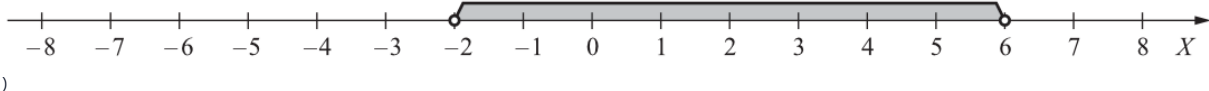


Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Operon 2009

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D (3^6)	1
2	B ($\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$)	1
3	B ()	1
4	B (8π)	1
5	D (150)	1
6	C ($4\sqrt{3}$)	1
7	D (5)	1
8	C ($(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$)	1
9	C (3)	1
10	D (16)	1
11	B ($m = -5$)	1
12	B (25%)	1
13	B ($x^3 - 6x^2 + 8x$)	1
14	A (20)	1
15	D (-1)	1
16	C (-17)	1
17	A ($\frac{1}{2}$)	1
18	A (13)	1
19	C (20°)	1
20	B ($x > 6$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

Liczba $27^{-2} \cdot 9^6$ jest równa:

Odpowiedź: D (3^6)

Aby rozwiązać to zadanie najprościej będzie zamienić wszystkie potęgi na takie, które mają jednakową podstawę. Jak już to zrobimy, to zostanie nam tylko wykonać poprawnie działania na potęgach. W tym przypadku wspólną podstawą może być trójka, zatem:

$$27^{-2} \cdot 9^6 = (3^3)^{-2} \cdot (3^2)^6 = 3^{-6} \cdot 3^{12} = 3^6$$

0-1 pkt

Zadanie 2

Kąt α jest ostry i $\sin \alpha = \frac{2}{7}$. Wtedy $\cos \alpha$ jest równy:

Odpowiedź: B ($\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$)

Z jedynki trygonometrycznej wiemy, że $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Wartość sinusa znamy, zatem:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \frac{4}{49} + \cos^2 \alpha = 1 \quad \Bigg/ - \frac{4}{49}, \cos^2 \alpha = \frac{45}{49}, \cos \alpha = \sqrt{\frac{45}{49}} \vee \cos \alpha = -\sqrt{\frac{45}{49}}$$

Z równania otrzymaliśmy dwa rozwiązania, ale ujemne rozwiązanie musimy odrzucić, a to dlatego że w treści zadania jest podana informacja o tym iż kąt α jest ostry. Dla kątów ostrych cosinus przyjmuje jedynie wartości dodatnie, stąd też prawidłową odpowiedzią jest jedynie $\cos \alpha = \sqrt{\frac{45}{49}}$.

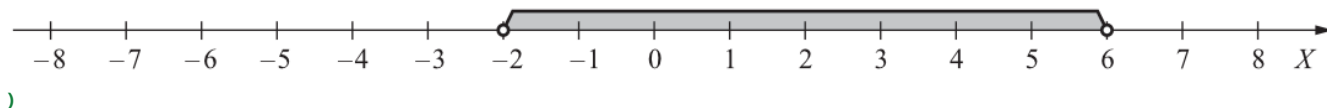
0-1 pkt

Zadanie 3

0-1 pkt

Zaznacz, na którym rysunku jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x - 2| < 4$.

Odpowiedź: B (



Aby wybrać odpowiedni rysunek, to najpierw musimy rozwiązać tę nierówność, tak jak rozwiązuje się nierówności z wartością bezwzględną, czyli:

$$|x - 2| < 4, \quad x - 2 < 4 \quad \vee \quad x - 2 > -4, \quad x < 6 \quad \vee \quad x > -2, \quad x \in (-2; 6)$$

Zbiór rozwiązań tej nierówności został więc przedstawiony na drugim rysunku.

Zadanie 4

0-1 pkt

Dany jest okrąg o równaniu $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$. Długość tego okręgu jest równa:

Odpowiedź: B (8π)

Krok 1. Obliczenie długości promienia okręgu.

Z tablic matematycznych możemy odczytać, że wzór na równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a; b)$ oraz promieniu r ma postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Nas z tego wzoru interesuje tylko długość promienia. Przyrównując wzór z tablic do wzoru z treści zadania (a w zasadzie tylko to co pojawia się po prawej stronie po znaku równości) widzimy, że:

$$r^2 = 16, \quad r = 4 \quad \vee \quad r = -4$$

Wartość ujemną oczywiście odrzucamy, bo promień nie może być ujemny. To oznacza, że promień tego okręgu ma długość 4.

Krok 2. Obliczenie długości (czyli obwodu) tego okręgu.

Znając długość promienia możemy bez problemu obliczyć długość obwodu tego okręgu:

$$Obw = 2\pi r, \quad Obw = 2\pi \cdot 4, \quad Obw = 8\pi$$

Zadanie 5

0-1 pkt

Objętość sześcianu jest równa 125. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe:

Odpowiedź: D (150)

Krok 1. Obliczenie długości krawędzi sześcianu.

Długość krawędzi sześcianu obliczymy korzystając z informacji o objętości tej bryły:

$$V = a^3, \quad 125 = a^3, \quad a = 5$$

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni całkowitej sześcianu.

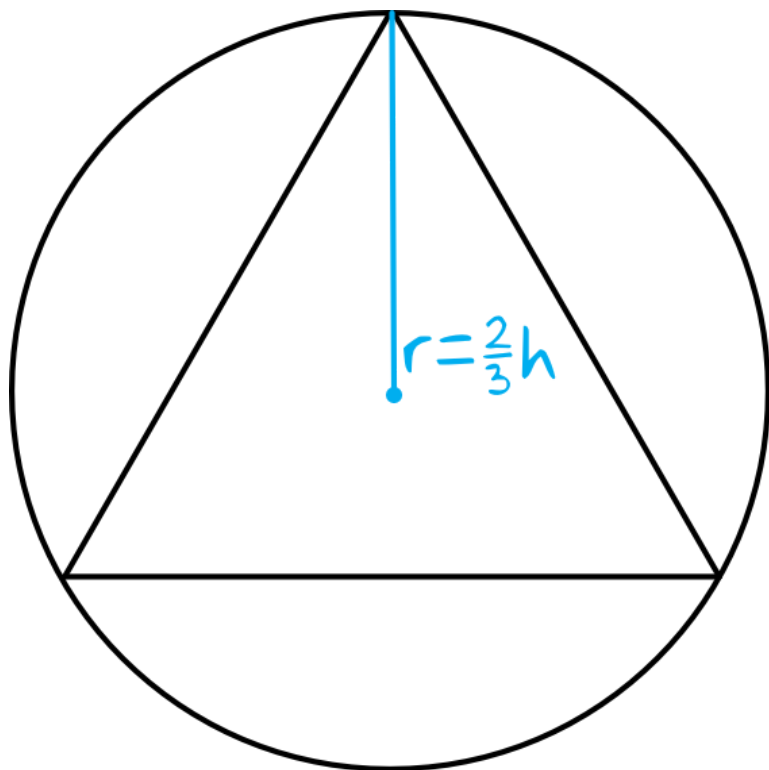
Sześcian składa się z sześciu jednakowych ścian, które są kwadratami. W naszym przypadku są to kwadraty o boku długości 5, zatem:

$$P_c = 6a^2, \quad P_c = 6 \cdot 5^2, \quad P_c = 6 \cdot 25, \quad P_c = 150$$

Zadanie 6

0-1 pkt

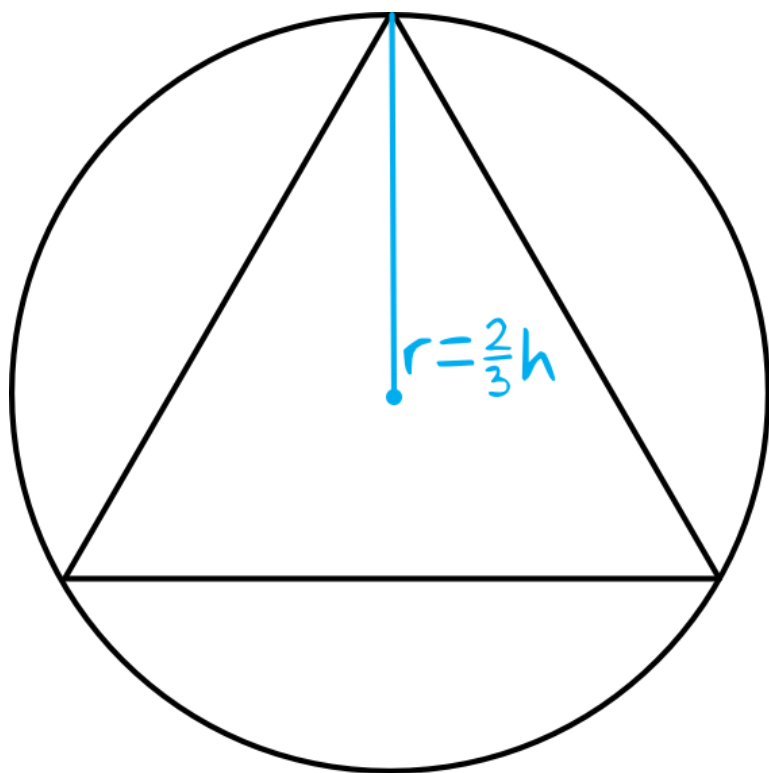
Wysokość trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg jest równa $6\sqrt{3}$. Promień tego okręgu jest równy:



Odpowiedź: C ($4\sqrt{3}$)

Zgodnie z własnościami trójkątów równobocznych wpisanych w okrąg, promień takiego okręgu stanowi $\frac{2}{3}$ długości wysokości trójkąta. W związku z tym:

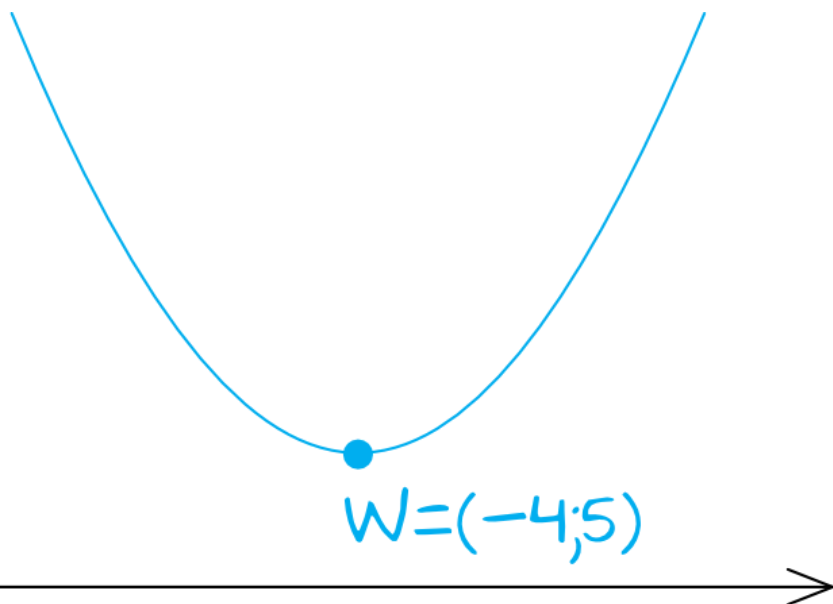
$$r = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$



Zadanie 7

0-1 pkt

Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = 3(x - 4)^2 + 5$ to:



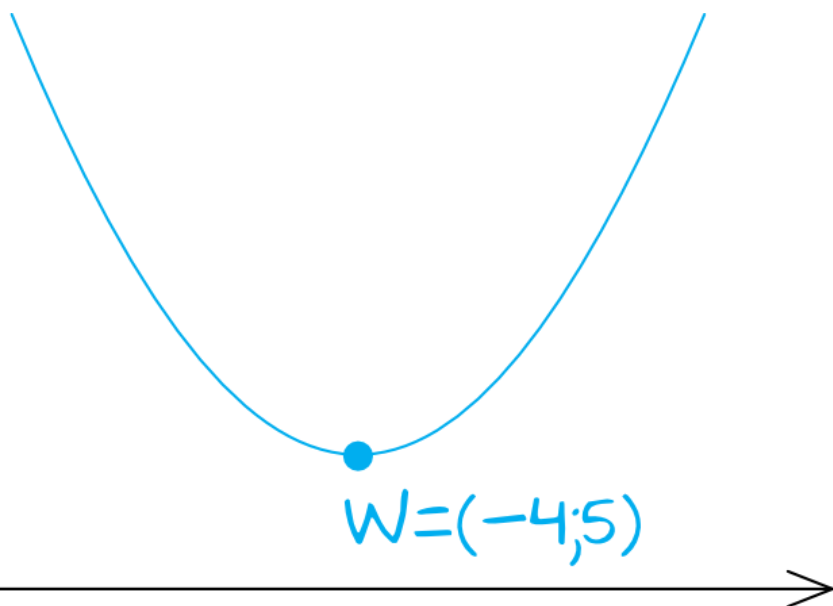
Odpowiedź: D (5)

Krok 1. Określenie współrzędnych wierzchołka paraboli.

Funkcja kwadratowa przedstawiona jest w postaci kanonicznej, czyli takiej z której w prosty sposób możemy odczytać wierzchołek paraboli. Postać kanoniczną opisujemy jako $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie p oraz q są współrzędnymi wierzchołka paraboli $W = (p; q)$. Skoro znamy wzór naszej funkcji i jest ona przedstawiona dokładnie w takiej postaci jakiej potrzebujemy (nawet znaki plus i minus się zgadzają), to bez problemu odczytamy z niej współrzędne wierzchołka paraboli: $W = (4; 5)$.

Krok 2. Ustalenie najmniejszej wartości funkcji kwadratowej.

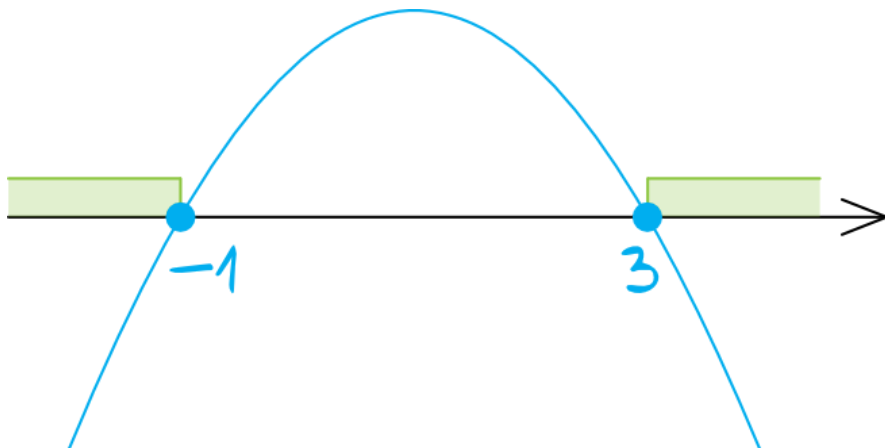
Nasza funkcja kwadratowa jest parabolą, która ma ramiona skierowane do góry (wiemy to, bo gdybyśmy przekształcili ją do postaci ogólnej, czyli wymnożyli to wszystko przez siebie, to przed x^2 stałaby dodatnia wartość). Skoro tak, to najmniejszą wartość funkcja ta przyjmuje w swoim wierzchołku i my współrzędne tego wierzchołka już znamy. W związku z tym możemy stwierdzić, że nasza funkcja przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu $x = -4$, a tą wartością będzie $y = 5$.



Zadanie 8

0-1 pkt

Zbiorem rozwiązań nierówności $-(x+1)(x-3) \leq 0$ jest:



Odpowiedź: C $((-\infty, -1) \cup (3, \infty))$

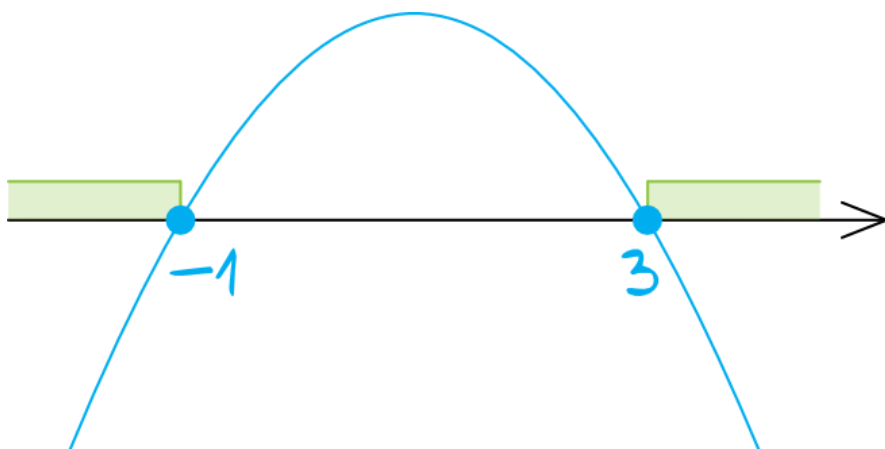
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Ta nierówność jest zapisana w postaci iloczynowej, zatem w bardzo łatwy sposób wyznaczmy jej miejsca zerowe - wystarczy przyrównać wartość każdego z nawiasów do zera:

$$x + 1 = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0, \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 3$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Ramiona paraboli będą skierowane do dołu (a to za sprawą tego minusa, który znalazł się na początku nierówności). Zaznaczamy wyznaczone przed chwilą miejsca zerowe (kropki będą zamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $\leq$) i szkicujemy wykres paraboli.



Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas wartości mniejsze lub równe zero, zatem rozwiązaniem naszej nierówności jest suma przedziałów:

$$x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$$

Zadanie 9

0-1 pkt

Liczba $\log_0 1 + \log_2 16$ jest równa:

Odpowiedź: C (3)

Jeżeli logarytm nie ma podanej podstawy, to znaczy że domyślnie znajduje się tam 10 (czyli $\log_0 1 = \log_{10} 0, 1$). To oznacza, że te dwa logarytmy które pojawiły się w zadaniu mają dwie zupełnie różne podstawy. Skoro tak, to nie wykonamy tutaj żadnych działań bezpośrednio na logarytmach, ale możemy wprost obliczyć wartość jednego i drugiego logarytmu:

$$\log_0 1 = -1, \quad \log_2 16 = 4$$

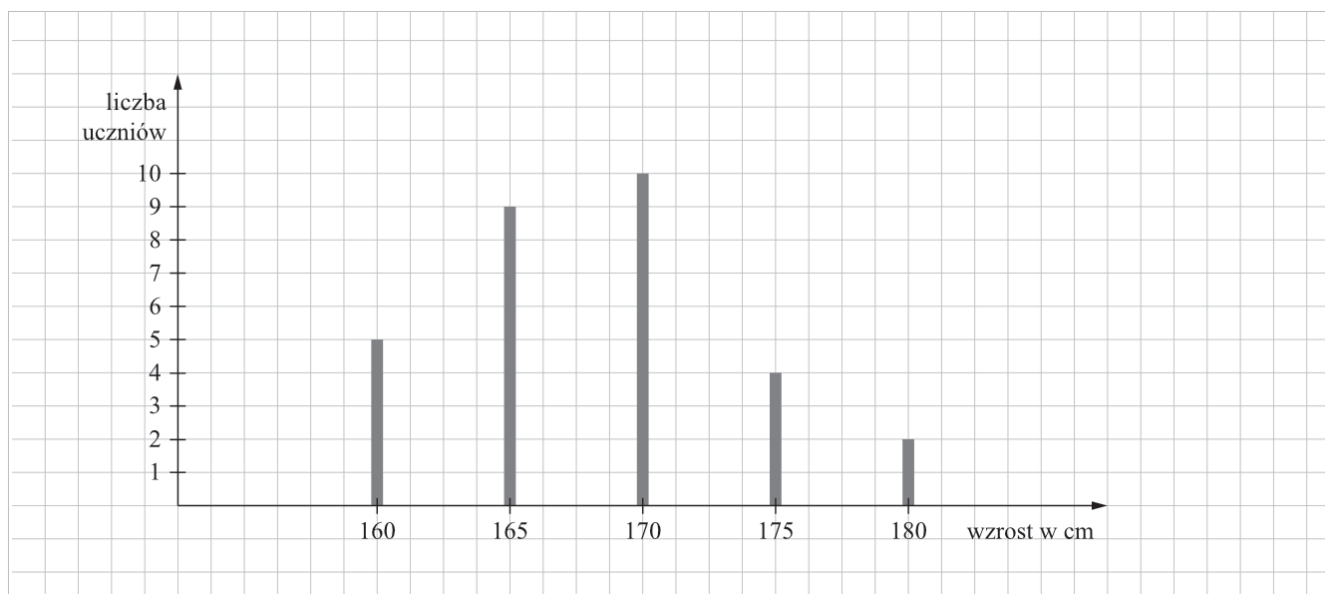
W związku z tym:

$$\log_0 1 + \log_2 16 = -1 + 4 = 3$$

Zadanie 10

0-1 pkt

Na diagramie są przedstawione wyniki pomiaru wzrostu uczniów klasy 3d.



Ile osób w tej klasie ma wzrost powyżej średniego?

Odpowiedź: D (16)

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich uczniów w klasie.

W klasie jest:

$$5 + 9 + 10 + 4 + 2 = 30 \text{ uczniów}$$

Krok 2. Obliczenie średniego wzrostu.

Skorzystamy tutaj ze średniej arytmetycznej. W liczniku dodajemy do siebie wszystkie wyniki pomiaru wzrostu, a w mianowniku zapisujemy łączną liczbę uczniów:

$$\bar{s}r = \frac{160 \cdot 5 + 165 \cdot 9 + 170 \cdot 10 + 175 \cdot 4 + 180 \cdot 2}{30}, \bar{s}r = \frac{800 + 1485 + 1700 + 700 + 360}{30}, \bar{s}r = \frac{5045}{30}, \bar{s}r \approx 168,2[cm]$$

Krok 3. Ustalenie ilu uczniów ma wzrost powyżej średniego.

Powyżej średniego wzrostu (czyli wzrost 170cm, 175cm lub 180cm) ma łącznie:

$$10 + 4 + 2 = 16 \text{ uczniów}$$

Zadanie 11

0-1 pkt

Prosta o równaniu $y = mx + 6$ przechodzi przez punkt $A = (2, -4)$, gdy:

Odpowiedź: B ($m = -5$)

Aby sprawdzić jaki parametr m ma nasza prosta wystarczy podstawić do jej równania współrzędne punktu A , czyli podstawić $x = 2$ oraz $y = -4$.

$$y = mx + 6, -4 = m \cdot 2 + 6, -10 = 2m, m = -5$$

Zadanie 12

0-1 pkt

Torba kosztowała 40zł, a po podwyżce 50zł. O ile procent podwyższono cenę tej torby?

Odpowiedź: B (25%)

Krok 1. Obliczenie wzrostu ceny torby.

Torba kosztowała 40zł, teraz kosztuje 50zł, zatem jej cena wzrosła o:

$$50\text{zł} - 40\text{zł} = 10\text{zł}$$

Krok 2. Obliczenie o ile procent podwyższono cenę torby.

Torba kosztowała 40zł, podniesiono jej cenę o 10zł, zatem podniesiono jej cenę o:

$$\frac{10\text{zł}}{40\text{zł}} \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$$

Zadanie 13

0-1 pkt

Dane są wielomiany $W(x) = x - 4$ i $M(x) = x^2 - 2x$. Wielomian $W(x) \cdot M(x)$ jest równy:

Odpowiedź: B ($x^3 - 6x^2 + 8x$)

Naszym zadaniem jest po prostu wymnożenie przez siebie tych dwóch wielomianów:

$$W(x) \cdot M(x) = (x - 4) \cdot (x^2 - 2x) = , = x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x = , = x^3 - 6x^2 + 8x$$

Zadanie 14

0-1 pkt

Punkty $P = (-1, 2)$ i $R = (3, -1)$ są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu. Obwód tego kwadratu jest równy:

Odpowiedź: A (20)

Krok 1. Obliczenie długości boku kwadratu.

Skoro punkty P oraz R są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu, to możemy korzystając z tej informacji obliczyć długość boku kwadratu. Najprościej będzie to zrobić stosując następujący wzór na długość odcinka w układzie współrzędnych:

$$|PR| = \sqrt{(x_R - x_P)^2 + (y_R - y_P)^2}$$

Stosując ten wzór do naszych danych otrzymamy:

$$|PR| = \sqrt{(x_R - x_P)^2 + (y_R - y_P)^2}, |PR| = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-1 - 2)^2}, |PR| = \sqrt{4^2 + (-3)^2}, |PR| = \sqrt{16 + 9}, |PR| = \sqrt{25}, |PR| = 5$$

Zadanie 15

0-1 pkt

Liczby 5, $x + 4$, 1 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Zatem liczba x jest równa:

Odpowiedź: D (-1)

Zgodnie z własnościami ciągów arytmetycznych dla trzech kolejno wypisanych wyrazów ciągu prawdziwa będzie zależność:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Znamy wartość pierwszego i trzeciego wyrazu, drugi wyraz jest opisany jako $x + 4$, zatem:

$$x + 4 = \frac{5 + 1}{2}, x + 4 = \frac{6}{2}, x + 4 = 3, x = -1$$

Zadanie 16

0-1 pkt

Wykres funkcji $f(x) = 4^x + k$ przechodzi przez punkt $(2, -1)$, gdy liczba k jest równa:

Odpowiedź: C (-17)

