

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Operon 2015

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	A (2^{103})	1
2	B ($36^{\frac{3}{2}}$)	1
3	C ($10 - 2\sqrt{21}$)	1
4	B (jedno miejsce zerowe: -6)	1
5	B (18)	1
6	C (zwiększyła się o 8%)	1
7	A ($(-\infty, 2)$)	1
8	A ($(-\infty, -1 - \sqrt{3})$)	1
9	A ($ \angle ACB = 42^\circ$)	1
10	C (39)	1
11	A (0)	1
12	D ($(3, +\infty)$)	1
13	A (-23)	1
14	C ($(0, 1)$ i $(-\frac{1}{4}, 0)$)	1
15	B ($(-\infty, 6)$)	1
16	B ($\frac{2}{3}$)	1
17	B (30°)	1
18	C (20°)	1
19	A ($B = (-\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$)	1
20	B (2, 69)	1
21	B (128π)	1
22	D (30°)	1
23	B ($y = -\frac{2}{3}x + 1$)	1
24	A ($4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7$)	1
25	C ($48\sqrt{2}$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Liczba $a = 8^{23} \cdot 4^{17}$ jest równa liczbie:

Odpowiedź: A (2^{103})

Sprawdzając potęgi do wspólnej podstawy otrzymamy:

$$a = 8^{23} \cdot 4^{17}, a = (2^3)^{23} \cdot (2^2)^{17}, a = 2^{3 \cdot 23} \cdot 2^{2 \cdot 17}, a = 2^{69} \cdot 2^{34}, a = 2^{69+34}, a = 2^{103}$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Liczbą wymierną jest liczba:

Odpowiedź: B ($36^{\frac{3}{2}}$)

Sprawdźmy po kolei każdą z odpowiedzi:

Odp. A. $36^{\frac{2}{3}} = (6^2)^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{6^4} = \sqrt[3]{6^3 \cdot 6} = 6\sqrt[3]{6}$

Odp. B. $36^{\frac{3}{2}} = (6^2)^{\frac{3}{2}} = 6^3 = 216$

Odp. C. $36^{\frac{1}{4}} = (6^2)^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

Odp. D. $36^{\frac{3}{4}} = (6^2)^{\frac{3}{4}} = 6^{\frac{3}{2}} = \sqrt{6^3} = \sqrt{6^2 \cdot 6} = 6\sqrt{6}$

Liczbą wymierną jest więc liczba z drugiej odpowiedzi.

Zadanie 3

0-1 pkt

Wyrażenie $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$ jest równe:

Odpowiedź: C ($10 - 2\sqrt{21}$)

Wykonując działania na potęgach i pierwiastkach oraz korzystając ze wzorów skróconego mnożenia otrzymamy:

$$(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 7 - 2\sqrt{21} + 3 = 10 - 2\sqrt{21}$$

Zadanie 4

0-1 pkt

Funkcja $f(x) = (x + 6)^2$ ma:

Odpowiedź: B (jedno miejsce zerowe: -6)

Naszym zadaniem (patrzac po odpowiedziach) jest sprawdzenie jakie miejsca zerowe ma nasza funkcja. W tym konkretnym przypadku funkcja przyjmie wartość równą zero wtedy, kiedy wartość w nawiasie będzie równa zero. Możemy zatem zapisać, że:

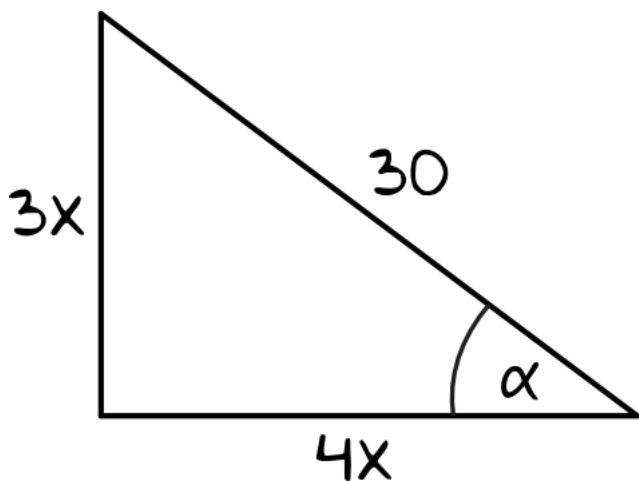
$$x + 6 = 0, \quad x = -6$$

Funkcja ta ma jedno miejsce zerowe i jest nim $x = -6$.

Zadanie 5

0-1 pkt

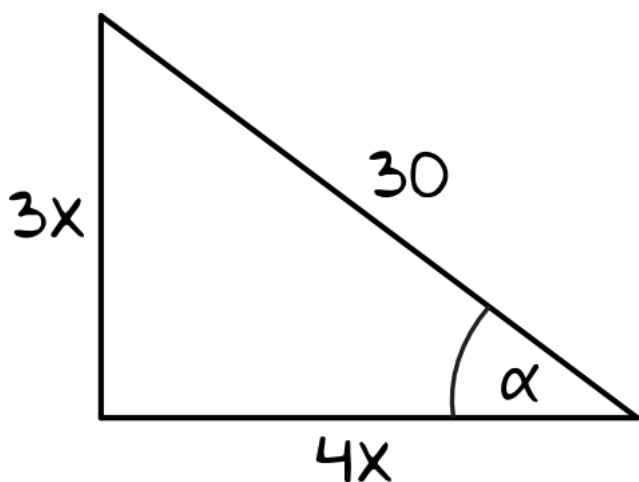
Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym jest równy $\frac{3}{4}$, a przeciwprostokątna ma długość 30. Krótsza przyprostokątna trójkąta ma długość:



Odpowiedź: B (18)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Skoro tangens jest równy $\frac{3}{4}$, a przeciwprostokątna ma długość 30, to znaczy że zajdzie taka oto sytuacja:



Krok 2. Obliczenie wartości niewiadomej x .

Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$(3x)^2 + (4x)^2 = 30^2, 9x^2 + 16x^2 = 900, 25x^2 = 900, x^2 = 36, x = 6 \vee x = -6$$

Wartość ujemną oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $x = 6$.

Krok 3. Obliczenie długości krótszej przyprostokątnej.

Krótsza przyprostokątna ma długość $3x$, czyli $3 \cdot 6 = 18$.

Zadanie 6

0-1 pkt

Jeśli cena towaru najpierw zmniejszyła się o 10%, a następnie zwiększyła się o 20%, to po tych dwóch operacjach wyjściowa cena towaru:

Odpowiedź: C (zwiększyła się o 8%)

x - cena towaru na początku

$0,9x$ - cena towaru po obniżce

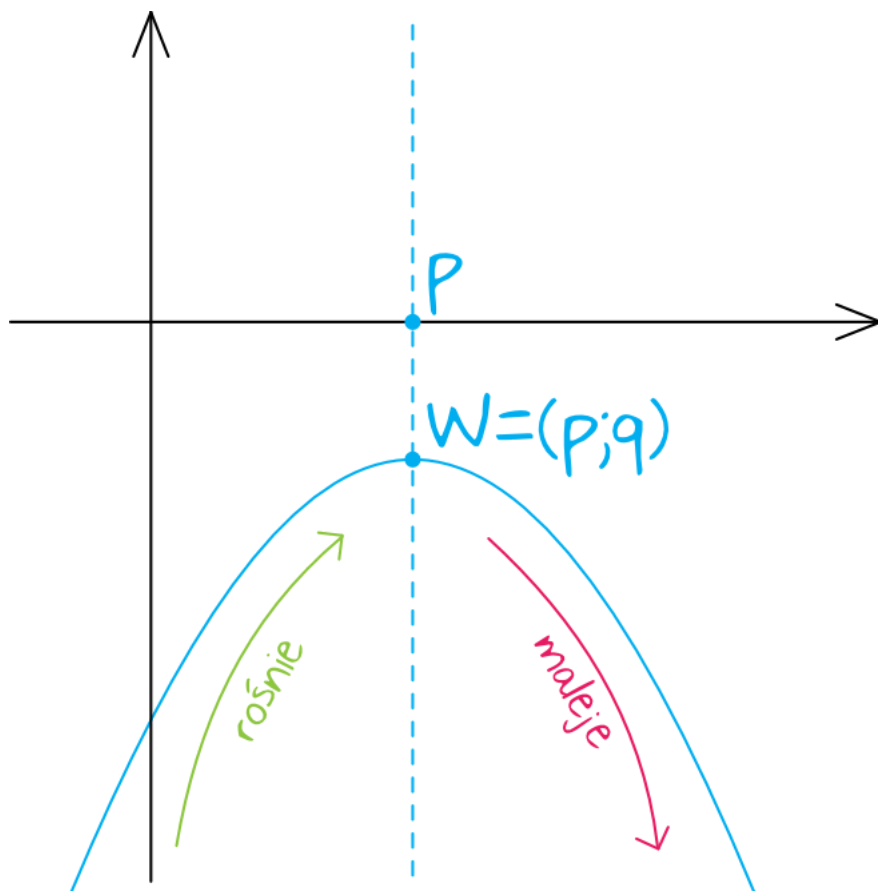
$1,2 \cdot 0,9x = 1,08x$ - cena towaru po podwyżce

To oznacza, że cena towaru zwiększyła się z x do $1,08x$, czyli zwiększyła się o 8%.

Zadanie 7

0-1 pkt

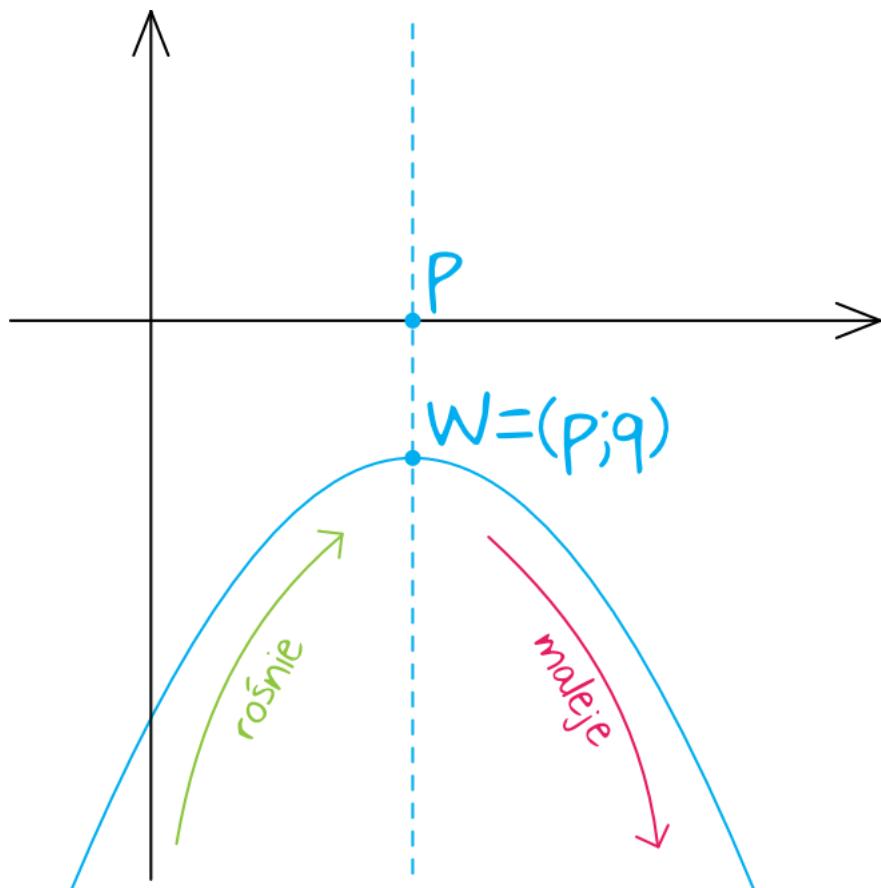
Maksymalny przedział otwarty, w którym funkcja $f(x) = -4x^2 + 16x - 23$ jest rosnąca, to:



Odpowiedź: A $((-\infty, 2))$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy naszkicować wykres paraboli. Na pewno ramiona paraboli będą skierowane do dołu, bo współczynnik kierunkowy a jest ujemny. Całość będzie wyglądać mniej więcej w ten sposób:



Z rysunku wynika dość wyraźnie, że nasza funkcja będzie rosnąć od minus nieskończoności aż dotrze do wierzchołka. To właśnie w wierzchołku się potem odbije i zacznie maleć. Wniosek z tego taki, że musimy obliczyć współrzędną xową naszego wierzchołka (potocznie zapisywaną jako p).

