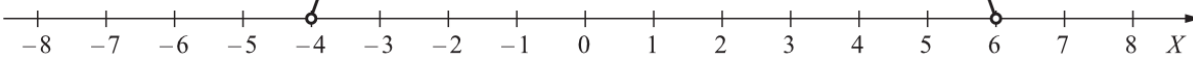


Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Operon 2010

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl.
Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	A (1)	1
2	C (2)	1
3	B ()	1
4	A (384zł)	1
5	C ($2x^3 - 1$)	1
6	B ($m = -1, 5$)	1
7	C ($(-4, 2)$)	1
8	D (-10)	1
9	D (nie ma pierwiastków)	1
10	A ($(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$)	1
11	C ($y = -1$)	1
12	C ($-\frac{1}{2}$)	1
13	A (1)	1
14	C (pięciokąt)	1
15	C (większa od 1)	1
16	D (4)	1
17	B ($-\frac{\sqrt{3}}{3}$)	1
18	C (30°)	1
19	B (12π)	1
20	C ($32\sqrt{3}cm^2$)	1
21	D (2)	1
22	A ($S = (0, -2)$)	1
23	D (40)	1
24	A (12)	1
25	D (185cm)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Liczba $\frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1}}{4^0 - 0,5}$ jest równa:

Odpowiedź: A (1)

Korzystając z działań na potęgach możemy tę liczbę rozisać w następujący sposób:

$$\frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-1}}{4^0 - 0,5} = \frac{4^{\frac{1}{2}-1}}{1 - 0,5} = \frac{4^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{(2^2)^{-\frac{1}{2}}}{2^{-1}} = \frac{2^{-1}}{2^{-1}} = 1$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Liczba $\log_3 36 - \log_3 4$ jest równa:

Odpowiedź: C (2)

Mamy jednakowe podstawy logarytmów, zatem możemy tę różnicę rozpisać jako:

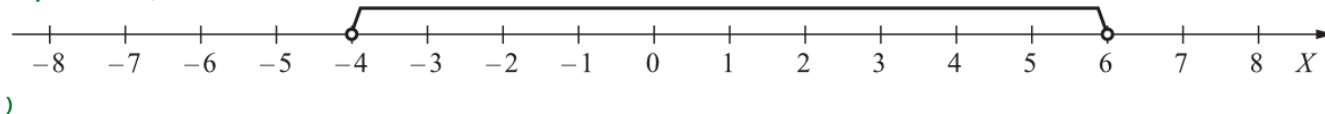
$$\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9 = 2$$

Zadanie 3

0-1 pkt

Wybierz i zaznacz rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x - 1| < 5$.

Odpowiedź: B (



Aby wybrać odpowiedni rysunek, to najpierw musimy rozwiązać tę nierówność, tak jak rozwiązuje się nierówności z wartością bezwzględną, czyli:

$$|x - 1| < 5, x - 1 < 5 \quad \vee \quad x - 1 > -5, x < 6 \quad \vee \quad x > -4, x \in (-4; 6)$$

Zbiór rozwiązań tej nierówności został więc przedstawiony na drugim rysunku.

Zadanie 4

0-1 pkt

Stół kosztował 320zł. Ile kosztuje stół po podwyżce ceny o 20%?

Odpowiedź: A (384zł)

Po podwyżce o 20% stół kosztuje $1,2 \cdot 320\text{zł} = 384\text{zł}$.

Zadanie 5

0-1 pkt

Dane są wielomiany $W(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$ oraz $M(x) = x^3 - 2x^2 + 5$. Wielomian $W(x) - M(x)$ jest równy:

Odpowiedź: C ($2x^3 - 1$)

Zgodnie z poleceniem musimy odjąć od siebie te wielomiany i uprościć cały zapis:

$$W(x) - M(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4 - (x^3 - 2x^2 + 5) = , = 3x^3 - 2x^2 + 4 - x^3 + 2x^2 - 5 = 2x^3 - 1$$

Zadanie 6

0-1 pkt

Funkcja liniowa $f(x) = (m - 1)x + 5$ ma miejsce zerowe równe 2. Zatem:

Odpowiedź: B ($m = -1, 5$)

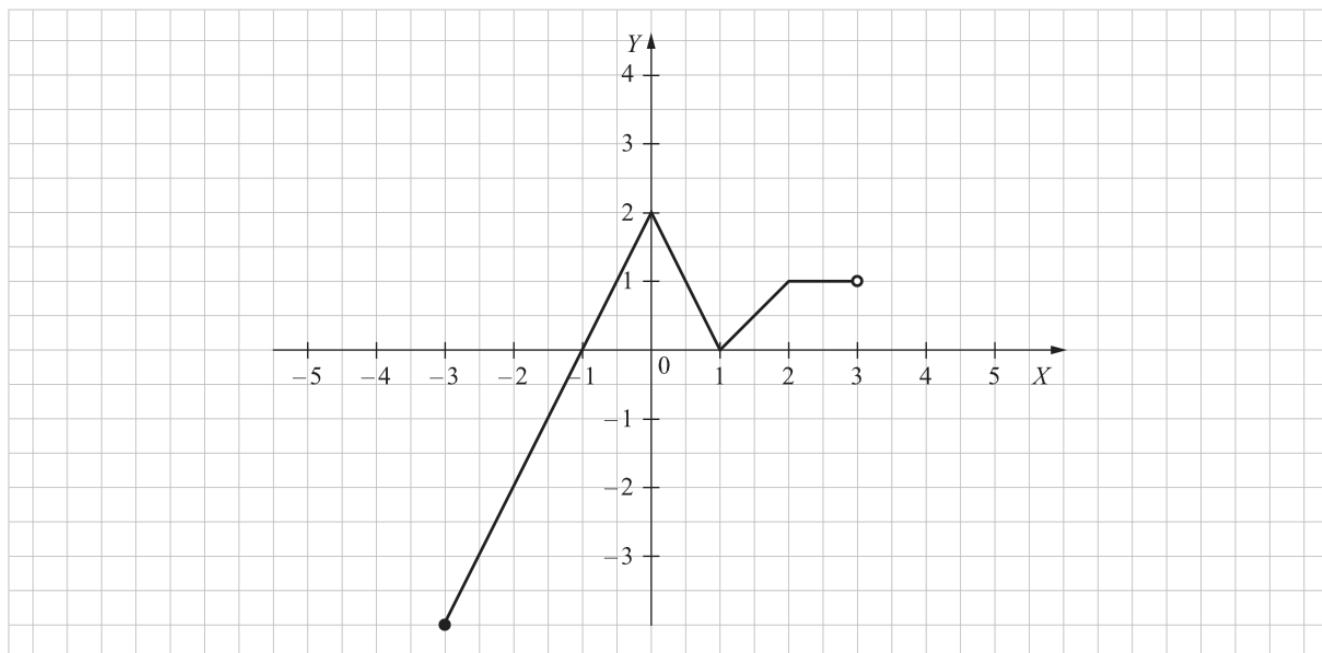
Miejsce zerowe równe 2 oznacza, że funkcja przechodzi przez punkt o współrzędnych $(2; 0)$. Aby sprawdzić jaki parametr m ma nasza prosta wystarczy podstawić do jej równania współrzędne tego miejsca zerowego, czyli podstawić $x = 2$ oraz $y = 0$.

$$f(x) = (m - 1)x + 5, 0 = (m - 1) \cdot 2 + 5, 0 = 2m - 2 + 5, 0 = 2m + 3, 2m = -3, m = -1,5$$

Zadanie 7

0-1 pkt

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$.



