

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy)

- Operon 2011

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl.
Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	B (5)	1
2	D (1)	1
3	C ($\log 2 + \log 3$)	1
4	B (20)	1
5	A (−1)	1
6	C (−2)	1
7	D ($ x - 1 \leq 1$)	1
8	A ($(-\infty, 4)$)	1
9	C ($m > -2$)	1
10	B ($\langle 1, 6 \rangle$)	1
11	D (1)	1
12	C (−3)	1
13	A ($y = -2x + 1$)	1
14	B (3)	1
15	C (−2, 5)	1
16	B ($\cos \alpha > \sin \alpha$)	1
17	A (4)	1
18	D (1)	1
19	C (2)	1
20	D ($2, 5\sqrt{3}$)	1
21	B (210°)	1
22	C ($4 + \sqrt{2}$)	1
23	D ($3n + 9$)	1
24	B (5)	1
25	D ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0–1 pkt

Największa liczba naturalna n spełniająca nierówność $n < 2\pi - 1$ to:

Odpowiedź: B (5)

Przyjmując przybliżenie $n \approx 3,14$ możemy zapisać, że:

$$n < 2\pi - 1, \quad n < 2 \cdot 3,14 - 1, \quad n < 6,28 - 1, \quad n < 5,28$$

Największą liczbą naturalną spełniającą tę nierówność jest 5.

Zadanie 2

0–1 pkt

Liczba $\frac{\sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}}{(\frac{2}{7})^{-1}}$ jest równa:

Odpowiedź: D (1)

Chcąc rozwiązać to zadanie musimy zamienić liczbę mieszaną $3\frac{3}{8}$ na ułamek niewłaściwy $\frac{27}{8}$, bo z niego bez problemu wyciągniemy pierwiastek trzeciego stopnia. Całość obliczeń wygląda następująco:

$$\frac{\sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}}{(\frac{2}{7})^{-1}} = \frac{\sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{\frac{27}{8}}}{(\frac{2}{7})^{-1}} = , = \frac{2 + \frac{3}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}} = 1$$

Zadanie 3

0–1 pkt

Liczba $\log 6$ jest równa:

Odpowiedź: C ($\log 2 + \log 3$)

Korzystając z działań na logarytmów możemy rozpisać $\log 6$ na sumę logarytmów w następujący sposób:

$$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$$

Zadanie 4

0–1 pkt

20% pewnej liczby jest o 16 mniejsze od tej liczby. Tą liczbą jest:

Odpowiedź: B (20)

x - szukana liczba

$0,2x$ - 20% liczby szukanej

Z treści zadania wiemy, że 20% liczby szukanej jest o 16 mniejsze od tej liczby, czyli otrzymamy równanie:

$$0,2x + 16 = x, \quad 16 = 0,8x, \quad x = 20$$

Zadanie 5

0–1 pkt

Rozwiązaniem równania $-2 = \frac{x-1}{x+2}$ jest liczba:

Odpowiedź: A (-1)

Krok 1. Wprowadzenie założeń do zadania.

W mianowniku nie możemy mieć wartości równej zero, dlatego że w matematyce nie istnieje mnożenie przez zero. W związku z tym musimy zapisać założenie, że:

$$x + 2 \neq 0, \quad x \neq -2$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.

Teraz bez przeszkód możemy przejść do obliczeń, a całość najprościej będzie po prostu wymnożyć przez $x + 2$.

$$-2 = \frac{x-1}{x+2} \quad / \cdot (x+2), \quad -2 \cdot (x+2) = x-1, \quad -2x-4 = x-1, \quad -3x = 3, \quad x = -1$$

Zadanie 6

0-1 pkt

Większa z liczb spełniających równanie $x^2 + 6x + 8 = 0$ to:

Odpowiedź: C (-2)

Rozwiązania równania obliczymy za pomocą delty:

Współczynniki: $a = 1$, $b = 6$, $c = 8$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4, \sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$$

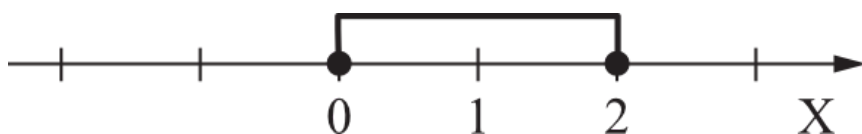
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 2}{2 \cdot 1} = \frac{-8}{2} = -4, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 2}{2 \cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

To równanie ma więc dwa rozwiązania, a większym z nich jest $x = -2$.

Zadanie 7

0-1 pkt

Przedział zaznaczony na osi liczbowej jest zbiorem rozwiązań nierówności:



Odpowiedź: D ($|x - 1| \leq 1$)

Teoretycznie możemy oddzielnie rozwiązać każdą z podanych nierówności, ale da się do tego podejść nieco bardziej matematycznie. Na samym początku musimy wyznaczyć środek pomiędzy wartościami końcowymi tego przedziału (lub też odczytać z rysunku, że jest to $a = 1$):

$$a = \frac{0 + 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Teraz w takich przypadkach po lewej stronie nierówności będziemy mieć zawsze $|x - a|$. W naszym przypadku będzie to $|x - 1|$.

Musimy jeszcze ustalić znak nierówności i liczbę po prawej stronie. Widzimy, że nasze punkty końcowe przedziałów są oddalone od środka tego przedziału o 1 jednostkę w lewo lub prawo, a wszystkie inne wartości znajdujące się w tym przedziale są oddalone o nie więcej niż 1 jednostkę (kropki zamalowane). Stąd też ostatecznym rozwiązaniem będzie:

$$|x + 1| \leq 1$$

Zadanie 8

0-1 pkt

Dziedziną funkcji $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{gdy } x < 1 \\ -x, & \text{gdy } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ jest zbiór:

Odpowiedź: A ($(-\infty, 4)$)

Musimy spojrzeć na zapisy, które znajdują po słowie "gdy". Funkcja ta opisana jest jednym wzorem dla argumentów mniejszych od 1 oraz drugim wzorem dla argumentów od 1 do 4 włącznie. Można więc powiedzieć, że funkcja ta przyjmuje jakąś wartość dla każdego argumentu mniejszego lub równego 4, zatem dziedziną funkcji będzie przedział:

$$x \in (-\infty, 4)$$

Zadanie 9

0-1 pkt

Funkcja liniowa $f(x) = (m + 2)x + 2m$ jest rosnąca, gdy:

Odpowiedź: C ($m > -2$)

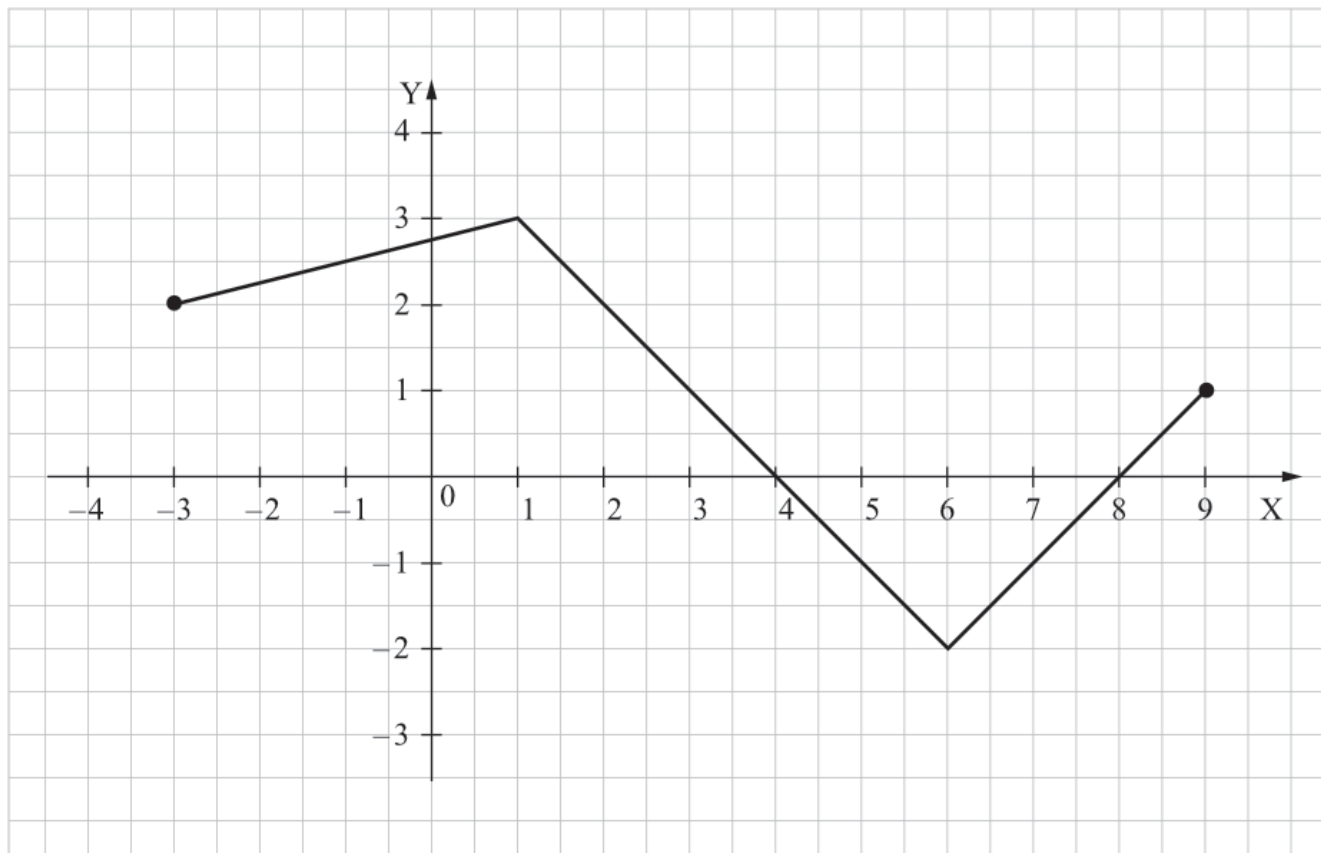
Funkcja liniowa jest rosnąca gdy jej współczynnik kierunkowy a (czyli liczba przed ixem) jest dodatni. W związku z tym funkcja ta będzie rosnąć gdy:

