

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Operon 2014 (stara matura)

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D $(29 - 12\sqrt{5})$	1
2	C (2)	1
3	D $(\sqrt{2})$	1
4	A $(4\sqrt{3}cm)$	1
5	B $(S = (0, -2), r = 2)$	1
6	A $((-\infty, -6) \cup (-2, +\infty))$	1
7	C $(a = -\frac{5}{2})$	1
8	B (146)	1
9	D $((\sqrt{4}, \sqrt{1}, \sqrt{0}))$	1
10	C $(x = \frac{13}{2})$	1
11	C $(3^{\frac{7}{2}})$	1
12	D $((-5, 3))$	1
13	B $((-12, +\infty))$	1
14	D (0)	1
15	D $(7^{-\frac{2}{3}})$	1
16	C $(-1, 7 + \sqrt{3})$	1
17	A $(y = (x + 6)^2)$	1
18	B $(W = (x - 2)(x^2 + 4))$	1
19	A $(m \in (9, +\infty))$	1
20	D (-5)	1
21	B (144°)	1
22	B $(\beta = 72, 5^\circ)$	1
23	A $(\frac{8\pi\sqrt{3}}{3})$	1
24	C (144°)	1
25	C $(\frac{2\sqrt{6}}{7})$	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Wartość liczby $a = (2\sqrt{5} - 3)^2$ jest równa:

Odpowiedź: D $(29 - 12\sqrt{5})$

Wykonując działania na potęgach i pierwiastkach, a także korzystając ze wzorów skróconego mnożenia możemy zapisać, że:

$$(2\sqrt{5} - 3)^2 = (2\sqrt{5})^2 - 12\sqrt{5} + 9 = 4 \cdot 5 - 12\sqrt{5} + 9 = 20 - 12\sqrt{5} + 9 = 29 - 12\sqrt{5}$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Ilość miejsc zerowych funkcji f określonej wzorem $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ x^2 - 1 & \text{dla } x \in (-1, 3) \\ x + 5 & \text{dla } x \in (3, +\infty) \end{cases}$ wynosi:

Odpowiedź: C (2)

Nasza funkcja składa się tak jakby z trzech wzorów, które obowiązują dla trzech różnych przedziałów. Musimy więc każdy z tych wzorów przyrównać do zera i sprawdzić, czy otrzymany wynik mieści się w przedziale - jeśli tak, to będzie to miejsce zerowe funkcji.

Krok 1. Sprawdzenie pierwszej części wzoru.

$$2x + 4 = 0, 2x = -4, x = -2$$

Ta wartość mieści się w przedziale $(-\infty, -1)$, zatem $x = -2$ jest miejscem zerowym.

Krok 2. Sprawdzenie drugiej części wzoru.

$$x^2 - 1 = 0, x^2 = 1, x = -1 \vee x = 1$$

Wartość $x = -1$ nie mieści się w przedziale $(-1, 3)$, za to drugie rozwiązanie $x = 1$ się w tym przedziale mieści, czyli tylko $x = 1$ jest miejscem zerowym.

Krok 3. Sprawdzenie trzeciej części wzoru.

$$x + 5 = 0, x = -5$$

Wartość $x = -5$ nie mieści się w przedziale $(3, +\infty)$, zatem nie jest ona miejscem zerowym.

Krok 4. Obliczenie liczby miejsc zerowych.

Z naszym obliczeń wynika zatem, że tylko $x = -2$ oraz $x = 1$ są miejscami zerowymi, zatem ta funkcja ma dwa miejsca zerowe.

Zadanie 3

0-1 pkt

Miejsmem zerowym funkcji $y = \sqrt{2}x - 2$ jest liczba:

Odpowiedź: D ($\sqrt{2}$)

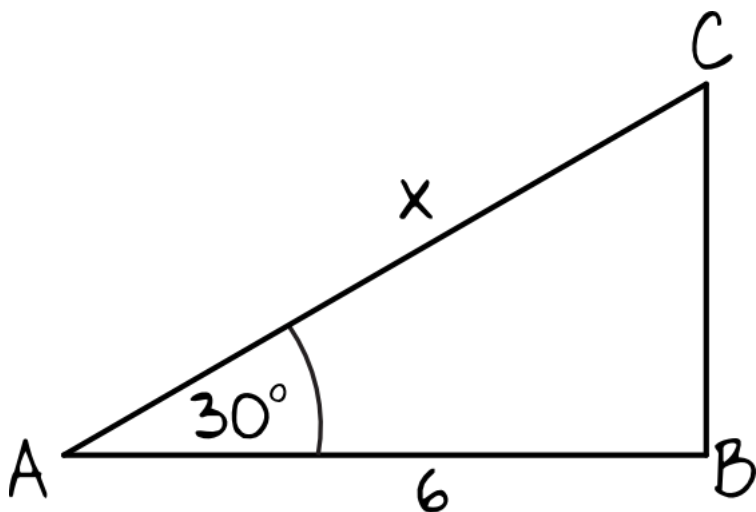
Musimy znaleźć miejsce zerowe, czyli musimy sprawdzić kiedy $\sqrt{2}x - 2$ będzie równe 0, zatem:

$$\sqrt{2}x - 2 = 0, \sqrt{2}x = 2 \quad / : \sqrt{2}, x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Zadanie 4

0-1 pkt

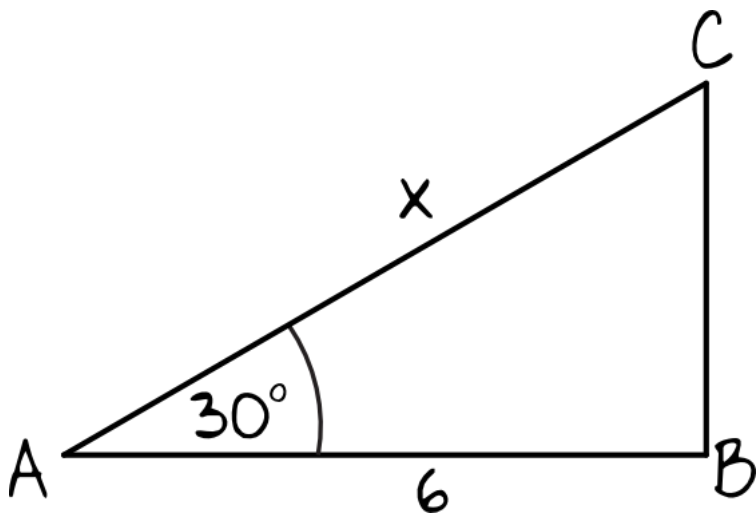
W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 30° , a dłuższa przyprostokątna ma długość 6 cm . Długość przeciwprostokątnej jest równa:



Odpowiedź: A ($4\sqrt{3}\text{ cm}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy narysować ten trójkąt, zaznaczając na nim wszystkie informacje z treści zadania:



Tworząc rysunek należy pamiętać, że mniejszy kąt ostry trójkąta prostokątnego leży przy dłuższej przyprostokątnej.

Krok 2. Obliczenie długości przeciwprostokątnej.

Korzystając z funkcji cosinus możemy teraz zapisać, że:

$$\cos 30^\circ = \frac{6}{x}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{x}$$

Mnożąc na krzyż otrzymujemy:

$$\sqrt{3}x = 12 \quad : \sqrt{3}, \quad x = \frac{12}{\sqrt{3}}, \quad x = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}, \quad x = \frac{12\sqrt{3}}{3}, \quad x = 4\sqrt{3}$$

Zadanie 5

0-1 pkt

Równanie $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ opisuje okrąg o środku w punkcie S i promieniu r . Wówczas:

Odpowiedź: B ($S = (0, -2)$, $r = 2$)

Krok 1. Przekształcenie równania.

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a; b)$ oraz promieniu r przyjmuje postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Musimy zatem doprowadzić równanie z treści zadania właśnie do takiej postaci (czyli z odejmowaniem w nawiasach i potęgowaniem po prawej stronie), co pozwoli nam wyznaczyć najpierw zarówno współrzędne środka okręgu jak i jego promień. Zrobimy to w następujący sposób:

$$x^2 + (y + 2)^2 = 4, (x - 0)^2 + (y - (-2))^2 = 2^2$$

Krok 2. Odczytanie współrzędnych środka okręgu.