Zbiór wartości tej funkcji to:

Odpowiedź: C ($\langle -4, 2 \rangle$)

Zbiór wartości funkcji odczytujemy z osi igreków. Tutaj pewną pułapką w zadaniu jest fakt, że nie podpisano nam na osi igreków wartości -4 , natomiast po kratkach możemy odczytać, że ta funkcja przyjmuje właśnie wartości od -4 do 2 . Ustalmy jeszcze jakie nawiasy powinny znaleźć się w zapisie. Dla wartości -4 kropka jest zamalowana, więc nawias będzie domknięty. Dla wartości 2 nawias będzie także domknięty, bo funkcja jak najbardziej przyjmuje tę wartość (dla argumentu $x = 0$). Stąd też możemy zapisać, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle -4, 2 \rangle$.

Zadanie 8

0-1 pkt

Rozwiązaniem równania $\frac{x-6}{2x-4} = \frac{2}{3}$ jest liczba:

Odpowiedź: D (-10)

To równanie najprościej będzie rozwiązać metodą mnożenia na krzyż:

$$\frac{x-6}{2x-4} = \frac{2}{3}, \quad 3 \cdot (x-6) = 2 \cdot (2x-4), \quad 3x-18 = 4x-8, \quad -x = 10, \quad x = -10$$

Zadanie 9

0-1 pkt

Równanie $x^2 + 6x + 9 = -1$:

Odpowiedź: D (nie ma pierwiastków)

Krok 1. Doprowadzenie równania do postaci ogólnej.

Pierwiastki równania kwadratowego to nic innego jak rozwiązania równania. Aby rozpocząć obliczenia (czyli żeby zacząć liczyć deltę) musimy zapisać to równanie w postaci ogólnej, czyli takiej w której po prawej stronie znajdzie się 0. W związku z tym musimy do wyjściowego równania dodać obustronnie jedynkę, otrzymując w ten sposób:

$$x^2 + 6x + 10 = 0$$

Krok 2. Rozwiązanie równania kwadratowego.

Współczynniki: $a = 1$, $b = 6$, $c = 10$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4$$

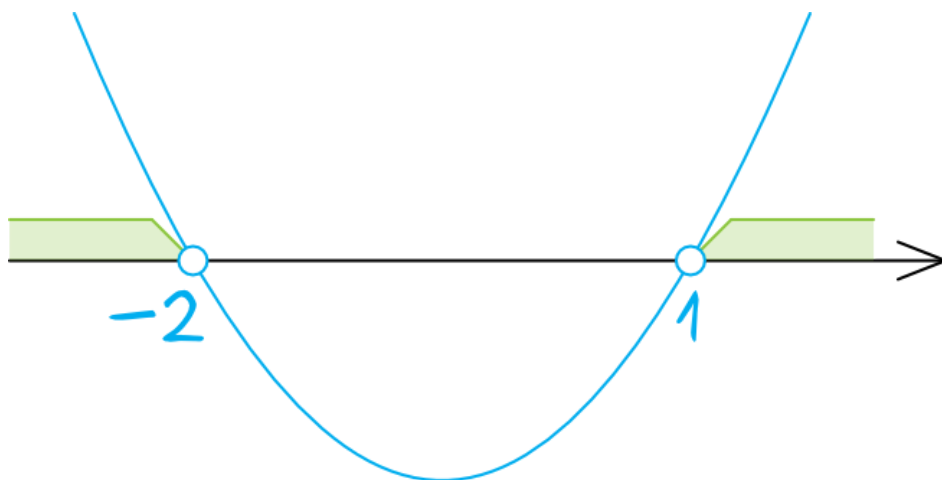
Krok 3. Interpretacja ujemnej delty.

Wyszła nam ujemna delta, a to w przypadku równań kwadratowych oznacza, że takie równanie nie ma rozwiązań (czyli nie ma pierwiastków).

Zadanie 10

0-1 pkt

Zbiorem rozwiązań nierówności $(x - 1)(x + 2) > 0$ jest zbiór:



Odpowiedź: A $((-\infty, -2) \cup (1, \infty))$

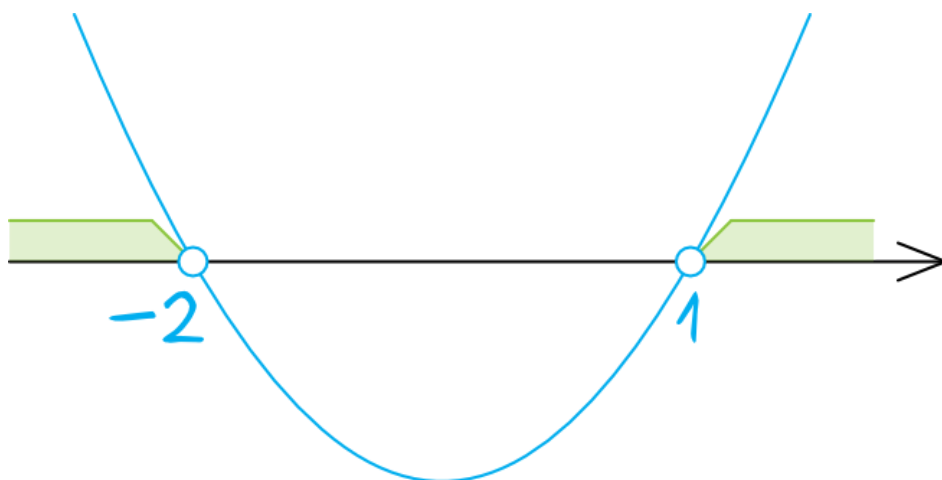
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Nierówność jest zapisana w postaci iloczynowej, czyli w bardzo łatwy sposób wyznaczmy jej miejsca zerowe - wystarczy przyrównać wartość każdego z nawiasów do zera:

$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0, \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -2$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Ramiona paraboli będą skierowane do góry, bo gdybyśmy zaczęli wymnażać te nawiasy, to przed x^2 nie stałby żaden minus. Zaznaczamy wyznaczone przed chwilą miejsca zerowe (kropki będą niezamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $>$) i szkicujemy wykres paraboli.



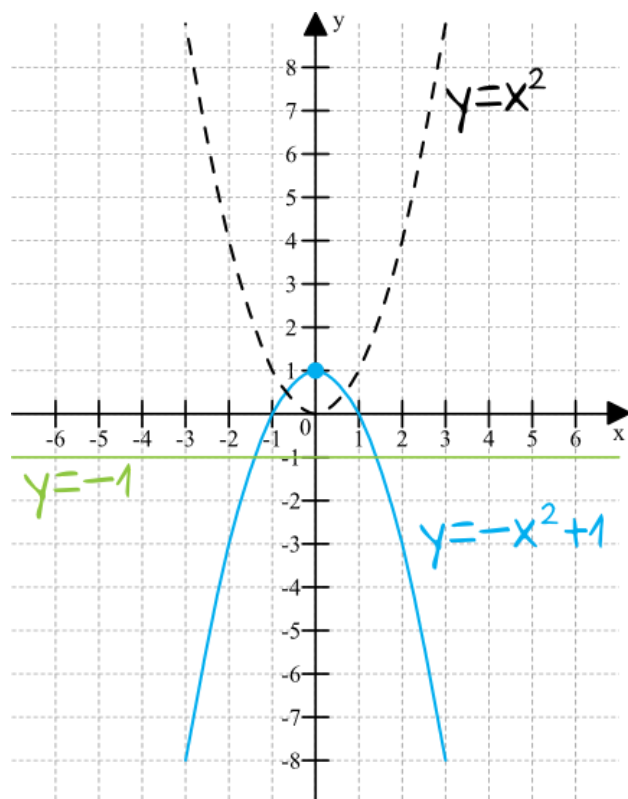
Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Szukamy wartości większych od zera, zatem rozwiązaniem naszej nierówności jest suma przedziałów: $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$.

