

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Operon 2012

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D ($2^{\frac{14}{3}}$)	1
2	B (-2)	1
3	C $((-1, 4))$	1
4	B (4)	1
5	A (3)	1
6	D $(10000 \cdot (1,0075)^{16})$	1
7	A (z, y, x)	1
8	B $(S_{2n} = 4n^2 + 2n)$	1
9	C $(\sqrt[4]{\frac{17}{17}})$	1
10	C $(\mathbb{R})$	1
11	D $(-5^{\frac{2}{3}})$	1
12	D $(y = f(x) - 10)$	1
13	B $(\frac{3}{6})$	1
14	B $(\frac{5}{13})$	1
15	C $((x+2)(x-2)^2)$	1
16	D $(x+6 \geq 2)$	1
17	C $((-\infty, 1))$	1
18	C $(a = -\frac{9}{2})$	1
19	B $(q = 7)$	1
20	D $(S = (-6, 0), r = 2)$	1
21	B $(2\sqrt{6})$	1
22	C (7)	1
23	B (18)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Wartość liczby $a = 16\sqrt[3]{4}$ jest równa wartości liczby:

Odpowiedź: D ($2^{\frac{14}{3}}$)

Korzystając z działań na potęgach i pierwiastkach całość możemy rozpisać w następujący sposób:

$$16\sqrt[3]{4} = 4^2 \cdot 4^{\frac{1}{3}} = (2^2)^2 \cdot (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{2 \cdot 2} \cdot 2^{2 \cdot \frac{1}{3}} = 2^4 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{4 + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{14}{3}}$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -4) \\ 5x + 10 & \text{dla } x \in (-4, 2) \\ x + 4 & \text{dla } x \in (2, +\infty) \end{cases}$ jest:

Odpowiedź: B (-2)

Miejsce zerowe to taki argument x dla którego funkcja przyjmuje wartość równą 0. Możemy sprawdzić każdą z odpowiedzi po kolei, podstawiając poszczególne liczby do wzorów funkcji (pamiętając jedynie o tym, by do dobrego wzoru podstawić poszczególne argumenty - tu musimy zobaczyć do jakiego przedziału należy nasz podstawiany x). Jeżeli tak będziemy chcieli podejść do tego zadania, to:

Dla $x = -4$ mamy pierwszy wzór, czyli $(-4)^2 - 1 = 15$

Dla $x = -2$ mamy drugi wzór, czyli $5 \cdot (-2) + 10 = 0$

Dla $x = -1$ mamy drugi wzór, czyli $5 \cdot (-1) + 10 = 5$

Dla $x = 1$ mamy drugi wzór, czyli $5 \cdot 1 + 10 = 15$

W ten oto sposób obliczyliśmy, że wartość funkcji jest równa 0 dla argumentu $x = -2$.

Jeżeli chcemy to miejsce zerowe wyliczyć samodzielnie, to musimy sprawdzić po kolei każdy z trzech wzorów, przyrównując każde z wyrażeń do zera.

Pierwsze wyrażenie:

$$x^2 - 1 = 0, \quad x^2 = 1, \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

Obydwa rozwiązania nie mieszczą się w przedziale $x \in (-\infty, -4)$, zatem obydwa przypadki odrzucamy.

Drugie wyrażenie:

$$5x + 10 = 0, \quad 5x = -10, \quad x = -2$$

Rozwiązanie mieści się w przedziale $x \in (-4, 2)$, zatem $x = -2$ jest miejscem zerowym funkcji.

Trzecie wyrażenie:

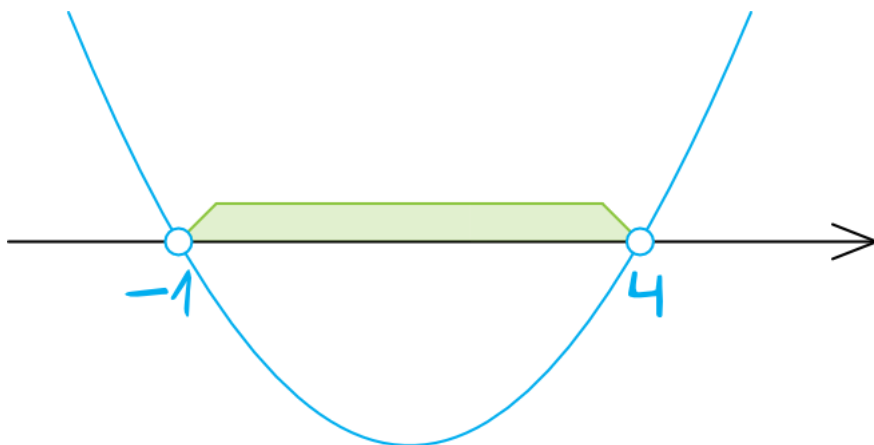
$$x + 4 = 0, \quad x = -4$$

Rozwiązanie nie mieści się w przedziale $x \in (-4, 2)$, zatem ten przypadek odrzucamy.

Zadanie 3

0-1 pkt

Funkcja f , określona wzorem $f(x) = x^2 - 3x - 4$, przyjmuje wartości ujemne jedynie w przedziale:



Odpowiedź: C $((-1, 4))$

Musimy odpowiedzieć kiedy funkcja przyjmuje wartości ujemne, czyli tak naprawdę musimy rozwiązać nierówność $x^2 - 3x - 4 < 0$.

Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Skorzystamy tutaj z tradycyjnej metody delty:

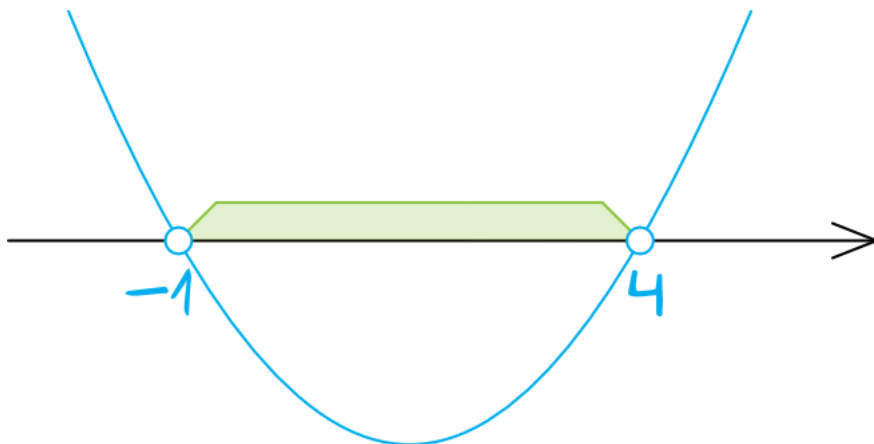
Współczynniki: $a = 1$, $b = -3$, $c = -4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 - (-16) = 25, \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - 5}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + 5}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Ramiona paraboli będą skierowane do góry, bo współczynnik a jest dodatni. Zaznaczamy na osi obliczone przed chwilą miejsca zerowe i przystępujemy do rysowania paraboli. Kółka przy miejscach zerowych muszą być niezamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $<$.



Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas argumenty, dla których nierówność przyjmuje wartości mniejsze od zera. W związku z tym: $x \in (-1; 4)$.

Zadanie 4

0-1 pkt

Wartość liczby $25^{\log_5 2}$ jest równa:

Odpowiedź: B (4)

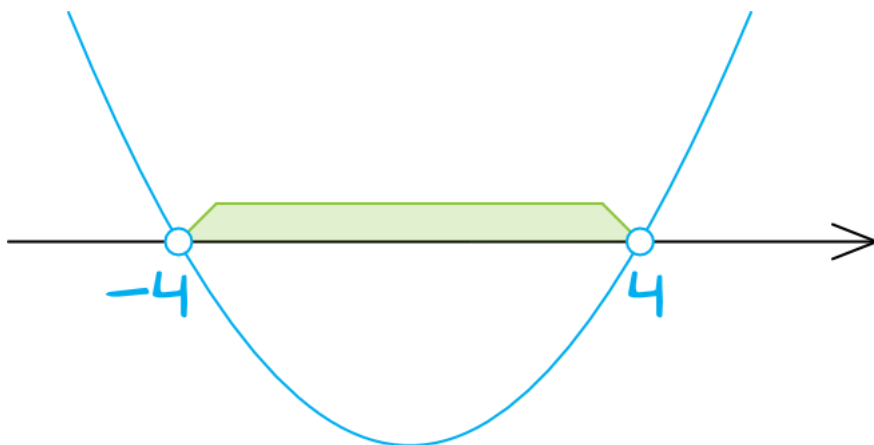
Korzystając z własności działań na logarytmach $a^{\log_a b} = b$ oraz $a \log_b c = \log_b c^a$ możemy zapisać, że:

$$25^{\log_5 2} = (5^2)^{\log_5 2} = 5^{2 \log_5 2} = 5^{\log_5 4} = 4$$

Zadanie 5

0-1 pkt

Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = -n^2 + 16$ dla $n \geq 1$. Liczba dodatnich wyrazów tego ciągu jest równa:



Odpowiedź: A (3)

Krok 1. Ułożenie nierówności.