Aby poznać wartość parametru k wystarczy podstawić do wzoru tej funkcji współrzędne znanego nam punktu, czyli $x = 2$ oraz $y = -1$:

$$f(x) = 4^x + k, -1 = 4^2 + k, -1 = 16 + k, k = -17$$

Zadanie 17

0-1 pkt

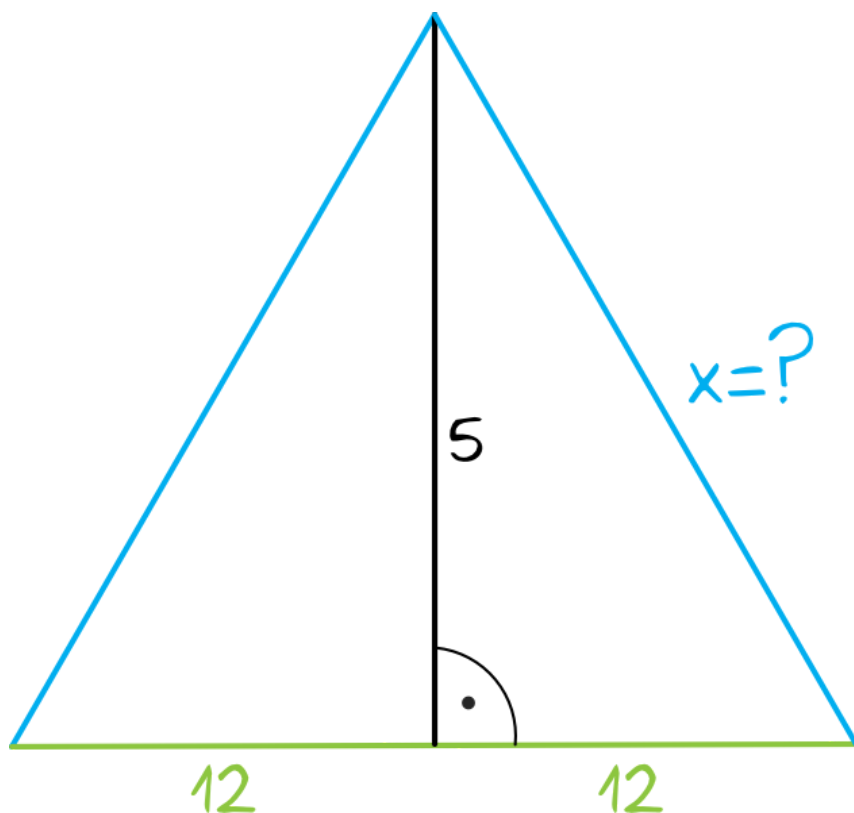
W ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy 1, a iloraz czwartego wyrazu przez trzeci jest równy $\frac{1}{2}$. Drugi wyraz tego ciągu jest równy:

Odpowiedź: A ($\frac{1}{2}$)

Z treści zadania wynika wprost, że iloraz tego ciągu geometrycznego jest równy $q = \frac{1}{2}$. Znamy wartość pierwszego wyrazu, znamy też iloraz ciągu, więc możemy obliczyć wartość dowolnego wyrazu:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad a_2 = a_1 \cdot q^{2-1}, \quad a_2 = a_1 \cdot q^1, \quad a_2 = 1 \cdot \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

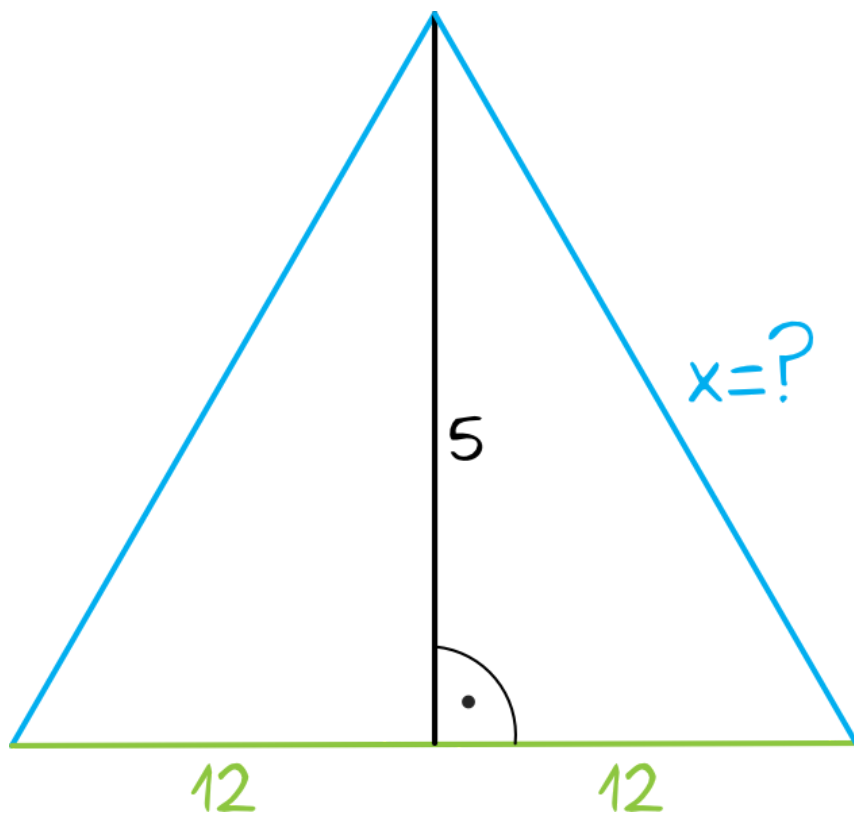
Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 24, a wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa 5. Ramię tego trójkąta ma długość:



Odpowiedź: A (13)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Wysokość w trójkącie równoramiennym dzieli podstawę na dwie równe części w związku z tym:



To oznacza, że długość ramienia obliczymy wprost z Twierdzenia Pitagorasa.

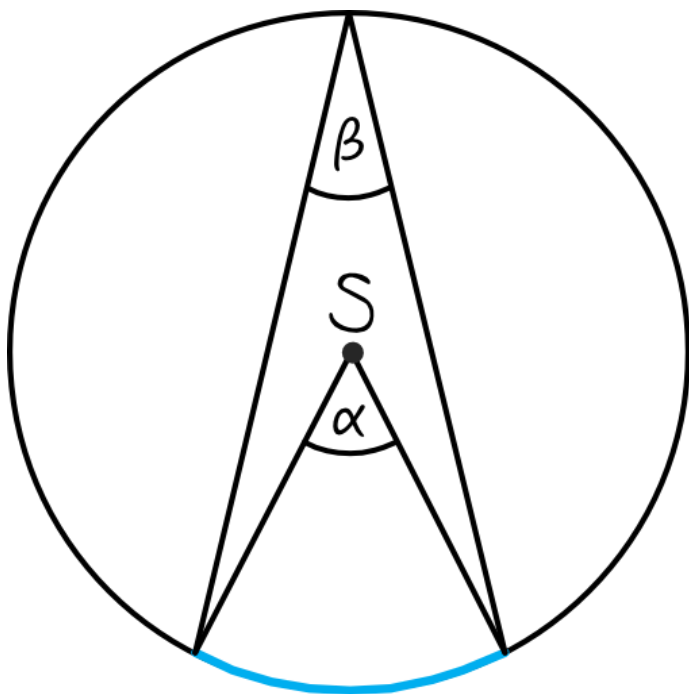
Krok 2. Obliczenie długości ramienia trójkąta.

Korzystając z trójkąta prostokątnego, który stworzyła nam wysokość możemy zapisać zgodnie z Twierdzeniem Pitagorasa:

$$12^2 + 5^2 = x^2, 144 + 25 = x^2, 169 = x^2, x = 13 \quad \vee \quad x = -13$$

Ujemną długość odrzucamy, zatem zostaje nam $x = 13$.

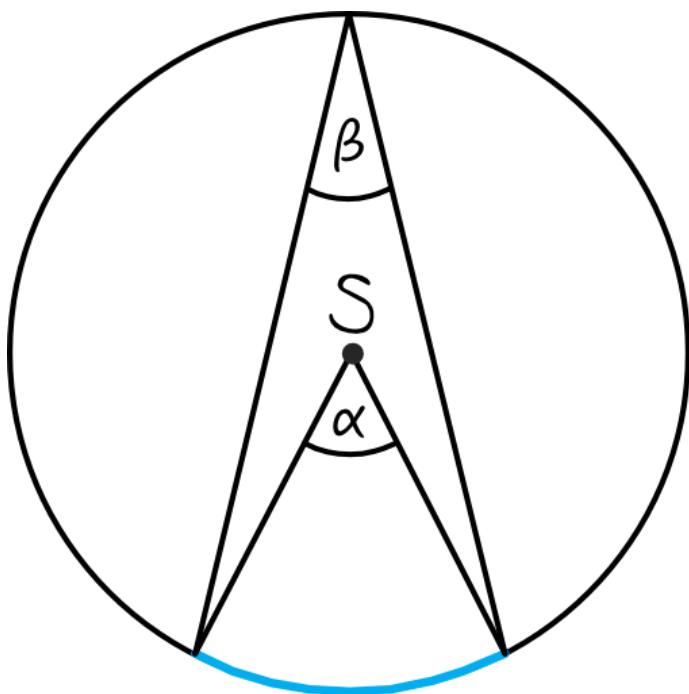
Kąt środkowy α jest oparty na łuku wyznaczonym przez $\frac{1}{9}$ okręgu. Kąt wpisany, oparty na tym samym łuku, co kąt α ma miarę:



Odpowiedź: C (20°)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy narysować sobie tę sytuację:



Zgodnie z oznaczeniami na powyższym rysunku będziemy poszukiwać miary kąta wpisanego, czyli kąta β .

