, to znaczy że średnia pensja jest o 10% mniejsza niż pensja październikowa.

Zadanie 4

0-1 pkt

Zbiór rozwiązań nierówności $(x - 2)(2 + x) < 0$ to:



Odpowiedź: D $((-2, 2))$

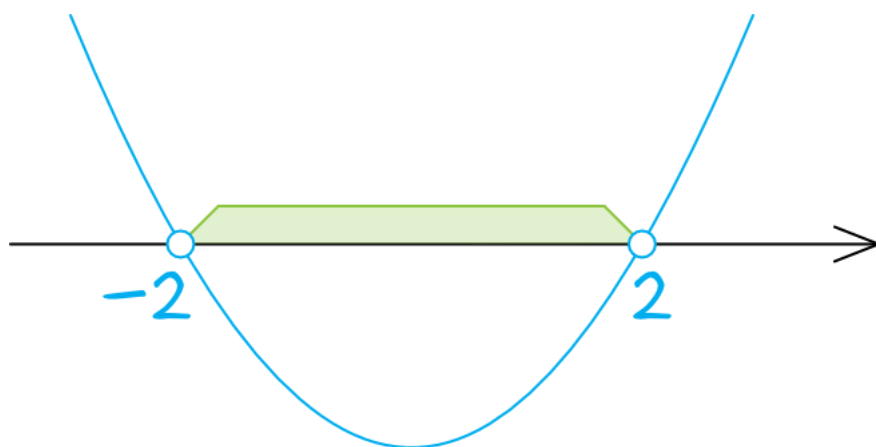
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Z racji tego iż mamy nierówność zapisaną w formie iloczynowej, to chcąc wyznaczyć miejsca zerowe wystarczy przyrównać wartości w nawiasach do zera, stąd też:

$$x - 2 = 0 \quad \vee \quad 2 + x = 0, \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -2$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Ramiona paraboli będą skierowane do góry (bo po wymnożeniu nawiasów przed x^2 nie stałaby żadna liczba ujemna). Zaznaczamy wyznaczone miejsca zerowe i powstaje nam taki oto wykres:



Krok 3. Odczytanie rozwiązania nierówności.

Interesują nas wartości mniejsze od zera, zatem rozwiązaniem tej nierówności będzie przedział $(-2, 2)$.

Zadanie 5

0-1 pkt

Równanie $\frac{-3(9-x^2)(x+3)}{x(x+3)} = 0$:

Odpowiedź: B (ma jedno rozwiązanie)

Krok 1. Zapisanie założeń.

Z racji tego iż w matematyce nie istnieje dzielenie przez zero, to wartość w mianowniku musi być różna od zera. Stąd też:

$$x(x+3) \neq 0, x \neq 0 \quad \vee \quad x \neq -3$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.

Na początek musimy wy mnożyć obie strony równania przez $x(x+3)$, pozbywając się w ten sposób mianownika:

$$\frac{-3(9-x^2)(x+3)}{x(x+3)} = 0 \quad / \cdot x(x+3), \quad -3(9-x^2)(x+3) = 0 \quad / : -3, \quad (9-x^2)(x+3) = 0$$

Otrzymaliśmy postać iloczynową, zatem aby wartość równania była równa zero, to któryś z nawiasów musi nam tę równość wyzerować. W związku z tym:

$$9-x^2=0 \quad \vee \quad x+3=0, \quad x^2=9 \quad \vee \quad x=-3, \quad x=3 \quad \vee \quad x=-3 \quad \vee \quad x=-3$$

Krok 3. Weryfikacja rozwiązań z założeniami.

Otrzymaliśmy dwa możliwe rozwiązania: $x=3$ oraz $x=-3$. Jednak z założeń wynika, że $x \neq -3$ i dlatego też to ujemne rozwiązanie musimy odrzucić. To oznacza, że to równanie ma tylko jedno rozwiązanie i jest nim $x=3$.

Zadanie 6

0-1 pkt

Liczba a spełniająca warunek $\frac{2+\sqrt{3}}{a+1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ jest równa:

Odpowiedź: C (0)

Krok 1. Zapisanie założeń.

Zanim zaczniemy wykonywać obliczenia to musimy jeszcze uwzględnić fakt, że mianownik ułamka musi być różny od zera, zatem:

$$a+1 \neq 0, a \neq -1$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.

Naszym zadaniem jest tak naprawdę rozwiązanie tego równania dokładnie tak samo jak rozwiązujemy inne równania wymierne (czyli z niewiadomą w mianowniku). Najprościej będzie więc wykonać mnożenie na krzyż:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{a+1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}, \quad a+1 = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}), \quad a+1 = 4-3, \quad a+1 = 1, \quad a = 0$$

Otrzymany wynik nie jest sprzeczny z założeniami, dlatego ostatecznym rozwiązaniem będzie $a=0$.

Zadanie 7

0-1 pkt

Układ równań $\begin{cases} y = (m+2)x + 2m \\ (2m-1)x - m = y \end{cases}$ opisuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie dwie proste równoległe. Zatem liczba m jest równa:

Odpowiedź: C (3)

Obydwa równania prostych są zapisane w postaci kierunkowej, zatem aby obydwie te proste były względem siebie równoległe, to muszą mieć jednakowy współczynnik kierunkowy (czyli liczbę stojącą przed iksem). W związku z tym:

$$m+2 = 2m-1, \quad -m = -3, \quad m = 3$$

Zadanie 8

0-1 pkt

Suma pierwiastków równania $(x-2)(x+1)(x-3) = 0$ jest równa:

Odpowiedź: D (4)

Pierwiastki równania to tak naprawdę rozwiązania równania. Nasze równanie jest zapisane w postaci iloczynowej, zatem aby jego wartość była równa zero, to któryś z nawiasów musi dać wartość równą zero, zatem:

$$x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0, \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 3$$

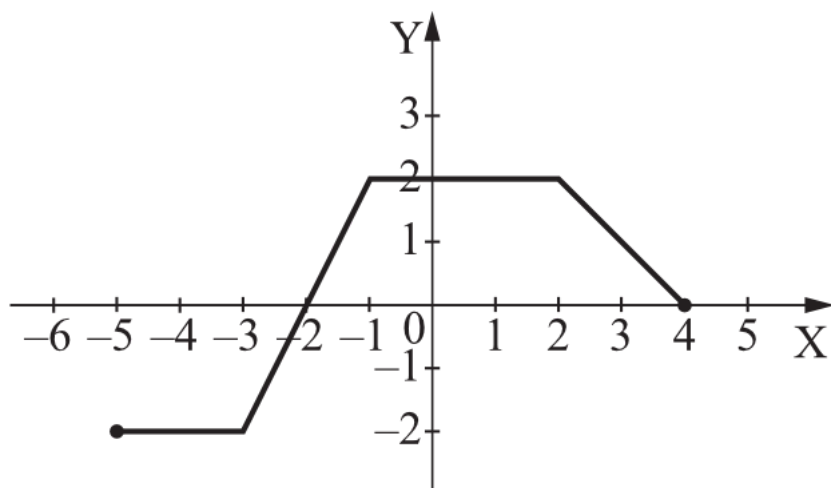
Suma pierwiastków (czyli rozwiązań) jest równa:

$$2 - 1 + 3 = 4$$

Zadanie 9

0-1 pkt

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

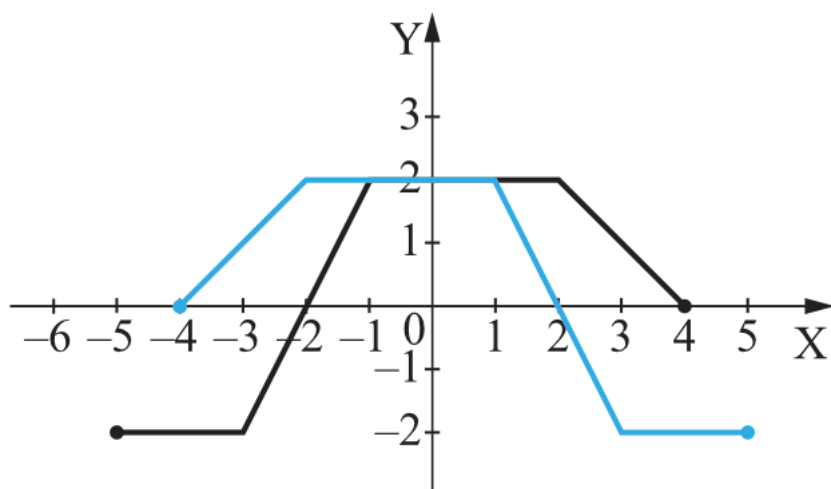


Najmniejszą wartością funkcji $g(x) = f(-x)$ w przedziale $\langle -4, -1 \rangle$ jest liczba:

Odpowiedź: C (0)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Funkcja $f(-x)$ jest tak naprawdę odbiciem lustrzanym (względem osi igreków) funkcji $f(x)$. Możemy więc sobie narysować taką funkcję i odczytywać z niej to co jest nam potrzebne:



Krok 2. Odczytanie najmniejszej wartości.