Krok 2. Obliczenie współrzędnej xowej wierzchołka.

Współrzędną p obliczymy ze wzoru:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

W naszym przypadku współczynniki wynoszą odpowiednio: $a = -4$, $b = 16$, $c = -23$, zatem:

$$p = \frac{-16}{2 \cdot (-4)}, p = \frac{-16}{-8}, p = 2$$

Krok 3. Zapisanie przedziału.

Wiemy już, że współrzędna xowa wierzchołka jest równa $p = 2$, zatem funkcja ta rośnie w przedziale $x \in (-\infty, 2)$.

Zadanie 8

0-1 pkt

Zbiór rozwiązań nierówności $x - \sqrt{3}x > 2$ to:

Odpowiedź: A $((-\infty, -1 - \sqrt{3}))$

Aby rozwiązać taką nierówność to po lewej stronie musimy mieć x , a po prawej pozostałe liczby. Dlatego też kluczem do sukcesu w tym przykładzie jest wyłączenie x przed nawias przy wyrażeniu $x - \sqrt{3}x$. Całość będzie wyglądać następująco:

$$x - \sqrt{3}x > 2, \quad x(1 - \sqrt{3}) > 2$$

Teraz podzielimy obie strony równania przez $1 - \sqrt{3}$, więc po lewej stronie zostanie nam sam x , ale tutaj trzeba być bardzo ostrożnym. Wartość $1 - \sqrt{3}$ jest ujemna, a dzieląc (lub mnożąc) nierówności przez ujemne liczby musimy pamiętać o zmianie znaku. Dlatego też:

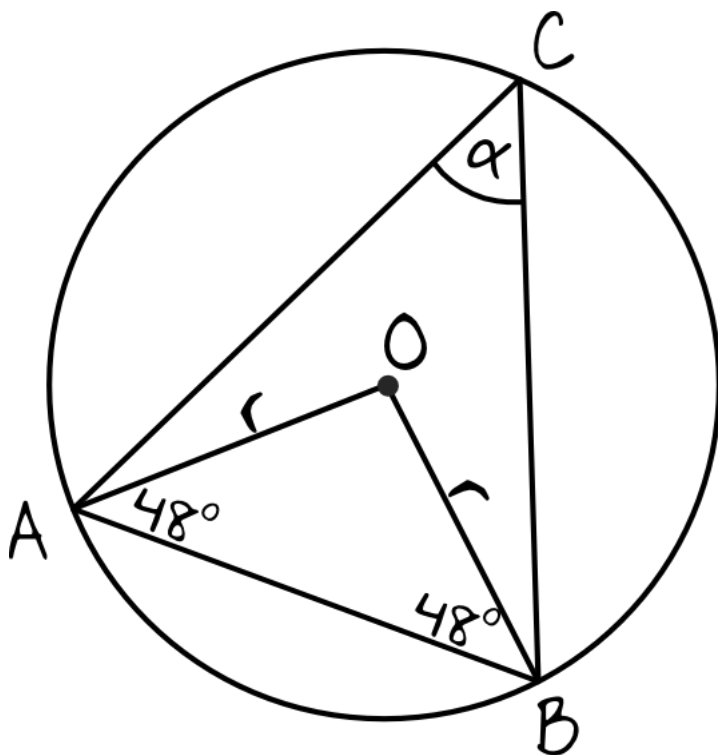
$$x(1 - \sqrt{3}) > 2 \quad / : (1 - \sqrt{3}), \quad x < \frac{2}{1 - \sqrt{3}}, \quad x < \frac{2 \cdot (1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3})}, \quad x < \frac{2 + 2\sqrt{3}}{1 - 3}, \quad x < \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2}, \quad x < -1 - \sqrt{3}$$

Z tego też względu zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$.

Zadanie 9

0-1 pkt

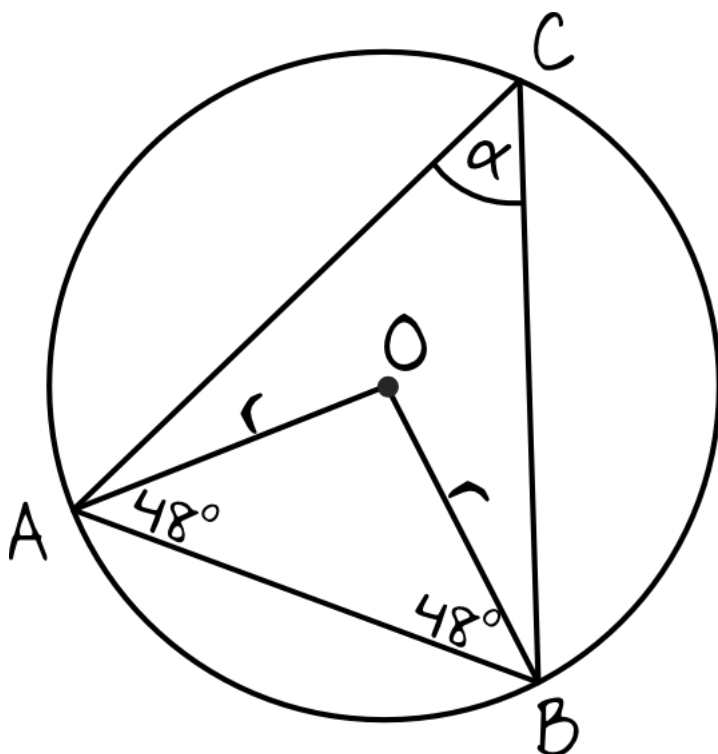
W okrąg o środku O wpisano trójkąt ostrokątny ABC . Jeśli $|\angle ABO| = 48^\circ$, to:



Odpowiedź: A ($|\angle ACB| = 42^\circ$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zgodnie z informacjami z treści zadania możemy stworzyć następujący rysunek:



Skąd wiemy, że kąt BAO także ma 48° ? Trójkąt ABO musi być równoramienny (ramiona są długości promienia), zatem kąty przy podstawie mają jednakową miarę.

Krok 2. Obliczenie miary kąta AOB .

W trójkącie ABO jak w każdym innym suma miar kątów musi być równa 180° , zatem kąt AOB ma miarę:

$$|\angle AOB| = 180^\circ - 48^\circ - 48^\circ = 84^\circ$$

Krok 3. Obliczenie miary kąta ACB .

Zgodnie z własnościami kątów środkowych i wpisanych, miara kąta ACB jest dwukrotnie mniejsza od miary kąta środkowego AOB . To oznacza, że:

$$|\angle ACB| = 84^\circ : 2 = 42^\circ$$

Zadanie 10

0-1 pkt

Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = -3n + 118$. Liczba dodatnich wyrazów tego ciągu jest równa:

Odpowiedź: C (39)

Krok 1. Ułożenie i rozwiązanie nierówności.

Naszym zadaniem jest sprawdzenie ile jest dodatnich wyrazów tego ciągu, czyli kiedy $-3n + 118$ jest większe od zera.

$$-3n + 118 > 0, \quad -3n > -118, \quad n < 39\frac{1}{3}$$

Krok 2. Interpretacja otrzymanego wyniku.

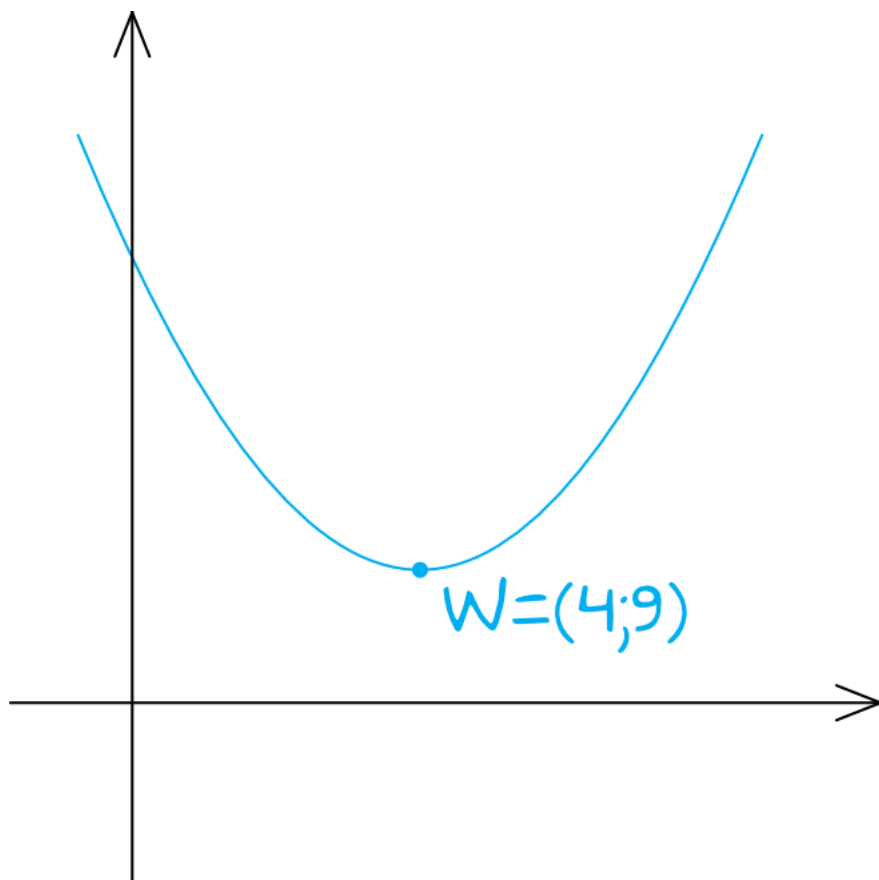
Z nierówności wyszło nam, że dopóki n jest mniejsze od $39\frac{1}{3}$ to wyrazy ciągu są dodatnie. Zatem przykładowo dla $n = 25$ ciąg jest dodatni, ale dla $n = 40$ ciąg będzie już ujemny.