Zadanie 11

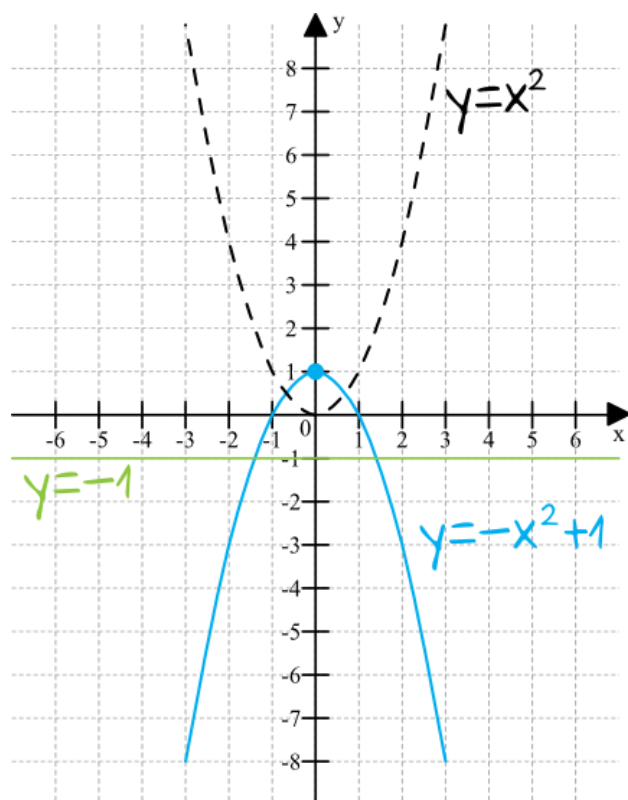
0-1 pkt

Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 1$ ma dwa punkty wspólne z prostą o równaniu:



Odpowiedź: C ($y = -1$)

Aby rozwiązać to zadanie wystarczy narysować parabolę i sprawdzić która prosta przecina ją w dwóch miejscach. Musimy ustalić tylko jak będzie wyglądać ta parabola. Wykres funkcji x^2 umiemy rysować (jest to parabola o wierzchołku w miejscu początku układu współrzędnych). Skoro stoi przed nią minus, to na pewno będzie zwrócona ramionami do dołu. I skoro jeszcze mamy we wzorze $+1$, to całość będzie przesunięta o jedną kratkę do góry. Całość zatem wyglądać będzie następująco:



Z rysunku dość jasno wynika, że jedynie prosta $y = -1$ przecina naszą parabolę w dwóch miejscach.

Zadanie 12

0-1 pkt

Iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $\frac{1}{2}$ oraz $a_2 = -4$. Wtedy wyraz a_5 jest równy:

Odpowiedź: C $(-\frac{1}{2})$

Krok 1. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu.

Znając wartość drugiego wyrazu oraz wartość ilorazu ciągu możemy obliczyć wartość pierwszego wyrazu.

$$a_2 = a_1 \cdot q, \quad -4 = a_1 \cdot \frac{1}{2}, \quad a_1 = -8$$

Krok 2. Obliczenie wartości piątego wyrazu.

Znając wartość pierwszego wyrazu oraz wartość ilorazu ciągu możemy obliczyć wartość piątego wyrazu.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}, \quad a_5 = a_1 \cdot q^4, \quad a_5 = -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad a_5 = -8 \cdot \frac{1}{16}, \quad a_5 = -\frac{1}{2}$$

Zadanie 13

0-1 pkt

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_2 = -1$ i $a_4 = 3$. Wtedy wyraz a_3 jest równy:

Odpowiedź: A (1)

Znając wartości dwóch wyrazów możemy obliczyć różnicę ciągu, dzięki której obliczymy wartość poszukiwanego trzeciego wyrazu. Możemy jednak postąpić nieco sprytniej i skorzystać z własności ciągów arytmetycznych, która związana jest z trzema kolejnymi wyrazami ciągu. Zazwyczaj z tej własności korzystamy przy pierwszych trzech wyrazach, natomiast mogą to być trzy dowolne (następujące po sobie) wyrazy. Między takimi wyrazami zachodzi następująca zależność:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}, \quad a_3 = \frac{-1 + 3}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{2}, \quad a_3 = 1$$

Zadanie 14

0-1 pkt

Suma miar kątów pewnego wielokąta wypukłego jest równa 540° . Tym wielokątem jest:

Odpowiedź: C (pięciokąt)

Trójkąt ma sumę kątów równą 180° .

Czworokąt ma sumę kątów 360° .

Pięciokąt ma sumę kątów 540° .

Zadanie 15

0-1 pkt

Kąt α jest ostry i $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Wartość wyrażenia jest $\sin^2 \alpha + \cos \alpha$ jest:

Odpowiedź: C (większa od 1)

Krok 1. Obliczenie wartości $\sin^2 \alpha$.

Z jedynki trygonometrycznej wiemy, że $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Znamy wartość cosinusa, zatem:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1, \quad \sin^2 \alpha + \frac{1}{9} = 1 \quad \Bigg/ -\frac{1}{9}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

Samemu sinusa wyliczać już nie musimy, bo w naszym wyrażeniu mamy i tak $\sin^2 \alpha$.

Krok 2. Obliczenie wartości wyrażenia.

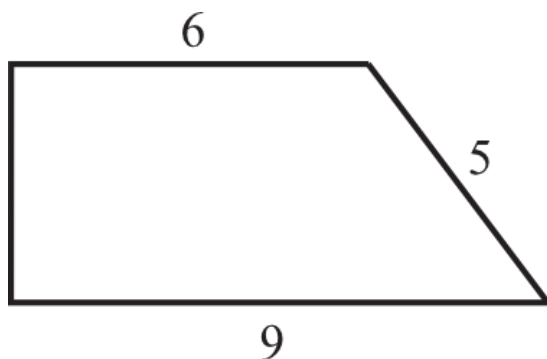
$$\sin^2 \alpha + \cos \alpha = \frac{8}{9} + \frac{1}{3} = \frac{8}{9} + \frac{3}{9} = \frac{11}{9} = 1\frac{2}{9}$$

Otrzymana wartość jest więc większa od 1.

Zadanie 16

0-1 pkt

Trapez prostokątny ma wymiary podane na rysunku.

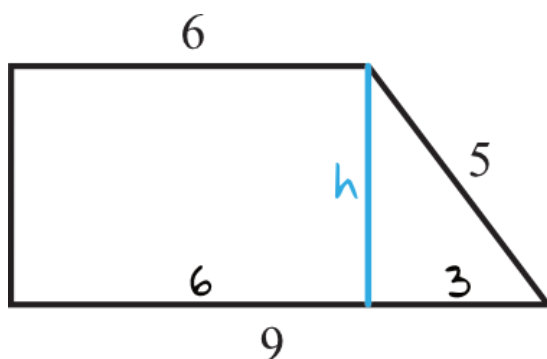


Wysokość tego trapezu jest równa:

Odpowiedź: D (4)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Dorysowując wysokość z drugiego wierzchołka otrzymamy następującą sytuację:



Krok 2. Obliczenie wysokości trapezu.

Skorzystamy z trójkąta prostokątnego, który nam powstał na powyższym rysunku, a poszukiwaną wysokość obliczymy z Twierdzenia Pitagorasa:

$$3^2 + h^2 = 5^2, \quad 9 + h^2 = 25, \quad h^2 = 16, \quad h = 4 \quad \vee \quad h = -4$$

Wartość ujemną oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $h = 4$.

Zadanie 17

0–1 pkt

Wysokość trójkąta równobocznego jest równa 1. Pole tego trójkąta jest równe:

Odpowiedź: B ($\frac{\sqrt{3}}{3}$)

Krok 1. Obliczenie długości boku trójkąta.