$$m + 2 > 0, m > -2$$

Zadanie 10

0-1 pkt

Rysunek przedstawia wykres funkcji $y = f(x)$.



Funkcja jest malejąca w przedziale:

Odpowiedź: B ($\langle 1, 6 \rangle$)

Szukamy miejsc w których funkcja jest malejąca, czyli miejsc gdzie wykres funkcji skierowany jest do dołu. Przedział ten odczytujemy z osi x i widzimy że funkcja zaczyna maleć od argumentu $x = 1$ aż do argumentu $x = 6$. W związku z tym poszukiwanym przez nas przedziałem jest przedział $x \in \langle 1, 6 \rangle$.

Zadanie 11

0-1 pkt

Punkt $P = (a + 1; 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$. Liczba a jest równa:

Odpowiedź: D (1)

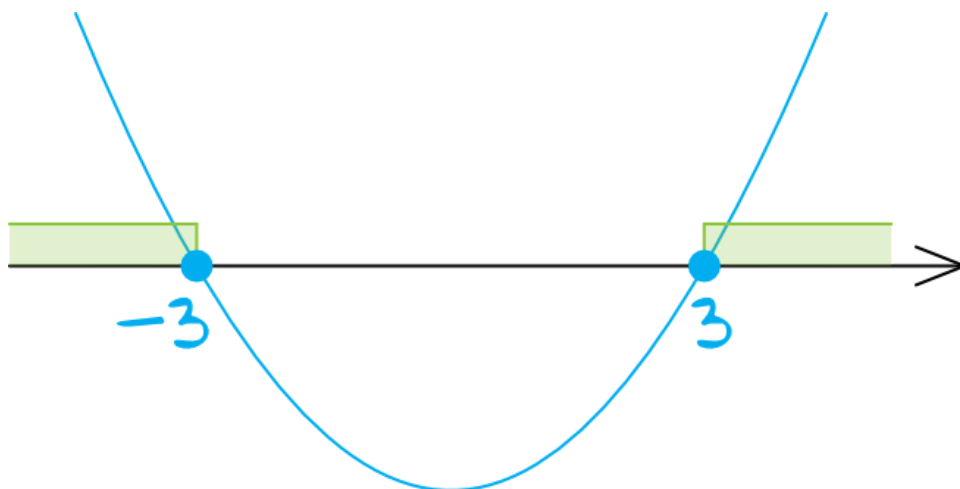
Aby sprawdzić ile jest równe a musimy podstawić do wzoru funkcji współrzędne punktu P , czyli $x = a + 1$ oraz $y = 2$. Otrzymamy wtedy:

$$2 = \frac{4}{a+1} \quad / \cdot (a+1), \quad 2a+2=4, \quad 2a=2, \quad a=1$$

Zadanie 12

0-1 pkt

Do zbioru rozwiązań nierówności $9 \leq x^2$ należy liczba:



Odpowiedź: C (-3)

Teoretycznie moglibyśmy rozwiązać tę nierówność obliczając klasyczną deltę, ale jesteśmy w stanie to zadanie zrobić nieco szybciej stosując wzory skróconego mnożenia. W ostateczności nawet możemy podstawiać kolejne liczby z odpowiedzi i sprawdzić kiedy zajdzie opisywana nierówność.

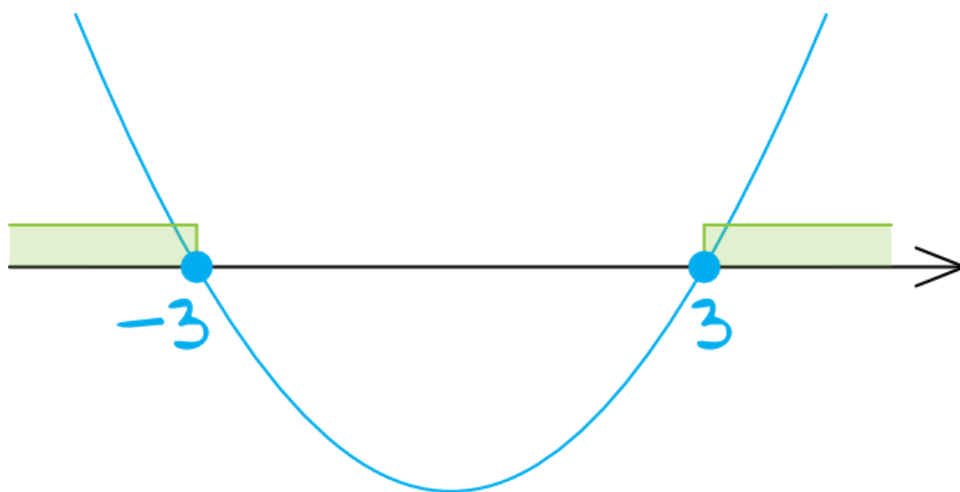
Krok 1. Zapisanie i rozwiązanie nierówności w postaci iloczynowej.

$$x^2 \geq 9, \quad x^2 - 9 \geq 0, \quad (x + 3)(x - 3) \geq 0$$

Z postaci iloczynowej błyskawicznie odczytujemy, że miejscami zerowymi tej nierówności są $x = -3$ oraz $x = 3$.

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Znając miejsca zerowe możemy narysować parabolę z ramionami skierowanymi do góry (bo przed x^2 nie stoi żadna ujemna liczba), pamiętając że przy -3 oraz 3 kropki będą zamalowane.



Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Patrzmy w których miejscach funkcja przyjmuje wartości większe od zera, czyli dla jakich przedziałów wykres znalazł się nad osią. W ten sposób możemy stwierdzić, że $x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Spośród wszystkich odpowiedzi tylko -3 mieści się w naszej sumie przedziałów i to właśnie jest poszukiwana odpowiedź.

Zadanie 13

0-1 pkt

Wybierz i zaznacz równanie opisujące prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Odpowiedź: A ($y = -2x + 1$)

Aby prosta była prostopadła do tej której równanie jest podane w treści zadania, to iloczyn współczynników kierunkowych obydwu tych prostych musi być równy -1 . Nasza prosta ma współczynnik kierunkowy równy $\frac{1}{2}$, zatem prosta do niej prostopadła musi mieć ten współczynnik równy:

$$\frac{1}{2} \cdot a = -1, a = -2$$

Tylko prosta z pierwszej odpowiedzi posiada taki współczynnik kierunkowy, zatem to ona jest poszukiwaną odpowiedzią.

Zadanie 14

0-1 pkt

Liczby x , 4 , $x + 2$ są w podanej kolejności drugim, trzecim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Wówczas liczba x jest równa:

Odpowiedź: B (3)

Z własności ciągów arytmetycznych wiemy, że dla trzech kolejnych (niekoniecznie trzech pierwszych) następujących po sobie wyrazów zachodzi następująca równość:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Podstawiając dane z treści zadania otrzymamy:

$$4 = \frac{x + x + 2}{2}, 4 = \frac{2x + 2}{2}, 8 = 2x + 2, 2x = 6, x = 3$$

Zadanie 15

0-1 pkt

W ciągu geometrycznym (a_n) są dane: $a_2 = -1$, $q = -2$. Suma czterech kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

Odpowiedź: C $(-2, 5)$

Krok 1. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu.

Znając wartość drugiego wyrazu oraz iloraz ciągu możemy obliczyć wartość pierwszego wyrazu.

$$a_2 = a_1 \cdot q, -1 = a_1 \cdot (-2), a_1 = \frac{1}{2}$$

Krok 2. Obliczenie sumy dziesięciu pierwszych wyrazów.