Aby dowiedzieć się ile jest dodatnich wyrazów tego ciągu to musimy rozwiązać nierówność:

$$-n^2 + 16 > 0 \quad / \cdot (-1), \quad n^2 - 16 < 0$$

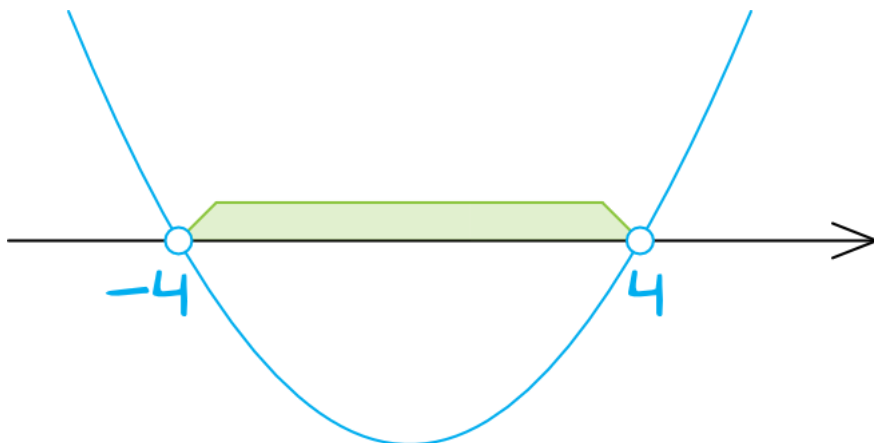
Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Teraz musimy obliczyć miejsca zerowe wielomianu, przyrównując wartość $n^2 - 16$ do zera. Możemy to zrobić standardową deltą, ale to jest jedna z tych nierówności którą da się obliczyć niemalże w pamięci:

$$n^2 - 16 = 0, \quad n^2 = 16, \quad n = 4 \quad \vee \quad n = -4$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Znając miejsca zerowe wielomianu możemy przystąpić do szkicowania wykresu paraboli. Ramiona paraboli będą skierowane do góry, bo przed n^2 nie ma żadnej ujemnej wartości:



Krok 4. Odczytanie i interpretacja rozwiązania.

Szukamy argumentów, dla których nierówność przyjmuje wartości mniejsze od zera. W związku z tym: $n \in (-4; 4)$.

Jak teraz zinterpretować to rozwiązanie? Z treści zadania (i ogólnie z wiedzy o ciągach) wiemy, że $n \geq 1$. Wiemy też, że n jest liczbą naturalną. W związku z tym skoro nasze n musi być większe lub równe 1 i jednocześnie musi się mieścić w przedziale $n \in (-4; 4)$, to mamy tylko trzy liczby które spełniają te warunki: $n = 1, n = 2, n = 3$. W związku z tym ten ciąg ma tylko trzy dodatnie wyrazy.

Zadanie 6

0-1 pkt

Kwotę 10000 zł wpłacamy do banku na 4 lata. Kapitalizacja odsetek jest dokonywana w tym banku co kwartał, a roczna stopa procentowa wynosi 3%. Po 4 latach kwotę na rachunku będzie można opisać wzorem:

Odpowiedź: D $(10000 \cdot (1,0075)^{16})$

Do rozwiązania zadania skorzystamy ze wzoru na kapitalizację odsetek:

$$K_n = K \cdot (1 + p)^n$$

K_n to kwota po naliczeniu odsetek

K to kapitał początkowy

p to oprocentowanie w okresie pojedynczej kapitalizacji

n to liczba kapitalizacji

Z treści zadania wynika, że:

$$K = 10000$$

$$p = 0,03 : 4 = 0,0075$$

$$n = 4 \cdot 4 = 16$$

Dlaczego $p = 0,0075$?

Oprocentowanie lokaty w skali roku wynosi 3%, czyli 0,03. Gdyby lokata była kapitalizowana raz w roku, to wtedy $p = 0,03$. Jednak nasza lokata jest kapitalizowana 4 razy w roku (co kwartał), zatem na każdy okres kapitalizacji przypada nam oprocentowanie rzędu $p = 0,03 : 4 = 0,0075$.

Dlaczego $n = 16$?

Lokata jest na 4 lata, a odsetki naliczane są co kwartał czyli 4 razy w roku. W związku z tym w trakcie całej lokaty odsetki będą naliczone $4 \cdot 4 = 16$ razy.

Nie pozostaje nam nic innego jak podstawić poszczególne dane do wzoru:

$$K_{16} = 10000 \cdot (1 + 0,0075)^{16}$$

Zadanie 7

0-1 pkt

Dane liczby: $x = \frac{3}{\sqrt{5}-2}$, $y = \frac{12}{\sqrt{5}-1} + 1$, $z = 3\sqrt{5} + 2$ tworzą rosnący ciąg arytmetyczny w kolejności:

Odpowiedź: A (z, y, x)

Naszym zadaniem jest po prostu ustalenie, która z tych liczb jest najmniejsza, a która największa i ustawienie tych liczb w porządku rosnącym. To zadanie nie jest więc w żaden sposób związane z ciągami jako takimi.

Teoretycznie moglibyśmy przyjąć przybliżenie $\sqrt{5} \approx 2,23$ i obliczyć na kalkulatorze wartość każdej z tych liczb. I prawdopodobnie byłaby to najszybsza metoda, bo od razu otrzymalibyśmy, że:

$$x \approx \frac{3}{2,23-2} = \frac{3}{0,23} = 13,04, \quad y \approx \frac{12}{2,23-1} + 1 = \frac{12}{1,23} + 1 = 9,76 + 1 = 10,76, \quad z \approx 3\sqrt{5} + 2 = 3 \cdot 2,23 + 2 = 8,69$$

Gdybyśmy jednak chcieli do tego zadania podejść nieco bardziej matematycznie, to kluczem do sukcesu byłoby po prostu usunięcie niewymierności z każdego z podanych ułamków. Otrzymamy wtedy:

$$x = \frac{3}{\sqrt{5}-2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2) \cdot (\sqrt{5}+2)} = \frac{3\sqrt{5}+6}{5-4} = \frac{3\sqrt{5}+6}{1} = 3\sqrt{5}+6, \quad y = \frac{12}{\sqrt{5}-1} + 1 = \frac{12 \cdot (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1) \cdot (\sqrt{5}+1)} + 1 = \frac{12\sqrt{5}+12}{5-1} + 1 = \frac{12\sqrt{5}+12}{4} + 1 = \frac{12\sqrt{5}+12+4}{4} = \frac{12\sqrt{5}+16}{4} = 3\sqrt{5}+4$$

Zarówno z pierwszego jak i drugiego sposobu wynika, że najmniejsza jest liczba z , największa to x , zatem ten ciąg tworzą po kolei liczby z, y, x .

Zadanie 8

0-1 pkt

Suma $2n$ początkowych liczb naturalnych dodatnich parzystych jest równa:

Odpowiedź: B ($S_{2n} = 4n^2 + 2n$)

Zastanówmy się co tak naprawdę musimy policzyć. Musimy obliczyć sumę wyrazów, które tworzą ciąg arytmetyczny z liczb parzystych w stylu:

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

O tym ciągu możemy powiedzieć, że jego pierwszym wyrazem jest na pewno $a_1 = 2$ oraz że różnica ciągu wynosi $r = 2$. Musimy teraz obliczyć sumę tych wszystkich wyrazów, a skoro tak, to zapiszmy wzór na sumę n -tych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

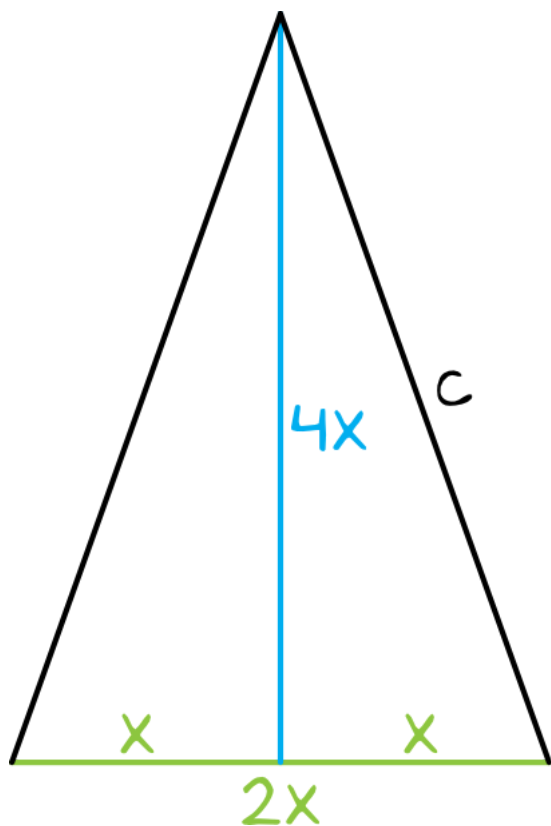
Rozpisując a_n ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego $a_n = a_1 + (n-1)r$ otrzymamy:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n, S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Wiemy, że mamy mieć $2n$ wyrazów (czyli musimy pod n podstawiać $2n$), wiemy też że różnica ciągu arytmetycznego jest równa $r = 2$ i wiemy że $a_1 = 2$, zatem:

$$S_{2n} = \frac{2 \cdot 2 + (2n-1) \cdot 2}{2} \cdot 2n, S_{2n} = \frac{4 + 4n - 2}{2} \cdot 2n, S_{2n} = \frac{4n + 2}{2} \cdot 2n, S_{2n} = (2n + 1) \cdot 2n, S_{2n} = 4n^2 + 2n$$