Długość boku obliczymy ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, 1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, 2 = a\sqrt{3}, a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Teoretycznie moglibyśmy usunąć jeszcze niewymierność z mianownika, ale w tym przypadku jesteśmy w trakcie dalszych obliczeń, więc nie ma takiej konieczności.

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni trójkąta.

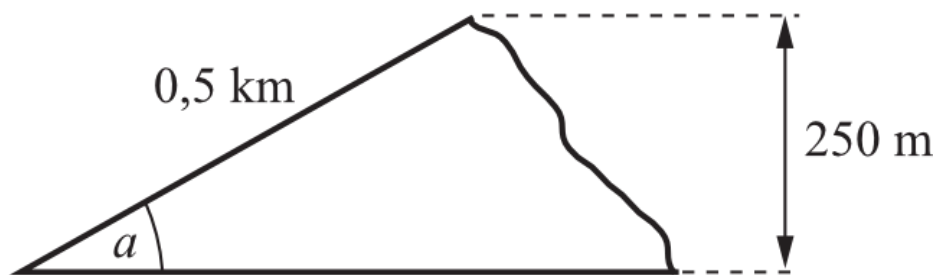
Tym razem skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, P = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}, P = \frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}}{4}, P = \frac{4}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4}, P = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Zadanie 18

0–1 pkt

Na szczyt góry o wysokości względnej 250m prowadzi droga długości 0,5km.

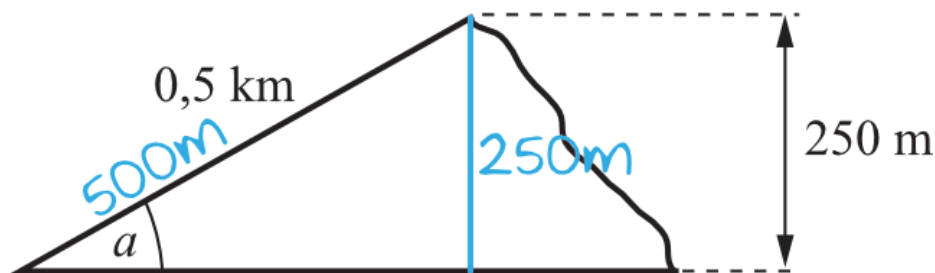


Miara kąta α , jaki tworzy droga na szczyt z podstawą góry, jest równa:

Odpowiedź: C (30°)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Z naszego rysunku możemy stworzyć tak naprawdę następujący trójkąt prostokątny:



Krok 2. Obliczenie wartości sinusa kąta α .

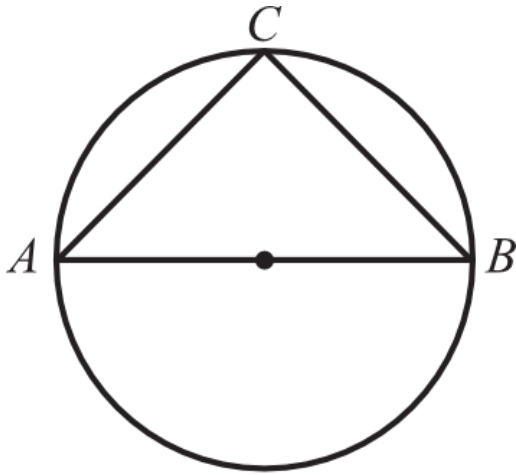
W celu obliczenia miary kąta skorzystamy z funkcji trygonometrycznych, a dokładniej rzecz ujmując z sinusa:

$$\sin \alpha = \frac{250m}{500m}, \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

Krok 3. Odczytanie z tablic trygonometrycznych miary kąta α .

Z tablic trygonometrycznych możemy odczytać, że sinus przyjmuje wartość $\frac{1}{2}$ dla kąta 30° .

W okrąg o średnicy AB wpisano trójkąt równoramienny ABC , w którym $|CB| = 6\sqrt{2}$.



Długość tego okręgu jest równa:

Odpowiedź: B (12π)

Krok 1. Obliczenie długości średnicy okręgu.

Jeżeli trójkąt jest wpisany w okrąg i jego bok jest jednocześnie średnicą tego okręgu, to na pewno ten trójkąt jest prostokątny. Ta obserwacja pozwoli nam obliczyć długość przeciwprostokątnej trójkąta (i tym samym średnicy okręgu) stosując dla tego trójkąta Twierdzenie Pitagorasa. Równie dobrze możemy też skorzystać z własności trójkątów o kątach 45° , 45° , 90° (wiemy że takie miary kątów ma ten trójkąt, bo jest to trójkąt prostokątny równoramienny).

Skorzystajmy zatem z Twierdzenia Pitagorasa. Obydwa ramiona AC oraz BC mają taką samą długość (bo jest to trójkąt równoramienny) i zgodnie z treścią zadania wynosi ona $6\sqrt{2}$. To oznacza, że przeciwprostokątna trójkąta, a tym samym średnica okręgu jest równa:

$$(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 = |AB|^2, \quad 36 \cdot 2 + 36 \cdot 2 = |AB|^2, \quad 72 + 72 = |AB|^2, \quad |AB|^2 = 144, \quad |AB| = 12 \quad \vee \quad |AB| = -12$$

Wartość ujemną oczywiście odrzucamy, bo średnica nie może mieć ujemnej długości, zatem $|AB| = 12$.

Krok 2. Obliczenie długości (czyli obwodu) okręgu.

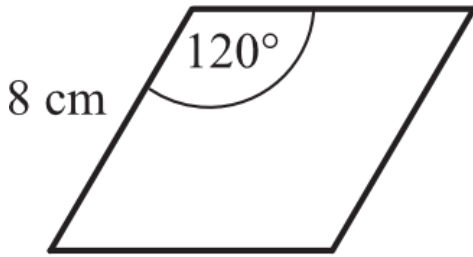
Do obliczenia długości obwodu będziemy potrzebować długość promienia, zatem skoro średnica ma długość 12, to promień ma długość $12 : 2 = 6$. Teraz możemy już bez problemu obliczyć długość okręgu:

$$Obw = 2\pi r, \quad Obw = 2\pi \cdot 6, \quad Obw = 12\pi$$

Zadanie 20

0–1 pkt

Romb ma wymiary podane na rysunku.



Pole tego rombu jest równe:

Odpowiedź: C ($32\sqrt{3}cm^2$)

Krok 1. Obliczenie miary kąta ostrego.

Spróbujmy obliczyć miarę kąta ostrego, który znajduje się w tym rombie. Wiemy, że suma kątów przy jednym ramieniu rombu musi być równa 180° , zatem kąt ostry ma miarę:

$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Krok 2. Obliczenie pola rombu.

Znając długość boku rombu oraz miarę jego kąta ostrego możemy zastosować "wzór na pole rombu z sinusem", czyli:

$$P = a^2 \cdot \sin \alpha, P = 8^2 \cdot \sin 60^\circ, P = 64 \cdot \frac{3}{2}, P = 32\sqrt{3}$$

Zadanie 21

0–1 pkt

Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $4x - 2y + 1 = 0$ jest równy:

Odpowiedź: D (2)

Krok 1. Zapisanie równania w postaci kierunkowej.

Musimy przekształcić nasze równanie do postaci kierunkowej, czyli postaci typu $y = ax + b$. Aby tego dokonać wystarczy po prostu poprzemieścić odpowiednio poszczególne wyrazy:

$$4x - 2y + 1 = 0, 4x + 1 = 2y \quad / : 2, y = 2x + \frac{1}{2}$$

Krok 2. Określenie współczynnika kierunkowego prostej równoległej.

Jeżeli prosta ma być równoległa, to znaczy że musi mieć identyczny współczynnik kierunkowy (czyli liczbę znajdującą się przed x w naszym przypadku współczynnik kierunkowy jest równy $a = 2$, zatem prosta równoległa także musi mieć $a = 2$).