Z własności ciągów wiemy, że n jest zawsze liczbą naturalną, większą od zera. W związku z tym naszą nierówność spełniać będą liczby $n \in \{1, 2, 3, \dots, 37, 38, 39\}$, czyli ten ciąg ma 39 dodatnich wyrazów.

Zadanie 11

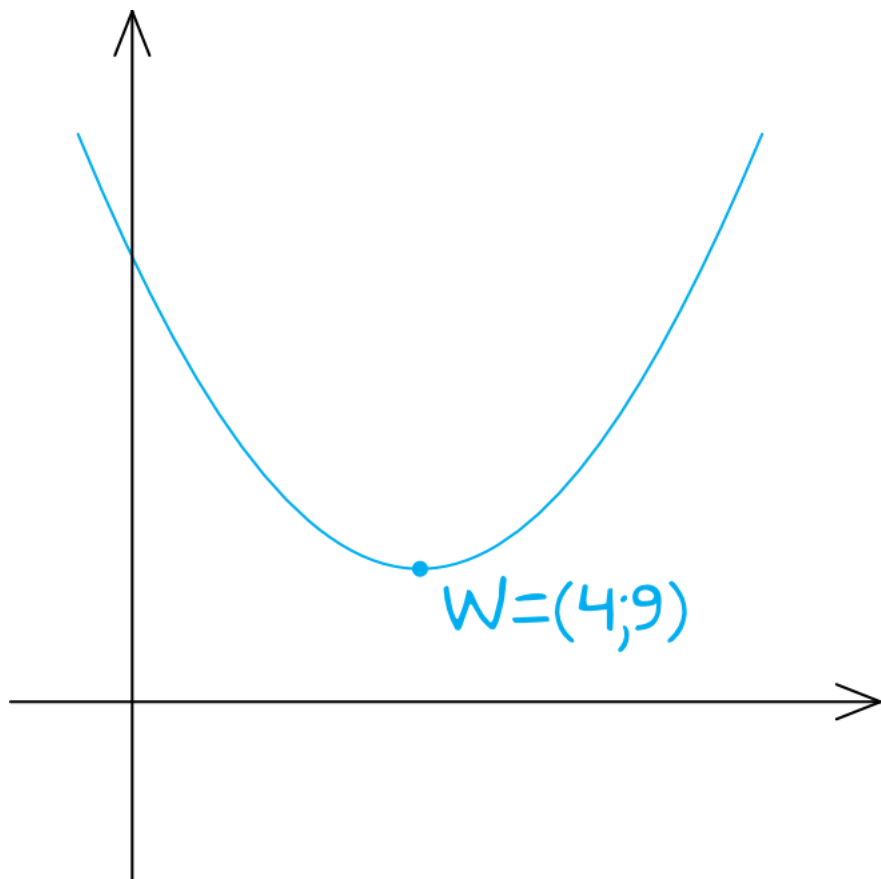
0-1 pkt

Liczba miejsc zerowych funkcji $f(x) = (x - 4)^2 + 9$ to:



Odpowiedź: A (0)

Do zadania możemy podejść na wiele sposobów. Nasza funkcja przedstawiona jest w postaci kanonicznej typu $f(x) = a(x - p)^2 + q$, czyli takiej z której łatwo odczytamy współrzędne wierzchołka paraboli $W = (p; q)$. Moglibyśmy więc odczytać, że wierzchołek ma współrzędne $W = (4; 9)$. Co nam ta wiedza daje? Same współrzędne wierzchołka wiele nam nie powiedzą, ale wiemy jeszcze dodatkowo, że współczynnik kierunkowy a jest dodatni (konkretnie to $a = 1$, bo po znaku równa się nie stoi żadna liczba), zatem parabola będzie mieć ramiona skierowane do góry. Wykres będzie więc wyglądał mniej więcej w ten sposób:



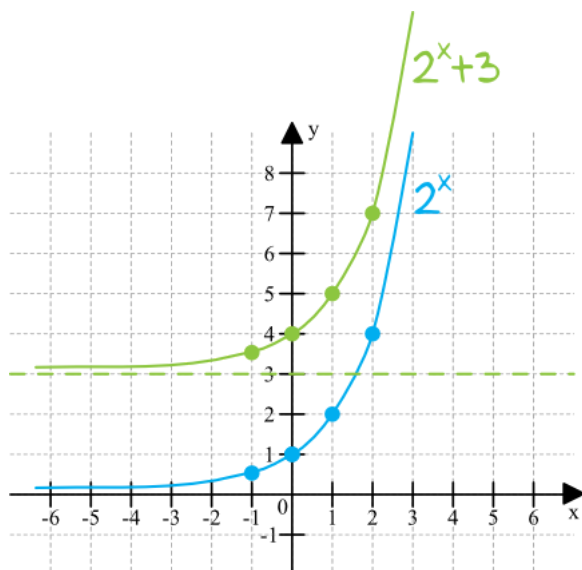
I z takiego rysunku możemy wywnioskować, że ta funkcja nie ma miejsc zerowych, bo parabola nigdy nie przetnie się z osią x.

Gdybyśmy jednak nie dostrzegli tych własności, to całkiem niezłym pomysłem byłoby też przyrównanie wzoru funkcji do zera (przyrównujemy do zera, bo szukamy miejsc zerowych, czyli miejsc dla których funkcja przyjmuje wartość równą zero) i wtedy otrzymalibyśmy:

$$(x - 4)^2 + 9 = 0, \quad (x - 4)^2 = -9$$

Z racji tego iż nie istnieje liczba rzeczywista, która podniesiona do kwadratu daje ujemny wynik, to znaczy że ta funkcja nigdy nie przybiera wartości równej 0, czyli nie ma miejsc zerowych.

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2^x + 3$ jest zbiór:



Odpowiedź: D $((3, +\infty))$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Wykres funkcji $f(x) = 2^x + 3$ jest tak naprawdę przesunięciem wykresu funkcji wykładniczej 2^x o trzy jednostki w górę. Jeżeli nie pamiętamy jak rysuje się funkcję wykładniczą, to zawsze możemy podstawić sobie do wzoru kilka x-ów i sprawdzić jaką wartość przyjmie funkcja dla tych konkretnych argumentów. Przykładowo:

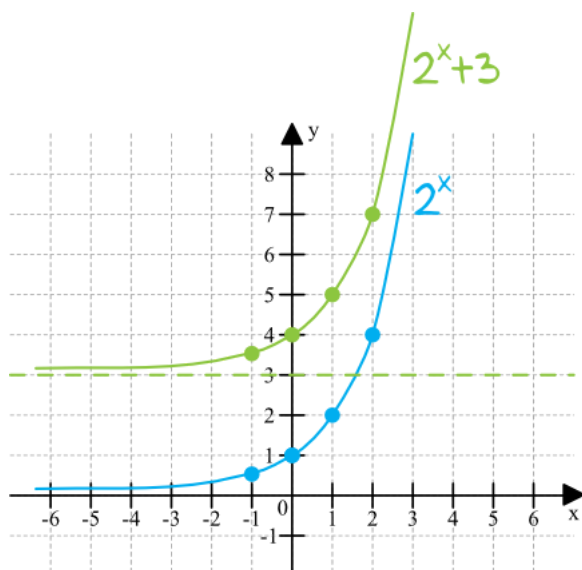
Dla $x = 0$ funkcja $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość $y = 2^0 = 1$

Dla $x = 1$ funkcja $y = 2^x$ przyjmuje wartość $y = 2^1 = 2$

Dla $x = 2$ funkcja $y = 2^x$ przyjmuje wartość $y = 2^2 = 4$

Dla $x = -1$ funkcja $y = 2^x$ przyjmuje wartość $y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Funkcja $f(x) = 2^x + 3$ będzie przyjmować zawsze wartości o 3 większe od funkcji $f(x) = 2^x$. Spróbujmy zatem narysować ten wykres:



Krok 2. Odczytanie zbioru wartości funkcji.

Szukamy zbioru wartości, czyli patrzymy na oś igreków. Widzimy wyraźnie, że funkcja przyjmuje wartości większe od 3 i idzie aż do nieskończoności, zatem zbiorem wartości funkcji jest $(3, +\infty)$.

Zadanie 13

0-1 pkt

W ciągu arytmetycznym pierwszy i drugi wyraz są odpowiednio równe: 1, -2. Dziewiąty wyraz tego ciągu jest równy

Odpowiedź: A (-23)

Krok 1. Obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego.

Znając wartość pierwszego i drugiego wyrazu możemy bez problemu obliczyć różnicę ciągu arytmetycznego:

$$a_2 = a_1 + r, \quad -2 = 1 + r, \quad r = -3$$

Krok 2. Obliczenie wartości dziewiątego wyrazu ciągu arytmetycznego.

Znając wartość pierwszego wyrazu oraz różnicy ciągu arytmetycznego możemy obliczyć wartość dowolnego wyrazu:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \quad a_9 = a_1 + (9 - 1)r, \quad a_9 = a_1 + 8r, \quad a_9 = 1 + 8 \cdot (-3), \quad a_9 = 1 - 24, \quad a_9 = -23$$

Zadanie 14

0-1 pkt

Prosta o równaniu $y = 4x + 1$ przecina osie układu współrzędnych w punktach:

Odpowiedź: C ((0, 1) i $(-\frac{1}{4}, 0)$)

Krok 1. Wyznaczenie miejsca przecięcia się z osią x-ową.

Z osią x-ową prosta przetnie się wtedy, kiedy jej wartość będzie równa $y = 0$, zatem:

$$4x + 1 = 0, \quad 4x = -1, \quad x = -\frac{1}{4}$$

To oznacza, że prosta przetnie się z osią x-ową w punkcie $(-\frac{1}{4}, 0)$.

Krok 2. Wyznaczenie miejsca przecięcia się z osią y-ową.