Krok 2. Obliczenie miary kąta α .

Kąt α będzie stanowił $\frac{1}{9}$ kąta pełnego, czyli będzie mieć miarę:

$$\frac{1}{9} \cdot 360^\circ = 40^\circ$$

Krok 3. Obliczenie miary kąta β .

Z własności kątów środkowych i wpisanych (które są oparte na tym samym łuku) wynika, że miara kąta wpisanego jest dwukrotnie mniejsza od miary kąta środkowego, czyli:

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha, \beta = \frac{1}{2} \cdot 40^\circ, \beta = 20^\circ$$

Zadanie 20

0-1 pkt

Funkcja liniowa $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ przyjmuje wartości ujemne dla:

Odpowiedź: B ($x > 6$)

Krok 1. Zapisanie nierówności.

Chcemy się dowiedzieć kiedy funkcja przyjmuje wartości ujemne, czyli kiedy zajdzie następująca nierówność:

$$-\frac{2}{3}x + 4 < 0$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałej nierówności.

Teraz musimy rozwiązać naszą nierówność, pamiętając o tym by dzieląc lub mnożąc przez liczbę ujemną zmienić znak na przeciwny:

$$-\frac{2}{3}x + 4 < 0, -\frac{2}{3}x < -4 \quad / \cdot (-3), 2x > 12, x > 6$$

Zadanie 21

0-2 pkt

Rozwiąż równanie $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Odpowiedź: $x = -1$

Krok 1. Wylączenie odpowiednich czynników przed nawias i zapisanie równania w postaci iloczynowej.

Tradycyjnie w tego typu zadaniach musimy wyłączyć wspólne części przed nawias. Wspólną częścią pierwszego i drugiego wyrazu jest x^2 , a z trzeciego i czwartego wyrazu możemy wyłączyć liczbę 1. To oznacza, że:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0, x^2(x + 1) + 1(x + 1) = 0, (x^2 + 1)(x + 1) = 0$$

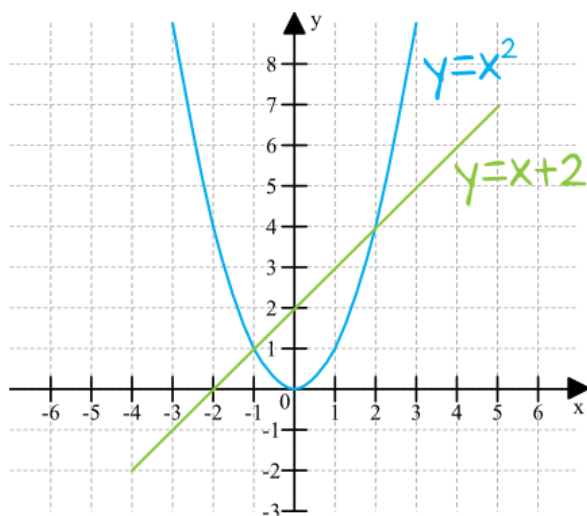
Krok 2. Wyznaczenie rozwiązań z postaci iloczynowej.

Korzystając z postaci iloczynowej przyrównujemy wartości w nawiasach do zera, wyznaczając w ten sposób rozwiązania naszej równości.

$$x^2 + 1 = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0, x^2 = -1 \quad \vee \quad x = -1$$

Z pierwszego równania nie uzyskamy żadnego rozwiązania, bo nie istnieje jakakolwiek liczba rzeczywista, która podniesiona do kwadratu daje liczbę ujemną. Zatem jedynym rozwiązaniem tego równania jest $x = -1$.

Rozwiąż graficznie nierówność $x^2 > x + 2$.

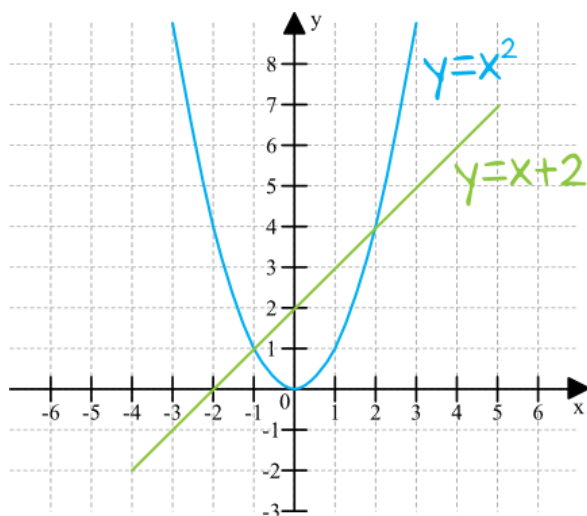


Odpowiedź: $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

To zadanie moglibyśmy rozwiązać jak klasyczną nierówność (czyli np. metodą delty), pamiętając o tym by najpierw przenieść wszystkie wyrazy na lewą stronę. Jednak w tym zadaniu proszą nas o graficzne rozwiązanie podanej nierówności, zatem powinniśmy zgodnie z poleceniem pokusić się o rozwiązanie tej nierówności rysując po prostu wykresy funkcji, których wzory znalazły się po lewej i prawej stronie nierówności, czyli x^2 oraz $x + 2$.

Krok 1. Sporządzenie wykresów funkcji x^2 oraz $x + 2$.

Z racji tego, iż mamy rozwiązać graficznie naszą nierówność, to nasz rysunek powinien być jak najdokładniejszy. W szczególności musimy zwrócić uwagę na to, by parabola x^2 miała wierzchołek w początku układu współrzędnych, a prosta $x + 2$ przecinała oś igreków w punkcie $(0; 2)$.



Krok 2. Interpretacja rysunku i odczytanie rozwiązań nierówności.

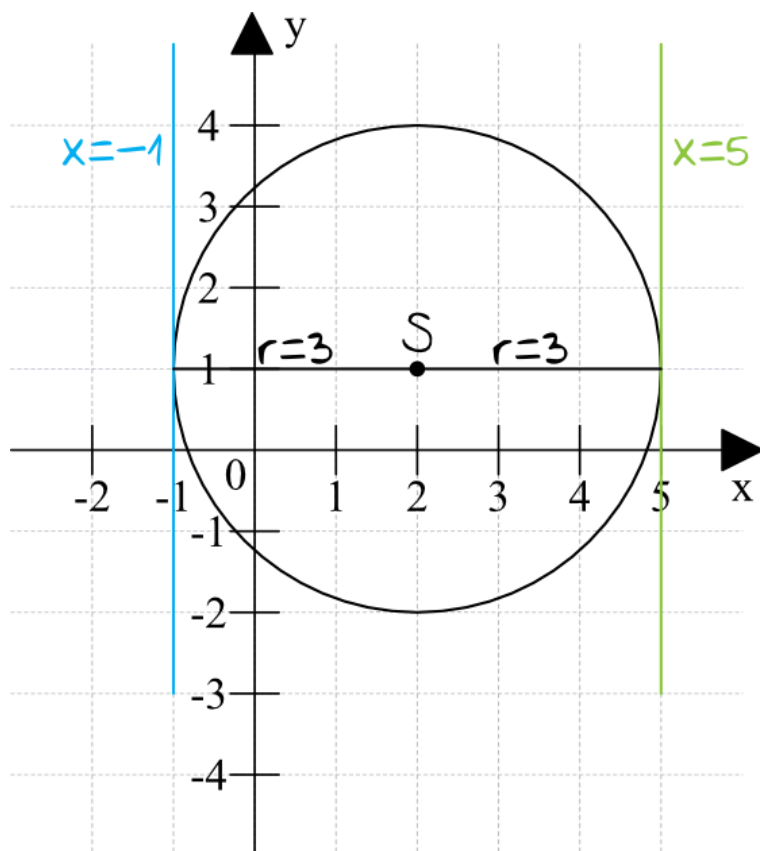
Po dokładnym narysowaniu obydwu wykresów widzimy że przecięły się one w dwóch punktach: $A = (-1; -1)$ oraz $B = (2; 4)$. To właśnie te punkty będą kluczowymi do wyznaczenia rozwiązań nierówności. Interesuje nas sytuacja w której wyrażenie po lewej stronie jest większe od tego po prawej stronie, czyli interesują nas wszystkie te miejsca w których po prostu parabola x^2 jest wyżej (czyli przyjmuje większe wartości) od prostej $x + 2$. Rozwiązaniem tej nierówności będzie więc:

$$x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$$

Zadanie 23

0-2 pkt

Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$ równoległych do osi OY .



Odpowiedź: $x = -1$ oraz $x = 5$

Krok 1. Zapisanie równania w postaci kanonicznej.

