

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Nowa Era 2023

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D (4)	1
2	C ($2\frac{2}{3}$)	1
3	C ($-5a^2 - 24ab + 5b^2$)	1
4	B (19)	1
6	B (-3)	1
7	A (dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 3$.)	1
8	C (1)	1
9	B ($\sqrt{5}$)	1
13	B (-2)	1
14	B (10%)	1
18	A (2)	1
20	C ((6, 0))	1
21	C (72°)	1
23	B (10)	1
24	D (7)	1
25	C (3)	1
26	C ($\frac{1}{3}$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Wartość wyrażenia $\log_4 2 + \log_4 8 + \log_4 16$ jest równa:

Odpowiedź: D (4)

Wszystkie występujące w wyrażeniu logarytmy mają jednakową podstawę. Możemy więc skorzystać z własności działań na logarytmach i zapisać, że całość będzie równa:

$$\log_4 2 + \log_4 8 + \log_4 16 = \log_4 (2 \cdot 8 \cdot 16) = \log_4 256$$

Jeśli jesteśmy w stanie obliczyć ten logarytm w pamięci, to od ręki możemy zapisać, że $\log_4 256 = 4$. Jeśli jednak chcielibyśmy to rozpisać do postaci potęgi, to całość wyglądałaby następująco:

$$\log_4 256 = x \iff 4^x = 256$$

Musimy teraz rozwiązać równanie $4^x = 256$. Wiedząc, że $256 = 4^4$, możemy rozpisać, że:

$$4^x = 256, 4^x = 4^4, x = 4$$

Wartość tego wyrażenia jest więc równa 4.

Zadanie 2

0-1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Liczba $\sqrt[2]{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$ jest równa:

Odpowiedź: C ($2^{\frac{2}{3}}$)

Najlepszym sposobem na rozwiązanie tego zadania będzie przejście z postaci pierwiastków na potęgi, korzystając z zależności $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Z tej zależności wynika, że przykładowo $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, więc całość moglibyśmy rozpisać jako:

$$\sqrt[2]{2 \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt[2]{2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[2]{2^1 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[2]{2^{\frac{4}{3}}} = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

Zadanie 3

0-1 pkt

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b wyrażenie $(2a - 3b)^2 - (3a + 2b)^2$ jest równe:

Odpowiedź: C ($-5a^2 - 24ab + 5b^2$)

W tym zadaniu skorzystamy ze wzorów skróconego mnożenia, czyli $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ oraz $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Nasze wyrażenie z treści zadania możemy więc rozpisać w następujący sposób:

$$(2a - 3b)^2 - (3a + 2b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2 - (9a^2 + 12ab + 4b^2) = 4a^2 - 12ab + 9b^2 - 9a^2 - 12ab - 4b^2 = -5a^2 - 24ab + 5b^2$$

Zadanie 4

0-1 pkt

Ile jest wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych większych od 20, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry parzyste?

Odpowiedź: B (19)

Ustalmy jakie cyfry mogą się pojawić w naszej poszukiwanej liczbie dwucyfrowej. Chcemy, by ta liczba była większa od 20 i by wszystkie cyfry były parzyste, zatem:

- w rzędzie dziesiątek możemy mieć cyfry 2, 4, 6, 8, czyli mamy 4 możliwości uzupełnienia tej cyfry.
- w rzędzie jedności możemy mieć cyfry 0, 2, 4, 6, 8, czyli mamy 5 możliwości uzupełnienia tej cyfry.

Jest jednak mały problem, ponieważ w ten sposób uwzględnilibyśmy liczbę 20 jako pasującą do naszego zdarzenia, a chcemy by ta liczba była większa od 20.