Wartości funkcji odczytujemy z osi igreków. Interesują nas jedynie wartości przyjmowane dla argumentów z przedziału $\langle -4, -1 \rangle$, a w nim funkcja przyjmuje najmniejszą wartość równą 0 (dla $x = -4$).

Zadanie 10

0-1 pkt

Dwusieczna kąta, pod którym przecinają się proste $y = x - 1$ i $y = -x + 1$, przechodzi przez punkt:

Odpowiedź: D ($P = (1, 0)$)

Z geometrycznej interpretacji układu równań wiemy, że rozwiązaniem układu równań składającego się z dwóch prostych jest ich punkt przecięcia się (czyli dokładnie to czego szukamy, bo przecież dwusieczna kąta musi przechodzić przez punkt przecięcia się prostych). W związku z tym:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases},$$

$$x - 1 = -x + 1, 2x = 2, x = 1$$

Znając wartość współrzędnej xowej możemy obliczyć wartość współrzędnej ykowej, podstawiając $x = 1$ do jednego z równań:

$$y = 1 - 1, y = 0$$

To oznacza, że poszukiwanym punktem jest $P = (1; 0)$.

Zadanie 11

0-1 pkt

W tabeli podano wartości funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ dla wybranych trzech elementów należących do dziedziny funkcji.

x	-1	0	1
$f(x)$	-6	-4	-2

Zatem:

Odpowiedź: C ($f(2) = 0$)

Z tabelki wynika wprost, że z każdym kolejnym argumentem x funkcja rośnie o dwie jednostki. Już z tej prostej obserwacji jesteśmy w stanie zapisać, że $f(2) = f(1) + 2$, czyli $f(2) = -2 + 2 = 0$. Gdybyśmy tego nie dostrzegli, to moglibyśmy nawet narysować wykres tej funkcji albo moglibyśmy wyznaczyć wręcz jej wzór z którego obliczymy wartość dla dowolnego argumentu. Podstawiając pod równanie prostej $y = ax + b$ dwóch dowolnych punktów z tabeli otrzymamy przykładowo:

$$\begin{cases} -6 = -1 \cdot a + b \\ -4 = 0 \cdot a + b \end{cases},$$

$$\begin{cases} -6 = -a + b \\ -4 = b \end{cases},$$

Podstawiając drugie równanie do pierwszego otrzymamy:

$$-6 = -a - 4, -2 = -a, a = 2$$

Obliczyliśmy w ten sposób współczynnik kierunkowy $a = 2$. Znamy też już wartość współczynnika b , bo wyszło nam wprost z jednego równania, że $b = -4$. W związku z tym wiemy, że prosta ta jest opisana wzorem:

$$y = 2x - 4$$

Skoro szukamy wartości $f(2)$ to pod xka do wzoru tej funkcji musimy podstawić $x = 2$, zatem:

$$y = 2 \cdot 2 - 4, y = 4 - 4, y = 0$$

W ten oto sposób wyszło nam, że $f(2) = 0$.

Zadanie 12

0-1 pkt

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = ax + b$ dla $b = -3$ oraz $ab < 0$. Wynika z tego, że funkcja f :

Odpowiedź: A (jest rosnąca)

Jeżeli współczynnik b jest równy -3 , a iloczyn $ab < 0$, to:

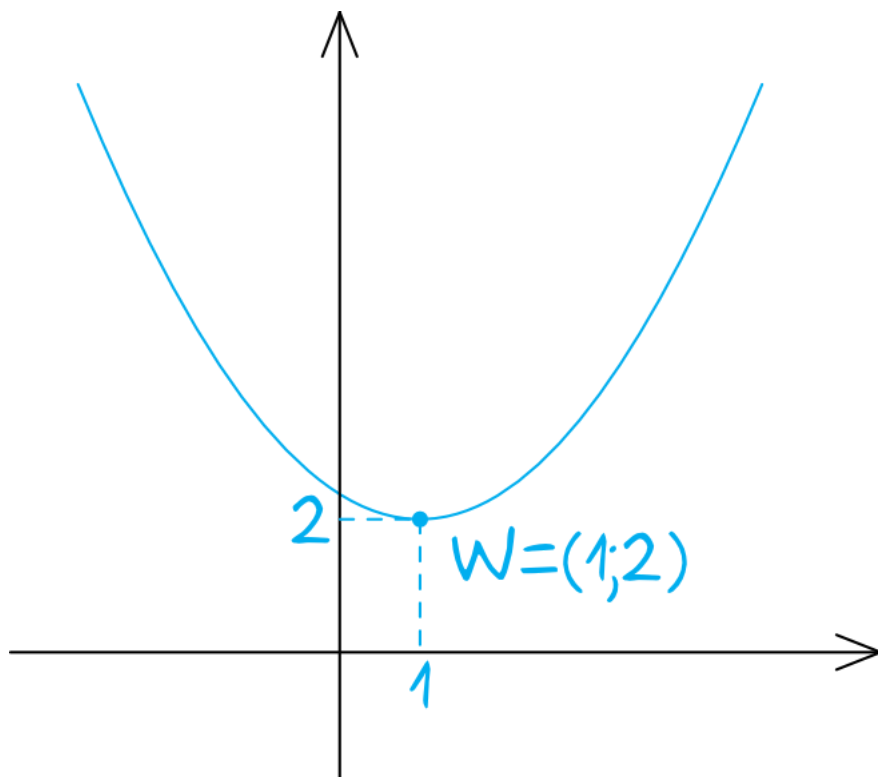
$$ab < 0, \quad -3a < 0 \quad \bigg/ : (-3), \quad a > 0$$

Dodatni współczynnik kierunkowy a oznacza, że prosta jest rosnąca.

Zadanie 13

0-1 pkt

Dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ jest zbiór $\langle -2, +\infty \rangle$. Zbiorem wartości tej funkcji jest:



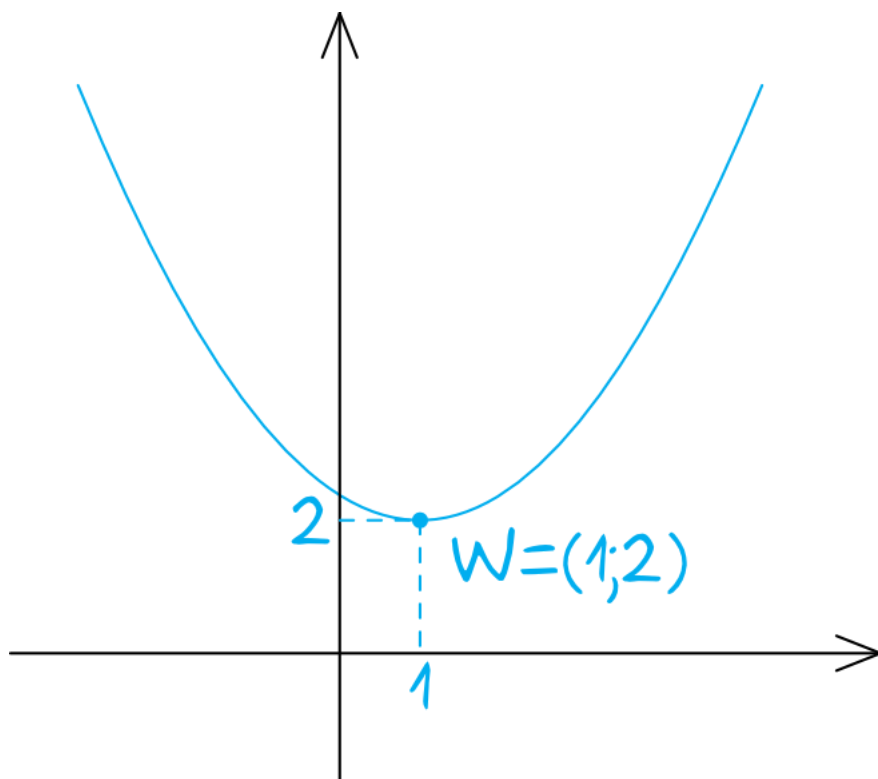
Odpowiedź: B ($\langle 2, +\infty \rangle$)

Krok 1. Odczytanie współrzędnych wierzchołka paraboli.

Funkcja jest określona wzorem w postaci kanonicznej, czyli takiej z której łatwo możemy odczytać współrzędne wierzchołka paraboli. Funkcja opisana wzorem $f(x) = a(x - p)^2 + q$ ma współrzędne wierzchołka równe $W = (p; q)$. W naszym przypadku $p = 1$ oraz $q = 2$, zatem wierzchołek paraboli leży w punkcie $W = (1; 2)$.

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego i odczytanie zbioru wartości.