Wzór na równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a; b)$ oraz promieniu r ma postać:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Spróbujmy przekształcić nasze równanie z treści zadania właśnie do takiej postaci jak powyżej. Możemy to zrobić w następujący sposób:

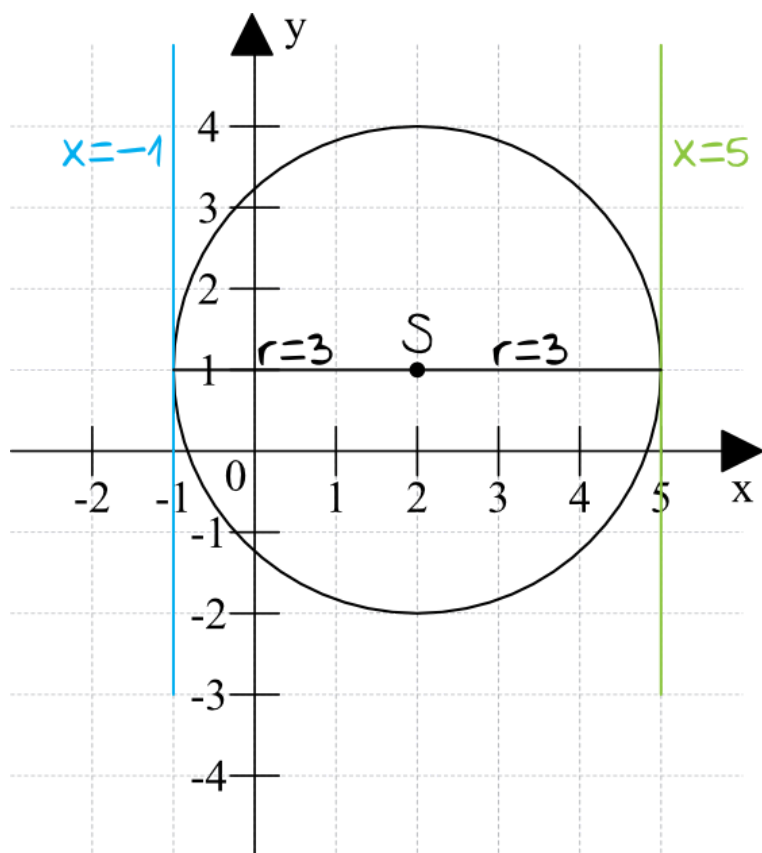
$$x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 = 0, (x - 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 - 4 = 0, (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 9 = 0, (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

Krok 2. Odczytanie współrzędnych środka okręgu oraz długości promienia.

Z otrzymanej przed chwilą postaci po przyrównaniu poszczególnych liczb do wzoru na równanie okręgu możemy odczytać, że środek okręgu ma współrzędne $S = (2; 1)$, natomiast promień będzie równy $r = 3$ (bo $r^2 = 9$).

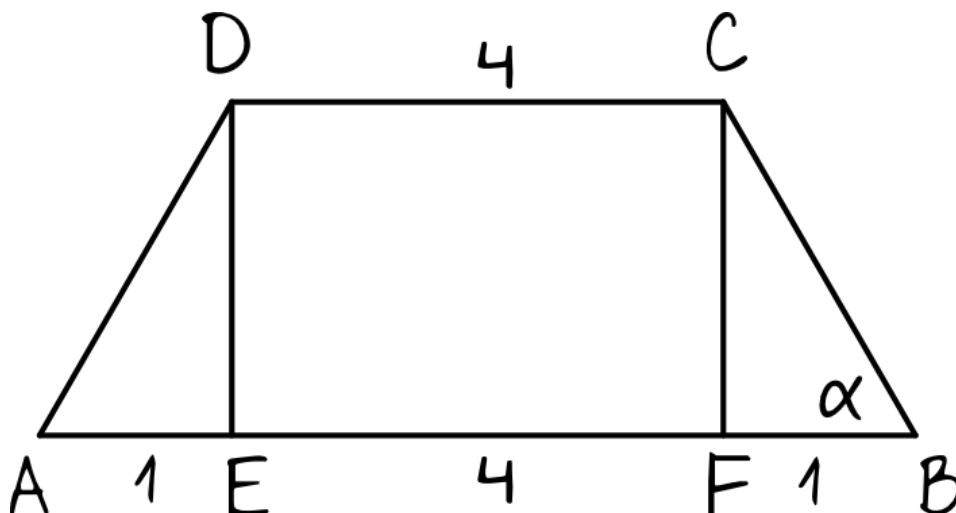
Krok 3. Sporządzenie rysunku pomocniczego i odczytanie rozwiązania.

Na podstawie wyznaczonych informacji stwórzmy prosty rysunek pomocniczy, który pozwoli nam odczytać rozwiązanie zadania.



Z rysunku wynika, że proste styczne do okręgu (które są jednocześnie równoległe do osi OY) to proste $x = -1$ oraz $x = 5$.

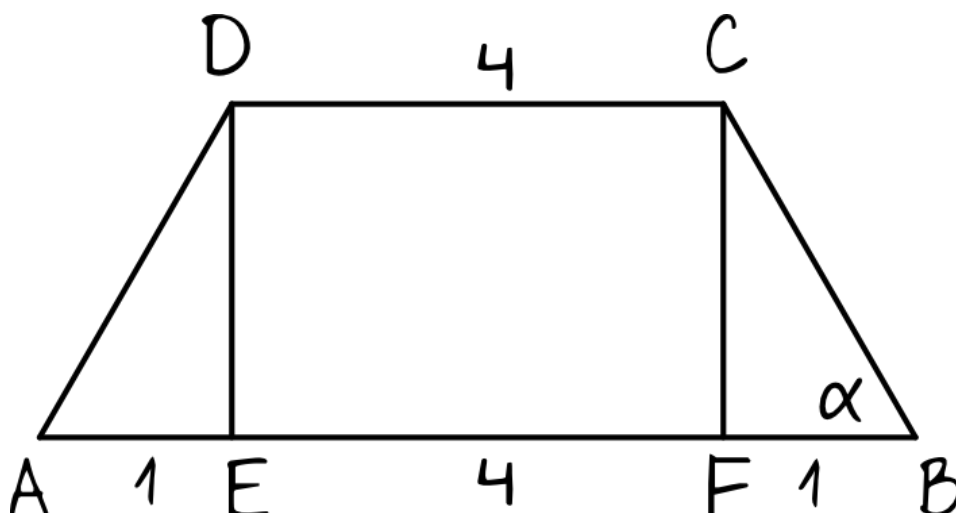
Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 4cm i 6cm , a cosinus kąta ostrego trapezu jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz obwód trapezu.



Odpowiedź: $Obw = 14$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Stwórzmy prosty rysunek pomocniczy, który pozwoli nam dostrzec własności trapezu równoramiennego:



Krok 2. Obliczenie długości ramienia trapezu.

Spójrzmy na trójkąt FBC . Z definicji cosinusa wynika, że:

$$\cos \alpha = \frac{FB}{BC}$$

Wartość cosinusa jest nam znana, znamy też długość odcinka FB , zatem bez problemu obliczymy długość ramienia tego trapezu:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{BC}, \quad BC = 2$$

Krok 3. Obliczenie obwodu trapezu.

Znamy już wszystkie potrzebne długości boków, zatem możemy przejść do obliczenia obwodu trapezu:

$$Obw = 6 + 4 + 2 + 2, \quad Obw = 14$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wyraża się wzorem $S_n = n(n-2)$. Oblicz pierwszy wyraz ciągu i jego różnicę.

Odpowiedź: $r = 2$ oraz $\{a_1\}$

I sposób - obliczając wartości pierwszego i drugiego wyrazu:

Krok 1. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu.

Jeżeli podstawimy do wzoru $n = 1$, to otrzymamy "sumę pierwszego wyrazu", czyli tak naprawdę wartość tego pierwszego wyrazu. W związku z tym:

$$S_n = n(n-2), S_1 = 1(1-2), S_1 = 1 \cdot -1, S_1 = -1$$

To oznacza, że $a_1 = -1$.

Krok 2. Obliczenie wartości drugiego wyrazu.

Jeżeli tym razem podstawimy $n = 2$, to otrzymamy sumę dwóch pierwszych wyrazów, czyli $a_1 + a_2$. Wartość a_1 już znamy, więc dzięki temu będziemy w stanie obliczyć wartość drugiego wyrazu. Zatem:

$$S_n = n(n-2), S_2 = 2(2-2), S_2 = 2 \cdot 0, S_2 = 0$$

Zgodnie z tym co sobie powiedzieliśmy $S_2 = a_1 + a_2$. Podstawiając pod to $a_1 = -1$ otrzymamy:

$$S_2 = a_1 + a_2, 0 = -1 + a_2, a_2 = 1$$

Krok 3. Obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego.