Przyrównując postać równania okręgu do naszego równania widzimy, że $a = 0$ oraz $b = -2$, zatem $S = (0; -2)$.

Krok 3. Odczytanie długości promienia.

Przyrównując postać równania okręgu do naszego równania widzimy, że $r = 2$.

Zadanie 6

0-1 pkt

Rozwiązaniem nierówności $|x + 4| > 2$ jest zbiór:

Odpowiedź: A $((-\infty, -6) \cup (-2, +\infty))$

Zgodnie z zasadami rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną możemy zapisać, że:

$$|x + 4| > 2, x + 4 > 2 \vee x + 4 < -2, x > -2 \vee x < -6$$

To oznacza, że zbiorem rozwiązań powyższej nierówności jest zbiór $(-\infty, -6) \cup (-2, +\infty)$.

Zadanie 7

0-1 pkt

Proste l i k są prostopadłe i $l: -2x + 5y + 1 = 0$, $k: y = ax + b$. Wówczas:

Odpowiedź: C ($a = -\frac{5}{2}$)

Krok 1. Zapisanie równania prostej l w postaci kierunkowej.

Aby móc przystąpić do obliczeń musimy na samym początku przekształcić prostą l do postaci kierunkowej, czyli postaci typu $y = ax + b$. Musimy więc przenieść igrek na lewą stronę, a po prawej dać całą resztę, zatem:

$$-2x + 5y + 1 = 0, 5y = 2x - 1 \quad / : 5, y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$$

Krok 2. Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej k .

Aby dwie proste były względem siebie prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych musi być równy -1 . Prosta l ma współczynnik kierunkowy $a = \frac{2}{5}$, zatem prosta k musi mieć ten współczynnik równy:

$$a \cdot \frac{2}{5} = -1 \quad / \cdot \frac{5}{2}, a = -\frac{5}{2}$$

Zadanie 8

0-1 pkt

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach: $(-10, -6, -2, \dots)$. Czterdziesty wyraz tego ciągu jest równy:

Odpowiedź: B (146)

Krok 1. Obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego.

Skoro pierwszy wyraz jest równy $a_1 = -10$, a drugi wyraz jest równy $a_2 = -6$, to różnica ciągu arytmetycznego wynosi:

$$r = a_2 - a_1, r = -6 - (-10), r = -6 + 10, r = 4$$

Krok 2. Obliczenie wartości czterdziestego wyrazu ciągu.

Znamy wartość pierwszego wyrazu, znamy wartość różnicy, zatem możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu korzystając ze wzoru:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, a_{40} = a_1 + (40 - 1)r, a_{40} = a_1 + 39r, a_{40} = -10 + 39 \cdot 4, a_{40} = -10 + 156, a_{40} = -146$$

Zadanie 9

0-1 pkt

Ciągiem arytmetycznym jest ciąg liczb:

Odpowiedź: D ($(\sqrt{4}, \sqrt{1}, \sqrt{0})$)

Aby dowiedzieć się który ciąg jest arytmetyczny moglibyśmy w każdej z odpowiedzi sprawdzić np. kiedy $a_3 - a_2$ jest równe tyle samo co $a_2 - a_1$. Tam gdzie w obydwu tych działaniach będzie ten sam wynik, tam będziemy mieć styczność z ciągiem arytmetycznym. Ale nie jest to jedyna metoda. Nieco sprytniejszym sposobem jest wykorzystanie jednej z własności ciągów arytmetycznych, która mówi nam, że:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Jeżeli wskazane w poszczególnych odpowiedziach liczby spełnią tę nierówność, to znaczy że będą one tworzyć ciąg arytmetyczny. Sprawdźmy zatem każdą z odpowiedzi:

Odp. A.

$$4 = \frac{2+8}{2}, 4 = \frac{10}{2}, 4 = 5, L \neq P$$

Odp. B.

$$3 = \frac{9+1}{2}, 3 = \frac{10}{2}, 3 = 5, L \neq P$$

Odp. C.

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{1}}{2}, \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, L \neq P$$

Odp. D.

$$\sqrt{1} = \frac{\sqrt{4}+\sqrt{0}}{2}, 1 = \frac{2+0}{2}, 1 = \frac{2}{2}, L = P$$

Tylko w czwartej odpowiedzi uzyskaliśmy prawdziwą równość, zatem ciągiem arytmetycznym jest czwarty zestaw liczb.

Zadanie 10

0-1 pkt

Ciąg $(x - 3, 7, 14)$ jest geometryczny. Wówczas:

Odpowiedź: C ($x = \frac{13}{2}$)

Korzystając z własności trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego możemy zapisać, że:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3, 7^2 = (x - 3) \cdot 14, 49 = 14x - 42, 91 = 14x, x = \frac{91}{14} = \frac{13}{2}$$

Zadanie 11

0-1 pkt

Wartość liczby $a = 3\sqrt{27} + 9\sqrt{3} + \sqrt{243}$ jest równa:

Odpowiedź: C ($3^{\frac{7}{2}}$)

Korzystając z działań na pierwiastkach możemy zapisać, że:

$$3\sqrt{27} + 9\sqrt{3} + \sqrt{243} = 3\sqrt{9 \cdot 3} + 9\sqrt{3} + \sqrt{81 \cdot 3} = , = 9\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 3 \cdot 9\sqrt{3} = , = 27\sqrt{3} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{3+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{7}{2}}$$

Zadanie 12

0-1 pkt

Dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{15+3x} - \sqrt{3-x}$ jest zbiór:

Odpowiedź: D ($\langle -5, 3 \rangle$)

Pod pierwiastkami parzystego stopnia mogą znaleźć się jedynie liczby większe lub równe 0. W związku z tym musimy sprawdzić i rozwiązać dwie nierówności:

$$15 + 3x \geq 0, 3x \geq -15, x \geq -5$$

$$3 - x \geq 0, x \leq 3$$

To oznacza, że dziedziną funkcji jest zbiór $\langle -5, 3 \rangle$.

Zadanie 13

0-1 pkt

Zbiorem wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x| - 12$ jest zbiór:

Odpowiedź: B ($\langle -12, +\infty \rangle$)

Gdyby funkcja była określona wzorem $f(x) = |x|$ to zbiorem wartości byłby zbiór $\langle 0; +\infty \rangle$, bo wartość bezwzględna jest zawsze większa lub równa 0. My od tej naszej wartości bezwzględnej musimy jeszcze odjąć 12, zatem zbiór wartości tej funkcji będzie równy $\langle -12, +\infty \rangle$.

Zadanie 14

0-1 pkt

Liczba rozwiązań rzeczywistych równania $16 + x^4 = 0$ wynosi:

Odpowiedź: D (0)

$$16 + x^4 = 0, \quad x^4 = -16$$

Z racji tego iż nie istnieje jakakolwiek liczba rzeczywista, która podniesiona do potęgi parzystej daje wynik ujemny, to nasze równanie ma zero rozwiązań.

Zadanie 15

0-1 pkt

Liczbą odwrotną do liczby $7^{\frac{2}{3}}$ jest:

Odpowiedź: D ($7^{-\frac{2}{3}}$)

Liczbą odwrotną do $7^{\frac{2}{3}}$ byłoby $\frac{1}{7^{\frac{2}{3}}}$. Konkretnie takiej odpowiedzi w tym zadaniu nie mamy, ale pamiętając o tym, że podnoszenie liczby do potęgi ujemnej jest związane z potęgowaniem odwrotności tej liczby np. $(\frac{1}{7})^{-1} = 7$, to możemy zapisać, że $\frac{1}{7^{\frac{2}{3}}} = 7^{-\frac{2}{3}}$.

Zadanie 16

0-1 pkt

Wartość liczby: $a = |1, 7 - \sqrt{3}|$ jest równa:

Odpowiedź: C ($-1, 7 + \sqrt{3}$)

Krok 1. Ustalenie czy liczba w nawiasie bezwzględności jest dodatnia czy ujemna.