Teoretycznie możemy w podobny sposób obliczyć jeszcze wartości trzeciego i czwartego wyrazu, wtedy bez problemu obliczymy sumę czterech wyrazów, ale możemy też skorzystać z następującego wzoru na sumę n początkowych wyrazów:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, S_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-2)^4}{1 - (-2)}, S_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 16}{3}, S_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{-15}{3}, S_4 = \frac{1}{2} \cdot (-5), S_4 = -2,5$$

Zadanie 16

0-1 pkt

Kąt α jest ostry oraz $\sin \alpha = \frac{2}{5}$. Wówczas:

Odpowiedź: B ($\cos \alpha > \sin \alpha$)

Krok 1. Obliczenie wartości $\cos \alpha$.

Z jedynki trygonometrycznej wiemy, że $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ w związku z tym podstawiając wartość sinusa otrzymamy:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \frac{4}{25} + \cos^2 \alpha = 1, \cos^2 \alpha = \frac{21}{25}, \cos \alpha = \sqrt{\frac{21}{25}} \vee \cos \alpha = -\sqrt{\frac{21}{25}}$$

Wartość ujemną cosinusa odrzucamy, bo dla kątów ostrych cosinus przyjmuje wartości dodatnie. Zostaje nam więc $\cos \alpha = \sqrt{\frac{21}{25}}$.

Krok 2. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Musimy jeszcze ustalić, czy otrzymana wartość cosinusa jest większa czy mniejsza od sinusa. Wartość cosinusa możemy zapisać w ten oto sposób:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Teraz możemy porównać sinusa z cosinusem, bo mamy jednakowe mianowniki. $\sqrt{21}$ jest na pewno większy niż 2 (będzie to coś pomiędzy 4 i 5), zatem to cosinus jest większy. Prawidłową odpowiedzią jest więc $\cos \alpha > \sin \alpha$.

Zadanie 17

0-1 pkt

Dane są wielomiany $W(x) = x^4 - 1$ oraz $V(x) = x^4 + 1$. Stopień wielomianu $W(x) + V(x)$ jest równy:

Odpowiedź: A (4)

Stopień wielomianu to tak naprawdę największa liczba która znajduje się przy potędze xka w danym wielomianie. Aby poznać poszukiwany stopień musimy najpierw wykonać dodawanie tych wielomianów, zatem:

$$W(x) + V(x) = x^4 - 1 + x^4 + 1 = 2x^4$$

Nasz x jest podnoszony do potęgi czwartej, zatem stopień wielomianu jest równy 4.

Zadanie 18

0-1 pkt

Mediana danych: $-4, 2, 6, 0, 1$ jest równa:

Odpowiedź: D (1)

Krok 1. Uporządkowanie wszystkich liczb.

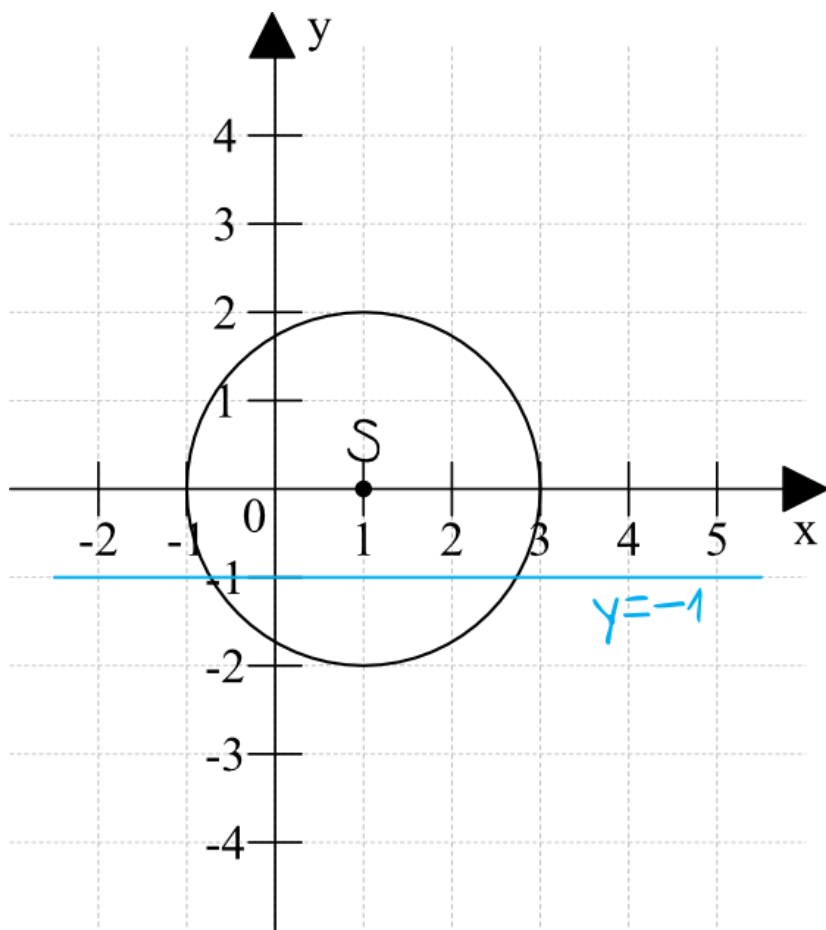
Aby obliczyć medianę musimy na początku uporządkować liczby w kolejności od najmniejszej do największej, zatem:

$$-4, 0, 1, 2, 6$$

Krok 2. Wyznaczenie mediany.

Mamy pięć liczb, czyli jest to nieparzysta ilość wyrazów. To oznacza, że medianą jest po prostu środkowy wyraz (czyli w tym przypadku trzeci), zatem $m = 1$.

Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ z prostą $y = -1$ jest równa:



Odpowiedź: C (2)

Krok 1. Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu oraz długości promienia.

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a; b)$ oraz promieniu r przyjmuje postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

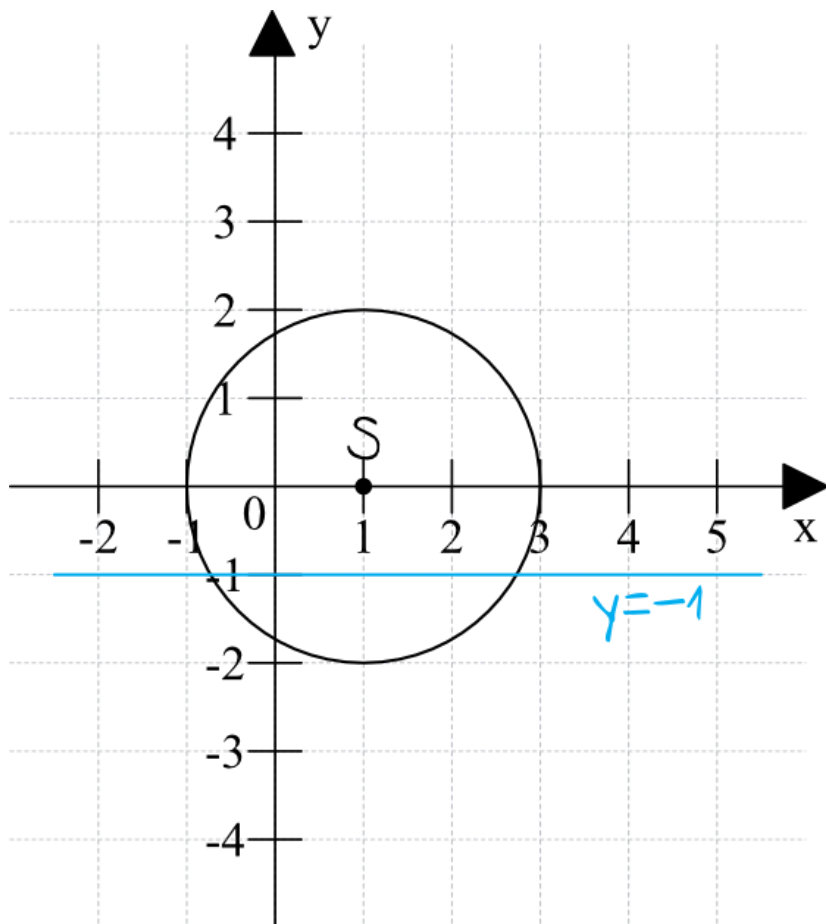
Musimy więc przekształcić nasze równanie z treści zadania do takiej właśnie postaci jak powyżej, dzięki czemu błyskawicznie odczytamy współrzędne środka okręgu oraz długość jego promienia. Zrobimy to w następujący sposób:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4, \quad (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$$

Z tak zapisanego równania możemy odczytać, że $S = (1; 0)$ oraz $r = 2$.

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Narysujmy teraz nasz okrąg oraz prostą $y = -1$ i sprawdźmy ile mają punktów wspólnych:



Z rysunku wynika dość jasno, że okrąg ma dwa wspólne punkty z prostą.