Znając dwa pierwsze wyrazy ciągu bez problemu obliczymy różnicę ciągu arytmetycznego:

$$r = a_2 - a_1, r = 1 - (-1), r = 2$$

II sposób - wyznaczając wzór ciągu:

Krok 1. Wyznaczenie wzoru ciągu arytmetycznego.

Dobrym sposobem na rozwiązanie tego zadania byłoby też wyznaczenie wzoru ciągu. Uda nam się to zrobić w następujący sposób:

$$a_n = S_n - S_{n-1}, a_n = n(n-2) - (n-1)((n-1)-2), a_n = n(n-2) - (n-1)(n-3), a_n = n^2 - 2n - n^2 + 3n + n - 3, a_n = 2n - 3$$

Krok 2. Wyznaczenie wartości pierwszego wyrazu.

Znając wzór ciągu możemy wyznaczyć bez problemu wartość dowolnego wyrazu. Szukając wartości pierwszego wyrazu podstawimy $n = 1$ i otrzymamy:

$$a_1 = 2 \cdot 1 - 3, a_1 = 2 - 3, a_1 = -1$$

Krok 3. Wyznaczenie różnicy ciągu.

Tak naprawdę nie musimy nic więcej liczyć by poznać różnicę ciągu. Z własności wzorów ciągów arytmetycznych wynika, że różnicą ciągu jest liczba która znajduje się przed n . W tym przypadku przed n znalazła się dwójka, czyli $r = 2$. Gdybyśmy o tej własności nie pamiętali, to zawsze możemy wyliczyć wartość drugiego wyrazu i potem obliczyć różnicę ciągu:

$$a_n = 2n - 3, a_2 = 2 \cdot 2 - 3, a_2 = 4 - 3, a_2 = 1$$

Zatem różnica ciągu wyniesie:

$$r = a_2 - a_1, r = 1 - (-1), r = 2$$

Zadanie 26

0-2 pkt

Sprawdź wyrażenie $|x - 1| + |x| - |-x + 1|$ do najprostszej postaci, gdy $x \in (0, 1)$.

Odpowiedź: x

Krok 1. Ustalenie, czy dana wartość jest dodatnia czy ujemna.

Aby opuścić nawiasy bezwzględności musimy najpierw ustalić, czy liczby z których wyznaczamy wartości bezwzględne są dodatnie, czy też ujemne. Jeżeli wartość w nawiasie jest dodatnia, to opuszczając nawias nie zmieniamy znaku np. $|5| = 5$. Jeżeli wartość w nawiasie jest ujemna, to opuszczając nawias wartości bezwzględnej musimy zmienić znak liczby np. $|-5| = 5$ (i na tym właśnie polega cała trudność tego zadania). Sprawdźmy zatem po kolei jakie wartości znalazły się w nawiasach:

$|x - 1|$ - tutaj wartość w nawiasie jest ujemna. Przykładowo dla $x = 0,2$ mamy $|0,2 - 1|$, czyli $|-0,8|$.

$|x|$ - tutaj wartość w nawiasie jest dodatnia. Przykładowo dla $x = 0,2$ mamy $|0,2|$.

$|-x + 1|$ - tutaj wartość w nawiasie jest dodatnia. Przykładowo dla $x = 0,2$ mamy $|-0,2 + 1|$, czyli $|0,8|$.

Krok 2. Uproszczenie wyrażenia.

Zgodnie więc z tym co zapisaliśmy powyżej, opuszczając pierwszy nawias wartości bezwzględnej będziemy musieli zmienić znaki, natomiast pozostałe nawiasy opuścimy bez zmiany znaków. Oprócz tego musimy uważać na to, że przed trzecim nawiasem stoi minus, który wpłynie na zmianę znaków:

$$|x - 1| + |x| - |-x + 1| = , = -x + 1 + x - (-x + 1) = , = -x + 1 + x + x - 1 = x$$

Zadanie 27

0-2 pkt

Za dwa lata Julka będzie dwa razy starsza niż była osiem lat temu. Ile lat ma Julka?

Odpowiedź: 18 lat

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń i utworzenie równania.

x - wiek Julki

$x + 2$ - wiek Julki za dwa lata

$x - 8$ - wiek Julki osiem lat temu

Z treści zadania wiemy, że za dwa lata Julka będzie dwa razy starsza niż była osiem lat temu, czyli:

$$x + 2 = 2 \cdot (x - 8)$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania.

Musimy teraz rozwiązać powstałe równanie:

$$x + 2 = 2 \cdot (x - 8) , x + 2 = 2x - 16 , -x = -18 , x = 18$$

Zadanie 28

0-2 pkt

W prostokącie przekątna długości d dzieli kąt prostokąta na dwie równe części. Wykaż, że pole kwadratu zbudowanego na tej przekątnej jest dwa razy większe od pola prostokąta.

Odpowiedź: Udowodniono zapisują

Krok 1. Dostrzeżenie, że początkowy prostokąt musi być kwadratem.

Z treści zadania wiemy, że przekątna prostokąta dzieli kąt na dwie równe części (czyli na kąty 45°). Jest to sytuacja charakterystyczna tylko i wyłącznie dla kwadratu i właśnie stąd też możemy wywnioskować, że nasz prostokąt wyjściowy jest po prostu kwadratem.

Krok 2. Wyznaczenie długości boku kwadratu zbudowanego na przekątnej.

Wiemy już, że nasz wyjściowy prostokąt jest kwadratem, a skoro tak to wiemy też, że jeżeli jego bok ma długość a to przekątną możemy zapisać jako $d = a\sqrt{2}$.

Tym samym długość boku kwadratu zbudowanego na tej przekątnej będzie równa właśnie $a\sqrt{2}$.

Krok 3. Obliczenie pól powierzchni obydwu kwadratów i zakończenie dowodzenia.

Pole pierwszego (wyjściowego) kwadratu jest równe: $P = a \cdot a = a^2$

Pole drugiego (zbudowanego na przekątnej) kwadratu jest równe: $P = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 2a^2$

To oznacza, że pole drugiego kwadratu jest dwukrotnie większe i to właśnie należało udowodnić.

Ciąg $(4, x, y)$ jest ciągiem geometrycznym malejącym. Ciąg $(y, x + 1, 5)$ jest ciągiem arytmetycznym. Wyznacz x .

Odpowiedź: $x = 2$

Krok 1. Rozpisanie wartości x z wykorzystaniem własności ciągów geometrycznych i arytmetycznych.

Korzystając z własności ciągów geometrycznych możemy zapisać, że:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3, \quad x^2 = 4 \cdot y$$

Korzystając z własności ciągów arytmetycznych możemy zapisać, że:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}, \quad x + 1 = \frac{y + 5}{2}$$

Krok 2. Zbudowanie i rozwiązanie układu równań.

W poprzednim kroku otrzymaliśmy dwa równania z których moglibyśmy stworzyć układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ x + 1 = \frac{y+5}{2} \end{cases}$$

Spróbujmy teraz rozwiązać ten układ równań metodą podstawiania. Najlepiej będzie przekształcić drugie równanie tak aby dało się podstawić igreka z drugiego równania do równania pierwszego (podstawianie iksa też jest dobre, ale jest wbrew pozorom nieco trudniejsze, bo pojawi się potęgowanie). Zatem:

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ x + 1 = \frac{y+5}{2} \end{cases} \quad \bigg/ \cdot 2$$

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ 2x + 2 = y + 5 \end{cases} \quad \bigg/ - 5$$

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Podstawiając teraz igreka z drugiego równania do pierwszego otrzymamy:

$$x^2 = 4 \cdot (2x - 3), \quad x^2 = 8x - 12, \quad x^2 - 8x + 12 = 0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Współczynniki: $a = 1$, $b = -8$, $c = 12$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - 4}{2 \cdot 1} = \frac{8 - 4}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + 4}{2 \cdot 1} = \frac{8 + 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Krok 4. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Otrzymaliśmy dwie możliwości $x = 2$ oraz $x = 6$. Musimy się zastanowić, czy przypadkiem którejś z nich nie trzeba odrzucić. Gdy $x = 2$, to ciąg geometryczny będzie malejący $(4, 2, y)$. Gdy $x = 6$, to ciąg geometryczny jest rosnący $(4, 6, y)$. W treści zadania mamy podane, że ciąg geometryczny ma być malejący, dlatego jedyną poprawną odpowiedzią jest $x = 2$.

Samochód przejechał 180km , jadąc ze stałą prędkością. Gdyby jechał z prędkością o $30\frac{\text{km}}{\text{h}}$ większą, to czas przejazdu skróciłby się o godzinę. Z jaką prędkością jechał samochód?

Odpowiedź: $v = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do zadania.