Z osią y-ową prosta przetnie się wtedy, kiedy jej argument będzie równy $x = 0$, zatem:

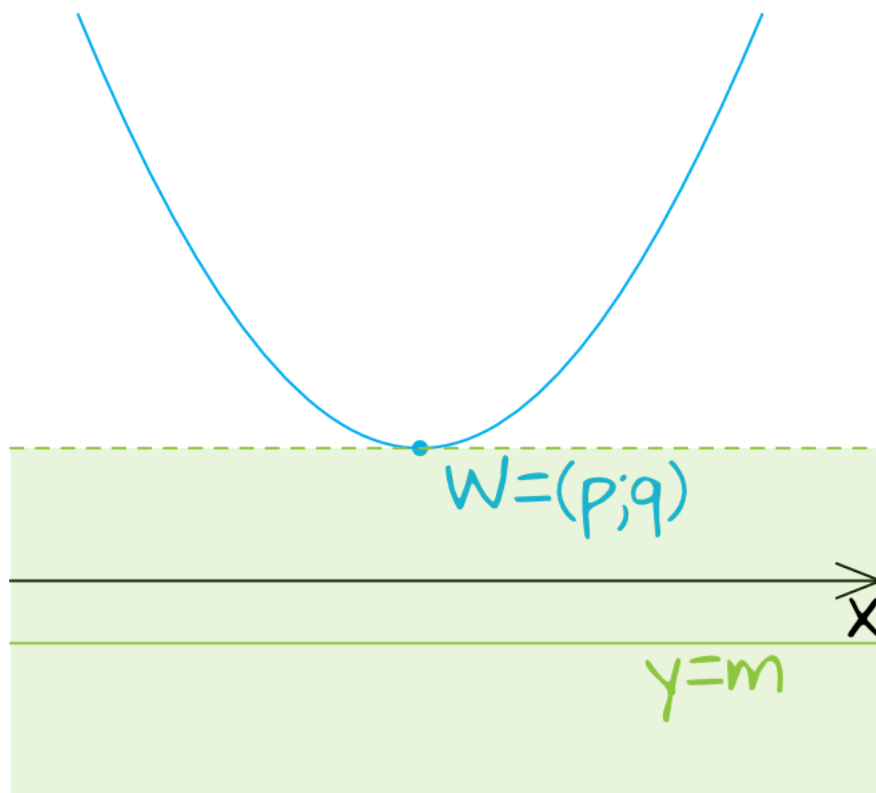
$$y = 4 \cdot 0 + 1, \quad y = 1$$

To oznacza, że prosta przetnie się z osią y-ową w punkcie $(0, 1)$.

Zadanie 15

0-1 pkt

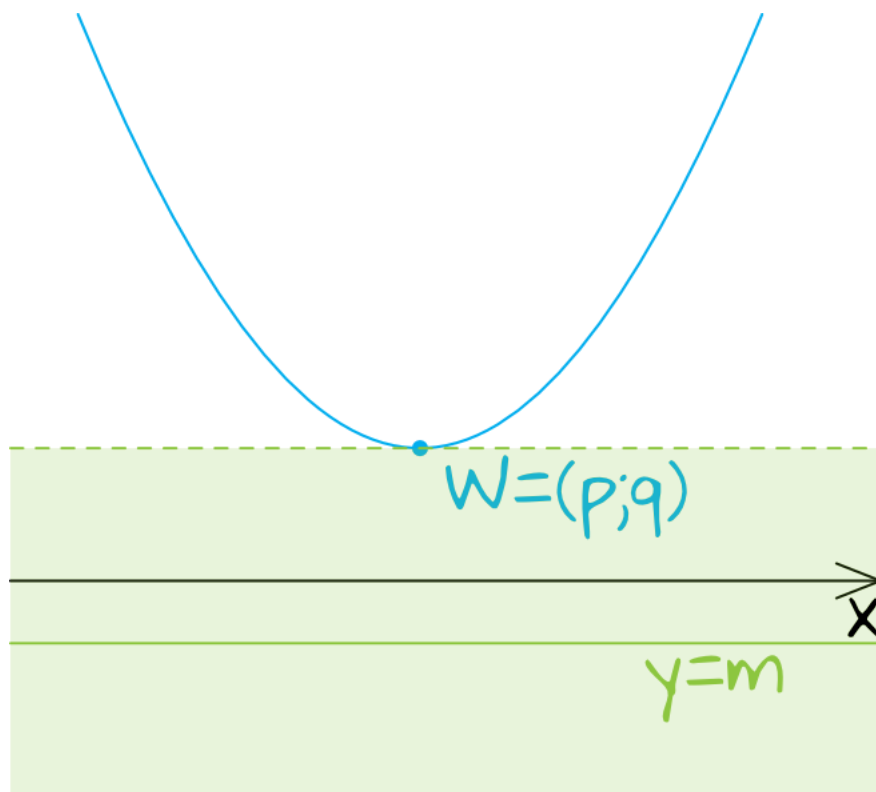
Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 4x + 10$. Prosta $y = m$ nie ma z wykresem funkcji f punktów wspólnych. Maksymalny zbiór do którego należy liczba m to:



Odpowiedź: B $((-\infty, 6))$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy narysować sobie tę sytuację. Wykresem funkcji będzie parabola (bo jest to funkcja kwadratowa), której ramiona są skierowane do góry (bo współczynnik kierunkowy a jest dodatni).



Prosta $y = m$ jest prostą która przyjmuje jednakową wartość dla wszystkich argumentów (np. dla $m = 3$ mielibyśmy prostą $y = 3$). Skoro prosta $y = m$ ma nie mieć z naszą parabolą punktów wspólnych, to znaczy że musi znaleźć się pod parabolą (czyli w tej zielonej części na rysunku). Jaki z tego płynie wniosek? Wystarczy, że poznamy współrzędną igrekową wierzchołka naszej paraboli i będziemy wiedzieć od jakiej wartości musi być mniejszy nasz parametr m .

Krok 2. Obliczenie współrzędnej q wierzchołka paraboli.

Szukamy współrzędnej q wierzchołka (czyli współrzędnej igrekowej). Możemy to zrobić za pomocą wzoru:

$$q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Współczynniki: $a = 1$, $b = 4$, $c = 10$

$$q = -\frac{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}{4 \cdot 1}, q = -\frac{16 - 40}{4}, q = -\frac{-24}{4}, q = -(-6), q = 6$$

Krok 3. Ustalenie zbioru do którego należy liczba m .

Nasza liczba m musi być mniejsza od 6 (bo dla $m = 6$ prosta $y = m$ przecięłaby parabolę dokładnie w wierzchołku), zatem interesuje nas zbiór $(-\infty, 6)$.

Zadanie 16

0-1 pkt

Wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha = 5$ i α jest kątem ostrym. Wówczas wyrażenie $W = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ ma wartość:

Odpowiedź: B ($\frac{2}{3}$)

Krok 1. Zapisanie zależności między sinusem i cosinusem.

Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ możemy zapisać, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = 5, \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 5, \sin \alpha = 5 \cos \alpha$$

Krok 2. Wyznaczenie wartości całego wyrażenia.

Podstawiając $\sin \alpha = 5 \cos \alpha$ do naszego wyrażenia otrzymamy:

$$W = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}, W = \frac{5 \cos \alpha - \cos \alpha}{5 \cos \alpha + \cos \alpha}, W = \frac{4 \cos \alpha}{6 \cos \alpha}, W = \frac{4}{6}, W = \frac{2}{3}$$

Zadanie 17

0-1 pkt

Jeżeli stosunek przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym jest równy $\sqrt{3}$, to jeden z kątów ostrych ma miarę:

Odpowiedź: B (30°)

Z treści zadania wynika, że stosunek $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$. Funkcją trygonometryczną, która opisuje zależności między dwoma przyprostokątnymi jest tangens. W związku z tym musimy odpowiedzieć sobie na pytanie - dla jakiego kąta ostrego tangens jest równy $\sqrt{3}$. Dzieje się tak dla kąta $\alpha = 60^\circ$.

Niestety takiej odpowiedzi wśród proponowanych nie mamy, ale... Skoro jest to trójkąt prostokątny i wiemy, że na pewno jest tutaj kąt ostry o mierze 60° , to znaczy że trzeci kąt tego trójkąta ma miarę:

$$180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Zadanie 18

0-1 pkt

Kąt wpisany oparty na $\frac{1}{9}$ okręgu ma miarę:

Odpowiedź: C (20°)

Kąt środkowy oparty na $\frac{1}{9}$ okręgu ma miarę $\frac{1}{9} \cdot 360^\circ = 40^\circ$.

Nas pytają nie o kąt środkowy, lecz o wpisany, a z własności kątów środkowych i wpisanych wiemy, że kąt wpisany będzie dwa razy mniejszy od kąta środkowego, zatem jego miara będzie równa $40^\circ : 2 = 20^\circ$.

Zadanie 19

0-1 pkt

Jeśli $S = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ jest środkiem odcinka AB i $A = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, to:

Odpowiedź: A ($B = (-\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$)

W zadaniu skorzystamy ze wzoru na środek odcinka w układzie współrzędnych. Środek odcinka AB o współrzędnych $A = (x_A; y_A)$ oraz $B = (x_B; y_B)$ możemy opisać wzorem:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Znamy współrzędne środka odcinka, znamy też współrzędne jednego z punktów, więc możemy wyznaczyć poszukiwane współrzędne punktu B .

Krok 1. Obliczenie współrzędnej x-owej punktu B .

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad -\frac{1}{2} = \frac{-\frac{1}{3} + x_B}{2}, \quad -1 = -\frac{1}{3} + x_B, \quad x_B = -\frac{2}{3}$$

Krok 2. Obliczenie współrzędnej y-owej punktu B .

$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad \frac{3}{2} = \frac{\frac{2}{3} + y_B}{2}, \quad 3 = \frac{2}{3} + y_B, \quad y_B = \frac{7}{3}$$

To oznacza, że współrzędne punktu B są równe: $B = (-\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$.

Zadanie 20

0-1 pkt

Odchylenie standardowe danych: 1, 4, 1, 5, 9, 2, 1, 1 jest równe (z dokładnością do części setnych):

Odpowiedź: B (2, 69)

Krok 1. Obliczenie średniej arytmetycznej.

Do obliczenia odchylenia standardowego przyda nam się znajomość średniej arytmetycznej, zatem:

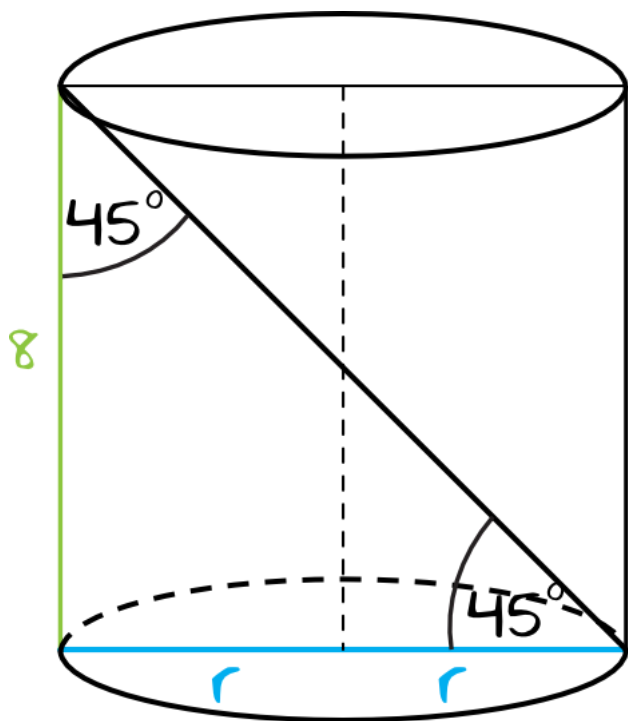
$$\bar{a} = \frac{1 + 4 + 1 + 5 + 9 + 2 + 1 + 1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Krok 2. Obliczenie kwadratu odchylenia standardowego.