Zadanie 22

0-1 pkt

Środek okręgu o równaniu $x^2 + (y + 2)^2 = 1$ leży w punkcie:

Odpowiedź: A ($S = (0, -2)$)

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a; b)$ oraz promieniu r przyjmuje postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Aby poznać współrzędne środka okręgu musimy dostosować nasze równanie do postaci równania okręgu. To oznacza, że musimy doprowadzić do sytuacji w której w naszym równaniu będziemy mieli w nawiasach odejmowanie. Dopiero wtedy odczytamy współrzędne środka. Nasze równanie możemy przekształcić więc w następujący sposób:

$$x^2 + (y + 2)^2 = 1, (x - 0)^2 + (y - (-2))^2 = 1^2$$

Teraz bez przeszkód możemy odczytać, że $a = 0$ oraz $b = -2$, zatem okrąg ten ma środek o współrzędnych $S = (0, -2)$.

Zadanie 23

0-1 pkt

Punkty $K = (0, 4)$ i $L = (6, -4)$ są wierzchołkami kwadratu $KLAM$. Obwód tego kwadratu jest równy:

Odpowiedź: D (40)

Krok 1. Obliczenie długości boku KL .

To zadanie nie jest do końca precyzyjne, bo nie wiemy czy K oraz L są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu, czy też wierzchołkami leżącymi po przekątnej. W zasadzie dopiero z nazwy kwadratu (czyli $KLAM$) powinniśmy wywnioskować, że faktycznie będą to sąsiednie boki. Skoro tak to odległość od punktu K do punktu L będzie jednocześnie długością boku takiego kwadratu. Długość odcinka KL obliczymy z następującego wzoru:

$$|KL| = \sqrt{(x_L - x_K)^2 + (y_L - y_K)^2}, |KL| = \sqrt{(6 - 0)^2 + (-4 - 4)^2}, |KL| = \sqrt{6^2 + (-8)^2}, |KL| = \sqrt{36 + 64}, |KL| = \sqrt{100}, |KL| = 10$$

Krok 2. Obliczenie obwodu kwadratu.

Skoro jest to kwadrat o boku $a = 10$, to jego obwód będzie równy:

$$Obw = 4 \cdot 10, Obw = 40$$

Zadanie 24

0-1 pkt

Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu jest równy $1 : 2 : 3$. Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe 88. Suma długości tych trzech krawędzi prostopadłościanu jest zatem równa:

Odpowiedź: A (12)

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

Skoro stosunek krawędzi prostopadłościanu jest równy $1 : 2 : 3$, to możemy zapisać że:

x - pierwsza długość

$2x$ - druga długość

$3x$ - trzecia długość

Krok 2. Utworzenie i rozwiązanie równania.

Korzystając ze wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $P = 2ab + 2ac + 2bc$ możemy zapisać, że:

$$2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 3x + 2 \cdot 2x \cdot 3x = 88, 4x^2 + 6x^2 + 12x^2 = 88, 22x^2 = 88, x^2 = 4, x = 2 \vee x = -2$$

Wartość ujemną oczywiście odrzucamy, bo długość nie może być ujemna. To oznacza, że $x = 2$.

Krok 3. Obliczenie sumy długości trzech krawędzi prostopadłościanu.

Korzystając z naszych oznaczeń i z obliczonej wartości $x = 2$ możemy teraz zapisać, że:

2 - pierwsza długość

$2 \cdot 2 = 4$ - druga długość

$3 \cdot 2 = 6$ - trzecia długość

Suma tych trzech długości jest równa $2 + 4 + 6 = 12$.

Zadanie 25

0-1 pkt

Średnia arytmetyczna wzrostu czterech chłopców jest równa 170cm . Chłopcy mają: 150cm , 170cm , 185cm , $x\text{ cm}$. Najwyższy chłopiec mierzy:

Odpowiedź: D (185cm)

Krok 1. Zapisanie i rozwiązanie równania.

Układając równanie ze średnią arytmetyczną otrzymamy:

$$\frac{150 + 170 + 185 + x}{4} = 170, \quad 505 + x = 680, \quad x = 175$$

Krok 2. Wybór właściwej odpowiedzi.

Udało nam się obliczyć, że czwarty chłopiec ma 175cm , a tym samym możemy stwierdzić, że najwyższy chłopiec mierzy 185cm .

Zadanie 26

0-2 pkt

Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 6x - 12 = 0$.

Odpowiedź: $x = \sqrt{6}$ lub $x = -\sqrt{6}$ lub $x = -2$

Krok 1. Wyłączenie odpowiednich czynników przed nawias i zapisanie równania w postaci iloczynowej.

W tego typu zadaniach musimy wyłączyć wspólne części przed nawias. Wspólną częścią pierwszego i drugiego wyrazu jest x^2 , a z trzeciego i czwartego wyrazu możemy wyłączyć liczbę -6 . To oznacza, że:

$$x^3 + 2x^2 - 6x - 12 = 0, \quad x^2(x + 2) - 6(x + 2) = 0, \quad (x^2 - 6)(x + 2) = 0$$

Krok 2. Wyznaczenie rozwiązań z postaci iloczynowej.

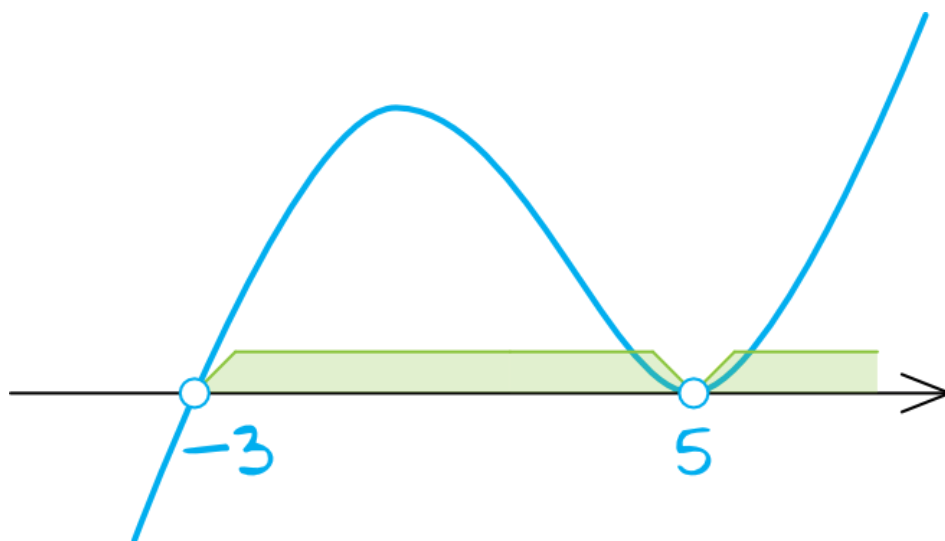
Korzystając z postaci iloczynowej przyrównujemy wartości w nawiasach do zera, wyznaczając w ten sposób rozwiązania naszej równości.

$$x^2 - 6 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0, \quad x^2 = 6 \quad \vee \quad x = -2, \quad x = \sqrt{6} \quad \vee \quad x = -\sqrt{6} \quad \vee \quad x = -2$$

Wszystkie otrzymane rozwiązania są poprawne, zatem to równanie ma trzy rozwiązania: $x = \sqrt{6} \quad \vee \quad x = -\sqrt{6} \quad \vee \quad x = -2$.