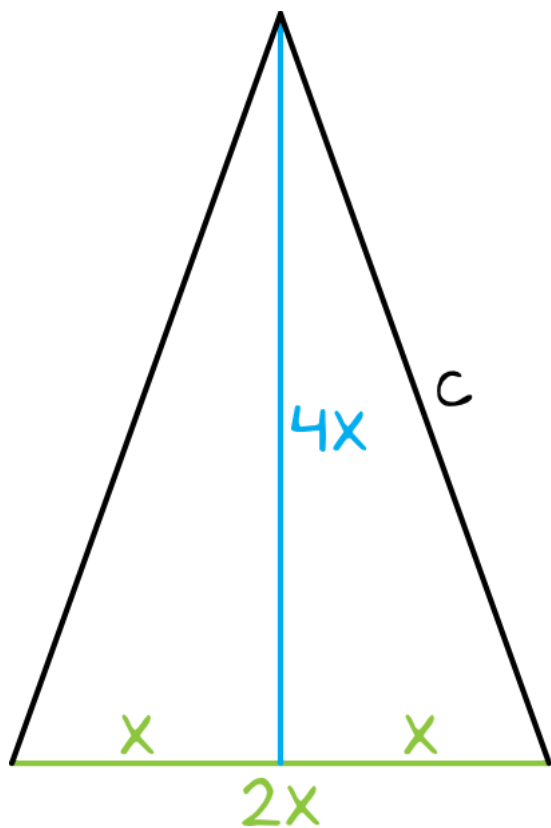
W trójkącie równoramiennym wysokość jest dwa razy dłuższa od podstawy. Wynika stąd, że sinus kąta przy podstawie wynosi:



Odpowiedź: C ($\frac{4\sqrt{17}}{17}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Aby uniknąć działań na ułamkach zapiszmy sobie, że podstawa trójkąta ma długość $2x$, natomiast wysokość jest równa $4x$.



Krok 2. Obliczenie długości przeciwprostokątnej.

Spójrzmy na otrzymany trójkąt prostokątny, bo to z niego teraz będziemy korzystać przy wyznaczeniu wartości sinusa. Do obliczenia sinusa potrzebna nam jest

znajomość przeciwprostokątnej trójkąta, a tę wyliczymy z Twierdzenia Pitagorasa. W podstawie trójkąta prostokątnego znajduje się bok długości x (bo wysokość trójkąta równoramiennego dzieli podstawę na dwie równe części), natomiast druga przyprostokątna ma długość $4x$. W związku z tym:

$$x^2 + (4x)^2 = c^2, \quad x^2 + 16x^2 = c^2, \quad 17x^2 = c^2, \quad c = \sqrt{17}x \quad \vee \quad c = -\sqrt{17}x$$

Wartość ujemną oczywiście odrzucamy, bo długość nie może być ujemna, zatem $c = \sqrt{17}x$.

Krok 3. Zapisanie wartości sinusa.

Sinus opisuje nam relacje między długością przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta oraz długością przeciwprostokątnej. W związku z tym:

$$\sin \alpha = \frac{4x}{\sqrt{17}x}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}, \quad \sin \alpha = \frac{4 \cdot \sqrt{17}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}}, \quad \sin \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

Zadanie 10

0-1 pkt

Dziedziną funkcji f , określonej wzorem $f(x) = \frac{x-5}{x^2+4}$, jest zbiór:

Odpowiedź: C ($\mathbb{R}$)

W matematyce nie istnieje dzielenie przez 0, więc w mianowniku naszego ułamka musi się pojawić liczba różna od zera. Musimy więc sprawdzić kiedy $x^2 + 4$ jest równe 0 i wykluczyć te argumenty z dziedziny funkcji. Równanie $x^2 + 4 = 0$ można rozwiązywać standardową deltą, ale tak naprawdę możemy to obliczyć w pamięci:

$$x^2 + 4 = 0, \quad x^2 = -4$$

Z racji tego, iż nie istnieje jakakolwiek liczba rzeczywista, która podniesiona do kwadratu da wynik ujemny, to z naszej dziedziny nie wykluczymy żadnego rozwiązania, bo w mianowniku nigdy nie otrzymamy zera. To oznacza, że dziedziną funkcji jest po prostu cały zbiór liczb rzeczywistych.

Zadanie 11

0-1 pkt

Liczbą przeciwną do liczby $a = 5^{\frac{2}{3}}$ jest:

Odpowiedź: D ($-5^{\frac{2}{3}}$)

Aby poznać liczbę przeciwną wystarczy dopisać z przodu minusa, zatem liczbą przeciwną w tym przypadku będzie $-5^{\frac{2}{3}}$.

Zadanie 12

0-1 pkt

Wzór funkcji, której wykres powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o 10 jednostek w dół, to:

Odpowiedź: D ($y = f(x) - 10$)

Jeżeli wykres funkcji $f(x)$ przesuwamy o 10 jednostek w dół, to wzór nowej funkcji możemy zapisać jako $y = f(x) - 10$.

Zadanie 13

0-1 pkt

Rzucono sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo, że wyrzucona liczba oczek jest liczbą pierwszą, wynosi:

Odpowiedź: B ($\frac{3}{6}$)

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Na kostce może выпаść jeden z sześciu wyników, zatem liczba wszystkich kombinacji będzie równa $|\Omega| = 6$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Liczbami pierwszymi są 2, 3, 5. Liczba 1 nie jest liczbą pierwszą! W związku z tym tylko trzy przypadki spełniają warunki zadania, stąd też możemy napisać, że $|A| = 3$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$$

Zadanie 14

0-1 pkt

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$. Wówczas $\cos \alpha$ jest równy:

Odpowiedź: B ($-\frac{5}{13}$)

Krok 1. Rozpisanie tangensa jako ilorazu sinusa i cosinusa.

Z trygonometrii wiemy, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Korzystając z tej własności możemy zapisać, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}, \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12}{5}$$

Mnożąc to na krzyż otrzymamy:

$$5 \sin \alpha = 12 \cos \alpha$$

Krok 2. Obliczenie wartości cosinusa.

Z jedynki trygonometrycznej wiemy, że $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Z poprzedniego kroku wyszło nam, że $5 \sin \alpha = 12 \cos \alpha$, czyli że $\sin \alpha = \frac{12}{5} \cos \alpha$. W związku z tym:

$$\left(\frac{12}{5} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{144}{25} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{169}{25} \cos^2 \alpha = 1 \quad \left/ \cdot \frac{25}{169} \right., \quad \cos^2 \alpha = \frac{25}{169}, \quad \cos \alpha = \frac{5}{13} \quad \vee \quad \cos \alpha = -\frac{5}{13}$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy, bo kąt α jest ostry, a dla kątów ostrych cosinus przyjmuje wartości dodatnie, zatem zostaje nam $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

Zadanie 15

0-1 pkt

Wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ po rozłożeniu na czynniki ma postać wyrażenia:

Odpowiedź: C $((x+2)(x-2)^2)$

Powyższy wielomian możemy rozpisać w następujący sposób:

$$W(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8, \quad W(x) = x^2(x-2) - 4(x-2), \quad W(x) = (x^2-4)(x-2), \quad W(x) = (x+2)(x-2)(x-2), \quad W(x) = (x+2)(x-2)^2$$

Zadanie 16

0-1 pkt

Zbiór $(-\infty, -8) \cup (-4, +\infty)$ jest rozwiązaniem nierówności:



Odpowiedź: D $(|x+6| \geq 2)$

Teoretycznie możemy oddzielnie rozwiązać każdą z podanych nierówności i sprawdzić kiedy dany zbiór jest rozwiązaniem tej nierówności. Możemy też do tego zadania podejść nieco bardziej matematycznie:

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zaznaczmy sobie na rysunku sumę przedziałów z treści zadania:



Dodatkowo na rysunku zaznaczono punkt, który leży dokładnie między liczbami -8 oraz -4 , bo będzie nam on potrzebny do dalszych obliczeń.

Krok 2. Ustalenie wzoru nierówności.

Po lewej stronie nierówności będziemy mieć zawsze postać $|x-a|$, gdzie a jest liczbą, która leży dokładnie po środku między końcami przedziałów (w naszym przypadku $a = -6$). W związku z tym po lewej stronie nierówności będziemy mieć postać $|x - (-6)|$, czyli $|x+6|$.