Odchylenie standardowe możemy obliczyć w następujący sposób:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1^2 + 4^2 + 1^2 + 5^2 + 9^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2}{8} - 3^2}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1 + 16 + 1 + 25 + 81 + 4 + 1 + 1}{8} - 3^2}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1 + 16 + 1 + 25 + 81 + 4 + 1 + 1}{8} - 9}, \quad \sigma =$$

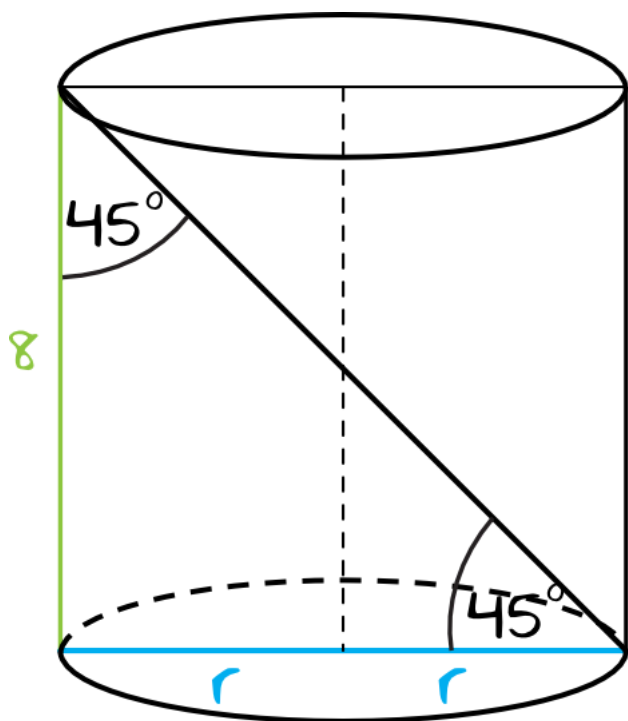
Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do jego płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Wysokość walca ma długość 8. Objętość walca jest równa:



Odpowiedź: B (128π)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanosząc na rysunek dane z treści zadania otrzymamy:



Krok 2. Obliczenie długości promienia podstawy.

Z własności trójkątów o kątach 45° , 45° , 90° wynika, że przyprostokątne mają tę samą długość. Skoro tak, to średnica okręgu znajdującego się w podstawie ma także długość równą 8, a to z kolei oznacza, że promień okręgu ma długość:

$$r = 8 : 2 = 4$$

Krok 3. Obliczenie objętości walca.

Znając długość promienia możemy już bez przeszkód obliczyć objętość całej bryły.

$$V = P_p \cdot H, V = \pi \cdot r^2 \cdot H, V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8, V = \pi \cdot 16 \cdot 8, V = 128\pi$$

Zadanie 22

0-1 pkt

Pole trójkąta jest równe 15. Dwa boki mają długości 10 i 6. Kąt między tymi bokami może mieć miarę:

Odpowiedź: D (30°)

Krok 1. Obliczenie wartości sinusa kąta α .

W tym zadaniu musimy skorzystać ze wzoru na pole trójkąta z sinusem. Dzięki temu wyznaczymy wartość sinusa poszukiwanego kąta:

$$P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha, 15 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin \alpha, 15 = 5 \cdot 6 \cdot \sin \alpha, 15 = 30 \cdot \sin \alpha, \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

Krok 2. Odczytanie z tablic miary kąta.

Sinus przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$ dla kąta 30° oraz 150° i to właśnie ten pierwszy przypadek znalazł się w naszych odpowiedziach.

Zadanie 23

0-1 pkt

Prosta l ma równanie $3x - 2y = 7$. Prosta k prostopadła do prostej l może mieć równanie:

Odpowiedź: B ($y = -\frac{2}{3}x + 1$)

Krok 1. Zapisanie równania prostej l w postaci kierunkowej.

Aby móc przystąpić w ogóle do działania musimy zapisać równanie prostej l w postaci kierunkowej typu $y = ax + b$. Zatem:

$$3x - 2y = 7, -2y = -3x + 7 \quad / : (-2), y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

Krok 2. Ustalenie współczynnika kierunkowego prostej k .

Aby dwie proste były względem siebie prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych a musi być równy -1 . Nasza prosta l ma ten współczynnik kierunkowy równy $\frac{3}{2}$ (właśnie po to zapisywaliśmy równanie tej prostej w postaci kierunkowej), zatem druga prosta musi mieć współczynnik a równy:

$$a \cdot \frac{3}{2} = -1 \quad / \cdot \frac{2}{3}, a = -\frac{2}{3}$$

Taki współczynnik kierunkowy znalazł się jedynie w drugiej odpowiedzi, zatem poszukiwaną przez nas prostą prostopadłą jest $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

Zadanie 24

0-1 pkt

Liczba czterocyfrowych o różnych cyfrach i o parzystej cyfrze tysięcy, setek i dziesiątek jest:

Odpowiedź: A ($4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7$)

Na miejscu tysięcy może znaleźć się jedna z czterech cyfr - 2, 4, 6, 8.

Na miejscu setek może znaleźć się jedna z pięciu cyfr - 0, 2, 4, 6, 8, ale skoro cyfry się nie mogą powtarzać, to odpadnie nam tutaj ta cyfra, która została wybrana na miejscu tysięcy.

Na miejscu dziesiątek może się znaleźć jedna z pięciu cyfr - 0, 2, 4, 6, 8, ale odpadną nam tutaj dwie cyfry, które znalazły się już w cyfrze tysięcy oraz setek.

Na miejscu jedności może znaleźć się jedna z dziesięciu cyfr od 0 do 9, ale odpadną nam tutaj trzy cyfry, które znalazły się już w cyfrze tysięcy, setek oraz dziesiątek.

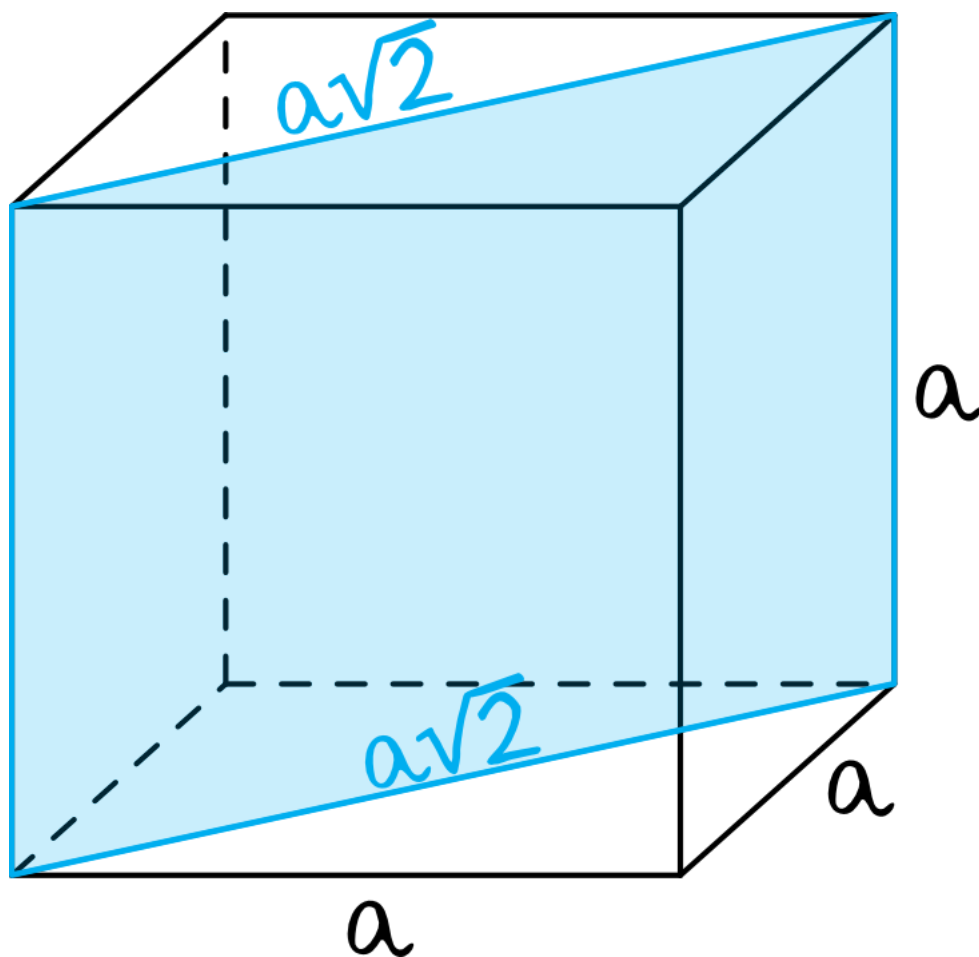
W związku z tym takich liczb czterocyfrowych będzie zgodnie z regułą mnożenia:

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7$$

Zadanie 25

0-1 pkt

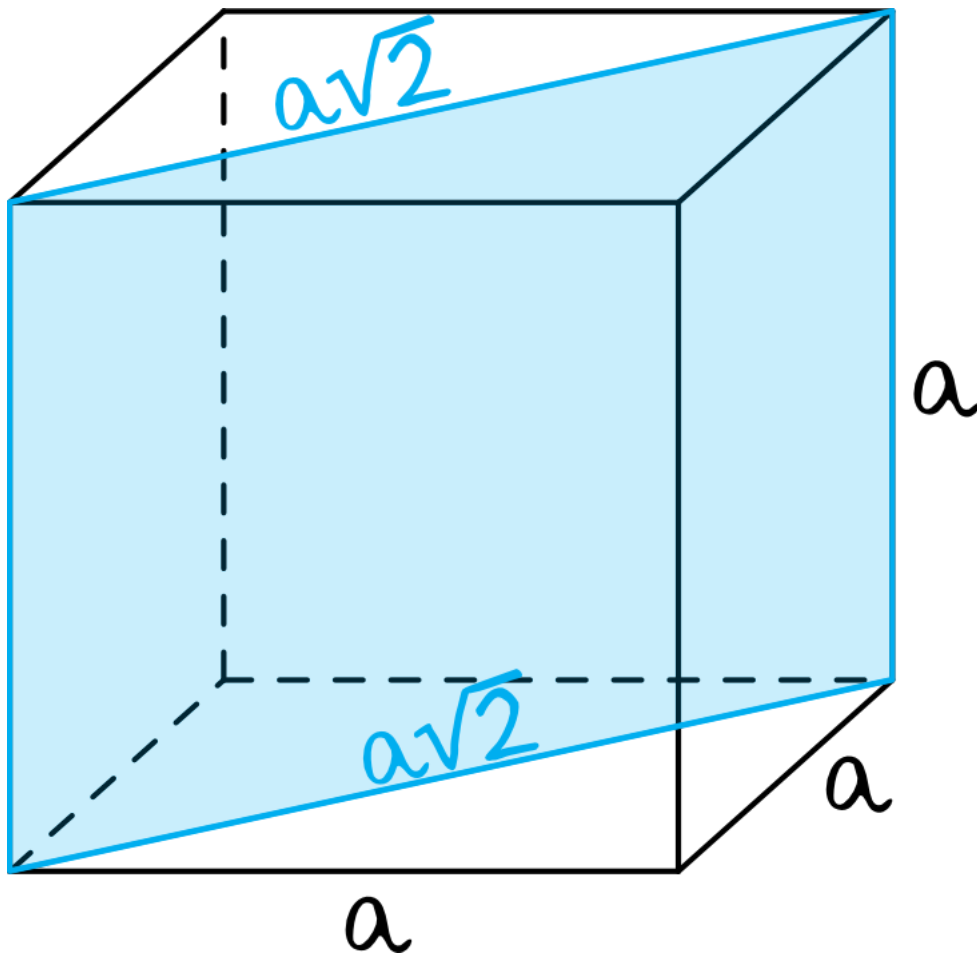
Sześcian przecięto płaszczyzną przechodzącą przez dwie równoległe przekątne dolnej i górnej podstawy. Pole otrzymanego przekroju jest równe 16. Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe:



Odpowiedź: C ($48\sqrt{2}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Pamiętając o tym, że przekątna kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$ możemy sporządzić następujący rysunek:



Krok 2. Obliczenie długości krawędzi sześcianu.