Jeżeli w nawiasie bezwzględności liczba jest większa lub równa zero, to opuszczając nawias daną liczbę/wyrażenie po prostu przepisujemy np. $|5| = 5$. Jednak w przypadku gdy wartość w nawisie jest ujemna, to musimy zmienić znak tej liczby/wyrażenia podczas opuszczania nawiasu np. $|-5| = -(-5) = 5$. Dlatego na początku musimy ustalić, czy ta liczba pod nawiasami wartości bezwzględnej jest dodatnia, czy też ujemna.

$$\sqrt{3} \approx 1,73$$

W związku z tym $1, 7 - \sqrt{3} < 0$.

Krok 2. Opuszczenie nawiasów wartości bezwzględnej.

Skoro nasza liczba pod nawiasami wartości bezwzględnej jest ujemna, to opuszczając nawiasy musimy zmienić znak:

$$a = |1, 7 - \sqrt{3}|, \quad a = -(1, 7 - \sqrt{3}), \quad a = -1, 7 + \sqrt{3}$$

Zadanie 17

0-1 pkt

Wzór funkcji, której wykres powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = x^2$ o 6 jednostek w lewo, to:

Odpowiedź: A ($y = (x + 6)^2$)

Wzorem funkcji, która powstaje przez przesunięcie wykresu o 6 jednostek w lewo jest $y = (x + 6)^2$.

Zadanie 18

0-1 pkt

Wielomian $W = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ po rozłożeniu na czynniki ma postać:

Odpowiedź: B ($W = (x - 2)(x^2 + 4)$)

Powyższy wielomian możemy rozpisać w następujący sposób:

$$W = x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \quad W = x^2(x - 2) + 4(x - 2), \quad W = (x - 2)(x^2 + 4)$$

Zadanie 19

0-1 pkt

Funkcja $f(x) = (3 - \frac{1}{3}m)x + 3m - 1$ jest malejąca dla:

Odpowiedź: A ($m \in (9, +\infty)$)

Funkcja liniowa będzie malejąca wtedy, gdy współczynnik kierunkowy a będzie mniejszy od zera. W związku z tym musimy rozwiązać następującą nierówność:

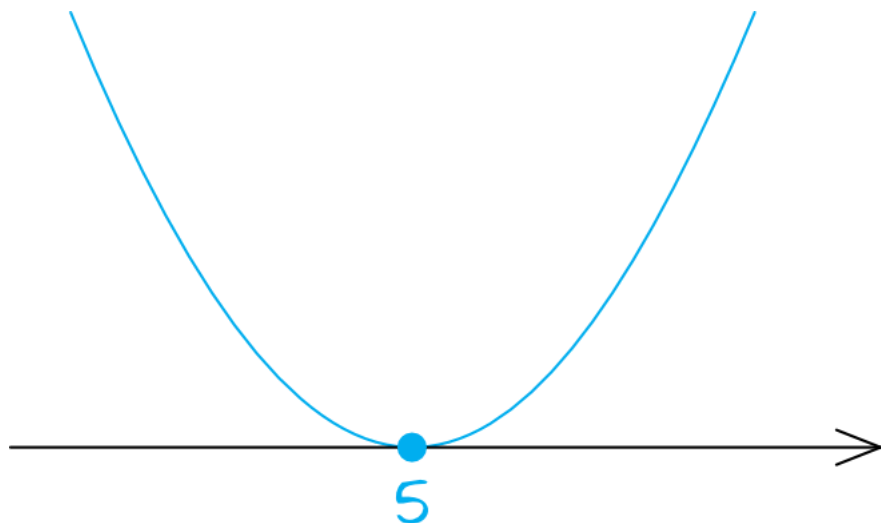
$$3 - \frac{1}{3}m < 0, \quad 3 < \frac{1}{3}m, \quad m > 9$$

To oznacza, że ta funkcja jest malejąca dla $m \in (9, +\infty)$.

Zadanie 20

0-1 pkt

Rozwiązaniem nierówności $(m + 5)^2 \leq 0$ jest zbiór:



Odpowiedź: D (-5)

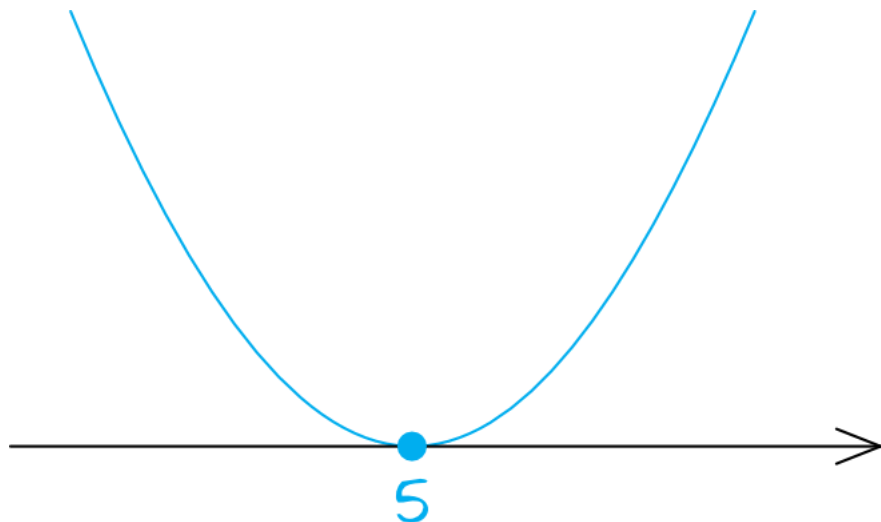
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Wielomian jest podany w bardzo wygodnej postaci iloczynowej, zatem aby poznać jego miejsca zerowe wystarczy przyrównać wartość nawiasu do zera:

$$m + 5 = 0, m = -5$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Zaznaczamy na osi wyznaczone przed chwilą miejsca zerowe i szkicujemy parabolę (z ramionami skierowanymi do góry, bo po podniesieniu $(m + 5)^2$ mielibyśmy dodatni współczynnik kierunkowy). Całość wyglądać będzie następująco:



Krok 3. Odczytanie rozwiązania nierówności.

Interesują nas wartości mniejsze lub równe zero, zatem warunki naszego zadania spełnia jedynie jedna liczba, czyli 5.

Zadanie 21

0-1 pkt

Miara kąta dziesięciokąta foremnego wynosi:

Odpowiedź: B (144°)

Krok 1. Obliczenie miary wszystkich kątów wewnętrznych.

Suma kątów w n -kącie jest równa:

$$180^\circ \cdot (n - 2)$$

W związku z tym dziesięciokąt ma łącznie:

$$180^\circ \cdot (10 - 2) = 180^\circ \cdot 8 = 1440^\circ$$

Krok 2. Obliczenie miary kąta dziesięciokąta foremnego.

Wielokąt foremny ma wszystkie kąty jednakowej miary. W związku z tym każdy kąt ma miarę:

$$1440^\circ : 10 = 144^\circ$$

Zadanie 22

0-1 pkt

Kąty α i β są przyległe i α jest o 35° większy od β . Wynika stąd, że:

Odpowiedź: B ($\beta = 72,5^\circ$)

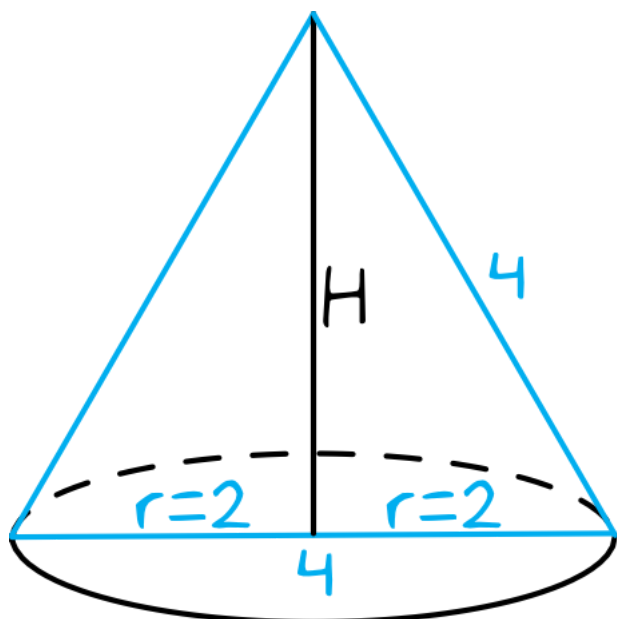
Suma kątów przyległych jest równa 180° . Z treści zadania wynika, że $\alpha = \beta + 35^\circ$, zatem możemy zapisać, że:

$$\alpha + \beta = 180^\circ, \beta + 35^\circ + \beta = 180^\circ, 2\beta = 145^\circ, \beta = 72,5^\circ$$