Ta funkcja jest kwadratowa, czyli jej wykresem będzie parabola. Ramiona paraboli będą skierowane do góry, bo po wykonaniu potęgowania przed iksem nie będzie stać żadna wartość ujemna. Zaznaczamy współrzędne wierzchołka $W = (1; 2)$ i całość będzie wyglądać w następujący sposób:



Zbiór wartości odczytujemy z osi igreków. Z rysunku wyraźnie wynika, że zbiorem wartości tej funkcji są wszystkie liczby większe lub równe 2, czyli $\langle 2, +\infty \rangle$.

Zadanie 14

0-1 pkt

Funkcja g jest opisana wzorem $g(x) = 3^{x-1} + 1$. Miejscem zerowym funkcji $h(x) = g(x+1) - 4$ jest liczba:

Odpowiedź: C (1)

Krok 1. Ustalenie wzoru funkcji $h(x)$.

Zapis $h(x) = g(x+1)$ mówi nam, że aby otrzymać funkcję $h(x)$ to musimy pod xsa z funkcji $g(x)$ podstawić $x+1$. Dodatkowo na końcu wzoru funkcji $h(x)$ pojawia się jeszcze wartość -4 , zatem dodatkowo będziemy musieli jeszcze tę czwórkę odjąć. W związku z tym:

$$h(x) = 3^{(x+1)-1} + 1 - 4, h(x) = 3^{x+1-1} - 3, h(x) = 3^x - 3$$

Krok 2. Obliczenie miejsca zerowego funkcji $h(x)$.

Musimy znaleźć miejsce zerowe $h(x)$, czyli musimy sprawdzić kiedy $3^x - 3$ będzie równe 0, zatem:

$$3^x - 3 = 0, 3^x = 3, 3^x = 3^1, x = 1$$

Zadanie 15

0-1 pkt

Ile liczb całkowitych należy do zbioru rozwiązań nierówności $x - 1 \leq \frac{x(x-1)-x^2}{2} \leq 1$?

Odpowiedź: D (3)

W tym przykładzie dobrze jest na początku wymnożyć licznik naszego ułamka i uprościć w ten sposób cały zapis:

$$x - 1 \leq \frac{x(x-1)-x^2}{2} \leq 1, x - 1 \leq \frac{x^2 - x - x^2}{2} \leq 1, x - 1 \leq \frac{-x}{2} \leq 1$$

Teraz możemy dla przejrzystości działań rozbić ten zapis na dwie nierówności:

$$x - 1 \leq \frac{-x}{2} \quad \wedge \quad \frac{-x}{2} \leq 1, 2x - 2 \leq -x \quad \wedge \quad -x \leq 2, 3x - 2 \leq 0 \quad \wedge \quad x \geq -2, 3x \leq 2 \quad \wedge \quad x \geq -2, x \leq \frac{2}{3} \quad \wedge \quad x \geq -2$$

Szukamy więc liczb całkowitych, które są mniejsze lub równe od $\frac{2}{3}$ i jednocześnie większe lub równe niż -2 . Istnieją tylko trzy takie liczby: $-2, -1, 0$.

Zadanie 16

0-1 pkt

Suma wszystkich liczb naturalnych dodatnich podzielnych przez 5 i mniejszych od 400 jest równa:

Odpowiedź: A (15800)

Krok 1. Ustalenie kluczowych danych na temat ciągu arytmetycznego.

Liczby podzielne przez 5 i mniejsze od 400 będą tworzyć ciąg w stylu:

$$5, 10, 15, 20, \dots, 390, 395$$

Powstał nam więc ciąg w którym:

$$a_1 = 5, a_n = 395, r = 5$$

Krok 2. Obliczenie ilości wyrazów ciągu arytmetycznego.

Brakuje nam jeszcze informacji dotyczącej tego ile jest wyrazów w naszym ciągu. W związku z tym:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, 395 = 5 + (n-1) \cdot 5, 395 = 5 + 5n - 5, 5n = 395, n = 79$$

Krok 3. Obliczenie sumy wszystkich wyrazów ciągu.

Teraz mamy komplet danych, więc możemy bez problemu obliczyć sumę interesujących nas wyrazów:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, S_{79} = \frac{5 + 395}{2} \cdot 79, S_{79} = \frac{400}{2} \cdot 79, S_{79} = 200 \cdot 79, S_{79} = 15800$$

Zadanie 17

0-1 pkt

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geq 1$ i taki, że $a_1 + a_2 + a_3 = 18$. Wtedy:

Odpowiedź: C ($a_2 = 6$)

Z własności ciągów arytmetycznych wiemy, że $a_2 = a_1 + r$ oraz $a_3 = a_1 + 2r$, zatem możemy ułożyć następujące równanie:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 18, \quad a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 18, \quad 3a_1 + 3r = 18 \quad \bigg/ : 3, \quad a_1 + r = 6$$

Wiedząc, że $a_1 + r = 6$ wiemy, że drugi wyraz tego ciągu jest równy właśnie 6.

Zadanie 18

0-1 pkt

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \sqrt{n-2}$ dla $n \geq 2$. Ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 2?

Odpowiedź: B (4)

Krok 1. Ułożenie i rozwiązanie nierówności.

Szukamy wyrazów mniejszych od 2, zatem możemy ułożyć następującą nierówność:

$$\sqrt{n-2} < 2 \quad \bigg/ ^2, \quad n-2 < 4, \quad n < 6$$

Krok 2. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Musimy teraz ustalić co wynika z otrzymanego wyniku, pamiętając że w ciągach n musi być liczbą naturalną. Z treści zadania wiemy, że $n \geq 2$ natomiast z nierówności wynika, że n musi być mniejsze od 6. W związku z tym są cztery wyrazy, które spełniają te dwa warunki: $n = \{2, 3, 4, 5\}$.

Zadanie 19

0-1 pkt

Ciąg $(a, 2, c)$ jest geometryczny. Iloczyn wyrazów tego ciągu jest równy:

Odpowiedź: A (8)

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego zachodzi równość:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

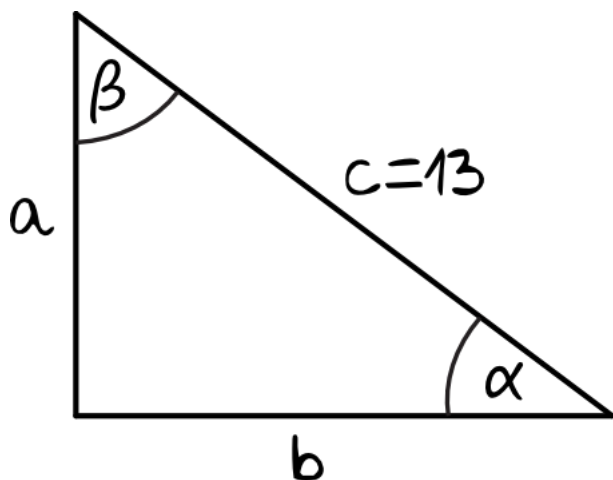
Podstawiając dane z treści zadania otrzymamy:

$$2^2 = a_1 \cdot a_3, \quad a_1 \cdot a_3 = 4$$

Naszym zadaniem jest obliczenie ile jest równe $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$. Skoro $a_2 = 2$ oraz $a_1 \cdot a_3 = 4$, to znaczy że:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = a_2 \cdot a_1 \cdot a_3 = 2 \cdot 4 = 8$$

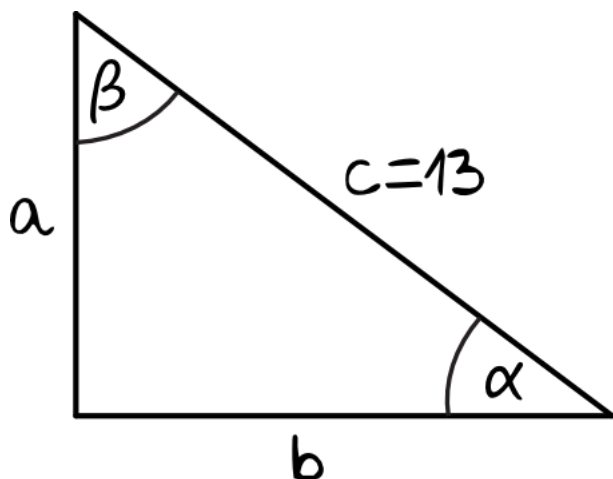
W trójkącie prostokątnym kąty ostre mają miary α, β , przeciwprostokątna ma długość 13, oraz $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{17}{13}$ i $\sin \alpha - \sin \beta = \frac{7}{13}$. Wynika z tego, że:



Odpowiedź: D ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Co prawda zbyt wielu danych nie mamy, ale narysujmy sobie trójkąt prostokątny z zaznaczonymi kątami, tak aby potem móc poprawnie odnosić się do poszczególnych funkcji trygonometrycznych:



Krok 2. Obliczenie wartości $\sin \alpha$.