Zadanie 27

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $(x+3)(x-5)^2 > 0$.**Odpowiedź:** $x \in (-3; 5) \cup (5; +\infty)$

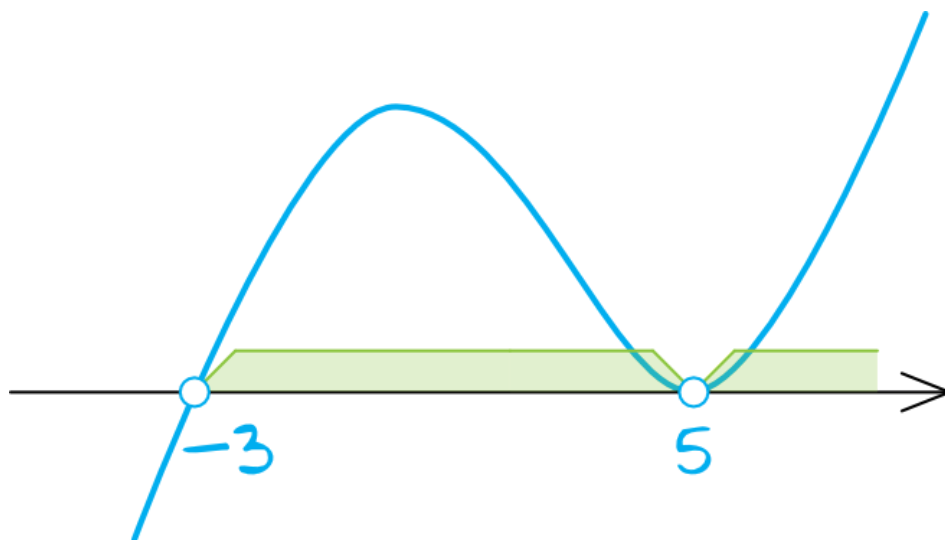
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Nasza nierówność podana jest w wygodnej formie iloczynowej, zatem aby obliczyć jej miejsca zerowe wystarczy przyrównać wartości znajdujące się w nawiasach do zera. Otrzymamy zatem:

$$x + 3 = 0 \quad \vee \quad x - 5 = 0, \quad x = -3 \quad \vee \quad x = 5$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu.

Nierówność jest nierównością trzeciego stopnia (to nie jest nierówność kwadratowa!), zatem jej wykresem nie będzie zwykła parabola, tylko linia tego typu:



Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas argumenty, dla których nierówność przyjmuje wartości większe od zera. W związku z tym: $x \in (-3; 5) \cup (5; +\infty)$.

Zadanie 28

0-2 pkt

Wykaż, że jeżeli $k > 0$, to równanie $x^2 + k(x - 1) = 0$ ma dwa pierwiastki.

Odpowiedź: Udowodniono obliczaj

Krok 1. Doprowadzenie równania do postaci ogólnej.

Spróbujmy zapisać to równanie w postaci ogólnej, tak aby móc z niego wyliczyć deltę. W tym celu musimy tak naprawdę wymnożyć tylko wartość k przez to co jest w nawiasie, zatem:

$$x^2 + k(x - 1) = 0, \quad x^2 + kx - k = 0$$

Krok 2. Obliczenie delty.

Mając równanie w postaci ogólnej możemy przejść do obliczenia delty. To, że mamy tutaj parametr k zamiast liczb zupełnie nam nie przeszkadza i całość wyglądać będzie następująco:

Współczynniki: $a = 1$, $b = k$, $c = -k$

$$\Delta = b^2 - 4ac = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) = k^2 + 4k$$

Krok 3. Interpretacja otrzymanej delty i zakończenie dowodzenia.

Wiemy, że parametr k ma być większy od zera. Skoro tak, to otrzymana delta będzie zawsze dodatnia, bo k^2 jest wtedy dodatnie oraz $4k$ będzie dodatnie. Skoro delta jest dodatnia dla $k > 0$, to znaczy że równanie ma wtedy dwa rozwiązania (czyli właśnie dwa pierwiastki) i to należało udowodnić.

Zadanie 29

0-2 pkt

Wykaż, że jeżeli α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg} \alpha = 2$, to $\cos \alpha$ jest liczbą niewymierną.

Odpowiedź: Udowodniono obliczaj

Krok 1. Zbudowanie układu równań.

Z własności funkcji trygonometrycznych wiemy, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ oraz że $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Skoro tak, to spróbujmy z tych własności oraz z danych z treści zadania ułożyć następujący układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

Krok 2. Rozwiązanie układu równań.

Najprościej będzie chyba wyznaczyć sinus z pierwszego równania i podstawić go do drugiego równania, zatem:

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \quad \bigg/ \cdot \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

Podstawiając sinus z pierwszego równania do drugiego otrzymamy:

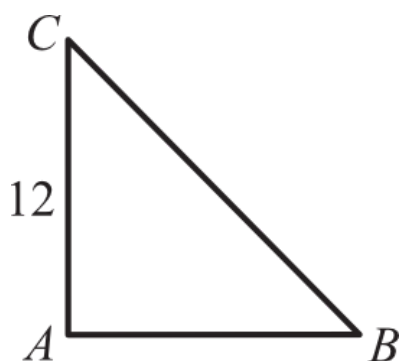
$$(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \quad 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 5 \cos^2 \alpha = 1, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} \quad \vee \quad \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}}$$

Ujemną wartość odrzucamy, bo mamy podaną informację że α jest kątem ostrym, a dla kątów ostrych cosinus przyjmuje wartości dodatnie. To oznacza, że $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$, a skoro $\sqrt{\frac{1}{5}}$ jest liczbą niewymierną, to na tym możemy zakończyć dowodzenie.

Zadanie 30

0-2 pkt

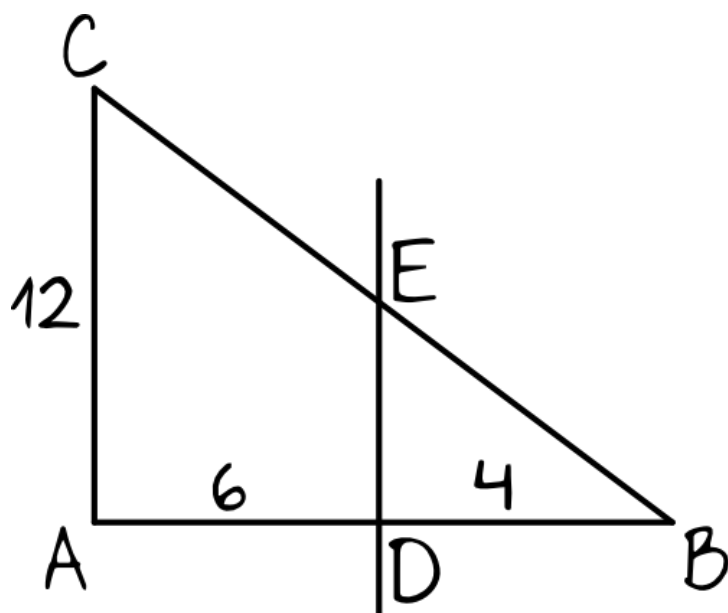
W trójkącie prostokątnym ABC na boku AB obrano punkt D oddalony od punktu A o 6 i od punktu B o 4. Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku AC , przecinającą bok BC w punkcie E . Oblicz długość odcinka DE .



Odpowiedź: $|DE| = 4,8$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

W zadaniu jest sporo informacji, więc spróbujmy je przedstawić na rysunku pomocniczym:



Krok 2. Zapisanie i rozwiązanie proporcji.

Musimy zauważyć, że trójkąty DBE oraz ABC są trójkątami podobnymi, a skoro tak to możemy ułożyć odpowiednią proporcję, która pozwoli nam odnaleźć długość odcinka DE .