Zadanie 20

0-1 pkt

Punkty $A = (-2, -1)$ i $B = (2, 2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC . Wysokość tego trójkąta jest równa:

Odpowiedź: D $(2, 5\sqrt{3})$

Krok 1. Obliczenie długości odcinka AB .

Długość odcinka AB obliczymy z następującego wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, |AB| = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (2 - (-1))^2}, |AB| = \sqrt{4^2 + 3^2}, |AB| = \sqrt{16 + 9}, |AB| = \sqrt{25}, |AB| = 5$$

Krok 2. Obliczenie wysokości trójkąta równobocznego.

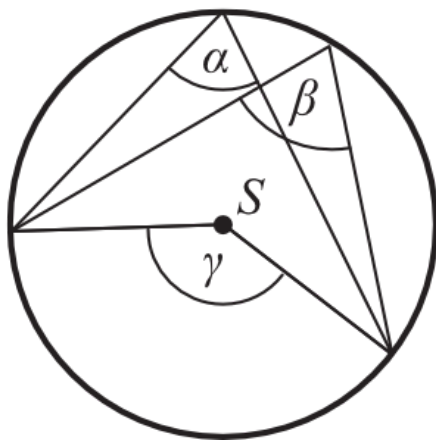
Znając długość boku trójkąta równobocznego możemy obliczyć jego wysokość z następującego wzoru:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, h = \frac{5\sqrt{3}}{2}, h = 2,5\sqrt{3}$$

Zadanie 21

0–1 pkt

Dany jest okrąg o środku w punkcie S .



Miara kąta α jest równa 70° . Oblicz sumę miar kątów β i γ .

Odpowiedź: B (210°)

Krok 1. Wyznaczenie miary kąta α .

Kąt α jest oparty na tym samym łuku co kąt β , zatem te dwa kąty będą mieć taką samą miarę. To oznacza, że $\alpha = 70^\circ$.

Krok 2. Wyznaczenie miary kąta γ .

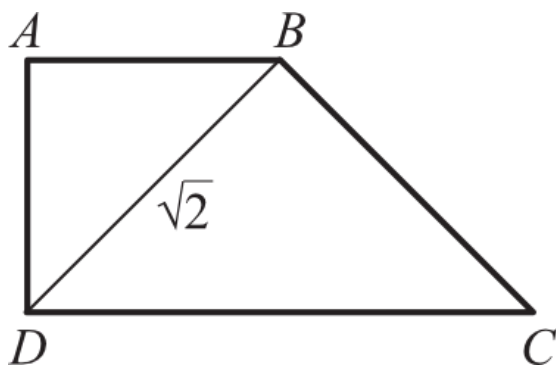
Kąt γ jest kątem środkowym, opartym na tym samym łuku co kąty α czy też β . Z własności kątów środkowych wynika, że miara tego kąta będzie dwukrotnie większa od miary kąta opisanego na łuku, zatem $\gamma = 2 \cdot 70^\circ = 140^\circ$.

Krok 3. Obliczenie sumy miar kątów.

W treści zadania proszą nas jeszcze o podanie sumy miar kątów β oraz γ , zatem:

$$\beta + \gamma = 70^\circ + 140^\circ = 210^\circ$$

Trapez jest prostokątny. Trójkąty podobne ABD i CBD są równoramienne.



Obwód trapezu jest równy:

Odpowiedź: C $(4 + \sqrt{2})$

Z treści zadania można wyciągnąć informację, że obydwa trójkąty są równoramienne, a w zasadzie to muszą być i równoramienne i prostokątne, bo trapez jest prostokątny więc $\angle DAB = 90^\circ$. Dzięki tej obserwacji będziemy mogli poobliczać długości poszczególnych boków stosując albo własności trójkątów o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (bo takie kąty występują zawsze w trójkątach prostokątnych równoramiennych), albo stosując Twierdzenie Pitagorasa, albo wykorzystując własności trójkątów podobnych.

Krok 1. Obliczenie długości boków BC oraz CD .

Jeżeli trójkąt CBD jest równoramienny to znaczy, że $|BD| = |BC| = \sqrt{2}$. W ten oto sposób jesteśmy w stanie obliczyć także długość boku $|DC|$ korzystając z Twierdzenia Pitagorasa:

$$(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = |DC|^2, \quad 2 + 2 = |DC|^2, \quad |DC|^2 = 4, \quad |DC| = 2 \quad \vee \quad |DC| = -2$$

Wartość ujemną oczywiście odrzucamy, zatem $|DC| = 2$.

Krok 2. Obliczenie długości boków AB oraz AD .

Spójrzmy na trójkąt ABD . Odcinki AB oraz AD mają jednakową miarę. Także tutaj do ich obliczenia możemy zastosować własności trójkątów o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (wiedząc że przeciwprostokątna jest równa $\sqrt{2}$ bez problemu możemy stwierdzić, że w takim razie przyprostokątne mają długość 1), ale jeśli nie dostrzeżliśmy że to jest akurat taki trójkąt o charakterystycznych kątach, to możemy ułożyć prostą proporcję, korzystając z informacji że są to trójkąty podobne:

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|DB|}{|AD|}, \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{|AD|}$$

Mnożąc na krzyż otrzymamy

$$2 = 2|AD|, \quad |AD| = 1$$

Skoro odcinki AD oraz AB mają jednakową miarę, to możemy zapisać, że $|AD| = 1$ oraz $|AB| = 1$.

Krok 3. Obliczenie obwodu trapezu.

Znamy już wszystkie długości boków, zatem:

$$Obw = 2 + \sqrt{2} + 1 + 1 = 4 + \sqrt{2}$$

Zadanie 23

0-1 pkt

Graniastosłup ma $2n + 6$ wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa:

Odpowiedź: D ($3n + 9$)

Graniastosłup, który ma n -kąt w podstawie ma $2n$ wierzchołków oraz $3n$ krawędzi. To oznacza, że w każdym graniastosłupie krawędzi jest $\frac{3n}{2n} = 1,5$ raza więcej niż wierzchołków. Po tej obserwacji możemy zapisać, że krawędzi w naszym graniastosłupie będzie:

$$1,5 \cdot (2n + 6) = 3n + 9$$

Zadanie 24

0-1 pkt

Tworząca stożka jest o 2 dłuższa od promienia podstawy. Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe 15π . Tworząca stożka ma zatem długość:

Odpowiedź: B (5)

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń.

x - długość tworzącej stożka

$x - 2$ - długość promienia podstawy

Pole powierzchni bocznej stożka obliczymy ze wzoru:

$$P = \pi r l$$

Podstawiając nasze oznaczenia oraz dane z treści zadania otrzymamy:

$$15\pi = \pi \cdot (x - 2) \cdot x, \quad 15 = x^2 - 2x, \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Współczynniki: $a = 1$, $b = -2$, $c = -15$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 - (-60) = 4 + 60 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - 8}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 8}{2} = \frac{-6}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + 8}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Ujemną wartość odrzucamy, bo długość nie może być ujemna, zatem zostaje nam, że długość tworzącej stożka jest równa $x = 5$.

Zadanie 25

0-1 pkt

Cztery dziewczynki i sześciu chłopców siedzą na tym samym pniu zwalonego dębu. Dziewczynki siedzą obok siebie i chłopcy również siedzą obok siebie. Wszystkich możliwych sposobów posadzenia dzieci w ten sposób jest:

Odpowiedź: D ($1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$)

Cztery dziewczynki mogą usiąść obok siebie na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sposobów.

Sześciu chłopców może usiąść obok siebie na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sposobów.

Gdybyśmy więc połączyli te kombinacje to otrzymamy mnożenie z trzeciej odpowiedzi (z lekko zamienioną kolejnością mnożenia), ale... to czwarta odpowiedź (z dodatkowym pomnożeniem przez 2) jest tą prawidłową. Dlaczego? Dlatego, że o ile faktycznie kombinacji usadowienia najpierw czterech dziewczynek, a potem sześciu chłopców jest $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, to musimy jeszcze uwzględnić odwrotną analogiczną sytuację, czyli że na początku pnia usiądą chłopcy, a potem dopiero dziewczynki. To właśnie te dwa warianty sprawiają, że na końcu musi się jeszcze pojawić mnożenie przez 2.

Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $-3x + y - 4 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P = (-1, -4)$.

Odpowiedź: $y = 3x - 1$

Krok 1. Zapisanie równania w postaci kierunkowej.

Na początek przekształćmy to równanie do postaci kierunkowej, czyli postaci $y = ax + b$:

$$-3x + y - 4 = 0, \quad y = 3x + 4$$

Krok 2. Ustalenie postaci prostej równoległej.

Aby dwie proste były względem siebie równoległe, to ich współczynnik kierunkowy a musi być jednakowy. W naszym przypadku $a = 3$, zatem i nasza prosta równoległa musi mieć taki współczynnik, a to oznacza, że możemy ją opisać wzorem $y = 3x + b$.

Krok 3. Wyznaczenie współczynnika b prostej równoległej.