Z dwóch równań z treści zadania możemy ułożyć następujący układ:

$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = \frac{17}{13} \\ \sin \alpha - \sin \beta = \frac{7}{13} \end{cases},$$

Dodając to równanie stronami otrzymamy:

$$2\sin \alpha = \frac{24}{13}, \quad \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

Krok 3. Obliczenie długości jednej przyprostokątnej.

Sinus jest funkcją trygonometryczną, która opisuje nam zależność między przyprostokątną leżącą naprzeciw kąta α oraz przeciwprostokątną. W naszym przypadku $\sin \alpha = \frac{a}{c}$. Skoro przeciwprostokątna ma długość $c = 13$, a $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, to znaczy że $a = 12$.

Krok 4. Obliczenie długości drugiej przyprostokątnej.

Wiemy już, że w tym trójkącie są boki długości 12 i 13, zatem trzeci bok (drugą przyprostokątną oznaczoną jako b) obliczymy z Twierdzenia Pitagorasa:

$$12^2 + b^2 = c^2, \quad 144 + b^2 = 169, \quad b^2 = 25, \quad b = 5 \quad \vee \quad b = -5$$

Wartość ujemną oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $b = 5$.

Krok 5. Wyznaczenie wartości tangensa.

Znamy miary wszystkich boków trójkąta, zatem możemy bez problemu obliczyć wartość tangensa:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$$

Zadanie 21

0-1 pkt

Kąt α jest kątem ostrym takim, że $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$. Zatem:

Odpowiedź: C ($51^\circ < \alpha < 70^\circ$)

Krok 1. Obliczenie wartości $\cos \alpha$.

Z jedynki trygonometrycznej wiemy, że $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, czyli że $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$. Podstawiając to do naszego równania otrzymamy:

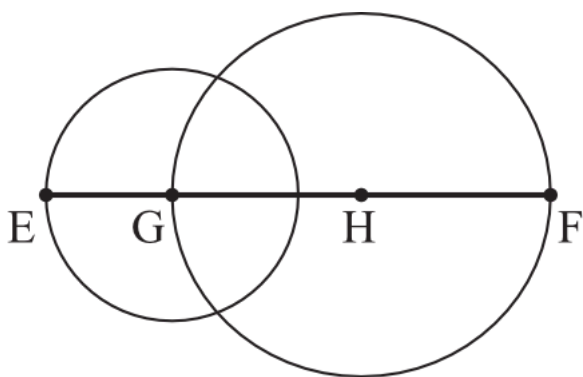
$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}, \quad 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}, \quad -2\cos^2 \alpha = -\frac{1}{2} \quad \Bigg/ \cdot -\frac{1}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

Wartość ujemną odrzucamy, bo z treści zadania wynika że α jest kątem ostrym, a dla kątów ostrych cosinus przyjmuje wartości dodatnie.

Krok 2. Odczytanie z tablic miary kąta.

Musimy jeszcze ustalić jaka jest miara kąta α . Z tablic trygonometrycznych możemy odczytać, że cosinus przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$ dla kąta 60° , zatem kąt α mieści się w przedziale $51^\circ < \alpha < 70^\circ$.

Punkty G i H są środkami okręgów. Punkt E leży na okręgu o środku w punkcie G , punkt F leży na okręgu o środku w punkcie H oraz $|GH| = 3$ i $|EF| = 8$ (patrz rysunek).



Wtedy pole koła ograniczonego okręgiem o środku w punkcie H jest większe od pola koła ograniczonego okręgiem o środku w punkcie G o:

Odpowiedź: D (5π)

Krok 1. Obliczenie długości promienia EG .

Odcinek EF składa się z sumy odcinków $|EG|$, $|GH|$ oraz $|HF|$. Z rysunku wynika, że $|EG| = r$ oraz $|GH| = |HF| = 3$, zatem możemy ułożyć następujące równanie:

$$|EG| + |GH| + |HF| = 8, \quad |EG| + 3 + 3 = 8, \quad |EG| + 6 = 8, \quad |EG| = 2$$

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni dużego koła.

Długość promienia dużego koła jest podana w treści zadania i jest równa $|GH| = 3$, zatem:

$$P_d = \pi r^2, \quad P_d = \pi \cdot 3^2, \quad P_d = 9\pi$$

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni małego koła.

Promień małego koła obliczyliśmy w pierwszym kroku, zatem:

$$P_m = \pi r^2, \quad P_m = \pi \cdot 2^2, \quad P_m = 4\pi$$

Krok 4. Obliczenie różnicy pól powierzchni.

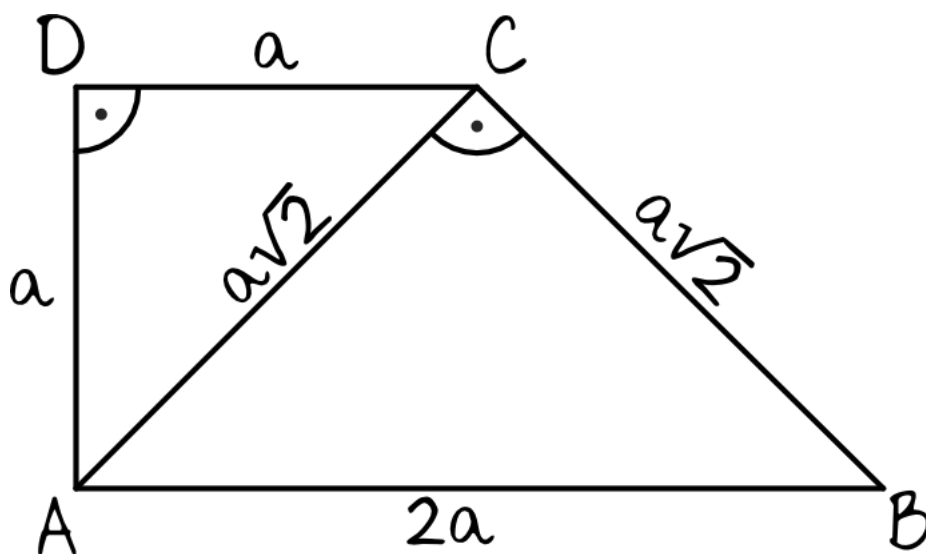
Na koniec musimy zgodnie z poleceniem obliczyć różnicę pól powierzchni:

$$P_d - P_m = 9\pi - 4\pi = 5\pi$$

Zadanie 23

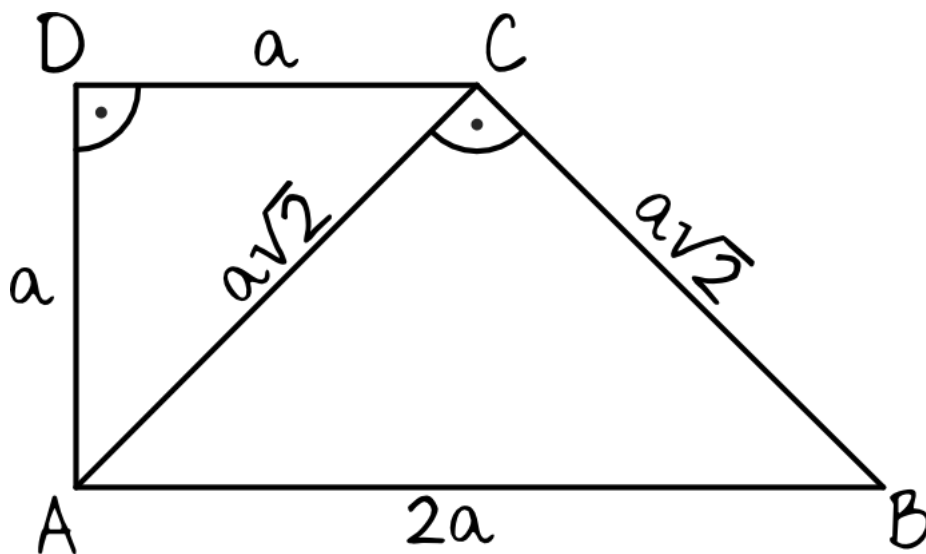
0-1 pkt

Przekątna AC dzieli trapez $ABCD$ na dwa trójkąty prostokątne równoramienne oraz $|\angle BAD| = |\angle ADC| = 90^\circ$. Najkrótszy bok trapezu ma długość a . Zatem najdłuższy bok ma długość:



Odpowiedź: B ($2a$)

W tym zadaniu musimy pamiętać o własnościach trójkątów równoramiennych prostokątnych, czyli trójkąta o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. W takim trójkącie przyprostokątne o długości a mają przeciwprostokątną $\sqrt{2}$ razy większą, czyli mają przeciwprostokątną równą $a\sqrt{2}$. To oznacza, że powstanie nam taka oto sytuacja:

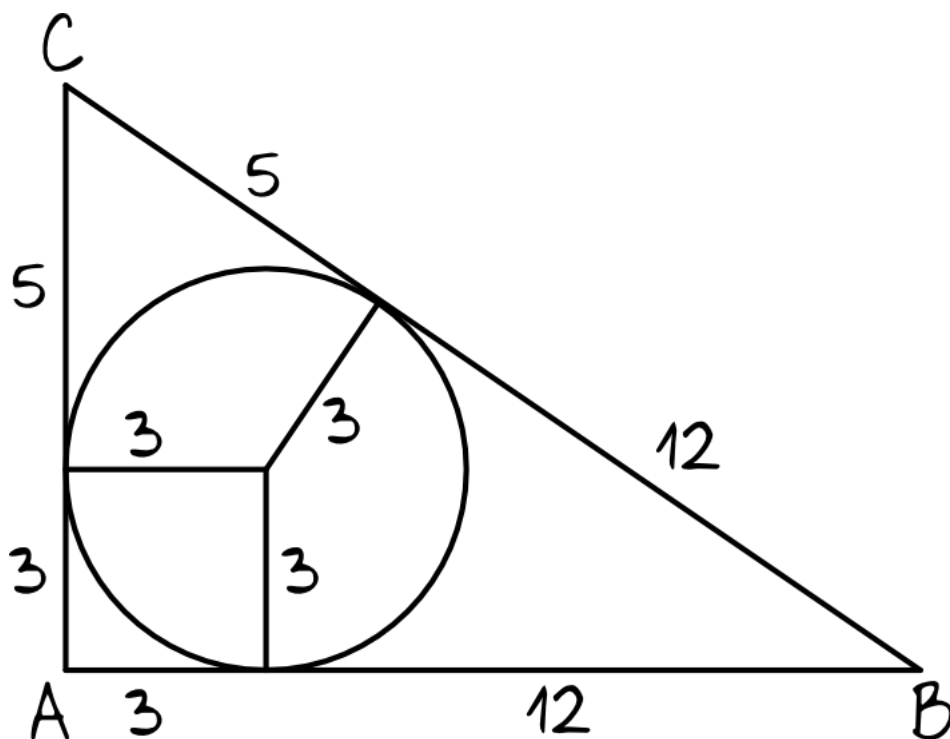


Spójrzmy najpierw na trójkąt ACD . Jest to trójkąt równoramienny o boku a , zatem przeciwprostokątna AC ma długość $a\sqrt{2}$.

Teraz spójrzmy na trójkąt ABC . To także jest trójkąt równoramienny, czyli skoro $|AC| = a\sqrt{2}$ to także $|BC| = a\sqrt{2}$. W związku z tym przeciwprostokątna AB będzie mieć długość $a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a$ i to będzie najdłuższy bok tego trójkąta.

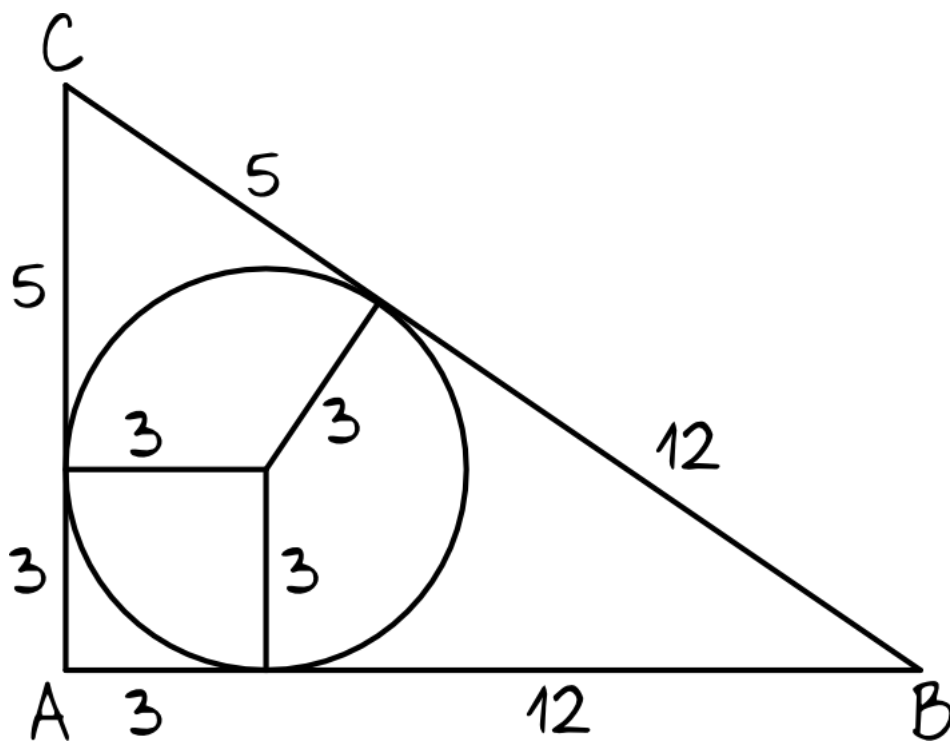
To oznacza, że najdłuższy bok w tym trapezie ma długość $2a$.

Okrąg o promieniu 3 jest wpisany w trójkąt prostokątny. Punkt styczności dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 5 i 12. Obwód tego trójkąta jest równy:



Odpowiedź: A (40)

Korzystając z własności stycznych do okręgu (które w tym momencie tworzą trójkąt) możemy stworzyć następujący rysunek:



W związku z tym obwód tego trójkąta jest równy:

$$Obw = 3 + 3 + 5 + 5 + 12 + 12 = 40$$

Zadanie 25

0-1 pkt

Punkty A, M, B są współliniowe (punkt M leży między punktami A i B) i takie, że $A = (-23, -9)$, $B = (17, 21)$ oraz $|MB| = 3|AM|$. Iloczyn współrzędnych punktu M jest równy:



Odpowiedź: C (19, 5)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy narysować całą tę sytuację, zaznaczając przy okazji środek odcinka AB :



Okazuje się, że punkt M jest tak naprawdę środkiem odcinka AS . Musimy zatem najpierw wyznaczyć współrzędne punktu S (który jest środkiem odcinka AB), a następnie przejdziemy do wyznaczenia współrzędnych punktu M .

Krok 2. Obliczenie współrzędnych punktu S .

Środek odcinka AB o współrzędnych $A = (x_A; y_A)$ oraz $B = (x_B; y_B)$ możemy opisać wzorem:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Dla przejrzystości zapisu obliczmy każdą ze współrzędnych oddzielnie:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}, x_S = \frac{-23 + 17}{2}, x_S = \frac{-6}{2}, x_S = -3, \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}, y_S = \frac{-9 + 21}{2}, y_S = \frac{12}{2}, y_S = 6$$

To oznacza, że $S = (-3; 6)$.

Krok 3. Obliczenie współrzędnych punktu M .

Zgodnie z analizą rysunku pomocniczego, punkt M jest środkiem odcinka AS , zatem korzystając z tych samych wzorów co w drugim kroku możemy zapisać, że:

$$x_M = \frac{x_A + x_S}{2}, x_M = \frac{-23 - 3}{2}, x_M = \frac{-26}{2}, x_M = -13, \quad y_M = \frac{y_A + y_S}{2}, y_M = \frac{-9 + 6}{2}, y_M = \frac{-3}{2}, y_M = -\frac{3}{2}$$

To oznacza, że $M = (-13; -\frac{3}{2})$.

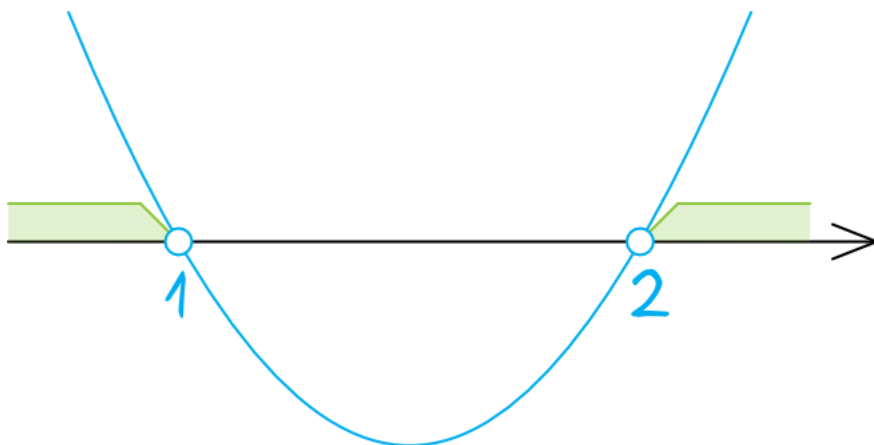
Krok 4. Obliczenie iloczynu współrzędnych punktu M .

Na koniec zgodnie z poleceniem musimy podać wartość iloczynu obydwu współrzędnych punktu M , zatem:

$$-13 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{39}{2} = 19,5$$

Zadanie 26

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $x(x-1) > 2(x+1) - 4$.**Odpowiedź:** $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

Krok 1. Doprowadzenie nierówności do postaci ogólnej.