Nasz otrzymany przekrój jest prostokątem o wymiarach a oraz $a\sqrt{2}$, zatem:

$$P = a \cdot a\sqrt{2}, 16 = a \cdot a\sqrt{2}, 16 = a^2\sqrt{2}, a^2 = \frac{16}{\sqrt{2}}$$

Biorąc pod uwagę fakt, że pole całkowite sześcianu jest równe $P_c = 6a^2$ to nie ma za bardzo sensu pierwiastkować i obliczać ile jest równe a , skoro za chwilę będziemy znowu potrzebować a^2 . Możemy pozostać przy wyliczeniu a^2 , ale usuńmy jeszcze niewymierność z mianownika:

$$a^2 = \frac{16}{\sqrt{2}}, a^2 = \frac{16 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}, a^2 = \frac{16\sqrt{2}}{2}, a^2 = 8\sqrt{2}$$

Krok 3. Obliczenie pola całkowitego sześcianu.

Zgodnie z tym co zapisaliśmy sobie wcześniej:

$$P_c = 6a^2, P_c = 6 \cdot 8\sqrt{2}, P_c = 48\sqrt{2}$$

Zadanie 26

0-2 pkt

Sprawdź, czy liczba $\frac{33}{27}$ jest wyrazem ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{3n-1}{2n+5}$.

Odpowiedź: $\frac{33}{27}$ ni

Krok 1. Ułożenie i rozwiązanie równania.

Naszym zadaniem jest tak naprawdę rozwiązanie i wyciągnięcie wniosków z następującego równania:

$$\frac{3n-1}{2n+5} = \frac{33}{27}$$

To równanie najprościej jest rozwiązać mnożąc na krzyż, zatem:

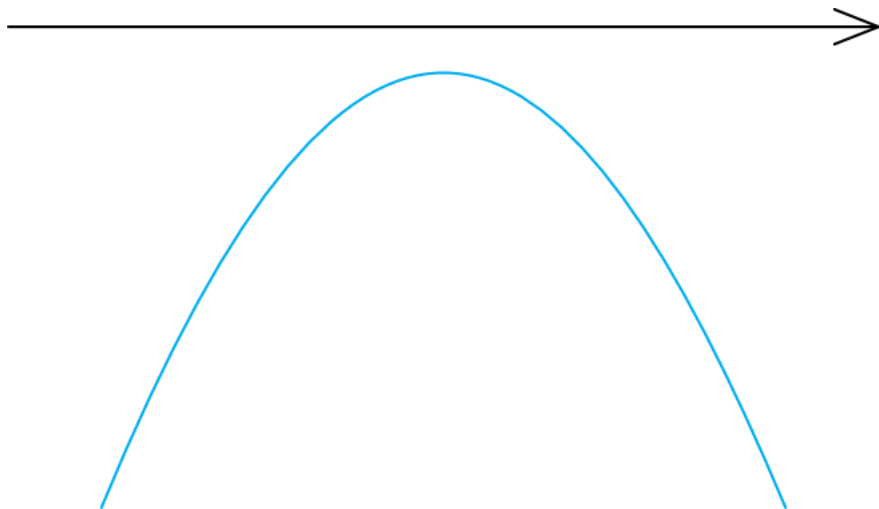
$$27 \cdot (3n - 1) = 33 \cdot (2n + 5), \quad 81n - 27 = 66n + 165, \quad 15n = 192, \quad n = 12,8$$

Krok 2. Interpretacja otrzymanego wyniku.

W ciągach n jest zawsze liczbą naturalną większą od zera. Otrzymany wynik nie jest liczbą naturalną, zatem liczba $\frac{33}{27}$ nie jest wyrazem tego ciągu (dokładniej rzecz ujmując jest to liczba pomiędzy 12-stym i 13-stym wyrazem).

Zadanie 27

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 8x - 20 < 0$.**Odpowiedź:** $x \in \mathbb{R}$

Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

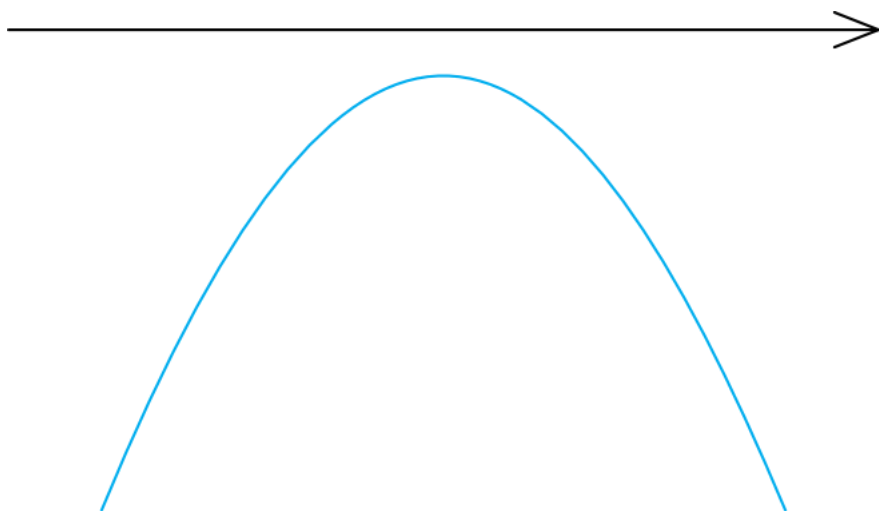
Naszą nierówność obliczymy standardowo metodą delty:

Współczynniki: $a = -1$, $b = 8$, $c = -20$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-20) = 64 - 80 = -16$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

To, że wyszła nam ujemna delta nie oznacza, że nierówność nie ma rozwiązań lub że w ogóle nie istnieje. Oznacza to tylko tyle, że nie będziemy mieć miejsc zerowych. Parabola będzie mieć ramiona skierowane do dołu (bo współczynnik a jest ujemny), zatem całość będzie wyglądać mniej więcej w ten sposób:



Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Szukamy wartości mniejszych od zera i okazuje się, że nasza cała parabola jest pod osią x-ów. To oznacza, że jakiegokolwiek liczby nie podstawimy do nierówności, to otrzymamy zawsze wynik ujemny, zatem rozwiązaniem tej nierówności jest po prostu zbiór liczb rzeczywistych $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 28

0-2 pkt

Punkty $A = (-2; 4)$, $B = (6, 2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Wyznacz długość wysokości tego trójkąta.

Odpowiedź: $h = \sqrt{51}$

Krok 1. Obliczenie długości boku AB .

Znając współrzędne obydwu punktów możemy obliczyć długość odcinka AB (czyli długość boku trójkąta):

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, |AB| = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (2 - 4)^2}, |AB| = \sqrt{8^2 + (-2)^2}, |AB| = \sqrt{64 + 4}, |AB| = \sqrt{68}, |AB| = \sqrt{4 \cdot 17}, |AB| = 2\sqrt{17}$$

Krok 2. Obliczenie wysokości trójkąta.

Nasz trójkąt jest trójkątem równobocznym, zatem znając długość boku możemy obliczyć wysokość figury z następującego wzoru:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, h = \frac{2\sqrt{17} \cdot \sqrt{3}}{2}, h = \sqrt{17} \cdot \sqrt{3}, h = \sqrt{51}$$

Zadanie 29

0-2 pkt

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 13 \geq 0$.

Odpowiedź: Udowodniono korzystając

Aby udowodnić, że nasze wyrażenie jest większe lub równe zero musimy doprowadzić zapis do postaci z potęgowaniem, bowiem jakiegokolwiek liczby byśmy nie podnieśli do potęgi, to będzie ona większa lub równa zero. Będziemy więc chcieli "zwinąć" zapis przy użyciu wzorów skróconego mnożenia. Aby tego dokonać musimy zastosować bardzo sprytny zabieg, a mianowicie musimy rozbić liczbę 13 na sumę liczb $9 + 4$. Całość będzie wyglądać w następujący sposób:

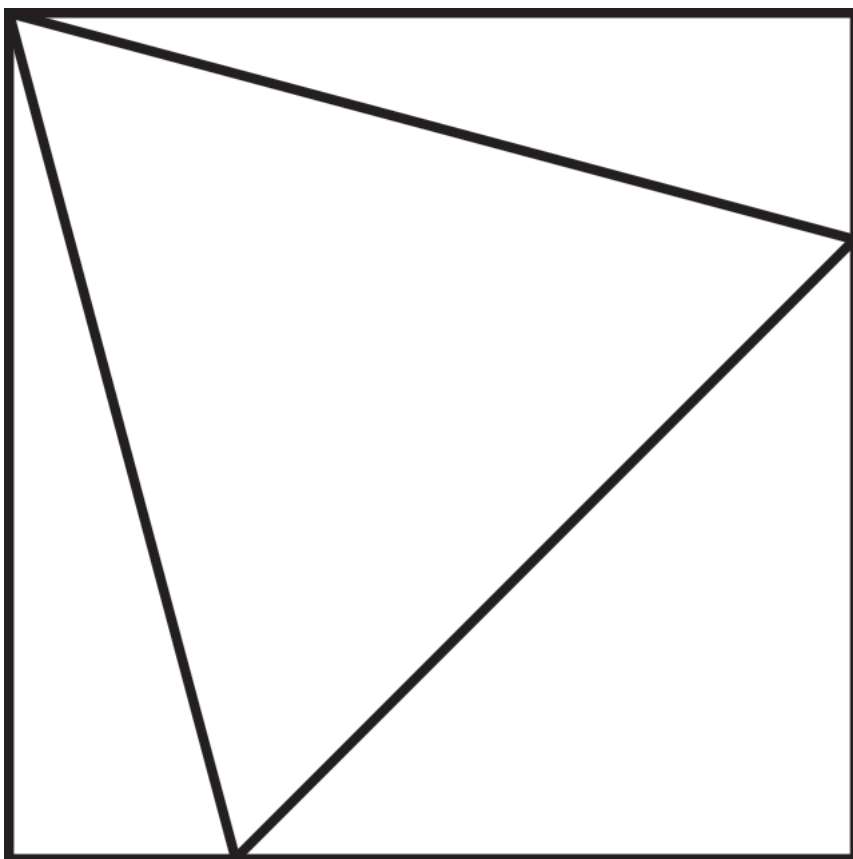
$$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 13, x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4, (x - 3)^2 + (y - 2)^2$$

$(x - 3)^2$ jest większe lub równe zero oraz $(y - 2)^2$ jest większe lub równe zero. Suma dwóch liczb większych lub równych zero jest także większa lub równa zero i właśnie to musieliśmy udowodnić.