Zadanie 23

0-1 pkt

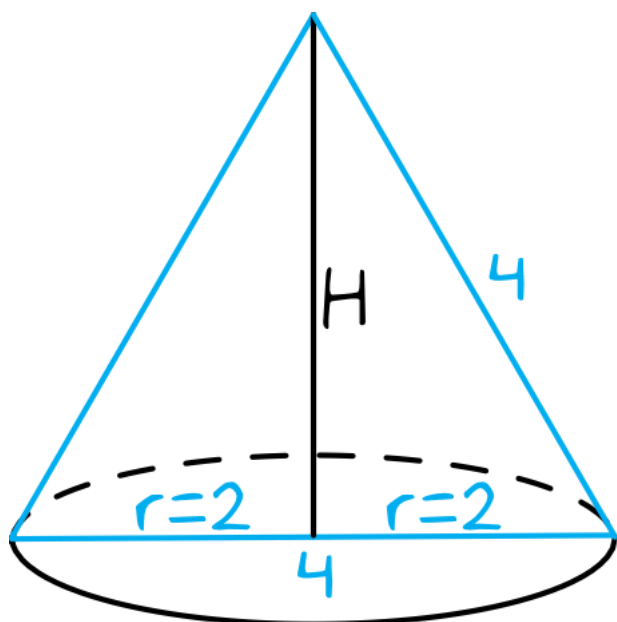
Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku 4. Objętość tego stożka jest równa:



Odpowiedź: A ($\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nasz stożek mający w przekroju trójkąt równoboczny będzie wyglądał mniej więcej w ten sposób:



Krok 2. Obliczenie wysokości trójkąta równobocznego.

Wysokość trójkąta możemy obliczyć albo z Twierdzenia Pitagorasa, albo po prostu ze wzoru:

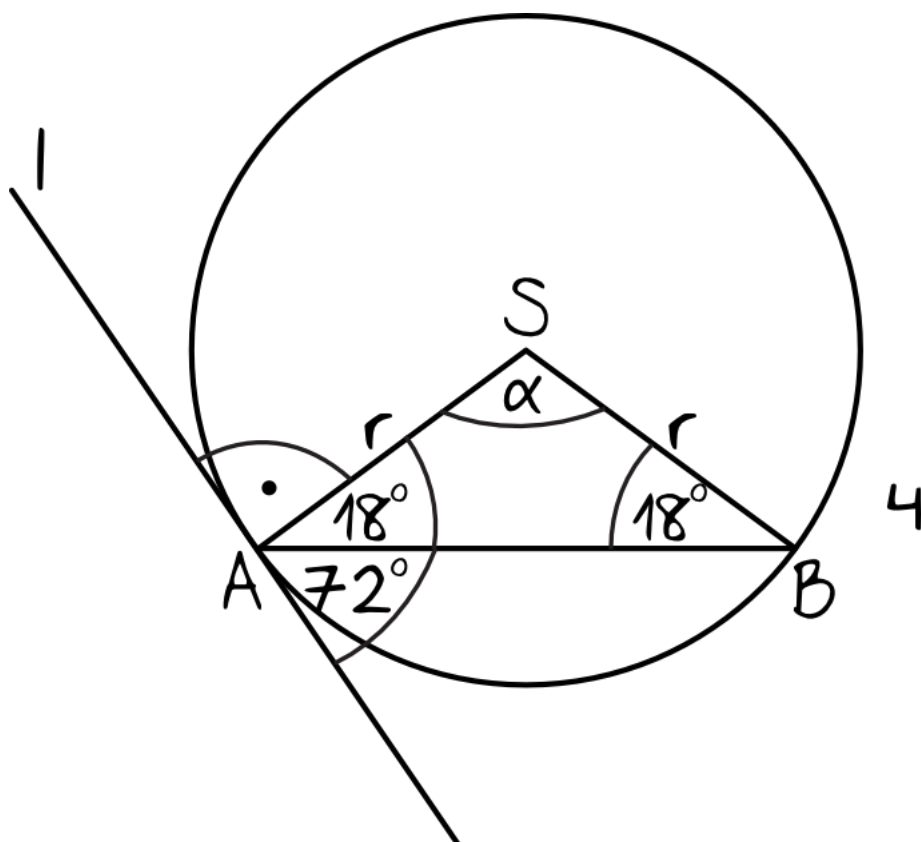
$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2}, H = \frac{4\sqrt{3}}{2}, H = 2\sqrt{3}$$

Krok 2. Obliczenie objętości stożka.

Z rysunku możemy odczytać, że $r = 2$, wiemy też że $H = 2\sqrt{3}$, zatem objętość stożka będzie równa:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H, V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3}, V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}, V = \frac{1}{3}\pi \cdot 8\sqrt{3}, V = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$$

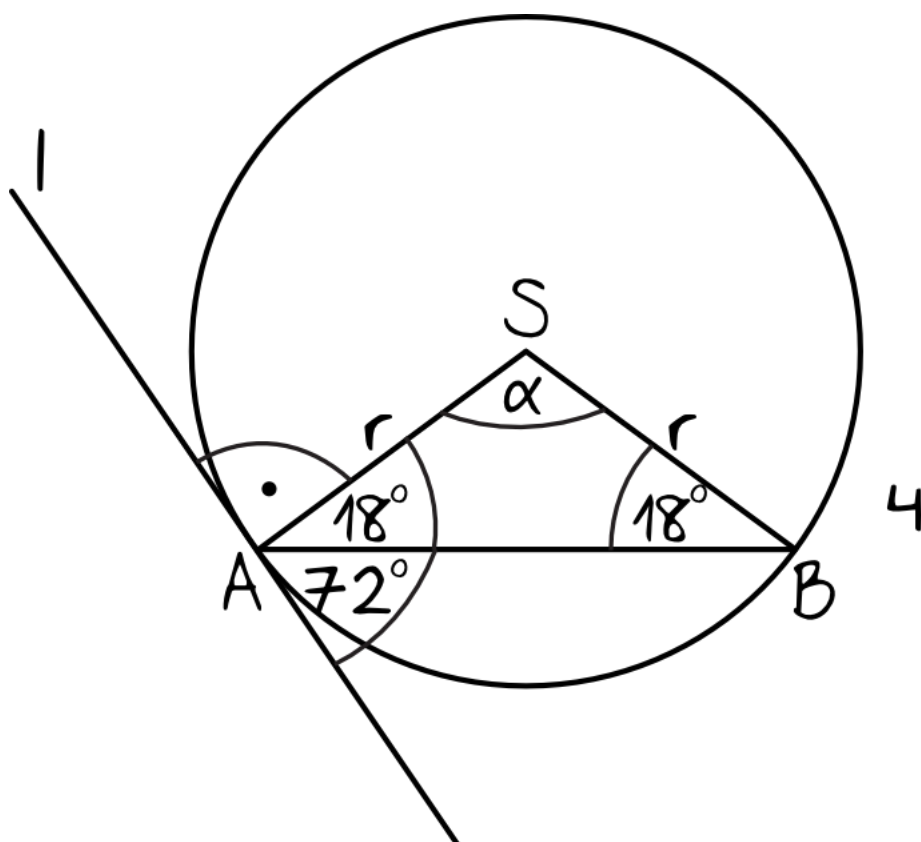
Prosta l jest styczna do okręgu o środku S w punkcie A . Kąt między prostą l i cięciwą AB jest równy 72° . Zatem kąt ASB ma miarę:



Odpowiedź: C (144°)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy narysować sobie tę sytuację na rysunku pomocniczym:



Trójkąt ABS jest na pewno równoramienny (bo dwa ramiona mają długość równą promieniowi okręgu). Dodatkowo wiemy, że styczna do okręgu tworzy z promieniem okręgu przechodzącym przez punkt styczności kąt 90° . Stąd też jesteśmy w stanie obliczyć, że kąty BAS oraz ABS mają miarę: $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

Krok 2. Obliczenie miary kąta ASB .