Teraz naszym celem jest poznanie współczynnika b , a w tym celu do równania $y = 3x + b$ podstawimy współrzędne punktu $P = (-1, -4)$, otrzymując:

$$-4 = 3 \cdot (-1) + b, \quad -4 = -3 + b, \quad b = -1$$

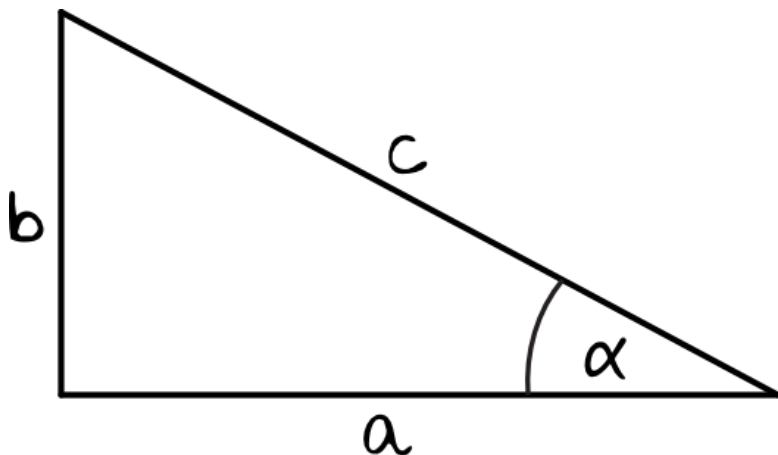
Krok 4. Zapisanie równania prostej równoległej.

Znamy już wartości współczynników a oraz b więc możemy zapisać, że nasza prosta równoległa przyjmuje wzór $y = 3x - 1$.

Zadanie 27

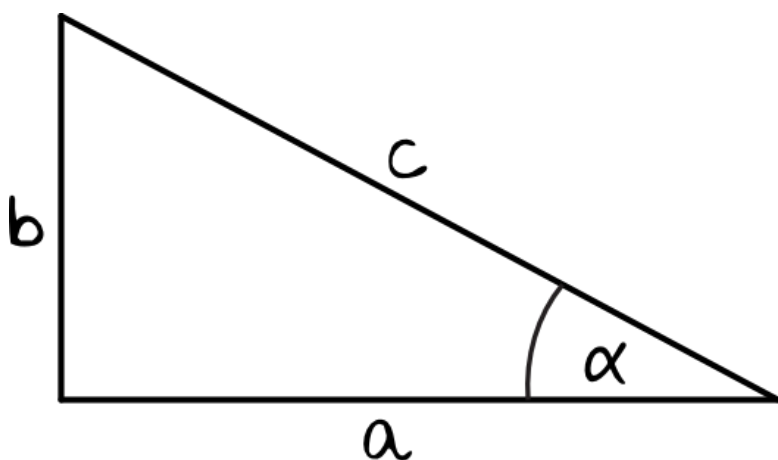
0-2 pkt

W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość a . Kąt ostry przy tym boku ma miarę α . Wykaż, że $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$.



Odpowiedź: Udowodniono rozpisuj

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.



Krok 2. Rozpisanie wartości $\sin \alpha + \cos \alpha$.

Korzystając z oznaczeń na rysunku spróbujmy rozpisać sinusa i cosinusa:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{b}{c} + \frac{a}{c} = \frac{a+b}{c}$$

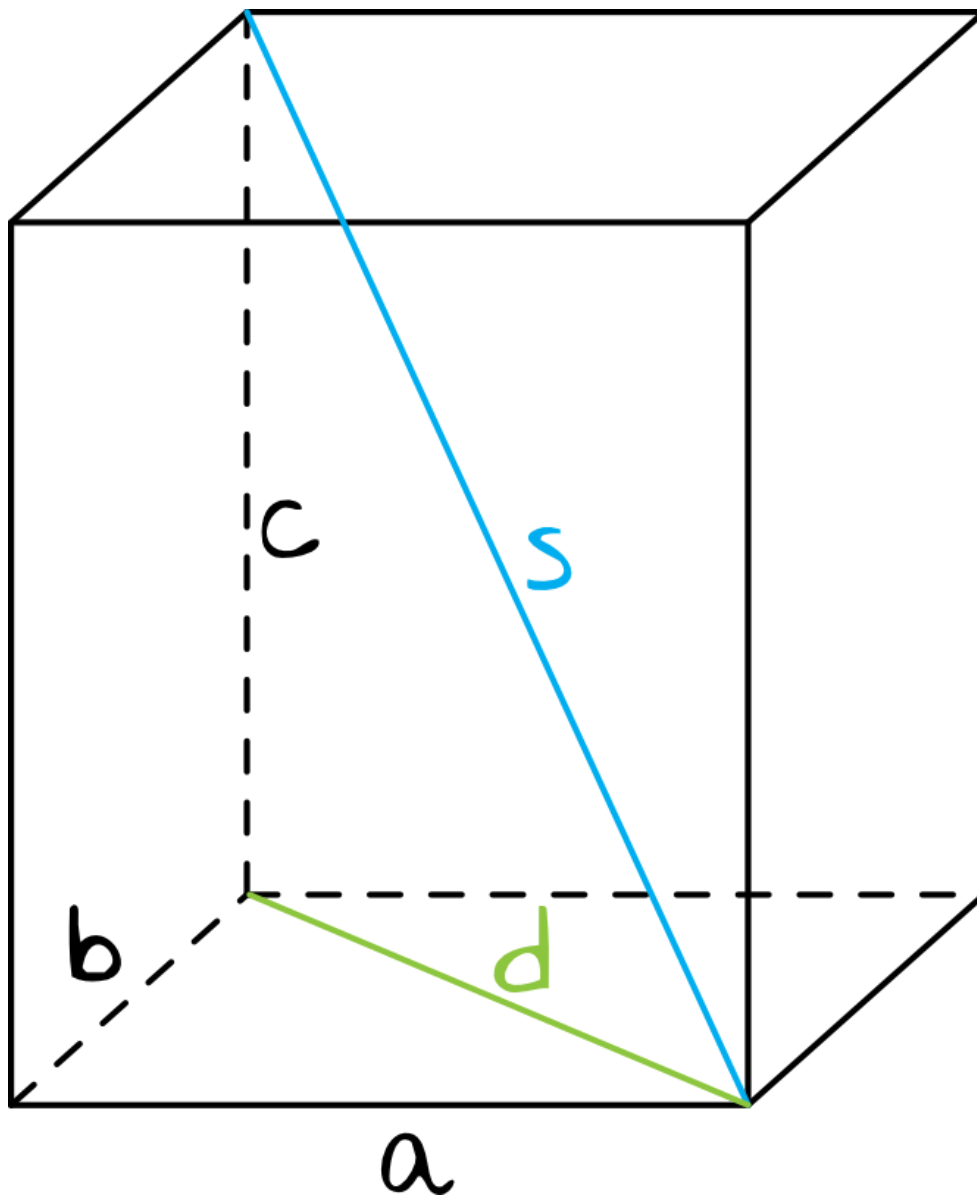
Krok 3. Zakończenie dowodzenia.

Z własności trójkątów wiemy, że najdłuższym boki trójkąta prostokątnego jest jego przeciwprostokątna. Wiemy też, że aby trójkąt mógł w ogóle zaistnieć, to suma jego dwóch krótszych boków musi być większa od najdłuższego boku trójkąta. To oznacza, że $a + b > c$. Patrząc się na otrzymane w kroku drugim wyrażenie $\frac{a+b}{c}$ możemy stwierdzić, że licznik tego ułamka jest na pewno większy od mianownika, a skoro tak, to wartość tego ułamka musi być większa od 1, co należało udowodnić.