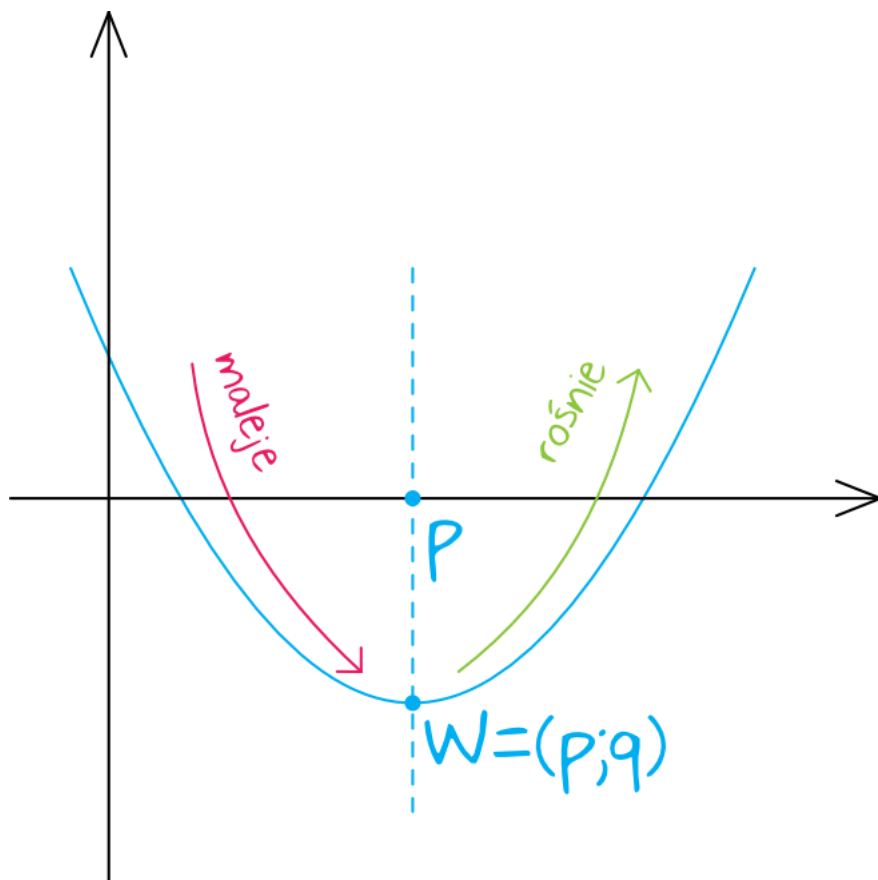
Musimy jeszcze ustalić znak nierówności i liczbę po prawej stronie. Widzimy, że nasze punkty końcowe przedziałów są oddalone od środka o 2 jednostki w lewo lub prawo. Nas interesują wszystkie wartości które są oddalone o 2 lub więcej jednostki, zatem ostatecznym rozwiązaniem będzie

$$|x+6| \geq 2.$$

Zadanie 17

0-1 pkt

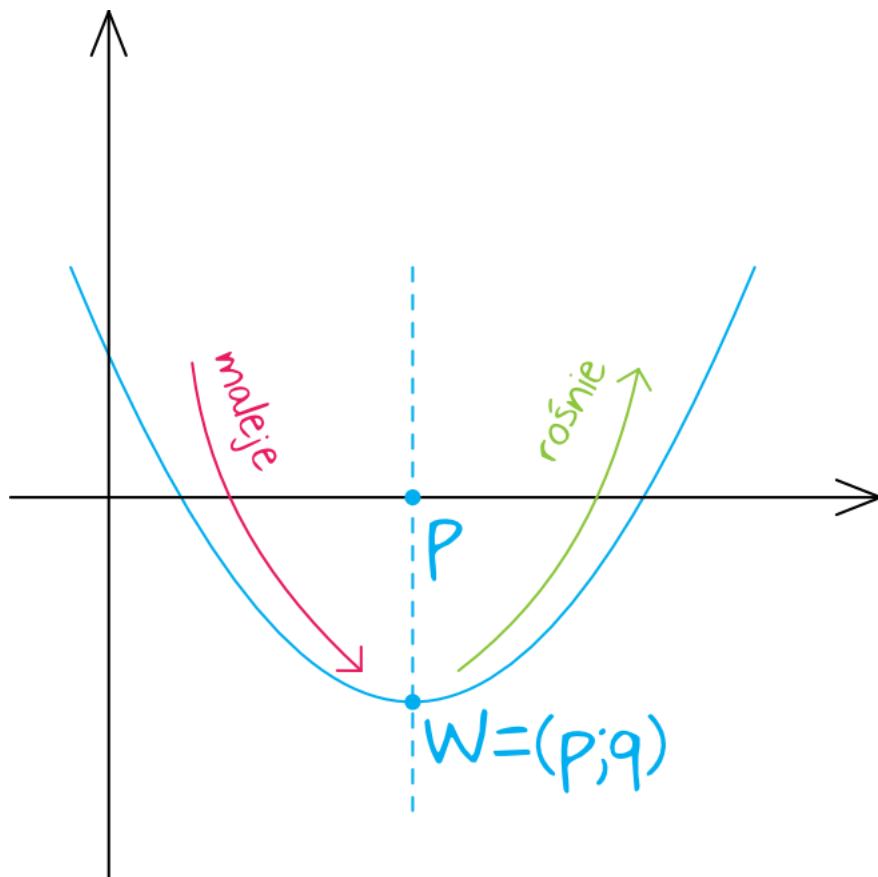
Funkcja $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ jest malejąca w przedziale:



Odpowiedź: C $((-\infty, 1))$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy naszkicować całą sytuację. Na pewno wykres tej funkcji będzie parabolą i to taką, która ma ramiona skierowane do góry (bo współczynnik kierunkowy jest dodatni). Całość będzie wyglądać mniej więcej w ten sposób:



Z rysunku wynika dość wyraźnie, że nasza funkcja będzie malała od minus nieskończoności aż do naszego wierzchołka. To właśnie w wierzchołku się potem odbije i zacznie rosnąć do plus nieskończoności. Wniosek z tego taki, że musimy obliczyć współrzędną xową naszego wierzchołka (potocznie zapisywaną jako p).

Krok 2. Obliczenie współrzędnej xowej wierzchołka.

Współrzędną xową obliczymy ze wzoru:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

W naszym przypadku współczynniki wynoszą odpowiednio: $a = 2$, $b = -4$, $c = 5$, zatem:

$$p = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2}, p = \frac{4}{4}, p = 1$$

Krok 3. Zapisanie przedziału.

Wiemy już, że współrzędna xowa wierzchołka jest równa $p = 1$, zatem funkcja ta maleje w przedziale $x \in (-\infty, 1)$.

Zadanie 18

0-1 pkt

Proste l i k są prostopadłe i $l: 2x - 9y + 6 = 0$, $k: y = ax + b$. Wówczas:

Odpowiedź: C ($a = -\frac{9}{2}$)

Aby dwie proste były prostopadłe względem siebie to iloczyn ich współczynników kierunkowych musi być równy -1 . Musimy więc najpierw poznać współczynnik kierunkowy prostej l , a żeby tego dokonać to musimy równanie tej prostej zapisać w postaci kierunkowej.

Krok 1. Zapisanie równania prostej l w postaci kierunkowej.

Chcemy zapisać nasze równanie w postaci typu $y = ax + b$, zatem musimy przenieść igrekę na lewą stronę, a na prawą dać całą resztę:

$$2x - 9y + 6 = 0, \quad -9y = -2x - 6 \quad \bigg/ : (-1), \quad 9y = 2x + 6 \quad \bigg/ : 9, \quad y = \frac{2}{9}x + \frac{6}{9}$$

Dzięki tej postaci wiemy już, że współczynnik kierunkowy prostej l wynosi $a = \frac{2}{9}$.

Krok 2. Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej k .

Skoro iloczyn współczynników kierunkowych musi być równy -1 , to druga prosta ma ten współczynnik równy:

$$a \cdot \frac{2}{9} = -1 \quad \bigg/ : \frac{2}{9}, \quad a = -\frac{9}{2}$$

Zadanie 19

0-1 pkt

Iloraz ciągu geometrycznego o wyrazie ogólnym $a_n = 2 \cdot 7^n$ jest równy:

Odpowiedź: B ($q = 7$)

Iloraz ciągu geometrycznego możemy odczytać wprost ze wzoru - to będzie ta liczba, która jest podnoszona do potęgi, czyli w naszym przypadku $q = 7$. Gdybyśmy o tym nie pamiętali, to wystarczy wyliczyć wartość dwóch wyrazów i z nich wyznaczyć wartość ilorazu q :

$$a_1 = 2 \cdot 7^1 = 2 \cdot 7 = 14, \quad a_2 = 2 \cdot 7^2 = 2 \cdot 49 = 98$$

Wtedy:

$$q = \frac{a_2}{a_1}, \quad q = \frac{98}{14}, \quad q = 7$$

Zadanie 20

0-1 pkt

Równanie $(x + 6)^2 + y^2 = 4$ opisuje okrąg o środku w punkcie S i promieniu r . Wówczas:

Odpowiedź: D ($S = (-6, 0)$, $r = 2$)

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a; b)$ oraz promieniu r przyjmuje postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Musimy więc przekształcić nasze równanie z treści zadania do takiej właśnie postaci jak powyżej (czyli z odejmowaniem w nawiasach po lewej stronie równania oraz kwadratem liczby po prawej stronie). Dzięki temu błyskawicznie odczytamy współrzędne środka okręgu oraz długość jego promienia. Zrobimy to w następujący sposób:

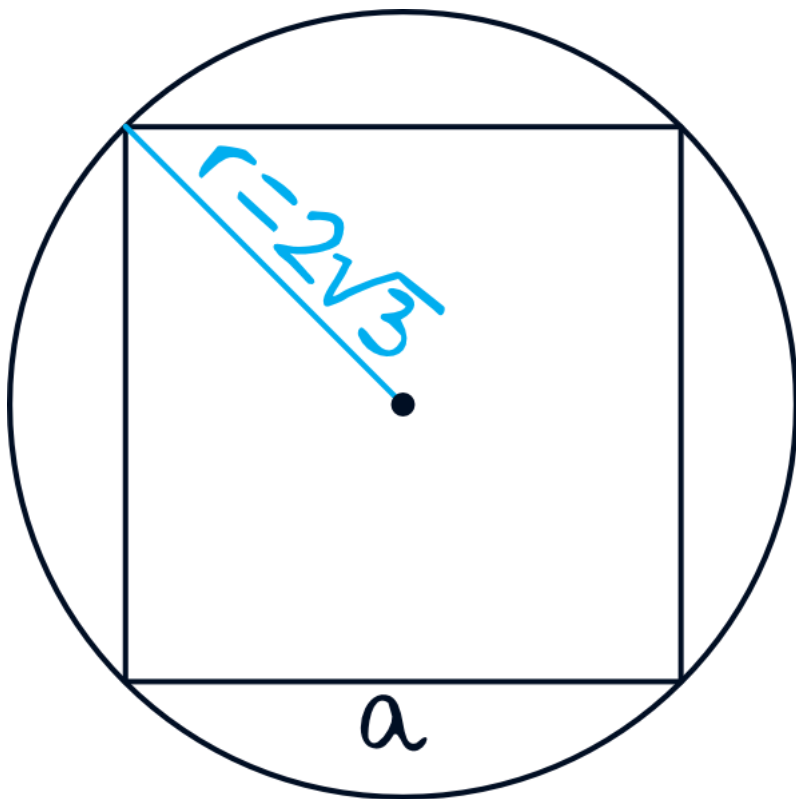
$$(x + 6)^2 + y^2 = 4, \quad (x - (-6))^2 + (y - 0)^2 = 2^2$$

Teraz możemy zapisać, że współrzędne środka okręgu wynoszą $S = (-6; 0)$, natomiast promień okręgu jest równy $r = 2$.

Zadanie 21

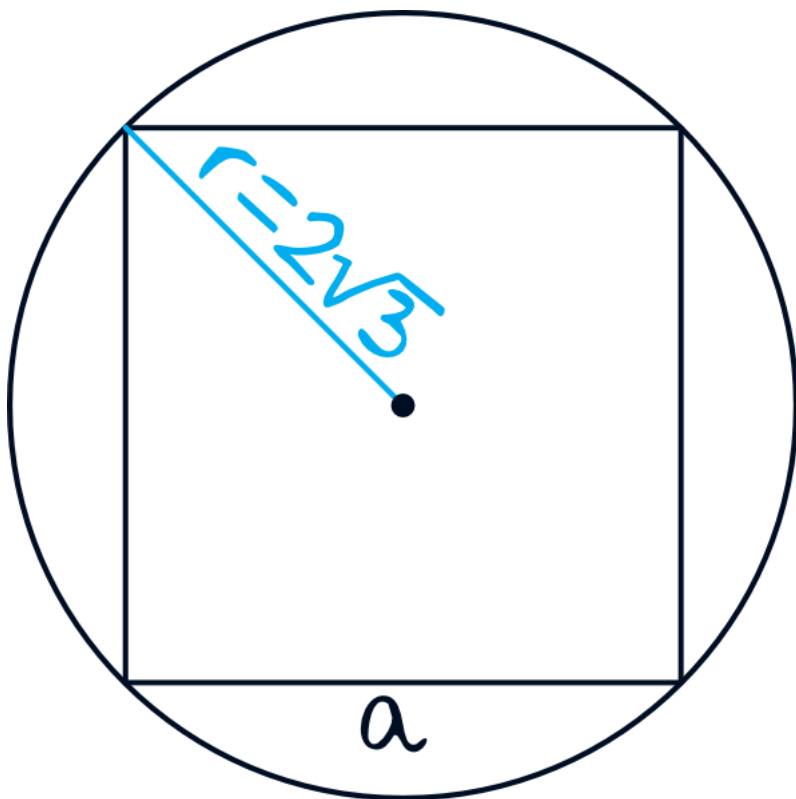
0-1 pkt

Długość promienia r okręgu opisanego na kwadracie jest równa $2\sqrt{3}$. Długość boku tego kwadratu ma wartość:



Odpowiedź: B ($2\sqrt{6}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.



Z rysunku wynika, że długość promienia jest jednocześnie połową długości przekątnej kwadratu. Ta obserwacja pozwoli nam obliczyć długość boku.

Krok 2. Obliczenie długości boku kwadratu.

Skoro połowa przekątnej kwadratu jest równa $2\sqrt{3}$, to cała przekątna ma długość:

$$d = 2 \cdot 2\sqrt{3}, d = 4\sqrt{3}$$

Z własności kwadratów wiemy, że kwadrat o boku długości a ma przekątną długości $a\sqrt{2}$. Nasza przekątna ma długość $4\sqrt{3}$, zatem:

$$a\sqrt{2} = 4\sqrt{3} \quad / : \sqrt{2}, \quad a = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad a = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}, \quad a = \frac{4\sqrt{6}}{2}, \quad a = 2\sqrt{6}$$

Zadanie 22

0-1 pkt

W turnieju szachowym, rozgrywanym systemem każdy z każdym, bez rewanżu, miało brać udział 8 zawodników. Jeden z nich zrezygnował. Liczba zaplanowanych rozgrywek zmniejszyła się o:

Odpowiedź: C (7)

Krok 1. Obliczenie liczby partii gdy jest 8 zawodników.

Zgodnie z regułą mnożenia moglibyśmy zapisać, że liczba kombinacji partii które możemy stworzyć z ośmiu zawodników jest równa $8 \cdot 7 = 56$. Jednak musimy wziąć pod uwagę, że w tym konkretnym przypadku para np. (3; 5) jest dokładnie tym samym co (5; 3), bo w jednym i drugim przypadku gra zawodnik z numerem 3 przeciwko zawodnikowi z numerem 5. Z tego też względu otrzymany wynik musimy podzielić na dwa, dlatego przy ośmiu zawodnikach rozegramy $56 : 2 = 28$ partii.

Krok 2. Obliczenie liczby partii gdy jest 7 zawodników.

Analogicznie do kroku pierwszego - gdy jest siedmiu zawodników, to zgodnie z regułą mnożenia jesteśmy w stanie stworzyć $7 \cdot 6 = 42$ kombinacje partii. I tak jak przed chwilą, dokładnie z tego samego powodu otrzymany wynik musimy podzielić przez 2, zatem przy siedmiu zawodnikach rozegramy $42 : 2 = 21$ partii.

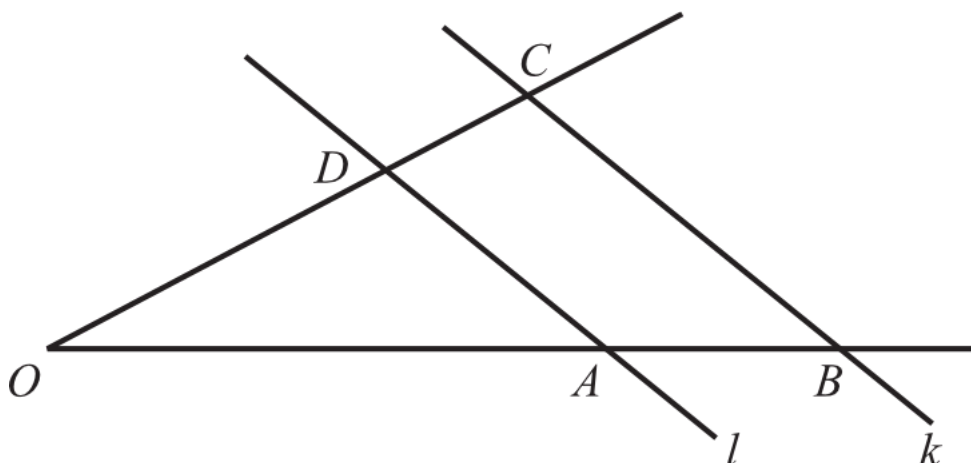
Krok 3. Obliczenie o ile zmniejszy się liczba partii.

Skoro przy ośmiu zawodnikach rozegramy 28 partii, a przy siedmiu tylko 21, to różnica ta wynosi $28 - 21 = 7$.