W trójkącie suma miar kątów jest równa 180° . To oznacza, że kąt ASB ma miarę:

$$|\angle ASB| = 180^\circ - 18^\circ - 18^\circ = 144^\circ$$

Zadanie 25

0-1 pkt

Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{5}{7}$. Wówczas $\sin \alpha$ jest równy:

Odpowiedź: C ($\frac{2\sqrt{6}}{7}$)

Korzystając z jedynki trygonometrycznej możemy zapisać, że:

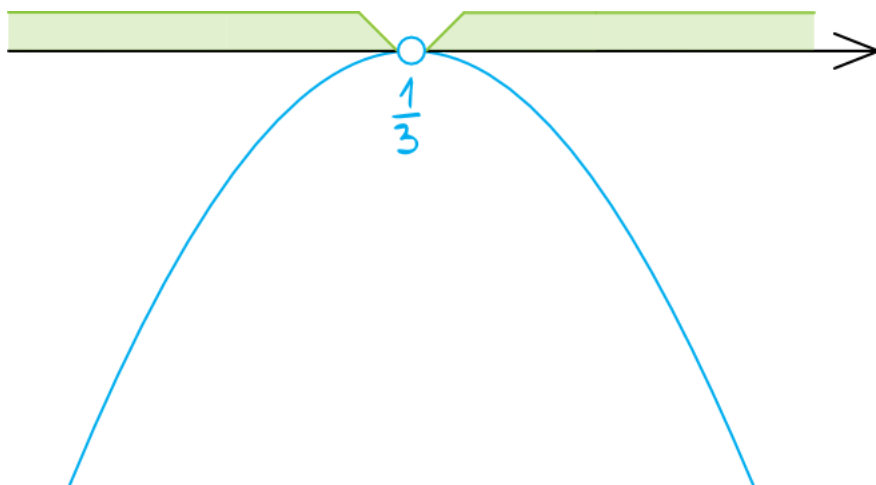
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \sin^2 \alpha + \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1, \sin^2 \alpha + \frac{25}{49} = 1, \sin^2 \alpha = \frac{24}{49}, \sin \alpha = \sqrt{\frac{24}{49}} \vee \sin \alpha = -\sqrt{\frac{24}{49}}$$

Wartość ujemną odrzucamy, bo dla kątów ostrych sinus przyjmuje wartości dodatnie, zatem zostaje nam $\sin \alpha = \sqrt{\frac{24}{49}}$. Musimy jeszcze doprowadzić ten wynik do postaci z jednej z odpowiedzi:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 6}}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

Zadanie 26

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność: $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.Odpowiedź: $x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$

Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

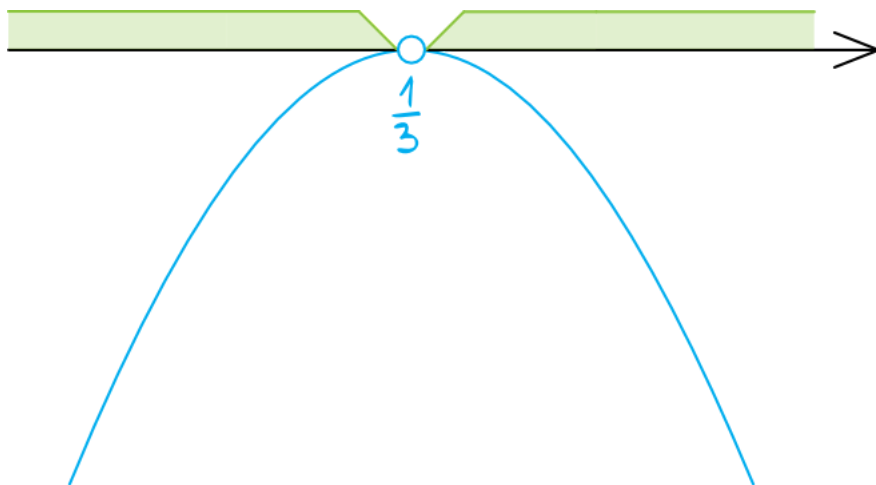
Współczynniki: $a = -9$, $b = 6$, $c = -1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-1) = 36 - 36 = 0$$

Skoro delta jest ujemna, to mamy tylko jedno miejsce zerowe:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-9)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Współczynnik a jest ujemny, więc parabola ma skierowane ramiona do dołu. Zaznaczamy na osi miejsce zerowe, które przed chwilą obliczyliśmy (kropka będzie niezamalowana, bo w nierówności wystąpił znak $<$) i szkicujemy wykres paraboli:

Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Interesuje nas przedział dla których zbiór argumentów przyjmuje wartość mniejszą od zera, czyli patrzymy na to co znalazło się pod osią. Okazuje się, że rozwiązaniem tej nierówności będzie każda liczba, tylko nie $\frac{1}{3}$, dla której to wielomian przyjął wartość równą 0. To oznacza, że rozwiązaniem tej nierówności jest zbiór: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ lub też jak kto woli $x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Zadanie 27

0-2 pkt

Punkt $S = (-3, 8)$ jest środkiem odcinka AB i $B = (-6, 14)$. Wyznacz współrzędne punktu A .

Odpowiedź: $A = (0; 2)$

W tym zadaniu skorzystamy ze wzoru na środek odcinka w układzie współrzędnych. Środek odcinka AB o współrzędnych $A = (x_A; y_A)$ oraz $B = (x_B; y_B)$ możemy opisać wzorem:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Znamy współrzędne środka odcinka, znamy też współrzędne jednego z punktów, więc możemy wyznaczyć poszukiwane współrzędne punktu A .

Krok 1. Obliczenie współrzędnej x-sowej punktu A .

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad -3 = \frac{x_A + (-6)}{2}, \quad -6 = x_A - 6, \quad x_A = 0$$

Krok 2. Obliczenie współrzędnej y-owej punktu A .

$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad 8 = \frac{y_A + 14}{2}, \quad 16 = y_A + 14, \quad y_A = 2$$

To oznacza, że współrzędne punktu A są równe: $A = (0; 2)$.

Zadanie 28

0-2 pkt

W klasie 1A było trzy razy więcej chłopców niż dziewcząt. Pewnego dnia do klasy doszły dwie dziewczyny i wówczas liczba dziewcząt stanowiła 30% wszystkich osób w klasie. Oblicz, ile było chłopców i dziewcząt na początku.

Odpowiedź: 21 chłopców i 7 dziewcząt

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

$3x$ - liczba chłopców

x - liczba dziewcząt

$x + 3x = 4x$ - liczba dzieci w klasie

$x + 2$ - liczba dziewcząt po dołączeniu dwóch dziewczyn

$4x + 2$ - liczba dzieci w klasie po dołączeniu dwóch dziewczyn

Krok 2. Ułożenie i rozwiązanie równania.

Z treści zadania wynika, że:

$$x + 2 = 0,3 \cdot (4x + 2), \quad x + 2 = 1,2x + 0,6, \quad -0,2x = -1,4, \quad x = 7$$

Krok 3. Zakończenie rozwiązania.

Otrzymany wynik $x = 7$ oznacza, że na początku było 7 dziewczyn, a tym samym chłopców było $3x = 3 \cdot 7 = 21$.

Zadanie 29

0-2 pkt

Wykaż, że jeżeli α jest kątem ostrym i $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{6}{5}$, to $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,22$.