Zanim zaczniemy liczyć deltę, to musimy wykonać odpowiednie działania i przenieść wszystkie wyrazy na lewą stronę, zatem:

$$x(x-1) > 2(x+1) - 4, \quad x^2 - x > 2x + 2 - 4, \quad x^2 - 3x + 2 > 0$$

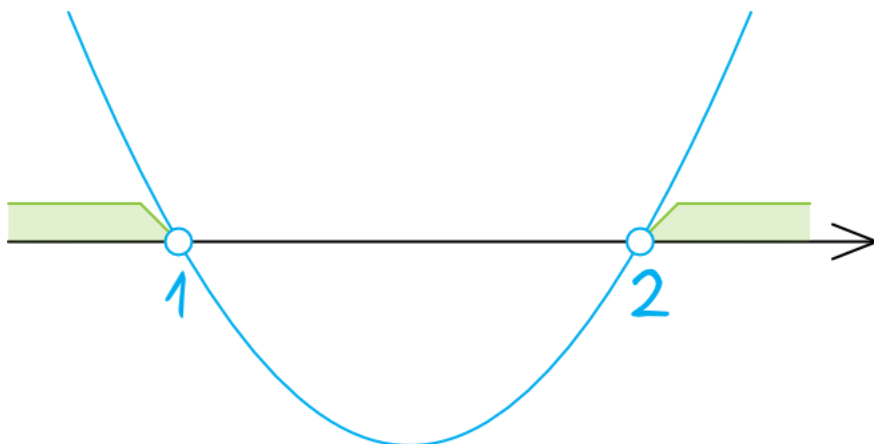
Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Współczynniki: $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Z racji tego, iż współczynnik kierunkowy a jest dodatni, to parabola będzie mieć ramiona skierowane do góry. Zaznaczamy więc na osi wyznaczone miejsca zerowe $x = 1$ oraz $x = 2$ (kropki będą niezamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $>$) i rysujemy parabolę:

Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

Szukamy wartości większych od zera, czyli tych które znajdują się nad osią. To oznacza, że rozwiązaniem tej nierówności jest suma przedziałów:

$$x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$$

Zadanie 27

0-2 pkt

Wykaż, że jeżeli $x > y$ i $2(x-1)(x+1) - 2y(2x-y) = -1$, to $x-y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Odpowiedź: Udowodniono wymnażając

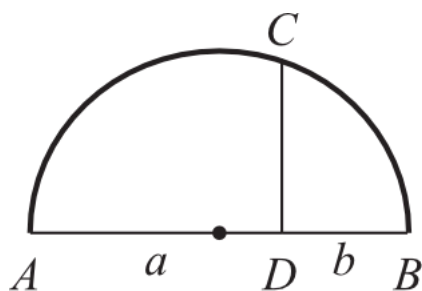
Wymnażając poszczególne jednomiany otrzymamy:

$$2(x-1)(x+1) - 2y(2x-y) = -1, \quad 2(x^2-1) - 4xy + 2y^2 = -1, \quad 2x^2 - 2 - 4xy + 2y^2 = -1, \quad 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 1, \quad 2(x^2 - 2xy + y^2) = 1, \quad x^2 - 2xy$$

Zadanie 28

0-2 pkt

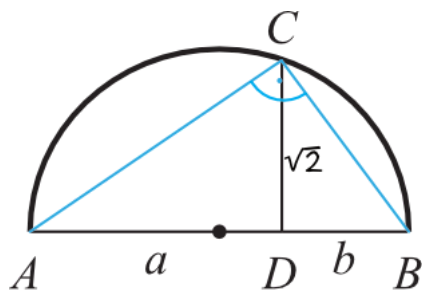
Dany jest półokrąg oparty na średnicy AB . Punkt C leży na półokręgu, punkt D leży na średnicy, odcinki CD i AB są prostopadłe oraz $|CD| = \sqrt{2}$. Punkt D dzieli średnicę na odcinki a, b (patrz rysunek). Wykaż, że $ab = 2$.



Odpowiedź: Udowodniono korzystając

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy narysować trójkąt, który będzie opierał się na średnicy tego półokręgu i będzie miał wierzchołek w punkcie C . Z własności trójkątów wpisanych w okrąg wiemy, że taki trójkąt oparty na średnicy będzie jednocześnie trójkątem prostokątnym.



Krok 2. Dostrzeżenie podobieństwa trójkątów i zakończenie dowodzenia.

Poza tym, że mamy jeden duży trójkąt ABC to powstały nam dwa prostokątne trójkąty podobne ADC oraz DBC (cecha bok-kąt-bok). Korzystając z tego podobieństwa możemy zapisać, że:

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|BD|}{|CD|}, \quad \frac{\sqrt{2}}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Mnożąc na krzyż otrzymamy:

$$ab = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}, \quad ab = 2$$

Otrzymaliśmy dokładnie to co mieliśmy wykazać, zatem zadanie możemy uznać za zakończone.

Funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe. Jednym z nich jest liczba -3 . Wierzchołek paraboli, będącej wykresem tej funkcji, znajduje się w punkcie $(-1, -8)$. Wyznacz wzór tej funkcji.

Odpowiedź: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

Krok 1. Zapisanie wzoru funkcji w postaci kanonicznej.

Znając współrzędne wierzchołka paraboli $W = (p; q)$ możemy zapisać wzór funkcji w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

W naszym przypadku $W = (-1, -8)$ zatem:

$$f(x) = a(x - (-1))^2 + (-8), \quad f(x) = a(x + 1)^2 - 8$$

Do pełnego wzoru brakuje nam jeszcze znajomości współczynnika a .

Krok 2. Wyznaczenie współczynnika a .

Do wyznaczenia współczynnika a wykorzystamy informację o miejscu zerowym tej funkcji. Skoro dla $x = -3$ funkcja przyjmuje wartość równą 0 (bo $x = -3$ jest miejscem zerowym), to znaczy że:

$$a \cdot (-3 + 1)^2 - 8 = 0, \quad a \cdot (-2)^2 - 8 = 0, \quad 4a - 8 = 0, \quad 4a = 8, \quad a = 2$$

Krok 3. Zapisanie wzoru funkcji.

W treści zadania nie mamy podanej informacji w jakiej postaci ma to być wzór. Niemalże od ręki jesteśmy w stanie podać ten wzór w postaci kanonicznej, bo przed chwilą obliczyliśmy że $a = 2$, zatem:

$$f(x) = 2 \cdot (x + 1)^2 - 8$$

Gdybyśmy chcieli podać ten wzór w postaci ogólnej (czyli tej najpopularniejszej), to należałoby wykonać potęgowanie:

$$f(x) = 2 \cdot (x + 1)^2 - 8, \quad f(x) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 8, \quad f(x) = 2x^2 + 4x + 2 - 8, \quad f(x) = 2x^2 + 4x - 6$$

Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych ma jeden punkt wspólny z parabolą $y = (x - 1)^2 + 1$. Znajdź równanie tej prostej.

Odpowiedź: $y = (-2 - 2\sqrt{2})x$

Krok 1. Ułożenie układu równań.

Każdą prostą w układzie współrzędnych możemy opisać wzorem w postaci kierunkowej $y = ax + b$. Z własności postaci kierunkowej wiemy, że współczynnik b odpowiada za miejsce przecięcia się prostej z osią y -ową. W naszym przypadku prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych, zatem $b = 0$. To oznacza, że naszą prostą możemy opisać wzorem $y = ax$.

Szukamy miejsca przecięcia się prostej z parabolą. Z geometrycznej interpretacji układu równań wiemy, że rozwiązując układ równań składający się ze wzorów dwóch funkcji otrzymamy właśnie miejsce/miejsca przecięcia się wykresów. W związku z tym musimy ułożyć i rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} y = ax \\ y = (x - 1)^2 + 1 \end{cases}$$

Krok 2. Rozwiązanie układu równań.

Stosując metodę podstawiania otrzymamy:

$$ax = (x - 1)^2 + 1, \quad ax = x^2 - 2x + 1 + 1, \quad ax = x^2 - 2x + 2, \quad ax - x^2 + 2x - 2 = 0, \quad -x^2 + ax + 2x - 2 = 0, \quad -x^2 + (a + 2)x - 2 = 0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

To równanie kwadratowe rozwiążemy dokładnie tak jak każde inne. Musimy tylko uważać na symbole, bo współczynnik a będzie nam się trochę "dublował" z niewiadomą a :

Współczynniki: $a = -1$, $b = a + 2$, $c = -2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a + 2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = a^2 + 4a + 4 - 8 = a^2 + 4a - 4$$

Teraz musimy skorzystać z bardzo ważnej informacji zaszytej w treści zadania, a mianowicie faktu, iż prosta z parabolą przecinają się tylko w jednym miejscu. Ta informacja mówi nam, że istnieje w takim razie tylko jedno rozwiązanie tego równania kwadratowego, a to z kolei prowadzi nas do wniosku, że w takim razie delta musi być równa 0 (bo tylko wtedy równanie kwadratowe ma jedno rozwiązanie). W związku z tym otrzymujemy równanie:

$$a^2 + 4a - 4 = 0$$

Krok 4. Obliczenie wartości współczynnika a

Powstało nam więc tak naprawdę drugie równanie kwadratowe $a^2 + 4a - 4 = 0$, które tym razem da nam odpowiedź na pytanie - dla jakiego a delta jest równa 0, czyli dla jakiego a funkcja $y = ax$ ma jedno miejsce przecięcia się z parabolą $y = (x - 1)^2 + 1$. Zatem:

Współczynniki: $a = 1$, $b = 4$, $c = -4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 - (-16) = 32, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

$$a_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 4\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 4\sqrt{2}}{2} = -2 - 2\sqrt{2}, \quad a_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{2} = -2 + 2\sqrt{2}$$

Krok 5. Zapisanie równania prostej.