Zadanie 23

0-1 pkt

Proste l i k są równoległe oraz $|OA| = 6$, $|AB| = 10$, $|OC| = 48$. Odcinek OD ma długość:



Odpowiedź: B (18)

Należy zauważyć, że trójkąty OAD oraz COB są trójkątami podobnymi, zatem możemy ułożyć następującą proporcję związaną z długościami ich boków:

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OD|}{|OC|}$$

Biorąc pod uwagę fakt, iż odcinek $|OB| = |OA| + |AB| = 6 + 10 = 16$ to mamy tak naprawdę komplet informacji do tego zadania. W związku z tym możemy przejść do podstawiania długości poszczególnych boków:

$$\frac{6}{16} = \frac{|OD|}{48}$$

Mnożąc na krzyż otrzymamy:

$$16 \cdot |OD| = 288, \quad |OD| = 18$$

Zadanie 24

0-2 pkt

W ciągu arytmetycznym (a_n) drugi wyraz jest równy 7, a szósty 17. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

Odpowiedź: $\{a_1=4, r=\frac{1}{2}\}$

Krok 1. Utworzenie układu równań.

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego $a_n = a_1 + (n - 1)r$ możemy zapisać, że:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_6 = a_1 + 5r \end{cases},$$

$$\begin{cases} 7 = a_1 + r \\ 17 = a_1 + 5r \end{cases},$$

Krok 2. Wyznaczenie różnicy ciągu arytmetycznego.

Musimy rozwiązać nasz układ równań. Możemy to zrobić metodą podstawiania (wyznaczając a_1 z jednego równania i podstawiając to do drugiego równania), albo też możemy po prostu odjąć te równania stronami otrzymując:

$$-10 = -4r, \quad r = 2\frac{1}{2}$$

Krok 3. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu.

Znając różnicę ciągu możemy teraz skorzystać z jednego z równań znajdujących się w układzie i możemy wyliczyć tym samym wartość pierwszego wyrazu:

$$a_2 = a_1 + r, \quad 7 = a_1 + 2\frac{1}{2}, \quad a_1 = 4\frac{1}{2}$$

Zadanie 25

0-2 pkt

Średni wzrost sportowców w drużynie siatkarskiej, liczącej 6 chłopców, wynosił 174 cm. Po przyjęciu do zespołu dwóch braci o tej samej wysokości średnia wzrostu zwiększyła się o 0,5 cm. Oblicz, jak wysocy są bracia.

Odpowiedź: 176cm

Krok 1. Obliczenie sumy wzrostu drużyny przed przyjęciem braci.

Skoro było 6 chłopców, a każdy z nich miał średnio 174cm, to łącznie wszyscy mieli:

$$6 \cdot 174cm = 1044cm$$

Krok 2. Obliczenie sumy wzrostu drużyny po przyjęciu braci.

Po przyjęciu braci drużyna liczy 8 osób i jej średnia wzrostu wynosi 174,5cm. W związku z tym wszyscy łącznie mają:

$$8 \cdot 174,5cm = 1396cm$$

Krok 3. Obliczenie wzrostu braci.

Razem bracia mają:

$$1396cm - 1044cm = 352cm$$

Skoro bracia są tego samego wzrostu, to każdy z nich ma:

$$352cm : 2 = 176cm$$

Zadanie 26

0-2 pkt

Rozwiąż równanie $2x^3 + 8x^2 - 3x - 12 = 0$ **Odpowiedź:** $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Krok 1. Wyłączenie odpowiednich czynników przed nawias i zapisanie równania w postaci iloczynowej.

W tego typu zadaniach musimy wyłączyć wspólne części przed nawias. Wspólną częścią pierwszego i drugiego wyrazu jest $2x^2$, a z trzeciego i czwartego wyrazu możemy wyłączyć liczbę -3 . To oznacza, że:

$$2x^3 + 8x^2 - 3x - 12 = 0, \quad 2x^2(x+4) - 3(x+4) = 0, \quad (2x^2 - 3)(x+4) = 0$$

Krok 2. Wyznaczenie rozwiązań z postaci iloczynowej.

Korzystając z postaci iloczynowej możemy teraz przyrównać wartości w nawiasach do zera, wyznaczając w ten sposób rozwiązania naszej równości.

$$2x^2 - 3 = 0 \quad \vee \quad x + 4 = 0$$

Pierwsze równanie jest równaniem kwadratowym, które możemy obliczyć tradycyjnie deltą, ale możemy też to rozpisać w następujący sposób:

$$2x^2 - 3 = 0, \quad 2x^2 = 3, \quad x^2 = \frac{3}{2}, \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Z drugiego równania otrzymamy:

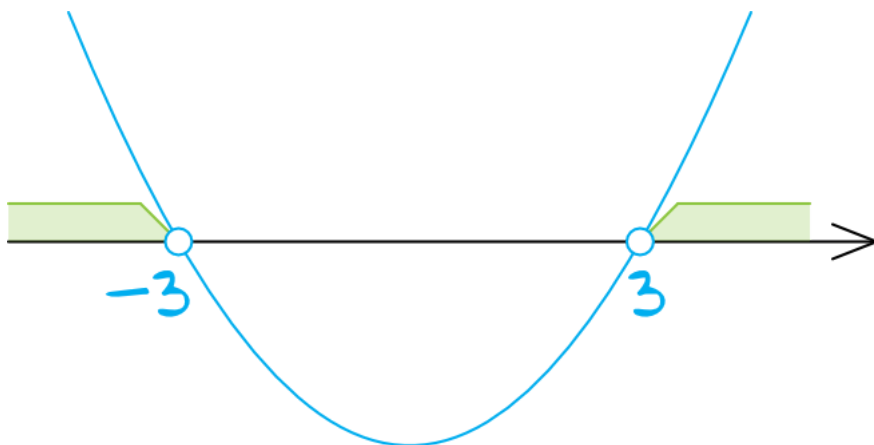
$$x + 4 = 0, \quad x = -4$$

To oznacza, że nasze równanie z treści zadania ma łącznie trzy rozwiązania:

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad x = -4$$

Zadanie 27

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $x^2 - 9 > 0$.**Odpowiedź:** $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

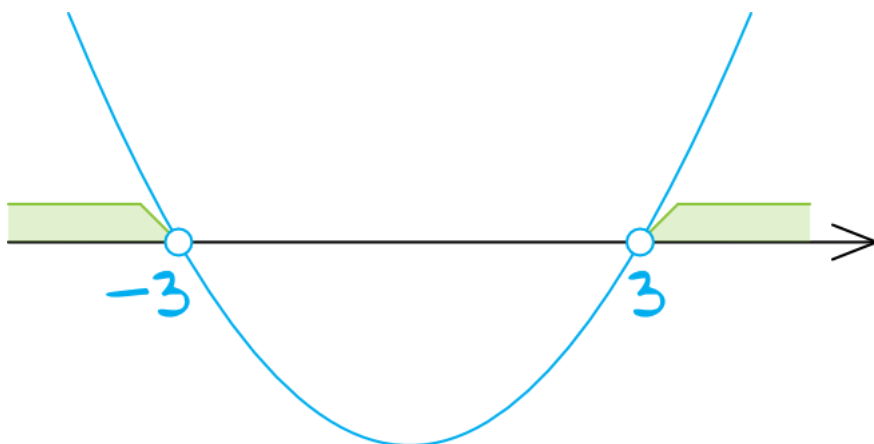
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Aby rozwiązać nierówność musimy najpierw sprawdzić jakie ma miejsca zerowe, czyli musimy sprawdzić dla jakich argumentów $x^2 - 9 = 0$. Możemy to zrobić tradycyjnie (tak jak to zazwyczaj bywa) metodą delty, ale akurat w tym przypadku jesteśmy w stanie to powstałe równanie kwadratowe obliczyć w pamięci, bo:

$$x^2 - 9 = 0, \quad x^2 = 9, \quad x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Zaznaczamy na osi obliczone miejsca zerowe i rysujemy przechodzącą przez te punkty parabolę z ramionami skierowanymi do góry (bo przed x^2 nie stoi żadna ujemna wartość):



Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas argumenty, dla których nierówność przyjmuje wartości większe od zera. W związku z tym rozwiązaniem tej nierówności jest suma przedziałów:

$$x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$$

Zadanie 28

0-2 pkt

Dana jest liczba $a = \sqrt{(2 - 2\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5}$. Wykaż, że liczba a jest całkowita.

Odpowiedź: Udowodniono upraszcz

Krok 1. Obliczenie wartości pierwiastka.

Zadanie jest dość podchwytliwe, a kluczem do sukcesu jest poprawne pozbycie się pierwiastka. Zastanówmy się jaka wartość wyjdzie nam z pierwiastkowania liczby $\sqrt{(2 - 2\sqrt{5})^2}$. Czy będzie to po prostu $2 - 2\sqrt{5}$? Gdyby tak było, to mielibyśmy sytuację w której z pierwiastka kwadratowego wyjdzie nam wynik ujemny (bo $2 - 2\sqrt{5}$ jest ujemne), a to jest przecież sprzeczne z definicją pierwiastka. Czy to oznacza, że zadanie ma błąd? Wszystko jest w porządku, ponieważ wartość $2 - 2\sqrt{5}$ jest faktycznie ujemna, jednak podniesiona do kwadratu daje już liczbę dodatnią, no a pierwiastkowanie liczby dodatniej daje liczbę dodatnią.