Odpowiedź: Udowodniono obliczając

To na czym możemy się oprzeć przy tego typu zadaniach to jest z pewnością jedynka trygonometryczna $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Spróbujmy więc podnieść obustronnie do kwadratu równanie z treści zadania, tak aby można było się do tej jedynki trygonometrycznej później odnosić:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \left(\frac{6}{5} \right)^2, \quad \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{36}{25}, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{36}{25}, \quad 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{36}{25}, \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{11}{25} \quad \left/ \cdot \frac{1}{2} \right.,$$

Zadanie 30

0-2 pkt

W ciągu geometrycznym (a_n) o dodatnich wyrazach trzeci wyraz jest równy 6, a piąty jest równy 24. Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

Odpowiedź: $a_1 = 1,5$ oraz $\backslash$

Krok 1. Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego.

W treści zadania mamy podaną wartość trzeciego i piątego wyrazu. Na tej podstawie możemy obliczyć iloraz ciągu geometrycznego:

$$a_5 = a_3 \cdot q^2, 24 = 6 \cdot q^2, q^2 = 4, q = 2 \quad \vee \quad q = -2$$

Ujemny iloraz musimy odrzucić, a to dlatego że nasz ciąg geometryczny zawiera same dodatnie wyrazy. Przy $q = -2$ ciąg byłby niemonotoniczny, czyli raz mielibyśmy wyrazy dodatnie, a raz ujemne.

Krok 2. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu.

Znając iloraz q i znając wartość np. trzeciego wyrazu, możemy obliczyć wartość pierwszego wyrazu w następujący sposób:

$$a_3 = a_1 \cdot q^2, 6 = a_1 \cdot 2^2, 6 = a_1 \cdot 4, a_1 = 1,5$$

Zadanie 31

0-4 pkt

Rzucono cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek jest mniejsza od 23.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1291}{1296}$

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Każdy rzut to możliwość otrzymania jednego z sześciu wyników. Takich rzutów wykonujemy aż cztery. To oznacza, że zgodnie z regułą mnożenia liczba zdarzeń elementarnych będzie równa:

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$$

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Zdarzeniem sprzyjającym są wyniki mniejsze od 23. Czyli przykładowo zdarzeniem sprzyjającym będą rzuty $(3, 3, 1, 6)$ czy też $(2, 3, 6, 2)$ itd. Nie damy rady wypisać wszystkich możliwych kombinacji, ale jesteśmy w stanie określić ile z tych 1296 kombinacji nie spełnia warunków naszego zadania. Będą to takie sytuacje w których raz wypadnie pięć i trzy razy wypadnie szóstka lub też kiedy cztery razy wypadną szóstki. To oznacza, że mamy tylko pięć przypadków zdarzeń niesprzyjających:

$$(5, 6, 6, 6), (6, 5, 6, 6), (6, 6, 5, 6), (6, 6, 6, 5), (6, 6, 6, 6)$$

W związku z tym zdarzeń sprzyjających mamy $|A| = 1296 - 5 = 1291$.

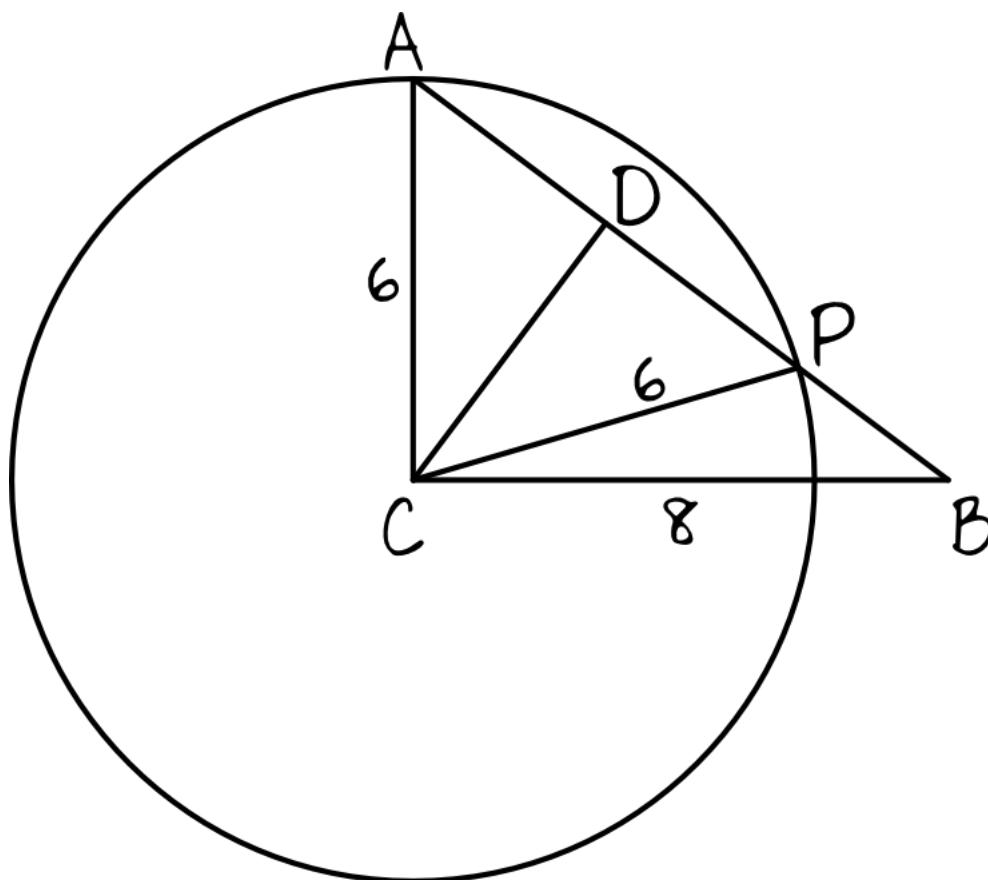
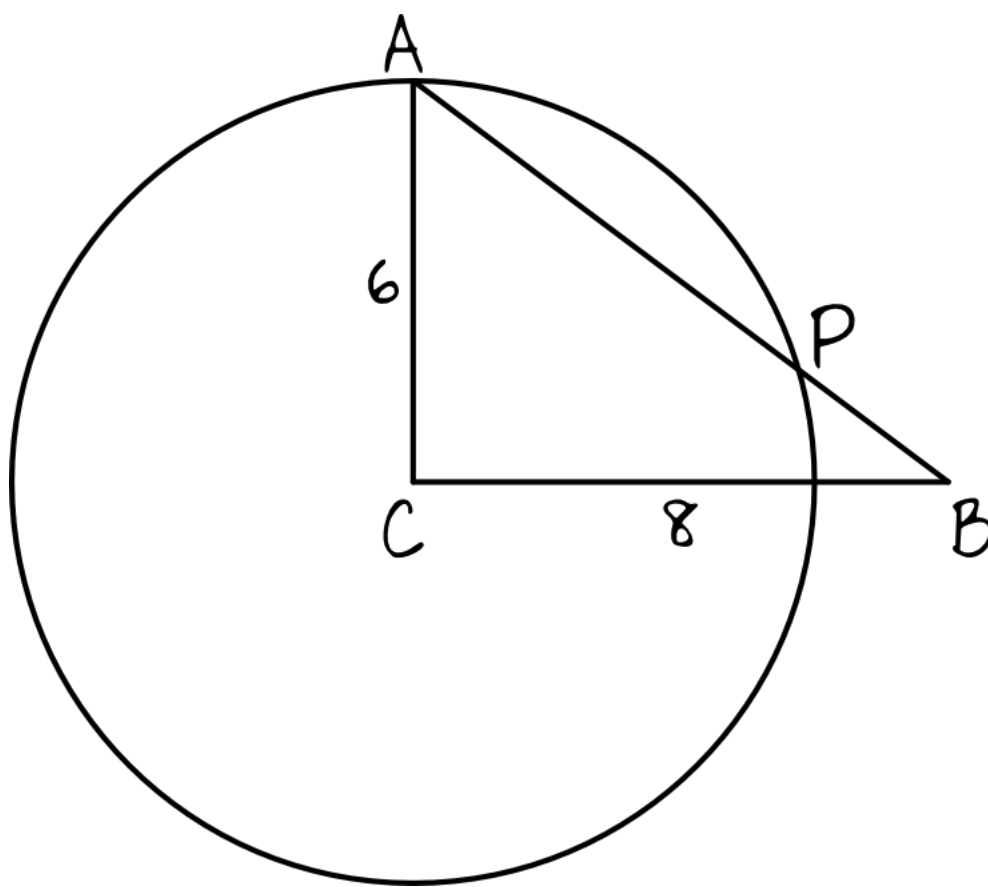
Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1291}{1296}$$