$s = 180$ - pokonana trasa (w km)

v_1 - prędkość jazdy samochodu (w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$)

$v_2 = v_1 + 30$ - prędkość jazdy samochodu (w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$), gdy samochód zwiększa prędkość o $30\frac{\text{km}}{\text{h}}$

t_1 - czas jazdy (w godzinach)

$t_2 = t_1 - 1$ - czas jazdy (w godzinach), gdy samochód jedzie szybciej

Krok 2. Utworzenie i rozwiązanie układu równań.

Skorzystamy teraz ze wzoru na drogę $s = vt$ i zapiszemy relację dotyczącą prędkości jazdy w obydwu przypadkach w formie układu równań:

$$\begin{cases} s = v_1 \cdot t_1 \\ s = v_2 \cdot t_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 180 = v_1 \cdot t_1 \\ 180 = v_2 \cdot t_2 \end{cases}$$

Podstawiając pod drugie równanie dane z kroku pierwszego otrzymamy:

$$\begin{cases} 180 = v_1 \cdot t_1 \\ 180 = (v_1 + 30) \cdot (t_1 - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{180}{t_1} \\ 180 = (v_1 + 30) \cdot (t_1 - 1) \end{cases}$$

Teraz skorzystamy z metody podstawiania i podstawimy v_1 z pierwszego równania do drugiego:

$$180 = \left(\frac{180}{t_1} + 30 \right) \cdot (t_1 - 1)$$

Wymnażając poszczególne nawiasy i upraszczając zapis do postaci ogólnej otrzymamy:

$$180 = 180 - \frac{180}{t_1} + 30t_1 - 30 \quad \Bigg/ -180, \quad -\frac{180}{t_1} + 30t_1 - 30 = 0 \quad \Bigg/ \cdot t_1, \quad -180 + 30t_1^2 - 30t_1 = 0 \quad \Bigg/ : 30, \quad -6 + t_1^2 - t_1 = 0, \quad t_1^2 - t_1 - 6 = 0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Współczynniki: $a = 1$, $b = -1$, $c = -6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 - (-24) = 25, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - 5}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2, \quad t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + 5}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

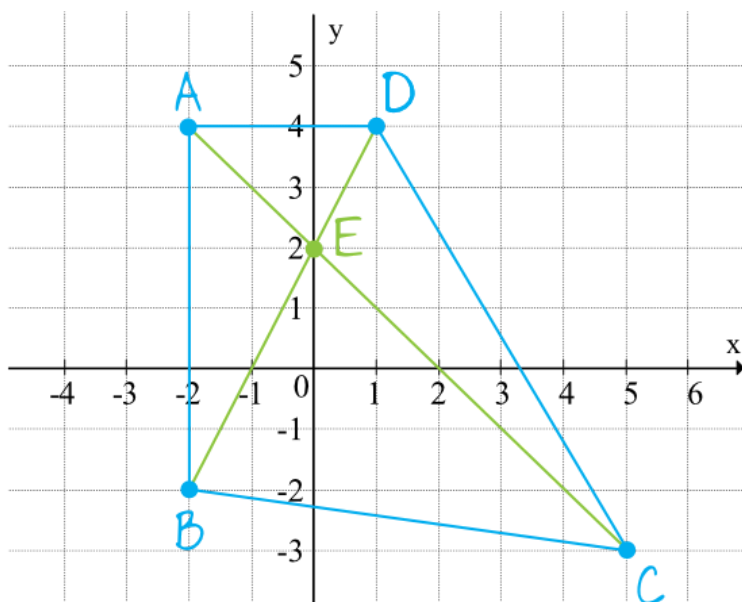
Ujemny wynik musimy odrzucić, bowiem czas nie może być ujemny. To oznacza, że $t_1 = 3$.

Krok 4. Obliczenie prędkości jazdy samochodu.

Znamy długość drogi $s = 180\text{km}$, wiemy też że czas jazdy wynosi $t_1 = 3\text{h}$, zatem bez problemu obliczymy prędkość auta:

$$v = \frac{s}{t}, \quad v = \frac{180\text{km}}{3\text{h}}, \quad v = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

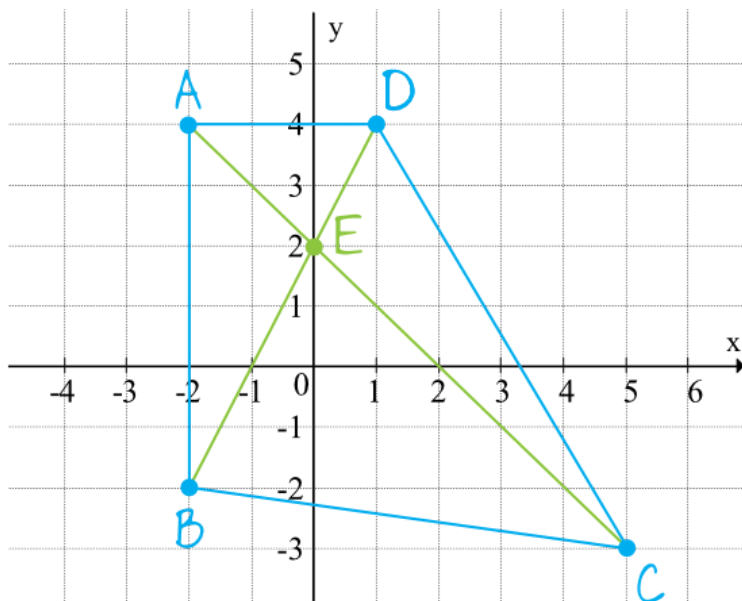
Punkty $A = (-2, 4)$, $B = (-2, -2)$, $C = (5, -3)$, $D = (1, 4)$ są wierzchołkami czworokąta. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego czworokąta.



Odpowiedź: (0; 2)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy zwizualizować sobie jak ten czworokąt będzie wyglądał i gdzie będzie miał punkt przecięcia się przekątnych:



Z pomocą tego rysunku możemy określić plan postępowania: musimy wyznaczyć równania prostych AC oraz BD , a następnie z równań tych prostych ułożyć układ równań, którego wynikiem będą współrzędne poszukiwanego punktu przecięcia.

Krok 2. Wyznaczenie równania prostej AC .

Wyznamy równanie prostej AC , czyli prostej przechodzącej przez punkty A oraz C , czyli przez które tworzą jedną z przekątnych czworokąta. Możemy to zrobić za pomocą wzoru z tablic, czyli:

$$(y - y_A)(x_C - x_A) - (y_C - y_A)(x - x_A) = 0$$

Do tego wzoru wystarczy tylko podstawić współrzędne punktów A oraz C i otrzymamy poszukiwany wzór. Istnieje też drugi sposób na wyznaczenie równania prostej, który jest nieco szybszy i właśnie z niego tutaj skorzystamy. Aby wyznaczyć prostą w postaci $y = ax + b$ przechodzącą przez dwa punkty wystarczy stworzyć prosty układ równań, w którym podstawimy po kolei współrzędne obydwu punktów. I tak oto otrzymujemy:

$$\begin{cases} 4 = -2a + b \\ -3 = 5a + b \end{cases}$$

Odejmując to równanie stronami otrzymamy:

$$7 = -7a, a = -1$$

Znając współczynnik a możemy teraz podstawić tę wartość do jednego z równań, wyznaczając tym samym współczynnik b :

$$4 = -2a + b, 4 = -2 \cdot (-1) + b, 4 = 2 + b, b = 2$$

To oznacza, że nasza prosta AC przyjmuje postać $y = -1x + 2$, czyli $y = -x + 2$.

Krok 3. Wyznaczenie równania prostej BD .

Postępujemy analogicznie jak w przypadku prostej AC , podstawiając tym razem współrzędne punktów B oraz D :

$$\begin{cases} -2 = -2a + b \\ 4 = 1a + b \end{cases},$$

Odejmując to równanie stronami otrzymamy:

$$-6 = -3a, a = 2$$

Znając współczynnik a możemy teraz podstawić tę wartość do jednego z równań, wyznaczając tym samym współczynnik b :

$$-2 = -2a + b, -2 = -2 \cdot 2 + b, -2 = -4 + b, b = 2$$

To oznacza, że nasza prosta BD przyjmuje postać $y = 2x + 2$.

Krok 4. Wyznaczenie miejsca przecięcia się przekątnych.

Rozwiązaniem układu równań dwóch prostych są współrzędne punktu ich przecięcia (czyli dokładnie to czego szukamy). W związku z tym musimy stworzyć układ równań z dwóch równań prostych wyznaczonych przed chwilą i sprawdzić jakie współrzędne otrzymamy:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x + 2 \end{cases},$$

Korzystając z metody podstawiania otrzymamy:

$$-x + 2 = 2x + 2, -3x = 0, x = 0$$

Znając x możemy teraz obliczyć y , podstawiając $x = 0$ do jednego z równań:

$$y = -x + 2, y = -0 + 2, y = 2$$

To oznacza, że współrzędne punktu przecięcia się przekątnych są równe $(0; 2)$.