Żadnego z rozwiązań z poprzedniego kroku wykluczyć nie możemy, a to oznacza że warunki tego zadania będą spełniać dwie proste:

$$y = (-2 - 2\sqrt{2})x \quad \vee \quad y = (-2 + 2\sqrt{2})x$$

Gdy Anka miała tyle lat, ile Danka ma teraz, to była od niej trzy razy starsza. Gdy Danka będzie miała tyle lat, ile Anka ma teraz, Anka będzie miała 42 lata. Ile lat ma obecnie każda z dziewcząt?

Odpowiedź: Anka ma 30 lat,

Krok 1. Wprowadzenie poprawnych oznaczeń i zapisanie równań z treści zadania.

Zadanie jest trochę zagmatwane i wszystko sprowadza się tak naprawdę do poprawnego ułożenia dwóch równań z których stworzymy układ równań. Przyjmijmy, że:

a - obecny wiek Anki

d - obecny wiek Danki

$a - d$ - różnica wieku między Anką i Danką

Teraz ułożmy pierwsze równanie. Ze zdania "Gdy Anka miała tyle lat, ile Danka ma teraz, to była od niej trzy razy starsza" wynika, że:

$$a - (a - d) = 3(d - (a - d))$$

lub też po prostu:

$$d = 3(d - (a - d))$$

Drugie równanie wynika ze zdania "Gdy Danka będzie miała tyle lat, ile Anka ma teraz, Anka będzie miała 42 lata", czyli:

$$a + (a - d) = 42$$

Krok 2. Utworzenie i rozwiązanie układu równań.

Z dwóch równań wyznaczonych w pierwszym kroku powstaje nam układ równań, który musimy po prostu rozwiązać:

$$\begin{cases} d = 3(d - (a - d)) \\ a + (a - d) = 42 \end{cases},$$

$$\begin{cases} d = 3(d - a + d) \\ a + a - d = 42 \end{cases},$$

$$\begin{cases} d = 3(2d - a) \\ 2a - d = 42 \end{cases},$$

$$\begin{cases} d = 6d - 3a \\ d + 42 = 2a \end{cases},$$

$$\begin{cases} 5d - 3a = 0 \\ d = 2a - 42 \end{cases},$$

Podstawiając $d = 2a - 42$ z drugiego równania do pierwszego otrzymamy:

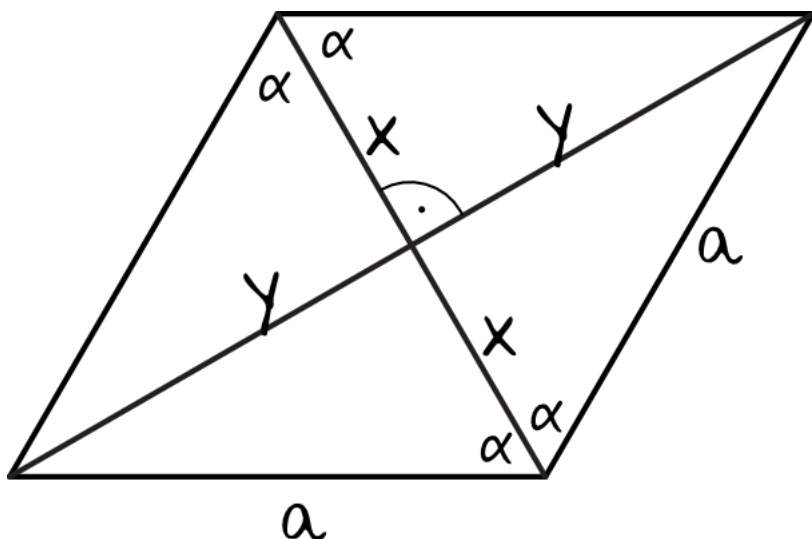
$$5 \cdot (2a - 42) - 3a = 0, 10a - 210 - 3a = 0, 7a = 210, a = 30$$

Znając wiek Anki możemy obliczyć także wiek Danki, podstawiając $a = 30$ do jednego z równań:

$$d = 2a - 42, d = 2 \cdot 30 - 42, d = 60 - 42, d = 18$$

To oznacza, że Anka ma 30 lat, a Danka ma 18 lat.

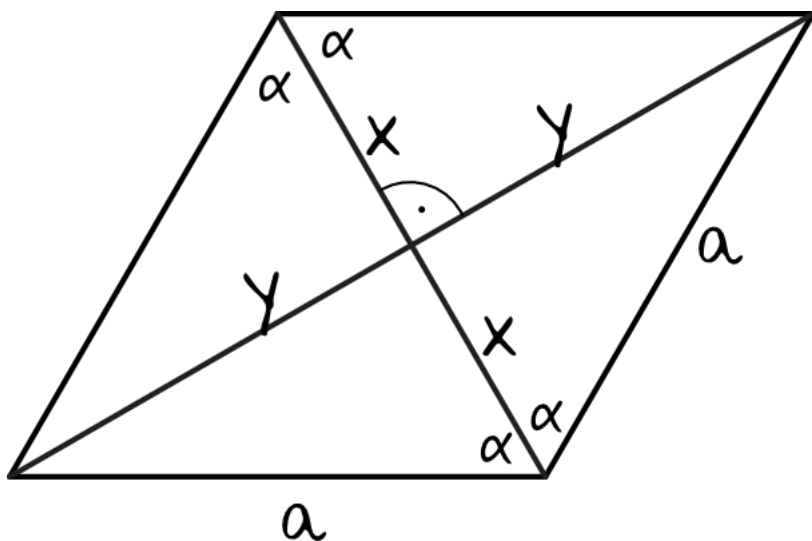
Kąt rozwarty rombu ma miarę 2α . Suma długości przekątnych rombu jest równa 68 oraz $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$. Oblicz obwód rombu.



Odpowiedź: $Obw = 104$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

W tym zadaniu trzeba pamiętać, że przekątne rombu przecinają się w połowie swojej długości pod kątem prostym oraz że dzielą nam kąty rozwarte na dwie równe miary. W związku z tym całość wyglądać będzie w następujący sposób:



Krok 2. Ułożenie układu równań.

Z treści zadania wiemy, że suma długości przekątnych jest równa 68, czyli zgodnie z naszym rysunkiem:

$$2x + 2y = 68$$

Dodatkowo wiemy, że tangens kąta α jest równy 2,4. Tangens opisuje zależność między przyprostokątną leżącą naprzeciwko kąta α do przyprostokątnej leżącej przy tym kącie, zatem:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2,4, \quad \frac{y}{x} = 2,4$$

I to właśnie z tych dwóch równań możemy ułożyć układ równań:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 68 \\ \frac{y}{x} = 2,4 \end{cases},$$

Krok 3. Rozwiązanie układu równań.

Najprościej będzie rozwiązać ten układ równań metodą podstawiania. W tym celu możemy wyznaczyć np. wartość x z drugiego równania i podstawić go do równania pierwszego:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 68 & / : 2 \\ \frac{y}{x} = 2,4 & / \cdot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 34 \\ y = 2,4x \end{cases}$$

Podstawiając teraz drugie równanie do pierwszego otrzymamy:

$$x + 2,4x = 34, \quad 3,4x = 34, \quad x = 10$$

Znając wartość $x = 10$ możemy obliczyć brakującą wartość y , podstawiając x do jednego z równań:

$$10 + y = 34, \quad y = 24$$

Krok 4. Obliczenie długości boku rombu.

Spójrzmy na jeden z czterech trójkątów prostokątnych, które powstały nam w rombie. Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad 10^2 + 24^2 = a^2, \quad 100 + 576 = a^2, \quad a^2 = 676, \quad a = 26 \quad \vee \quad a = -26$$

Wartość ujemną oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $a = 26$.

Krok 5. Obliczenie obwodu rombu.