Zadanie 32

0-5 pkt

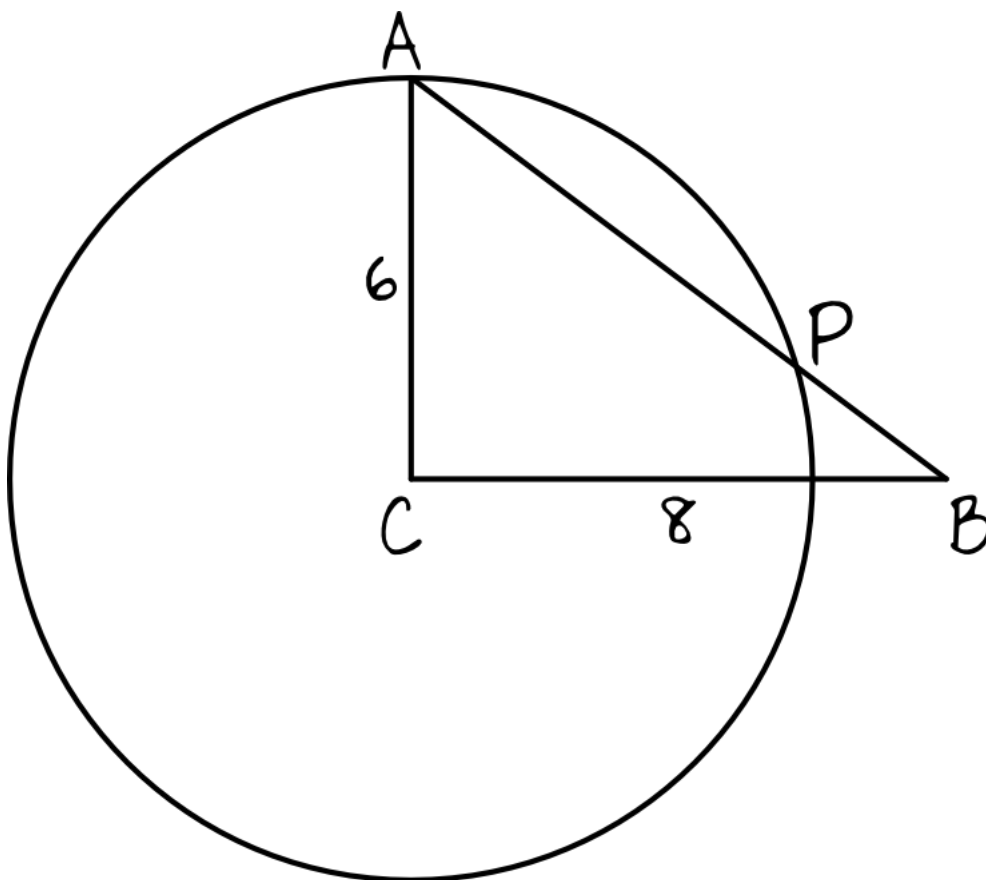
Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych AC, BC takich, że $AC = 6$ i $BC = 8$. Okrąg o środku C i promieniu $r = AC$ przecina przeciwprostokątną AB w punkcie P . Wyznacz długość odcinka BP .



Odpowiedź: $|BP| = 2,8$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zadanie jest dość nietypowe, więc spróbujmy zwizualizować sobie całą sytuację. Musimy przy okazji dobrać takie oznaczenia, żeby faktycznie odcinki AC oraz BC były przyprostokątnymi:



Krok 2. Obliczenie długości przeciwprostokątnej.

Z Twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć długość przeciwprostokątnej naszego trójkąta ABC :

$$6^2 + 8^2 = |AB|^2, \quad 36 + 64 = |AB|^2, \quad 100 = |AB|^2, \quad |AB| = 10 \quad \vee \quad |AB| = -10$$

Ujemną wartość oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $|AB| = 10$.

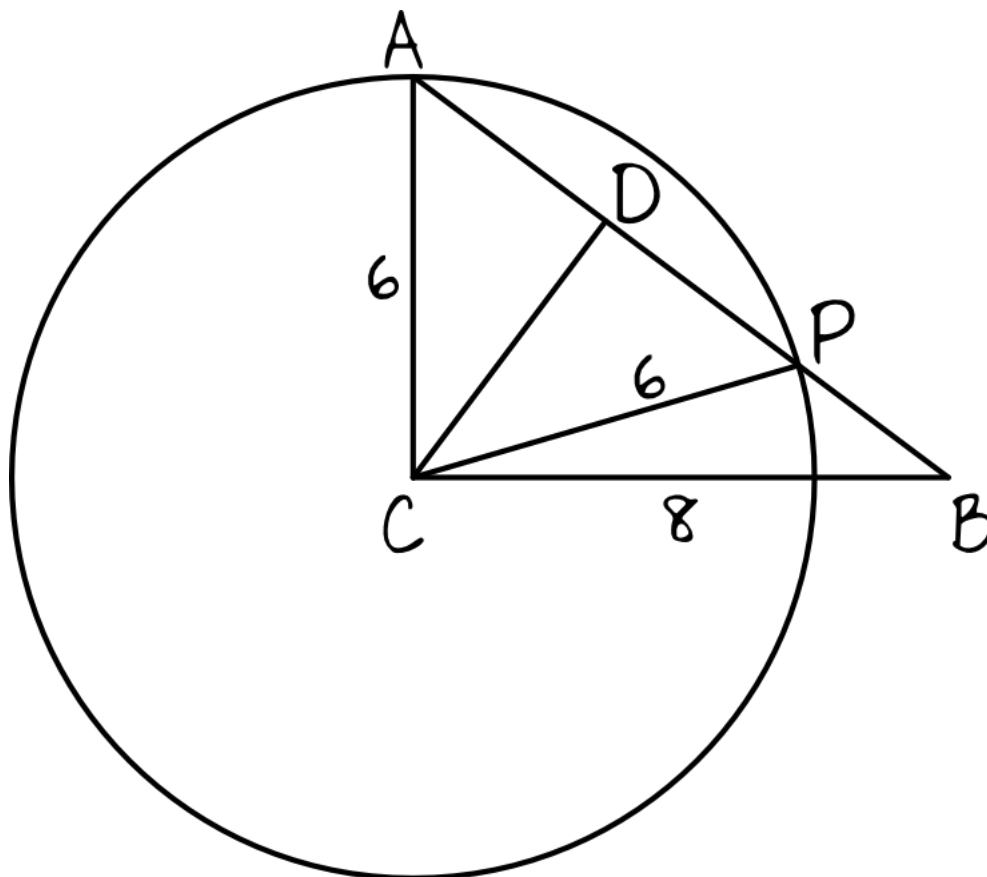
Krok 3. Obliczenie pola powierzchni trójkąta ABC .

Obliczenie pola trójkąta przyda nam się za chwilę do wyznaczenia drugiej wysokości tego trójkąta. W trójkącie prostokątnym obliczenie pola powierzchni jest proste, bo przyprostokątne są podstawą i wysokością takiego trójkąta, zatem:

$$P = \frac{1}{2}ah, \quad P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8, \quad P = 3 \cdot 8, \quad P = 24$$

Krok 4. Obliczenie drugiej wysokości trójkąta.

Spójrzmy ponownie na rysunek:



Połączyliśmy sobie punkt C z punktem P , tworząc odcinek CP . Długość tego odcinka jest równa promieniowi okręgu, czyli wynosi 6. To oznacza, że trójkąt ACP jest równoramienny. Teraz plan działania jest następujący: obliczymy wysokość trójkąta ABC (czyli odcinek CD), który jest jednocześnie wysokością trójkąta ACP . Znając długości ramion oraz wysokość CD obliczymy długość podstawy AP , a interesujący nas odcinek BP będzie różnicą między odcinkiem AB oraz AP .