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|DE|}, \quad \frac{10}{12} = \frac{4}{|DE|}$$

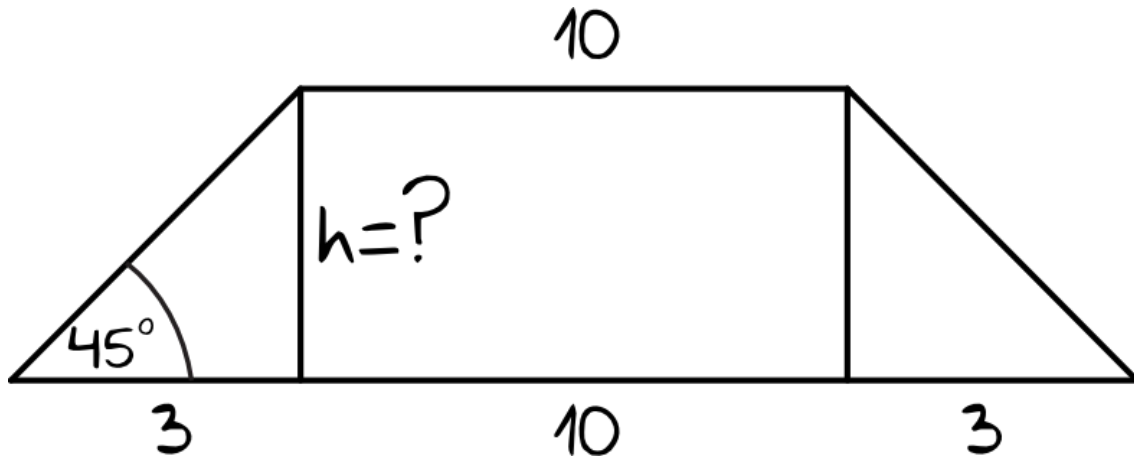
Mnożąc na krzyż otrzymamy:

$$10 \cdot |DE| = 48, \quad |DE| = 4,8$$

Zadanie 31

0-2 pkt

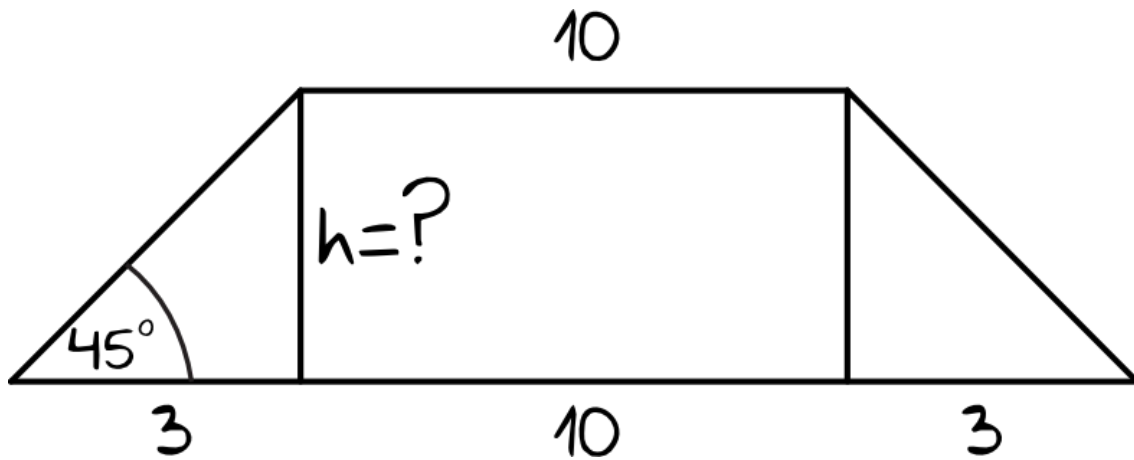
W trapezie równoramiennym miara kąta ostrego jest równa 45° , a podstawy mają długości: 16cm i 10cm . Oblicz pole trapezu.



Odpowiedź: $P = 39\text{cm}^2$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Kluczem do rozwiązania tego zadania będzie narysowanie wysokości trapezu, która utworzy nam trójkąt prostokątny.



Krok 2. Obliczenie wysokości trapezu.

Wysokość trapezu możemy obliczyć korzystając z funkcji trygonometrycznych, a konkretnie z tangensa:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{h}{3}, 1 = \frac{h}{3}, h = 3[\text{cm}]$$

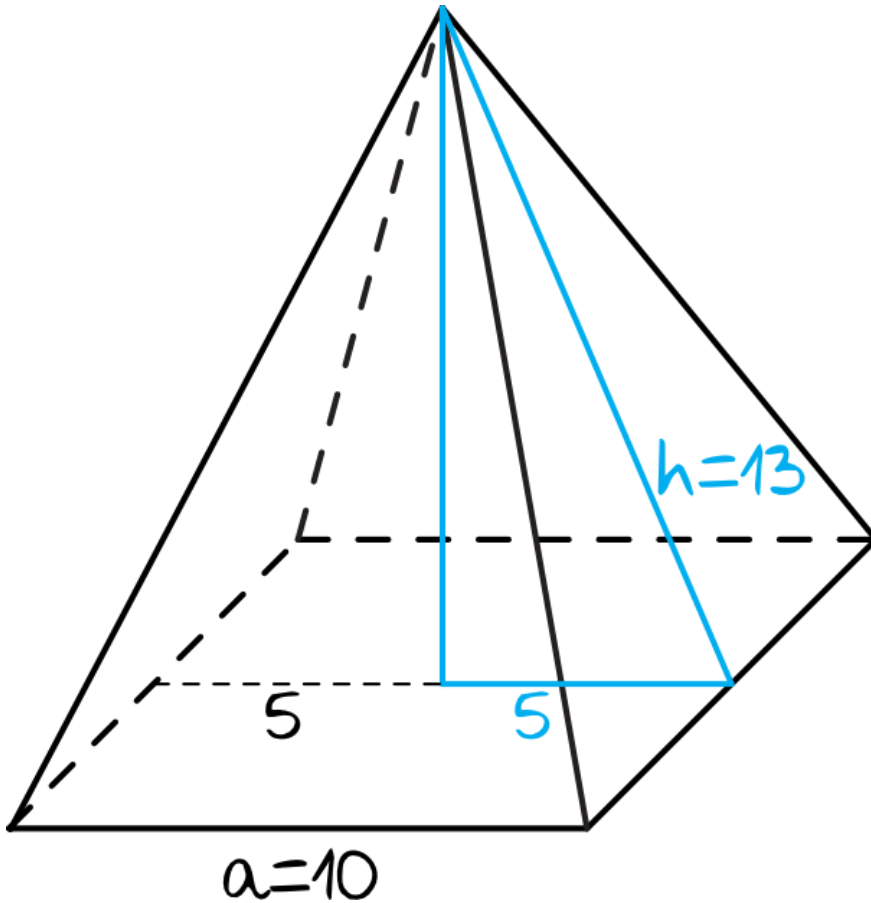
Mogliśmy tu też skorzystać z własności trójkątów o kątach 45° , 45° , 90° i wtedy także otrzymalibyśmy informację, że $h = 3$.

Krok 3. Obliczenie pola trapezu.

Znając wysokość trapezu możemy przystąpić do obliczenia jego pola:

$$P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h, P = \frac{1}{2} \cdot (10 + 16) \cdot 3, P = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 3, P = 13 \cdot 3, P = 39[\text{cm}^2]$$

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole podstawy jest równe 100, a pole ściany bocznej jest równe 65. Oblicz objętość ostrosłupa.



Odpowiedź: $V = 400$

Krok 1. Obliczenie długości krawędzi podstawy.

Skoro jest to ostrosłup prawidłowy czworokątny to znaczy, że w jego podstawie znajduje się kwadrat. Wiemy, że kwadrat ten ma pole powierzchni równe 100, zatem:

$$P = a^2, 100 = a^2, a = 10 \quad \vee \quad a = -10$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy i zostaje nam, że krawędź boczna ma długość $a = 10$.