Musimy po prostu pamiętać, że $\sqrt{x^2} = |x|$. Teraz sprawa jest już jasna i to oznacza, że $\sqrt{(2 - 2\sqrt{5})^2} = |2 - 2\sqrt{5}|$.

Krok 2. Pozbycie się wartości bezwzględnej.

To jednak nie koniec zadania. Aby wykonać dalsze odejmowanie, które znajduje się na końcu przykładu musimy pozbyć się wartości bezwzględnej. Ustaliliśmy już, że $2 - 2\sqrt{5}$ jest liczbą ujemną. Jeżeli mamy przykładowo obliczyć wartość bezwzględną z liczby ujemnej, np. $|-5|$ to opuszczając wartość bezwzględną zmieniamy znak i dlatego np. $|-5| = 5$. W naszym przypadku to oznacza, że:

$$|2 - 2\sqrt{5}| = -(2 - 2\sqrt{5}) = -2 + 2\sqrt{5}$$

Krok 3. Obliczenie wartości wyrażenia i zakończenie dowodzenia.

Wiemy już, że z pierwiastka wyjdzie nam wynik $-2 + 2\sqrt{5}$ i od tej liczby zgodnie z wyrażeniem musimy jeszcze odjąć $2\sqrt{5}$, otrzymując:

$$a = -2 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}, a = -2$$

-2 jest liczbą całkowitą, zatem dowodzenie możemy uznać za zakończone.

Zadanie 29

0-2 pkt

Długość krawędzi sześcianu zwiększono o 20%. Oblicz, o ile procent wzrosła objętość tego sześcianu.

Odpowiedź: 72, 8%

a - długość krawędzi sześcianu przed powiększeniem

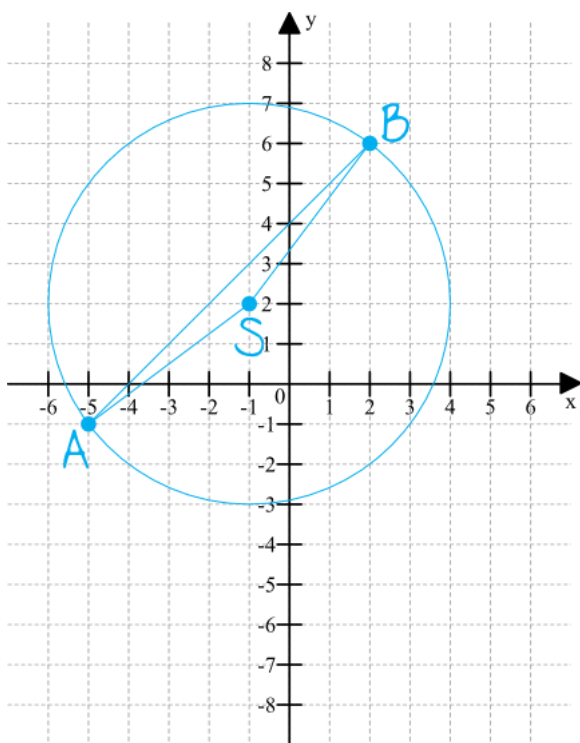
$1, 2a$ - długość krawędzi sześcianu po powiększeniu

$V = a^3$ - objętość sześcianu przed powiększeniem

$V = 1, 2a \cdot 1, 2a \cdot 1, 2a = 1, 728a^3$ - objętość sześcianu po powiększeniu

Skoro przed powiększeniem sześcian miał objętość a^3 (czyli $1a^3$), a po powiększeniu ma objętość równą $1, 728a^3$ to objętość wzrosła o 72, 8%.

Prosta $y = x + 4$ przecina okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ w punktach A i B . Oblicz współrzędne punktów A i B , a następnie oblicz obwód trójkąta ABS , gdzie S jest środkiem danego okręgu.



Odpowiedź: $A = (-5, -1)$, $B = (2, 6)$

Krok 1. Ułożenie i rozwiązanie układu równań.

Ze wzoru prostej oraz równania okręgu możemy ułożyć następujący układ równań:

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25 \end{cases}$$

Podstawiając pierwsze równanie do drugiego otrzymamy:

$$(x + 1)^2 + (x + 4 - 2)^2 = 25, (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 25, x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 25, 2x^2 + 6x - 20 = 0 \quad | :2, x^2 + 3x - 10 = 0$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Współczynniki: $a = 1$, $b = 3$, $c = -10$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 - (-40) = 9 + 40 = 49, \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 7}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 7}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Krok 3. Zapisanie współrzędnych przecięcia się prostej z okręgiem.

Otrzymaliśmy dwie współrzędne x-owe, bo i nasza prosta (zgodnie z treścią zadania) przecina okrąg w dwóch miejscach. To oznacza, że pierwsza współrzędna x-owa należy do punktu A , natomiast druga współrzędna x-owa należy do punktu B . Musimy jeszcze obliczyć współrzędne y-owe, a zrobimy to podstawiając współrzędne x-owe do równania prostej $y = x + 4$:

Dla $x = -5$:

$$y = -5 + 4$$

$$y = -1$$

Dla $x = 2$:

$$y = 2 + 4 = 6$$

To nam daje następujące współrzędne:

$$A = (-5; -1), B = (2; 6)$$

Krok 4. Obliczenie długości promienia.

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a; b)$ oraz promieniu r przyjmuje postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

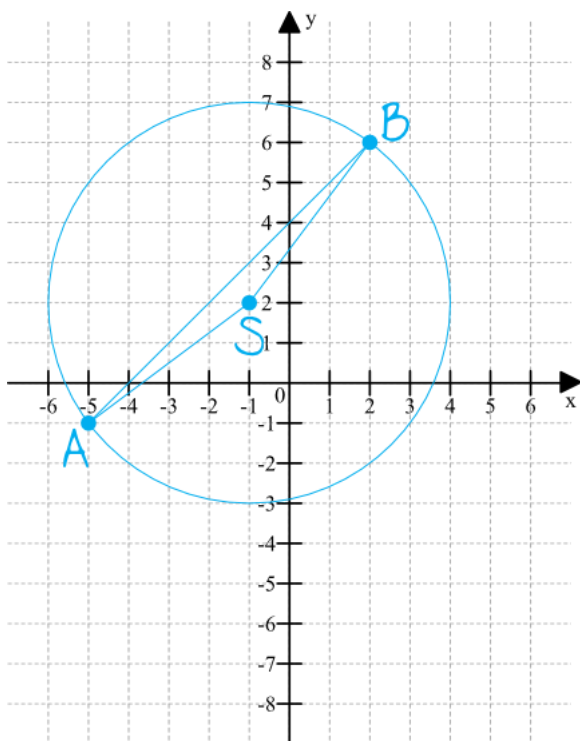
Teraz do tej postaci możemy przyrównać równanie z treści zadania. W naszym równaniu z treści zadania po prawej stronie znalazła się wartość 25, zatem jest to nasze r^2 . Możemy więc zapisać, że:

$$r^2 = 25, r = 5 \quad \vee \quad r = -5$$

Ujemne rozwiązanie oczywiście odrzucamy, bo promień nie może być ujemny.

Krok 5. Sporządzenie rysunku pomocniczego i zapisanie długości boków AS oraz BS .

Z równania okręgu możemy wprost odczytać, że współrzędne środka okręgu to $S = (-1; 2)$. Ta informacja w połączeniu z obliczeniami z kroków poprzednich, czyli długość promienia $r = 5$ oraz współrzędne punktów $A = (-5; -1)$, $B = (2; 6)$ pozwoli nam stworzyć następujący rysunek pomocniczy:



Z rysunku dość jasno wynika, że odcinki o długości AS oraz BS są równe długości promienia, zatem możemy zapisać, że:

$$|AS| = 5, |BS| = 5$$

Krok 6. Obliczenie długości odcinka AB .

Skorzystamy ze wzoru na długość odcinka w układzie współrzędnych, ponieważ znamy współrzędne punktów A oraz B .

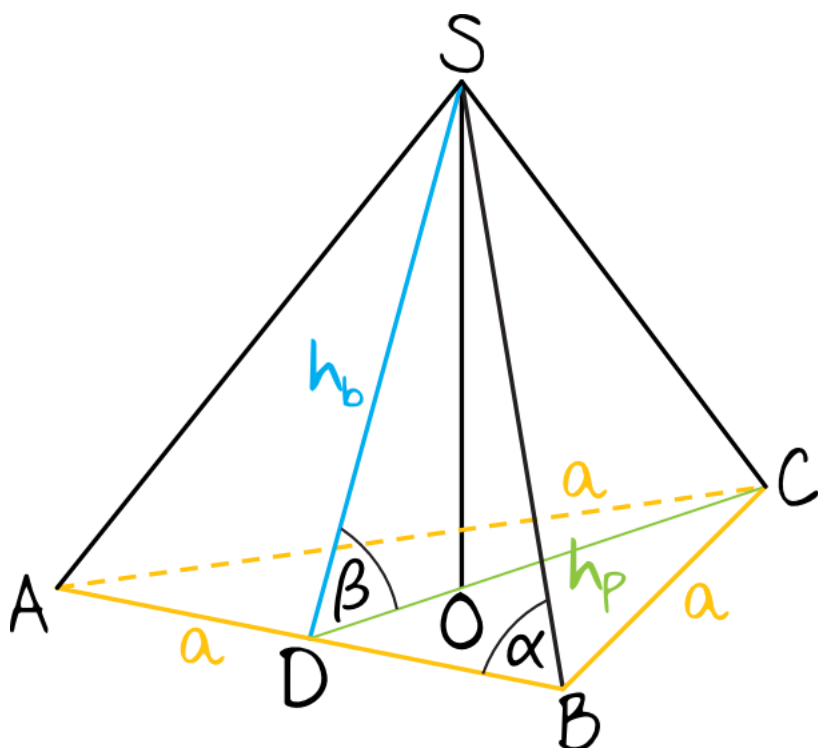
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, |AB| = \sqrt{(2 - (-5))^2 + (6 - (-1))^2}, |AB| = \sqrt{7^2 + 7^2}, |AB| = \sqrt{49 + 49}, |AB| = \sqrt{49 \cdot 2}, |AB| = 7\sqrt{2}$$

Krok 7. Obliczenie długości obwodu.