Zadanie 30

0-2 pkt

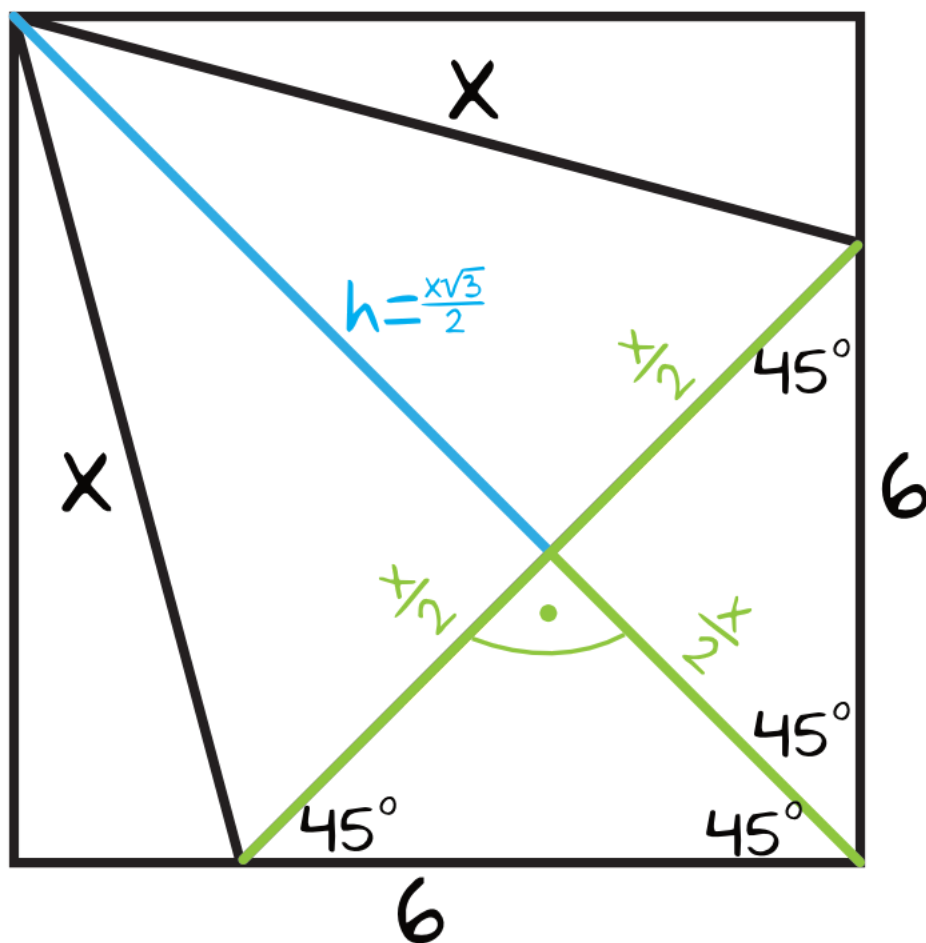
Dany jest kwadrat o boku $a = 6$. W ten kwadrat wpisano trójkąt równoboczny w ten sposób, że jeden wierzchołek trójkąta jest wierzchołkiem kwadratu, a przeciwległy bok trójkąta jest równoległy do przekątnej kwadratu (patrz rysunek). Wykaż, że bok trójkąta jest równy $6(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.



Odpowiedź: Wykazano dorysowując

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Jeżeli dorysujemy przekątną kwadratu, to pamiętając że przekątna kwadratu dzieli nam kąt prosty na dwa kąty po 45° , otrzymamy następującą sytuację:



Krok 2. Zapisanie i rozwiązanie równania.

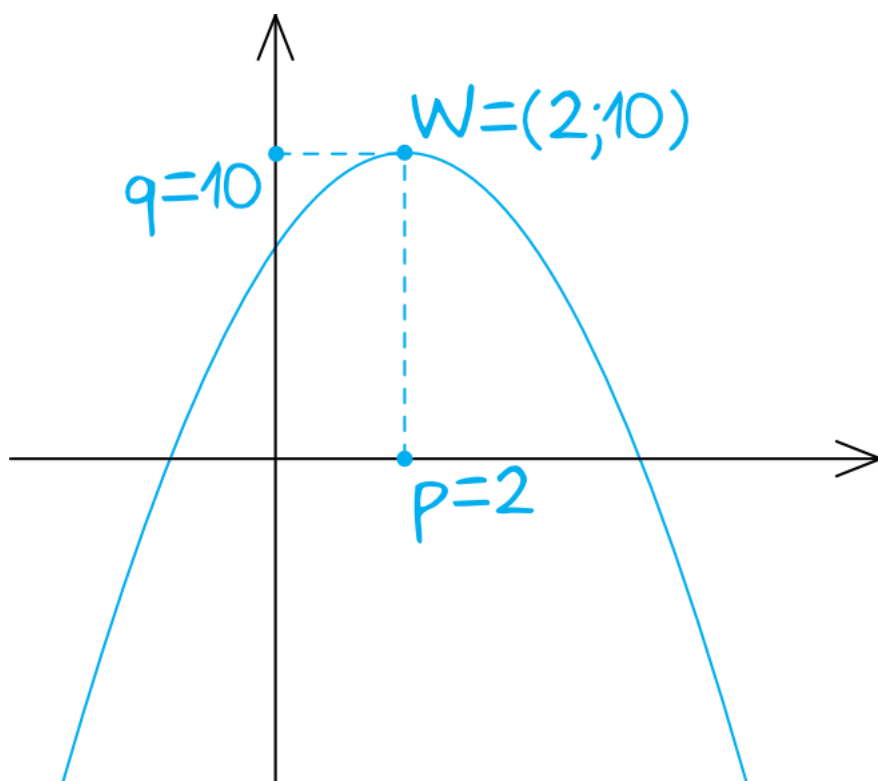
Kwadrat o boku 6 ma długość przekątnej równą $6\sqrt{2}$. Patrząc się na rysunek widzimy, że ta przekątna składa się z wysokości trójkąta $\frac{x\sqrt{3}}{2}$ oraz połowy boku trójkąta $\frac{x}{2}$, zatem:

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} = 6\sqrt{2} \quad / \cdot 2, \quad x\sqrt{3} + x = 12\sqrt{2}, \quad x(\sqrt{3} + 1) = 12\sqrt{2}, \quad x = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}, \quad x = \frac{12\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} - 1)}, \quad x = \frac{12\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{3 - 1}, \quad x = \frac{12\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{2}$$

Zadanie 31

0-4 pkt

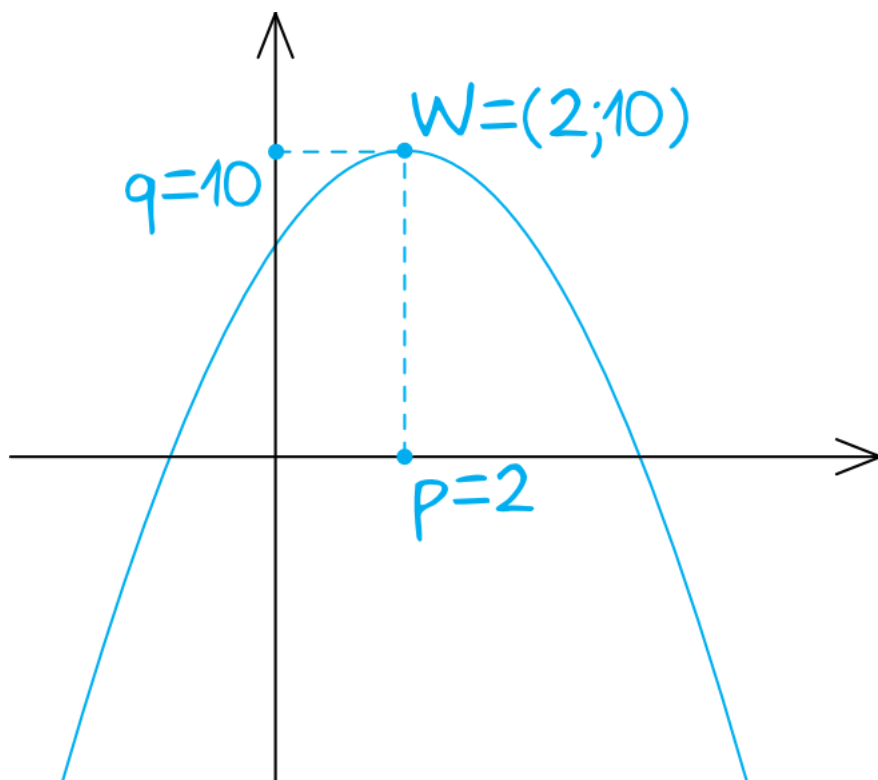
Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wartość największa funkcji jest równa 10. Funkcja jest rosnąca jedynie w przedziale $(-\infty, 2)$, a do jej wykresu należy punkt $A = (4, -2)$. Wyznacz wartości współczynników a, b, c .



Odpowiedź: $\backslash(a=-3,\backslash b=12,\backslash c=-2$

Krok 1. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli.

Z treści zadania możemy odczytać bardzo ważną informację, a mianowicie współrzędne wierzchołka paraboli. Zastanówmy się co to znaczy, że funkcja rośnie w przedziale $(-\infty, 2)$ i że osiąga największą wartość równą 10. To by oznaczało, że nasza funkcja wygląda mniej więcej w ten sposób:



Wynika z tego, że funkcja ma wierzchołek w punkcie $W = (2, 10)$.

Krok 2. Zapisanie wzoru funkcji w postaci kanonicznej.

Znając współrzędne wierzchołka paraboli możemy zapisać ją w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, f(x) = a(x - 2)^2 + 10$$

Krok 3. Podstawienie współrzędnych punktu A oraz wyznaczenie współczynnika a .