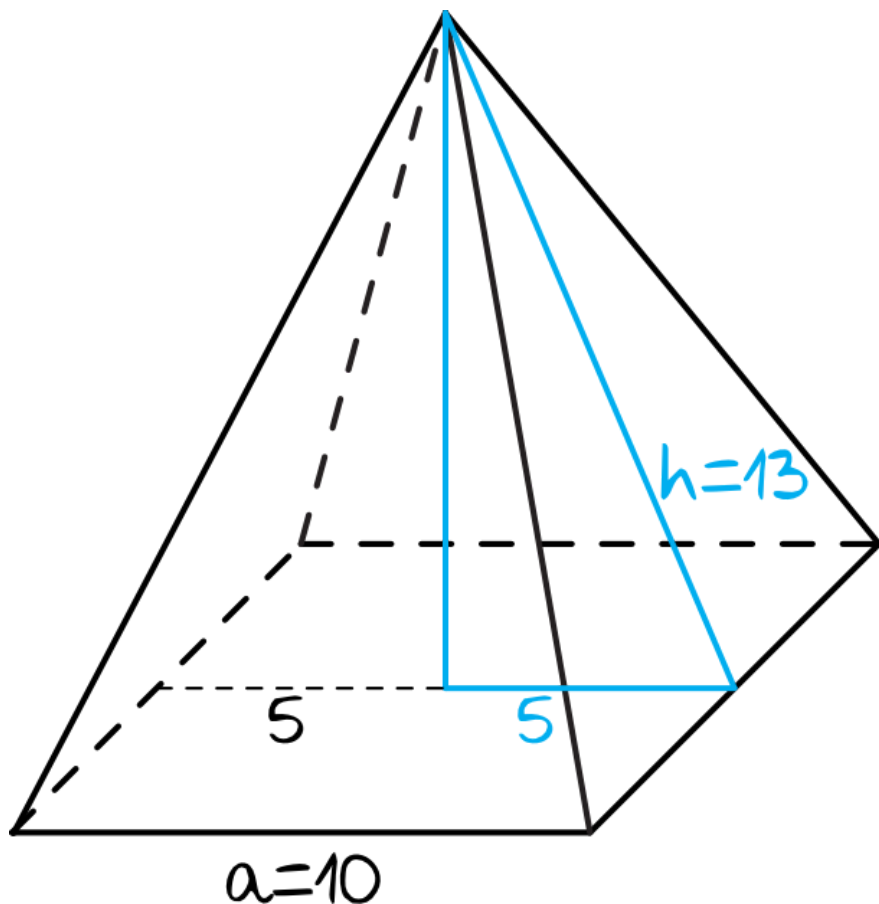
Krok 2. Obliczenie wysokości ściany bocznej.

W ścianie bocznej o polu powierzchni $P_b = 65$ mamy trójkąt o podstawie $a = 10$. To oznacza, że możemy bez przeszkód obliczyć wysokość ściany bocznej.

$$P_b = \frac{1}{2}ah, 65 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h, 65 = 5h, h = 13$$

Krok 3. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy teraz narysować ten ostrosłup i zaznaczyć w nim obliczone przed chwilą wielkości:



Z rysunku wynika, że wysokość ostrosłupa (potrzebna do obliczenia objętości) będziemy mogli wyznaczyć z trójkąta prostokątnego, którego dolna przyprostokątna jest połową boku kwadratu (stąd też bierze się długość równa 5), a przeciwprostokątna ma długość 13.

Krok 4. Obliczenie wysokości ostrosłupa.

Wysokość tego ostrosłupa najprościej będzie wyznaczyć z Twierdzenia Pitagorasa:

$$5^2 + H^2 = 13^2, \quad 25 + H^2 = 169, \quad H^2 = 144, \quad H = 12 \quad \vee \quad H = -12$$

Ujemną wartość odrzucamy, bo wysokość nie może być ujemna, zatem $H = 12$.

Krok 5. Obliczenie objętości ostrosłupa.

Znając pole podstawy oraz wysokość ostrosłupa możemy bez przeszkód obliczyć objętość bryły:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H, \quad V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12, \quad V = 400$$

W pudełku znajduje się 6 kul białych i 2 czarne. Wyciągamy z niego jedną kulę, odkładamy ją i losujemy drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyciągniemy kule różnych kolorów.

Odpowiedź: $p = \frac{3}{7}$

Krok 1. Rozpatrzenie pierwszego losowania.

W pudełku znajduje się 6 białych kul oraz 2 czarne, zatem łącznie jest 8 kul. Prawdopodobieństwo wylosowania w pierwszym losowaniu białej kuli jest zatem równe $\frac{6}{8}$, natomiast czarnej jest równe $\frac{2}{8}$.

Krok 2. Rozpatrzenie drugiego losowania.

Jeżeli za pierwszym razem wylosowaliśmy białą kulę, to zostało 5 białych kul i 2 czarne. Łącznie mamy 7 kul, a szanse na wylosowanie czarnej kuli są teraz równe $\frac{2}{7}$.

Jeżeli za pierwszym razem wylosowaliśmy czarną kulę, to zostało 6 białych kul i 1 czarna. Łącznie mamy 7 kul, a szanse na wylosowanie białej kuli są teraz równe $\frac{6}{7}$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa wyciągnięcia kul różnych kolorów.

Prawdopodobieństwo wylosowania za pierwszym razem białej kuli, a za drugim czarnej, jest równe:

$$p_1 = \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{12}{56}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania za pierwszym razem czarnej kuli, a za drugim białej, jest równe:

$$p_2 = \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{12}{56}$$

Interesują nas obydwa te przypadki zatem prawdopodobieństwa musimy do siebie dodać. To oznacza, że prawdopodobieństwo wyciągnięcia kul różnych kolorów jest równe:

$$p = \frac{12}{56} + \frac{12}{56} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

Iloczyn pewnej liczby i liczby o 1 od niej większej jest równy 6. Oblicz sumę tych liczb.

Odpowiedź: -5 lub 5

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń i ułożenie równania.

x - pierwsza liczba

$x + 1$ - druga liczba

Z treści zadania wynika, że iloczyn (czyli wynik mnożenia) tych liczb jest równy 6, zatem:

$$x \cdot (x + 1) = 6$$

Krok 2. Zapisanie równania kwadratowego w postaci ogólnej.

Nasze równanie będzie równaniem kwadratowym, ale aby móc je rozwiązać musimy doprowadzić je do postaci ogólnej, z której potem będziemy mogli liczyć deltę.

(Uwaga - nie możemy tutaj rozwiązać tej równości przyrównując wartości w nawiasie do zera, bo po prawej stronie nie mamy zera tylko szóstkę. Nie jest to więc postać iloczynowa).

$$x \cdot (x + 1) = 6, x^2 + x = 6, x^2 + x - 6 = 0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Teraz możemy przejść do obliczenia delty:

Współczynniki: $a = 1$, $b = 1$, $c = -6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 - (-24) = 25, \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Krok 4. Interpretacja otrzymanego rozwiązania i odnalezienie pary liczb.

Z równania kwadratowego otrzymaliśmy dwie możliwości: $x = -3$ oraz $x = 2$. Żadnej z nich nie możemy odrzucić, a to oznacza, że tak naprawdę warunki zadania będą spełniać dwie różne pary liczb:

I para: -3 oraz liczba o jeden większa, czyli -2

II para: 2 oraz liczba o jeden większa, czyli 3

Krok 5. Obliczenie sumy tych liczb.

Skoro mamy dwie pary liczb spełniających warunki zadania to i otrzymamy dwie możliwości sumy:

I para: $-3 + (-2) = -5$

II para: $3 + 2 = 5$

Suma dwóch liczb jest więc równa -5 lub 5 .