Mamy już wszystkie niezbędne informacje, zatem możemy bez problemu obliczyć długość obwodu:

$$Obw = 5 + 5 + 7\sqrt{2} = 10 + 7\sqrt{2}$$

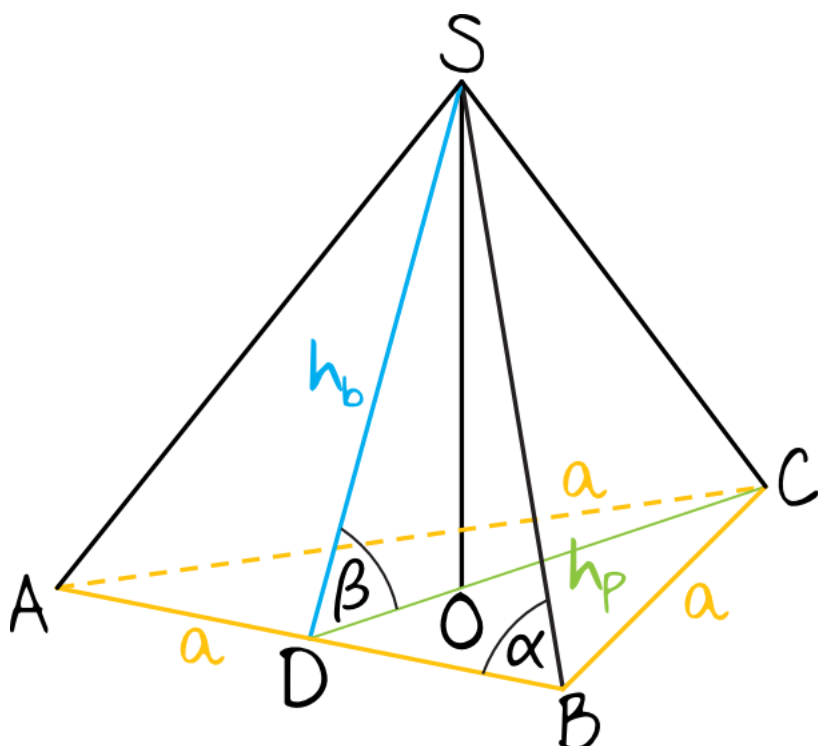
Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 24, a kąt płaski ściany bocznej przy podstawie ma miarę α i $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



Odpowiedź: $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Na początku stwórzmy prosty rysunek pomocniczy, na którym zaznaczymy przede wszystkim kąt α (co stanowi w sumie jedną z większych pułapek tego zadania, bo zazwyczaj zaznaczamy inne kąty w ostrosłupie niż kąt płaski ściany bocznej) oraz kąt β , który jest kątem nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy:



Krok 2. Rozpisanie tangensa.

Spójrzmy na trójkąt prostokątny DBS , który utworzył nam się na rysunku pomocniczym. Wiemy, że tangens to stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie. W naszym przypadku otrzymamy więc następujące równanie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_b}{\frac{1}{2}a}, \quad 2 = \frac{h_b}{\frac{1}{2}a} \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{2}a, \quad a = h_b$$

Z naszych obliczeń wynika więc, że wysokość ściany bocznej jest równa długości krawędzi podstawy.

Krok 3. Obliczenie długości krawędzi podstawy.

Skorzystamy teraz z informacji, która mówi że pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 24. W naszym ostrosłupie mamy 3 identyczne ściany boczne, zatem pole powierzchni każdej z nich jest równe:

$$P_b = 24 : 3 = 8$$

W ścianie bocznej znajduje się trójkąt o podstawie a oraz wysokości h_b , która jak już ustaliliśmy jest równa długości a , zatem:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot h_b, \quad 8 = \frac{1}{2}a \cdot a, \quad 16 = a^2, \quad a = 4 \quad \vee \quad a = -4$$

Wartość ujemną oczywiście odrzucamy, bo długość nie może być ujemna. W związku z tym $a = 4$ i tym samym $h_b = 4$.

Krok 4. Obliczenie wysokości trójkąta znajdującego się w podstawie oraz obliczenie długości odcinka AO .

Spójrzmy teraz na trójkąt prostokątny AOS z zaznaczonym kątem β . To właśnie cosinus tego kąta musimy wyznaczyć, a do tego niezbędna będzie znajomość odcinka AO . Czym jest ten odcinek AO ? Jest to długość $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego znajdującego się w podstawie (wynika to z własności trójkątów równobocznych). Musimy więc obliczyć wysokość trójkąta równobocznego, korzystając z następującego wzoru:

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad h_p = \frac{4\sqrt{3}}{2}, \quad h_p = 2\sqrt{3}$$

Odcinek AO jest zatem równy:

$$|AO| = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Krok 5. Obliczenie wartości cosinusa.

Mamy już komplet informacji do obliczenia cosinusa, bowiem cosinus opisuje zależność między przyprostokątną leżącą przy kącie (u nas jest to $|AO| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, a przeciwprostokątną (u nas jest to $h_b = 4$). W związku z tym:

$$\cos\beta = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{4}, \quad \cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{4}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Turysta pokonał pieszo trasę długości 30 km z miejscowości A do miejscowości B ze stałą prędkością. Rowerem poruszałby się z prędkością o $9\frac{\text{km}}{\text{h}}$ większą i przybyłby do celu o 3 godziny wcześniej. Wyznacz prędkość marszu turysty i czas przejścia tej drogi.

Odpowiedź: $\backslash(v=6\frac{\text{km}}{\text{h}})\{h}\backslash$

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do zadania.

$s = 30$ - pokonana trasa (w km)

v_1 - prędkość marszu (w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$)

$v_2 = v_1 + 9$ - prędkość jazdy rowerem (w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$)

t_1 - czas marszu (w godzinach)

$t_2 = t_1 - 3$ - czas jazdy rowerem (w godzinach)

Krok 2. Utworzenie i rozwiązanie układu równań.

Skorzystamy teraz ze wzoru na drogę $s = vt$ i zapiszemy w formie układu równań, relację dotyczącą prędkości marszu oraz jazdy rowerem:

$$\begin{cases} s = v_1 \cdot t_1 \\ s = v_2 \cdot t_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 30 = v_1 \cdot t_1 \\ 30 = v_2 \cdot t_2 \end{cases},$$

Podstawiając pod drugie równanie dane z kroku pierwszego otrzymamy:

$$\begin{cases} 30 = v_1 \cdot t_1 \\ 30 = (v_1 + 9) \cdot (t_1 - 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{t_1}{180} \\ 180 = (v_1 + 9) \cdot (t_1 - 3) \end{cases}$$

Teraz skorzystamy z metody podstawiania i podstawimy v_1 z pierwszego równania do drugiego:

$$30 = \left(\frac{t_1}{30} + 9\right) \cdot (t_1 - 3)$$

Wymnażając poszczególne nawiasy i upraszczając zapis do postaci ogólnej otrzymamy:

$$30 = 30 - \frac{90}{t_1} + 9t_1 - 27 \quad \bigg/ -30, \quad -\frac{90}{t_1} + 9t_1 - 27 = 0 \quad \bigg/ \cdot t_1, \quad -90 + 9t_1^2 - 27t_1 = 0 \quad \bigg/ :9, \quad -10 + t_1^2 - 3t_1 = 0, \quad t_1^2 - 3t_1 - 10 = 0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Współczynniki: $a = 1$, $b = -3$, $c = -10$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 - (-40) = 9 + 40 = 49, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2, \quad t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Ujemny wynik musimy odrzucić, bowiem czas nie może być ujemny. To oznacza, że $t_1 = 5$.

Krok 4. Obliczenie prędkości marszu.

Znamy długość drogi $s = 30\text{ km}$, wiemy też że czas jazdy wynosi $t = 5\text{ h}$, zatem bez problemu obliczymy prędkość marszu:

$$v = \frac{s}{t}, \quad v = \frac{30\text{ km}}{5\text{ h}}, \quad v = 6\frac{\text{km}}{\text{h}}$$