Do wyznaczonej przed chwilą postaci kanonicznej możemy podstawić współrzędne znanego nam punktu A , co pozwoli wyznaczyć nam już jeden ze współczynników:

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 10, -2 = a(4 - 2)^2 + 10, -2 = a \cdot 2^2 + 10, -2 = 4a + 10, 4a = -12, a = -3$$

Krok 4. Wyznaczenie współczynników b oraz c .

Znając współczynnik kierunkowy $a = -3$ wiemy już, że w postaci kanonicznej nasza funkcja przyjmuje wzór:

$$f(x) = -3(x - 2)^2 + 10$$

Jeżeli wykonamy teraz potęgowanie, to doprowadzimy funkcję do postaci ogólnej, co z kolei pozwoli nam odczytać wartości wszystkich współczynników:

$$f(x) = -3(x - 2)^2 + 10, f(x) = -3(x^2 - 4x + 4) + 10, f(x) = -3x^2 + 12x - 12 + 10, f(x) = -3x^2 + 12x - 2$$

To oznacza, że interesująca nas funkcja ma współczynniki:

$$a = -3, b = 12, c = -2$$

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 4, a suma kwadratów wyrazu drugiego, czwartego i siódmego jest równa 702. Wyznacz ogólny wyraz tego ciągu.

Odpowiedź: $\{a_n\} = -\frac{109}{23}n + 4$

Krok 1. Ułożenie układu równań.

Z treści zadania wynika, że możemy ułożyć następujący układ równań:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2^2 + a_4^2 + a_7^2 = 702 \end{cases}$$

Aby rozwiązać ten układ równań musimy rozpisać wyrazy a_2 , a_4 oraz a_7 zgodnie ze wzorem na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego $a_n = a_1 + (n-1)r$. W związku z tym otrzymamy:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ (a_1 + r)^2 + (a_1 + 3r)^2 + (a_1 + 6r)^2 = 702 \end{cases}$$

Krok 2. Rozwiązanie układu równań.

Podstawiając $a_1 = 4$ z pierwszego równania do drugiego otrzymamy:

$$(4+r)^2 + (4+3r)^2 + (4+6r)^2 = 702, \quad 16 + 8r + r^2 + 16 + 24r + 9r^2 + 16 + 48r + 36r^2 = 702, \quad 46r^2 + 80r + 48 = 702, \quad 46r^2 + 80r - 654 = 0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Współczynniki: $a = 46$, $b = 80$, $c = -654$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 80^2 - 4 \cdot 46 \cdot (-654) = 6400 - (-120336) = 126736, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{126736} = 356$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-80 - 356}{2 \cdot 46} = \frac{-436}{92} = -\frac{109}{23}, \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-80 + 356}{2 \cdot 46} = \frac{276}{92} = 3$$

Żadnej z tych wartości odrzucić nie możemy (moglibyśmy odrzucić, gdyby np. podana była informacja o tym że ciąg jest rosnący). W związku z tym zostaje nam $r_1 = -\frac{109}{23}$ oraz $r_2 = 3$.

Krok 4. Wyznaczenie wzoru ogólnego tego ciągu.

Aby wyznaczyć wzór ogólny ciągu wystarczy podstawić a_1 oraz r do wzoru:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Z racji tego iż mamy dwie możliwości podstawienia różnicy to otrzymamy dwa rozwiązania tego zadania:

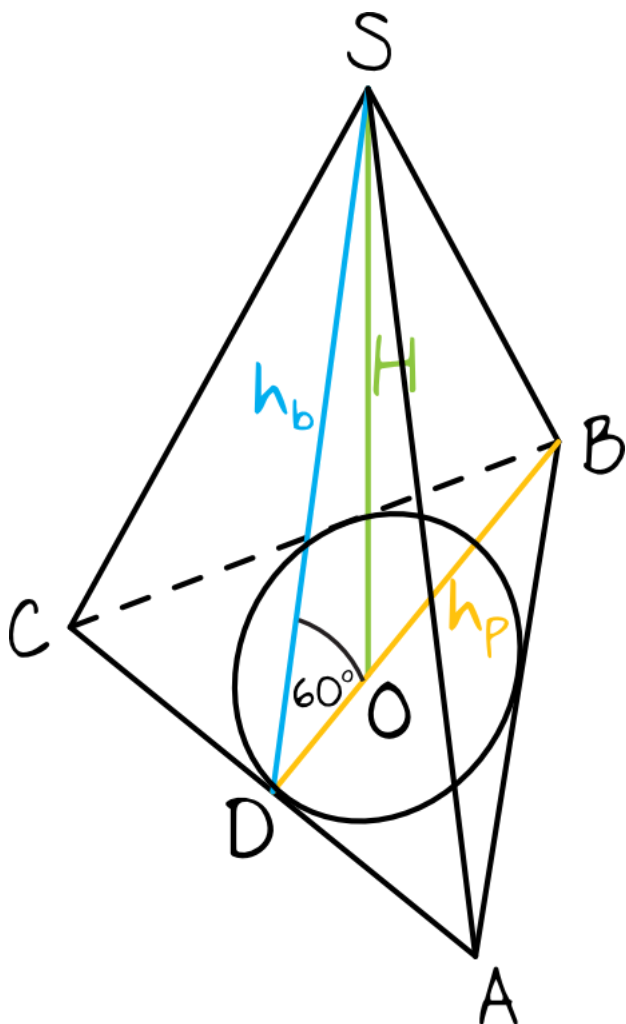
Gdy $r = -\frac{109}{23}$:

$$a_n = 4 + (n-1) \cdot \left(-\frac{109}{23}\right), \quad a_n = 4 + \left(-\frac{109}{23}n\right) + \frac{109}{23}, \quad a_n = 4 - \frac{109}{23}n + \frac{109}{23}, \quad a_n = \frac{92}{23} - \frac{109}{23}n + \frac{109}{23}, \quad a_n = -\frac{109}{23}n + \frac{201}{23}$$

Gdy $r = 3$:

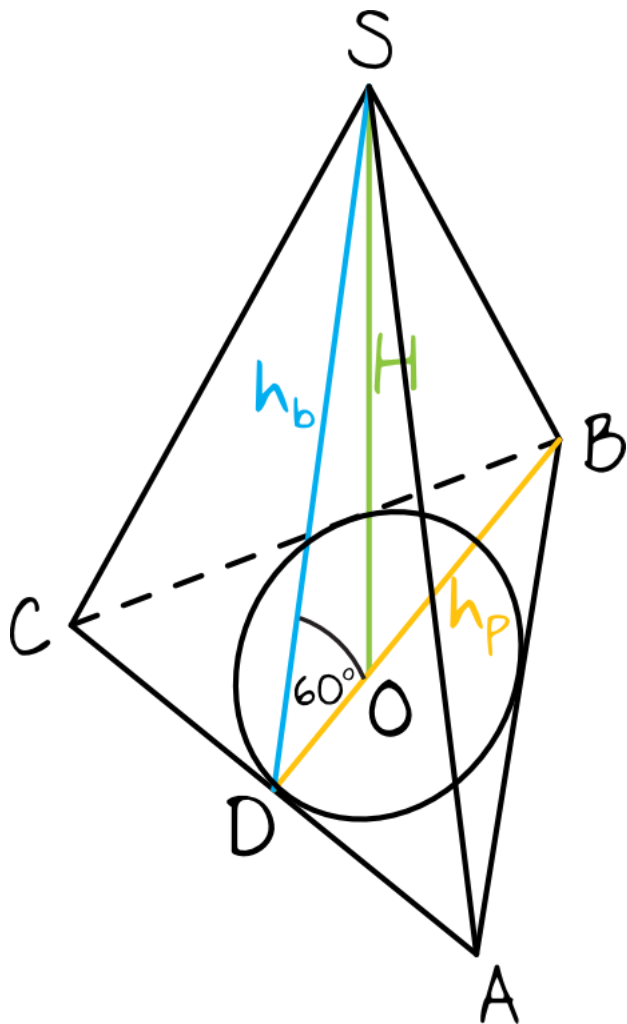
$$a_n = 4 + (n-1) \cdot 3, \quad a_n = 4 + 3n - 3, \quad a_n = 3n + 1$$

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Promień okręgu wpisanego w podstawę jest równy 6. Ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej bryły.



Odpowiedź: $V = 648$ oraz $P_{\{$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.
Nanieśmy na rysunek informacje z treści zadania.



Krok 2. Obliczenie wysokości trójkąta znajdującego się w podstawie.

Z własności okręgów wpisanych w trójkąt równoboczny wiemy, że długość promienia okręgu jest równa $\frac{1}{3}$ wysokości takiego trójkąta, zatem:

$$h_p = 3 \cdot 6 = 18$$

Krok 3. Obliczenie długości boku trójkąta znajdującego się w podstawie.

W podstawie znajduje się trójkąt równoboczny o wysokości $h_p = 18$, zatem jego długość boku będzie równa:

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}, 18 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, 36 = a\sqrt{3}, a = \frac{36}{\sqrt{3}}, a = \frac{36 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}, a = \frac{36\sqrt{3}}{3}, a = 12\sqrt{3}$$

Krok 4. Obliczenie wysokości ostrosłupa.

Spójrzmy na trójkąt SOD . Wiemy, że podstawa tego trójkąta (czyli odcinek DO będący promieniem okręgu) ma długość $r = 6$. Korzystając z funkcji trygonometrycznych (a konkretnie z tangensa) możemy zapisać, że:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{|DO|}, \sqrt{3} = \frac{H}{6}, H = 6\sqrt{3}$$

Krok 5. Obliczenie wysokości ściany bocznej.

Ponownie spoglądamy na trójkąt SOD . Do obliczenia pola powierzchni bocznej potrzebujemy znać długość wysokości ściany bocznej, a tę możemy obliczyć albo z Twierdzenia Pitagorasa (bo wiemy już, że przyprostokątne mają długości $|DO| = 6$ oraz $H = 6\sqrt{3}$), albo po prostu z cosinusa:

$$\cos 60^\circ = \frac{|DO|}{h_b}, \frac{1}{2} = \frac{6}{h_b}, \frac{1}{2} h_b = 6, h_b = 12$$

Krok 6. Obliczenie objętości ostrosłupa.

Mamy już komplet informacji na temat naszego ostrosłupa, bo wiemy że $a = 12\sqrt{3}$ oraz $H = 6\sqrt{3}$, więc możemy przystąpić do obliczenia objętości, korzystając ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H, V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H, V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(12\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 6\sqrt{3}, V = \frac{1}{3} \cdot \frac{432\sqrt{3}}{4} \cdot 6\sqrt{3}, V = \frac{1}{3} \cdot 108\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}, V = 36\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}, V = 216 \cdot 3, V$$

Krok 7. Obliczenie pola powierzchni bocznej.

W powierzchni bocznej mamy trzy trójkąty o podstawie $a = 12\sqrt{3}$ oraz wysokości $h_b = 12$, zatem:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b, P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 12, P_b = 3 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12, P_b = 216\sqrt{3}$$