Przystąpmy zatem do obliczenia długości CD , czyli wysokości trójkąta ABC , która idzie z wierzchołka C . Wiemy, że pole trójkąta ABC jest równe 24, wiemy że przeciwprostokątna ma długość 10, zatem wysokość CD ma długość:

$$P = \frac{1}{2}ah, \quad 24 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot |CD|, \quad 24 = 5 \cdot |CD|, \quad |CD| = 4,8$$

Krok 5. Obliczenie długości odcinka DP .

Długość odcinka DP obliczymy z Twierdzenia Pitagorasa:

$$|DP|^2 + |CD|^2 = |CP|^2, \quad |DP|^2 + 4,8^2 = 6^2, \quad |DP|^2 + 23,04 = 36, \quad |DP|^2 = 12,96, \quad |DP| = 3,6 \quad \vee \quad |DP| = -3,6$$

Ujemną długość oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $|DP| = 3,6$.

Krok 6. Obliczenie długości odcinka AP .

Odcinek DP jest połową długości odcinka AP (bo wysokość w trójkącie równoramiennym dzieli podstawę na dwie równe części). To oznacza, że odcinek AP jest dwukrotnie większy od odcinka DP , zatem:

$$|AP| = 2 \cdot 3,6, \quad |AP| = 7,2$$

Krok 7. Obliczenie długości odcinka BP .

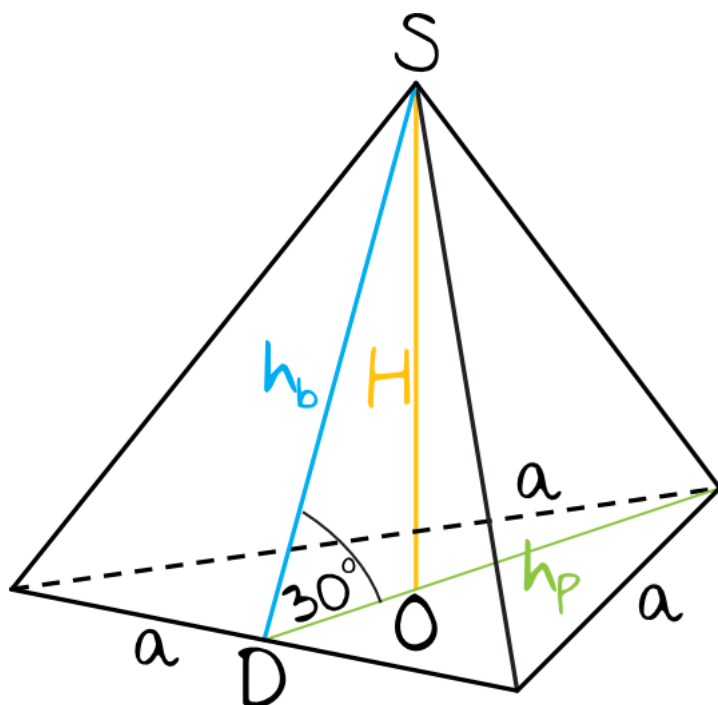
Odcinek BP obliczymy odejmując od odcinka AB długość odcinka AP , zatem:

$$|BP| = |AB| - |AP|, \quad |BP| = 10 - 7,2, \quad |BP| = 2,8$$

Zadanie 33

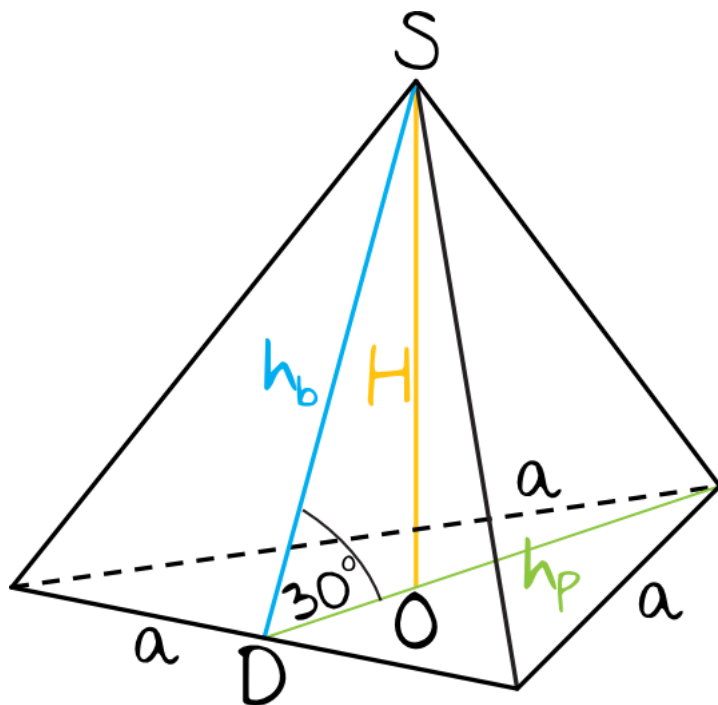
0-6 pkt

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30° . Promień okręgu opisanego na podstawie jest równy $2\sqrt{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej podanej bryły.



Odpowiedź: $V = 3\sqrt{3}$ oraz

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.



Krok 2. Obliczenie wysokości podstawy.

Z własności okręgów opisanych na trójkącie wynika, że długość promienia takiego okręgu jest równa $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta. Z treści zadania wiemy, że $R = 2\sqrt{3}$, czyli:

$$R = \frac{2}{3}h_p, 2\sqrt{3} = \frac{2}{3}h_p \quad \Bigg/ \cdot \frac{3}{2}, h_p = \frac{6\sqrt{3}}{2}, h_p = 3\sqrt{3}$$

Krok 3. Obliczenie długości krawędzi podstawy.

W podstawie naszej bryły znajduje się trójkąt równoboczny (bo ostrosłup jest prawidłowy). Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego wyliczymy długość jego boku:

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, 6\sqrt{3} = a\sqrt{3}, a = 6$$

Krok 4. Obliczenie długości odcinka DO .

Odcinek DO jest równy $\frac{1}{3}$ długości wysokości trójkąta. Wynika to z własności ostrosłupów - wysokość ostrosłupa dzieli nam wysokość podstawy właśnie na dwa odcinki o długości $\frac{1}{3}h_p$ oraz $\frac{2}{3}h_p$. To oznacza, że:

$$|DO| = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}, |DO| = \sqrt{3}$$

Krok 5. Obliczenie wysokości ostrosłupa oraz wysokości ściany bocznej.

Spójrzmy teraz na trójkąt prostokątny DOS . To właśnie z niego obliczymy wysokość całej bryły. Możemy to zrobić albo z własności trójkątów o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, albo po prostu korzystając z tangensa:

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{H}{|DO|}, \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{H}{\sqrt{3}} \quad \Bigg/ \cdot \sqrt{3}, H = \frac{3}{3}, H = 1$$

Krok 6. Obliczenie wysokości ściany bocznej.

Musimy obliczyć jeszcze wysokość ściany bocznej, bo przyda nam się to do obliczenia pola powierzchni bocznej. Tutaj możemy skorzystać z własności trójkątów o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, z funkcji trygonometrycznych, albo nawet z Twierdzenia Pitagorasa. Mamy więc pełną dowolność. Obliczmy to może z funkcji trygonometrycznych, a konkretniej z sinusa:

$$\sin30^\circ = \frac{H}{h_b}, \frac{1}{2} = \frac{1}{h_b}, \frac{1}{2}h_b = 1, h_b = 2$$

Krok 7. Obliczenie objętości bryły.

Mamy już wszystkie potrzebne informacje, zatem możemy przystąpić do obliczenia objętości bryły. W podstawie możemy skorzystać ze wzoru na pole trójkąta równobocznego, zatem:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H, V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H, V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 1, V = \frac{1}{3} \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4}, V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3}, V = 3\sqrt{3}$$

Krok 8. Obliczenie pola powierzchni bocznej.

Na pole powierzchni bocznej składają się trzy trójkąty w których $a = 6$ oraz $h_b = 2$, zatem:

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2}ah, P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2, P_b = 3 \cdot 3 \cdot 2, P_b = 18$$