Samo obliczenie obwodu jest już formalnością, bo już wiemy że nasz romb ma cztery boki o długości 26, zatem:

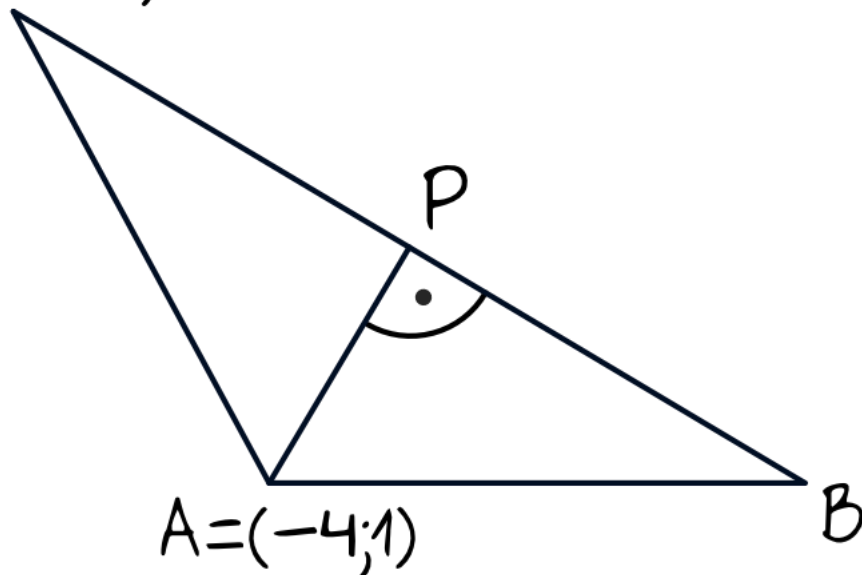
$$Obw = 4 \cdot 26, \quad Obw = 104$$

Zadanie 33

0-4 pkt

Punkty $A = (-4, 1)$ i $C = (-5, 5)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Prosta $-x - y = 0$ jest symetralną boku AB . Oblicz pole tego trójkąta.

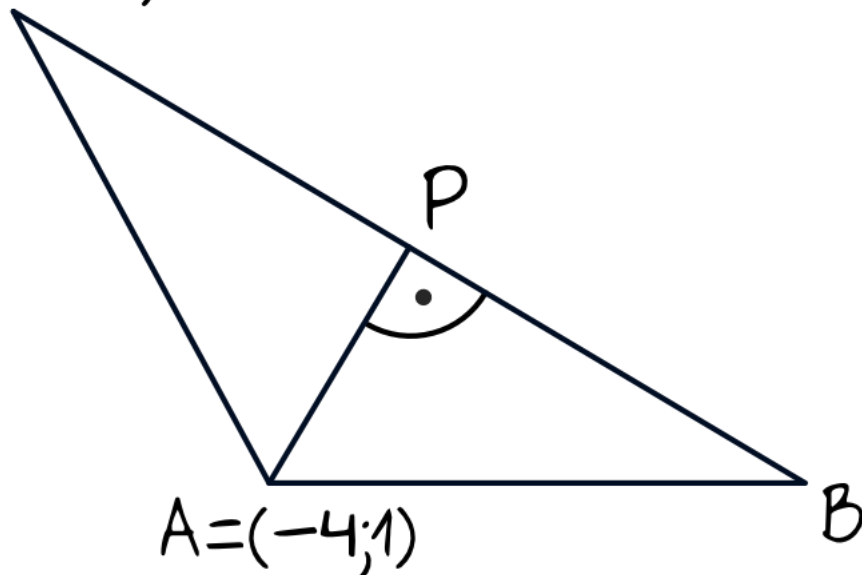
$$C = (-5; 5)$$



Odpowiedź: $P = 7\frac{1}{2}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

$$C = (-5; 5)$$



Krok 2. Wyznaczenie współczynnika a prostej AB .

Prosta AB jest prostopadła do prostej CP . Wiemy, że prosta CP wyraża się wzorem $-x - y = 0$, czyli $y = -x$. Aby dwie proste były względem siebie prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych a musi być równy -1 . Nasza prosta symetralna ma ten współczynnik równy -1 (bo przed x sem nie ma żadnej liczby i stoi minus), zatem prosta AB ma ten współczynnik równy:

$$a \cdot (-1) = -1, \quad a = 1$$

To oznacza, że prosta AB wyraża się wzorem $y = 1x + b$, czyli $y = x + b$.

Krok 3. Wyznaczenie współczynnika b prostej AB .

Do wyznaczenia współczynnika b posłużymy nam punktem A , którego współrzędne mamy podane w treści zadania. Podstawiając te współrzędne do wzoru $y = x + b$ otrzymamy:

$$1 = -4 + b, \quad b = 5$$

To oznacza, że prosta AB jest opisana wzorem $y = x + 5$.

Krok 4. Wyznaczenie współrzędnych punktu P .

Punkt P jest miejscem przecięcia się dwóch prostych, których wzory są nam już znane. To oznacza, że możemy z równań tych prostych ułożyć układ równań, a rozwiązaniem tego układu będą właśnie współrzędne punktu P .

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x + 5 \end{cases}$$

Dodając równanie stronami otrzymamy:

$$2y = 5, y = \frac{5}{2}$$

Znamy już współrzędną igrekową, teraz musimy obliczyć współrzędną iksową, a zrobimy to podstawiając $y = \frac{5}{2}$ do jednego z równań:

$$\frac{5}{2} = -x, x = -\frac{5}{2}$$

To oznacza, że $P = \left(-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Krok 5. Obliczenie długości odcinka AP i AB .

Długość odcinka AP obliczymy ze wzoru na długość odcinka w układzie współrzędnych:

$$|AP| = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}, |AP| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2} - (-4)\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2}, |AP| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2} + 4\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2}, |AP| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}, |AP|$$

Długość odcinka AP przyda nam się tak naprawdę tylko do tego, aby wyznaczyć długość odcinka AB . Symetralna dzieli bok na dwie równe części, zatem odcinek AB będzie dwukrotnie dłuższy od odcinka AP , czyli:

$$|AB| = 2 \cdot |AP|, |AB| = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}, |AB| = 3\sqrt{2}$$

Krok 6. Obliczenie długości odcinka CP .

Odcinek CP jest wysokością naszego trójkąta, czyli miarą którą potrzebujemy do obliczenia pola powierzchni trójkąta. Znamy współrzędne punktu C oraz P , zatem:

$$|CP| = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}, |CP| = \sqrt{\left(-5 - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2 + \left(5 - \frac{5}{2}\right)^2}, |CP| = \sqrt{\left(-5 + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{5}{2}\right)^2}, |CP| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}, |C$$

Krok 7. Obliczenie pola trójkąta ABC .

Znamy długość podstawy $|AB| = 3\sqrt{2}$, wiemy też że wysokość trójkąta jest równa $|CP| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, zatem pole powierzchni tej figury będzie równe:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CP|, P = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}, P = \frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 2}, P = \frac{30}{4}, P = 7\frac{1}{2}$$

Ciąg $(x - 3, x, y)$ jest ciągiem arytmetycznym. Ciąg $(x, y, 2y)$ jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Znajdź wyrazy ciągu arytmetycznego oraz wyrazy ciągu geometrycznego.

Odpowiedź: Ciąg arytmetyczny \(

Krok 1. Ułożenie równań z własności ciągów arytmetycznych i geometrycznych.

Korzystając z własności ciągów arytmetycznych możemy zapisać, że:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}, \quad x = \frac{x - 3 + y}{2}, \quad 2x = x - 3 + y, \quad x = -3 + y$$

Korzystając z własności ciągów geometrycznych możemy zapisać, że:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3, \quad y^2 = x \cdot 2y$$

Krok 2. Ułożenie i rozwiązanie układu równań.

Z naszych dwóch równań możemy ułożyć układ równań:

$$\begin{cases} x = -3 + y \\ y^2 = x \cdot 2y \end{cases},$$

Podstawiając pierwsze równanie do drugiego otrzymamy:

$$y^2 = (-3 + y) \cdot 2y, \quad y^2 = -6y + 2y^2, \quad y^2 - 6y = 0, \quad y(y - 6) = 0, \quad y = 0 \quad \vee \quad y = 6$$

Rozwiązanie $y = 0$ musimy jednak odrzucić, bo zgodnie z warunkiem zadania ciąg geometryczny ma mieć dodatnie wyrazy, a gdy $y = 0$ to ciąg ma na pewno drugi i trzeci wyraz równy 0. Zostaje nam więc $y = 6$.

Teraz musimy dokończyć rozwiązywanie układu równań i wyznaczyć wartość x . Podstawiając $y = 6$ do dowolnego z równań otrzymamy:

$$x = -3 + y, \quad x = -3 + 6, \quad x = 3$$

Krok 3. Zapisanie wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

Pozostała nam już tylko formalność, czyli zapisanie wyrazów obydwu ciągów. Podstawiając $x = 3$ oraz $y = 6$ otrzymamy:

Ciąg arytmetyczny $(x - 3, x, y) \Rightarrow (0, 3, 6)$

Ciąg geometryczny $(x, y, 2y) \Rightarrow (3, 6, 12)$