Zadanie 28

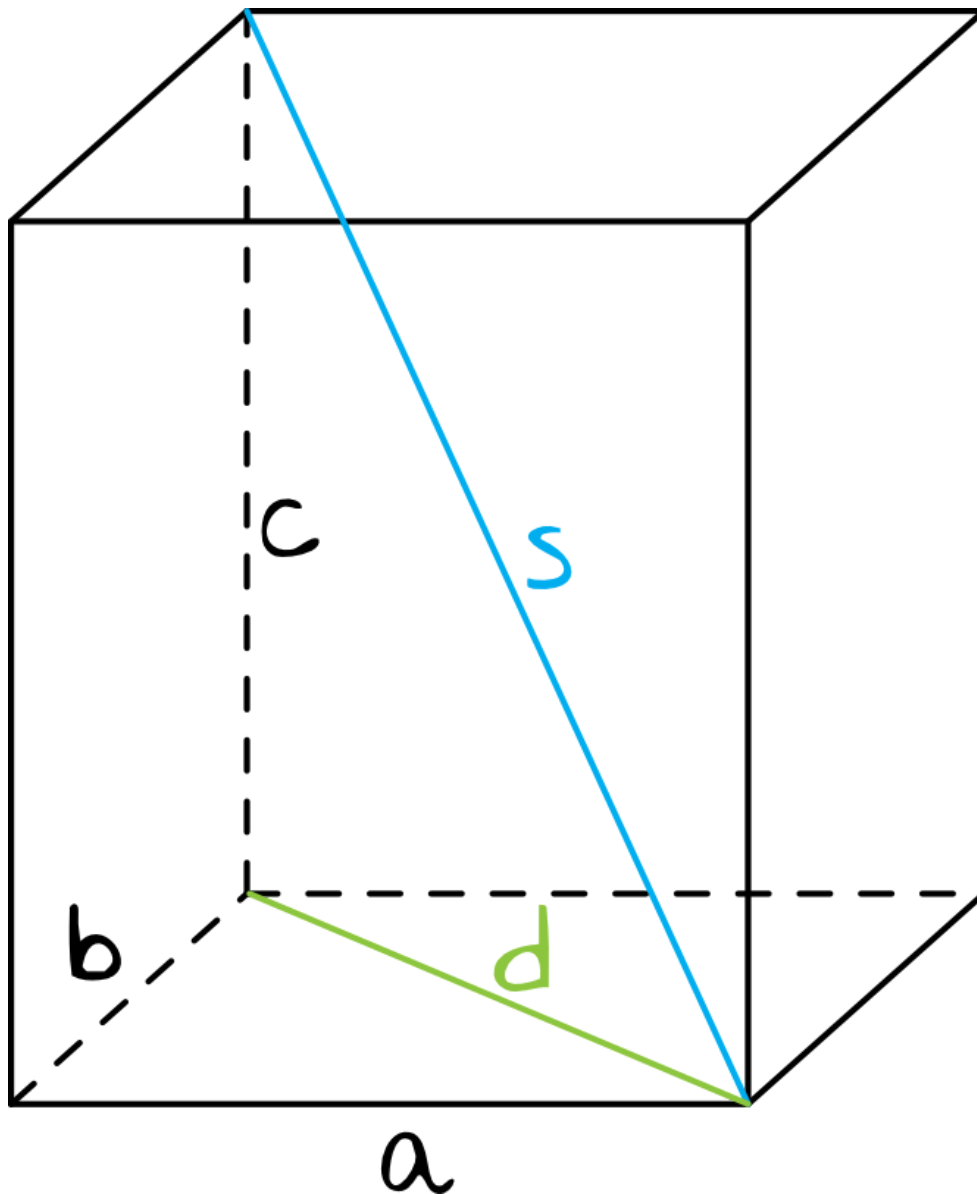
0-2 pkt

Wykaż, że przekątna prostopadłościanu o krawędziach długości a, b, c ma długość $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Odpowiedź: Udowodniono korzysta

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.



Krok 2. Obliczenie długości przekątnej podstawy prostopadłościanu.

Do wyznaczenia długości przekątnej bryły potrzebna nam będzie długość przekątnej podstawy, którą wyznaczymy korzystając z Twierdzenia Pitagorasa. Prostopadłościan ma krawędzie długości a oraz b , zatem:

$$a^2 + b^2 = d^2, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Krok 3. Obliczenie długości przekątnej prostopadłościanu.

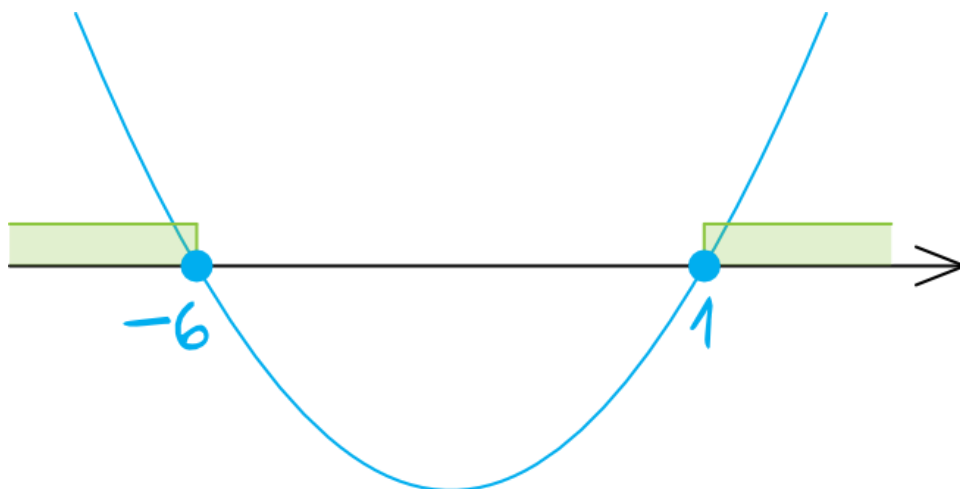
Znamy wyrażenie opisujące długość przekątnej podstawy, wiemy że wysokość prostopadłościanu jest równa c , zatem ponownie korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$d^2 + c^2 = s^2, \quad (\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2 = s^2, \quad s^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad s = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Otrzymany wynik jest dokładnie tym co znalazło się w treści zadania, zatem dowodzenie możemy uznać za zakończone.

Zadanie 29

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $x^2 + 5x \leq 6$.Odpowiedź: $x \in \langle -6; 1 \rangle$

Krok 1. Doprowadzenie nierówności do postaci ogólnej.

Zanim zaczniemy liczyć deltę, to musimy przenieść wszystkie wyrazy na lewą stronę, doprowadzając nierówność do postaci ogólnej, zatem:

$$x^2 + 5x \leq 6, \quad x^2 + 5x - 6 \leq 0$$

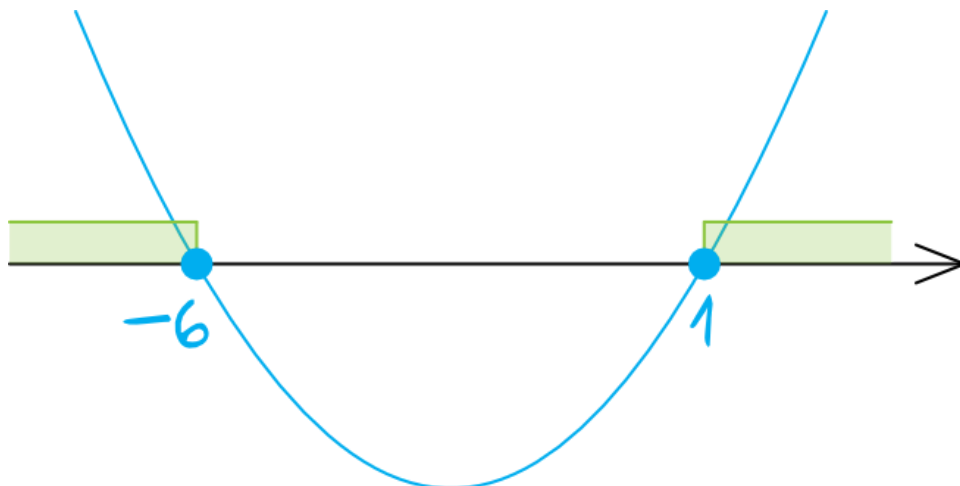
Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Współczynniki: $a = 1$, $b = 5$, $c = -6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 - (-24) = 25 + 24 = 49, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{2 \cdot 1} = \frac{-12}{2} = -6, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Z racji tego, iż współczynnik kierunkowy a jest dodatni, to parabola będzie mieć ramiona skierowane do góry. Zaznaczamy więc na osi wyznaczone miejsca zerowe $x = -6$ oraz $x = 1$ (kropki będą zamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $\leq$) i rysujemy parabolę:

Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas wyniki mniejsze lub równe zero, zatem interesuje nas to co znalazło się pod osią (wraz z zamalowanymi kropkami). To oznacza, że rozwiązaniem tej nierówności jest przedział:

$$x \in \langle -6; 1 \rangle$$

Zadanie 30

0-2 pkt

Wiadomo, że A i B są takimi zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω , że $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ i $P(A \cup B) = 0,8$. Oblicz $P(A \cap B)$.

Odpowiedź: $P(A \cap B) = 0,5$

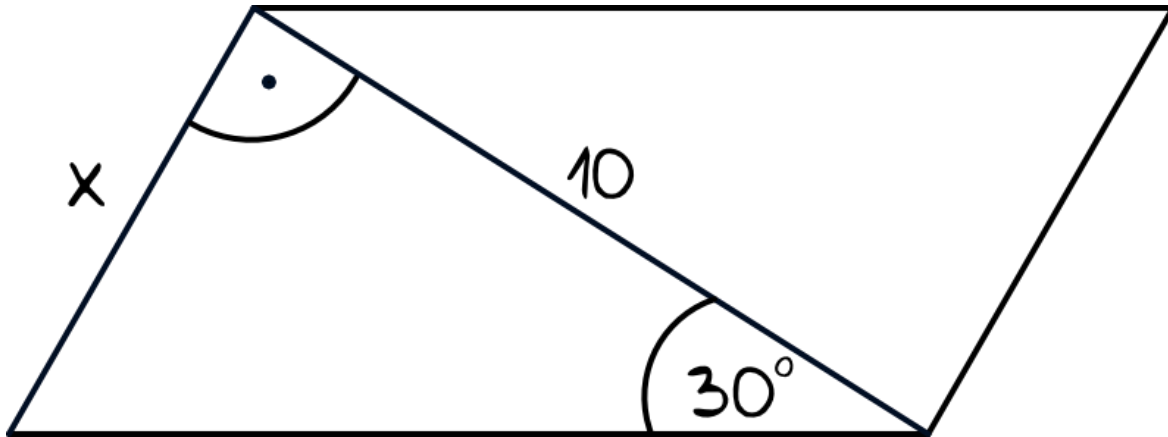
Aby rozwiązać to zadanie musimy ułożyć następujące równanie:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad 0,8 = 0,7 + 0,6 - P(A \cap B), \quad 0,8 = 1,3 - P(A \cap B), \quad -0,5 = -P(A \cap B), \quad P(A \cap B) = 0,5$$

Zadanie 31

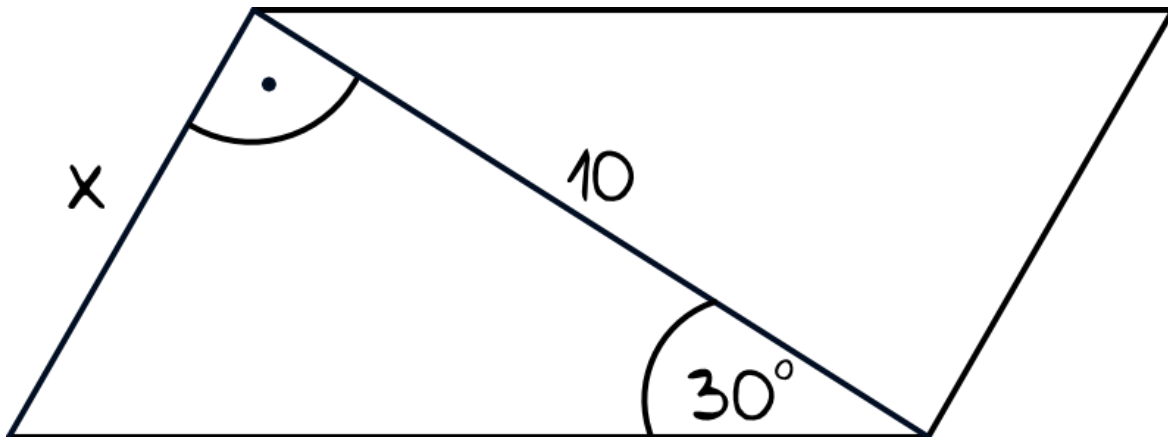
0-2 pkt

Przekątna równoległoboku ma długość 10 cm i tworzy z krótszym bokiem kąt prosty, a z dłuższym bokiem kąt 30° . Oblicz długość krótszego boku tego równoległoboku.



Odpowiedź: $x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

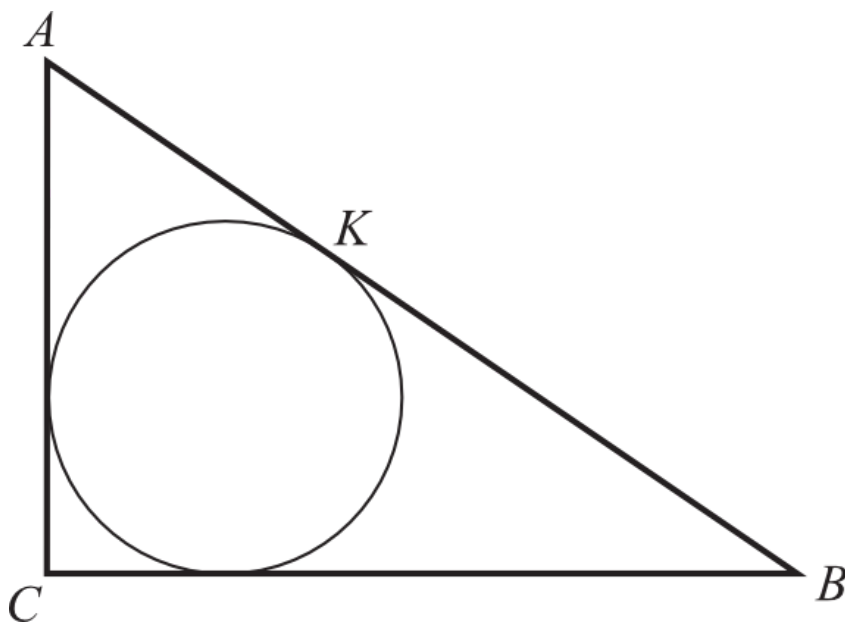


Krok 2. Ułożenie i rozwiązanie równania.

Tak naprawdę cała trudność zadania opiera się na tym, by poprawnie zapisać równanie korzystając z funkcji trygonometrycznych. Korzystając z tangensa możemy zapisać, że:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{10}, \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{10}, \quad x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

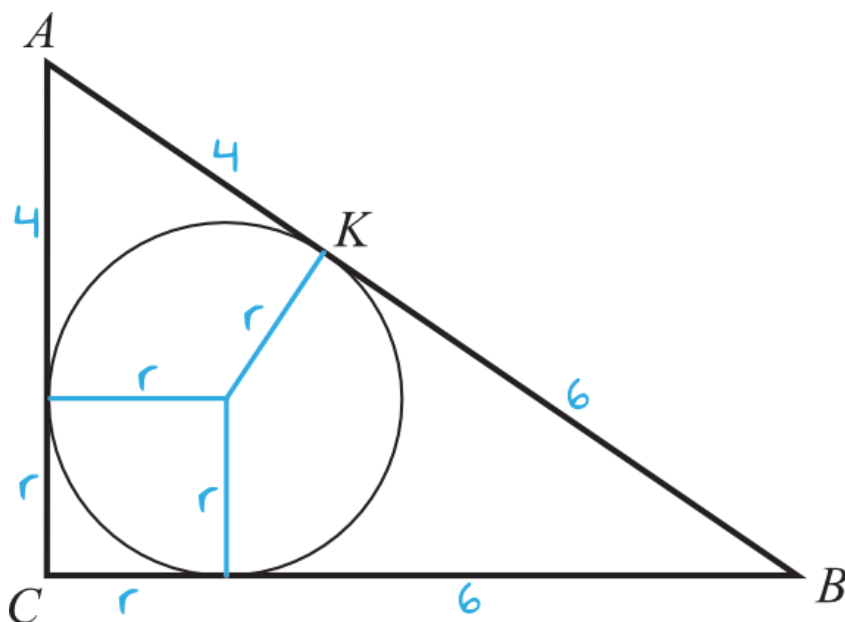
Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC jest styczny do przeciwprostokątnej AB w punkcie K . Wiadomo, że $|AK| = 4$ i $|KB| = 6$. Oblicz promień tego okręgu.



Odpowiedź: $r = 2$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Korzystając z informacji z treści zadania oraz z własności stycznych do okręgu możemy sporządzić następujący szkic:



Krok 2. Ułożenie równania.

Skoro jest to trójkąt prostokątny, to możemy zgodnie z Twierdzeniem Pitagorasa zapisać, że:

$$(r+4)^2 + (r+6)^2 = 10^2, \quad r^2 + 8r + 16 + r^2 + 12r + 36 = 100, \quad 2r^2 + 20r + 52 = 100, \quad 2r^2 + 20r - 48 = 0 \quad / : 2, \quad r^2 + 10r - 24 = 0$$

Dzielenie przez 2 nie jest koniecznością, ale dzięki temu potem pracujemy na mniejszych liczbach. Finalnie wynik wyjdzie ten sam.

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Współczynniki: $a = 1$, $b = 10$, $c = -24$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 100 - (-96) = 100 + 96 = 196, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - 14}{2 \cdot 1} = \frac{-24}{2} = -12, \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + 14}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Promień nie może być ujemny, zatem jedynym pasującym nam rozwiązaniem jest $r = 2$.

Zadanie 33

0-4 pkt

Rzucamy dwukrotnie kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba oczek otrzymana w pierwszym rzucie jest większa od liczby oczek otrzymanej w drugim rzucie?

Odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{12}$

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Na każdej kostce może wypaść jeden z sześciu wyników, a skoro rzucamy niezależnie dwoma kostkami, to liczba wszystkich kombinacji będzie równa $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Sprzyjającymi zdarzeniami są wszystkie te sytuacje w których w pierwszym rzucie otrzymaliśmy wynik większy niż w rzucie drugim. Nie musimy tu zbytnio komplikować sobie sprawy, wystarczy że po prostu wypiszemy te zdarzenia:

$(2, 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5)$

To oznacza, że 15 przypadków spełnia warunki zadania, stąd też możemy napisać, że $|A| = 15$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

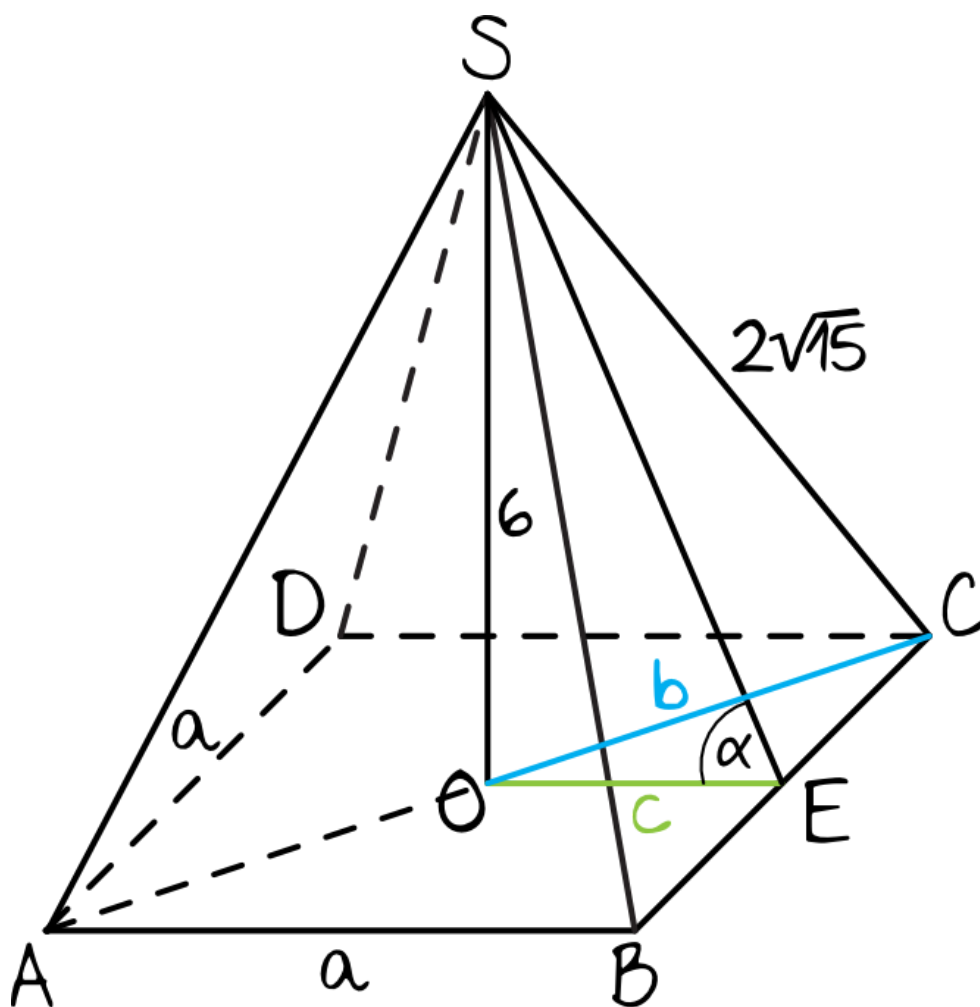
Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Zadanie 34

0-5 pkt

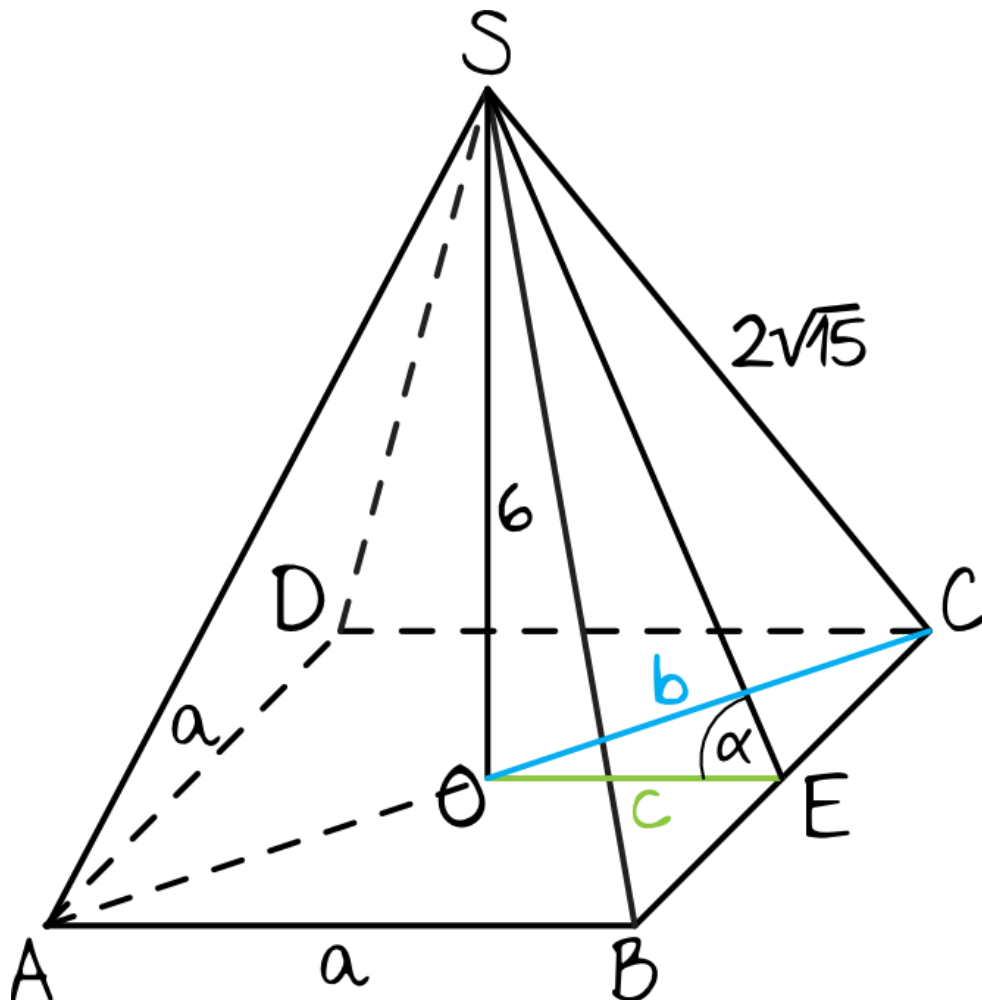
Piramida ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest równa 6, a długość krawędzi bocznej jest równa $2\sqrt{15}$. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej piramidy do podstawy.



Odpowiedź: 60°

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy narysować taki ostrosłup, zaznaczając na nim miary podane w treści zadania:



Krok 2. Obliczenie długości przekątnej podstawy.

Spójrzmy na trójkąt prostokątny OCS , który wytworzył nam się na rysunku. W jego dolnej przyprostokątnej znajduje się odcinek oznaczony jako b , który jest tak naprawdę połową długości przekątnej podstawy (tak nawiasem mówiąc, to w podstawie byłyby kwadrat, bo jest to ostrosłup prawidłowy czworokątny). Długość tego boku b możemy obliczyć z Twierdzenia Pitagorasa:

$$b^2 + 6^2 = (2\sqrt{15})^2, \quad b^2 + 36 = 4 \cdot 15, \quad b^2 + 36 = 60, \quad b = \sqrt{24} \quad \vee \quad b = -\sqrt{24}$$

Ujemną długość odrzucamy, zatem wiemy już że $b = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$.

To też oznacza, że cała przekątna AC ma miarę $d = 2 \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$.

Krok 3. Obliczenie długości krawędzi podstawy.

Już wiemy, że w podstawie naszej bryły musi znajdować się kwadrat. Jedną z własności kwadratu jest to, że kwadrat o boku a ma przekątną o długości $a\sqrt{2}$. Ta własność pozwoli nam uzyskać informację na temat długości krawędzi bocznej, bo skoro przekątna ma długość $4\sqrt{6}$, to:

$$a\sqrt{2} = 4\sqrt{6}, \quad a = 4\sqrt{6} : \sqrt{2}, \quad a = 4\sqrt{3}$$

Krok 4. Obliczenie długości boku c .

Bok oznaczony jako c jest połową podstawy, którą przed chwilą wyliczyliśmy, zatem:

$$c = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3}, \quad c = 2\sqrt{3}$$

Krok 5. Wyznaczenie miary kąta α .

Spójrzmy teraz na trójkąt prostokątny OES . Znajomość długości boku c oraz znajomość wysokości ostrosłupa otwierają nam drogę do poznania poszukiwanej miary kąta. Korzystając z tangensa możemy zapisać, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{2\sqrt{3}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{6}, \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$$

Teraz musimy odczytać z tablic dla jakiej miary kąta tangens przyjmuje wartość równą $\sqrt{3}$ i widzimy, że jest to kąt 60° .