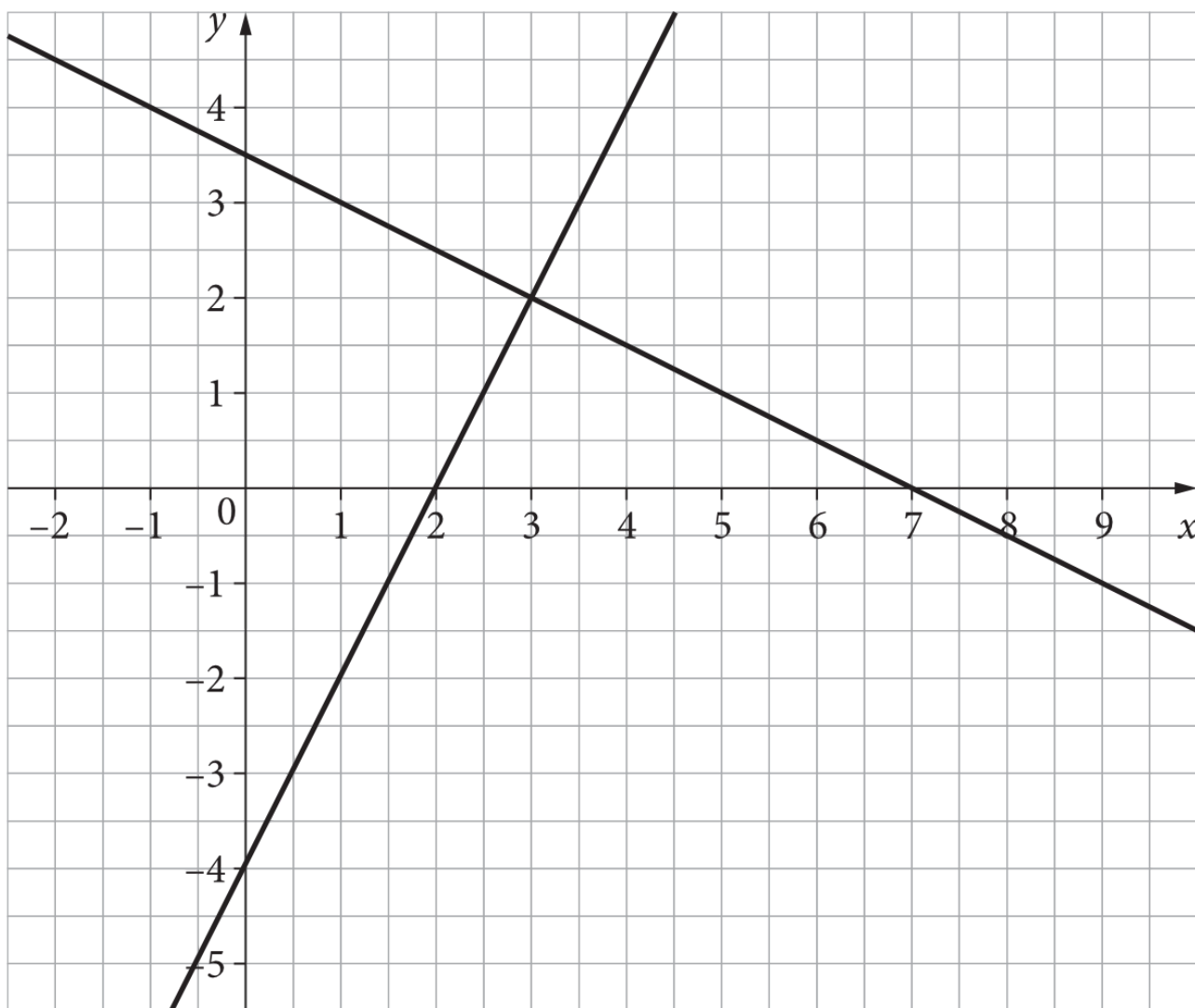
Najlepiej będzie więc zastosować tradycyjnie regułę mnożenia, a na koniec odejmiemy tą jedną, niepasującą liczbę. W takim razie, zgodnie z regułą mnożenia takich liczb mielibyśmy:

$$5 \cdot 4 = 20$$

I od tego odejmujemy jedną liczbę (czyli dwudziestkę), która nam nie pasuje do rozwiązania, stąd też wszystkich interesujących nas liczb będziemy mieć:

$$20 - 1 = 19$$

Na rysunku przedstawiono geometryczną interpretację układu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi x i y . Punkt przecięcia dwu prostych oraz ich punkty wspólne z osią Ox układu współrzędnych mają współrzędne całkowite.



Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie poniższego zdania było prawdziwe.

Układem równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku powyżej, jest układ:

A.
$$\begin{cases} 3(y+4) - 6(x-3) = 0 \\ -4y - 7(x-7) = 0 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 3(y+4) - 6x = 0 \\ 4y + 2(x-7) = 0 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 3(y+4) - 6x = 0 \\ 4y - 2(x-7) = 0 \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$E. \begin{cases} y = x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F. \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \end{cases}$$

Odpowiedź: B. oraz F.

Krok 1. Wybór pierwszej poprawnej odpowiedzi.

Celem zadania jest tak naprawdę ustalenie jakimi równaniami są opisane nasze proste. Najprościej będzie zacząć od ustalenia jaka jest postać kierunkowa tych prostych, czyli najpierw warto zerknąć na proponowane odpowiedzi D, E oraz F (bo właśnie tam wszystkie równania są zapisane w tej postaci, więc jest spore prawdopodobieństwo, że znajdziemy tam pierwszą poprawną odpowiedź). Możemy oczywiście wyznaczać takie równania w standardowy sposób, ale spróbujmy podejść do tego zadania nieco bardziej analitycznie, analizując podane odpowiedzi.

Widzimy, że jedna prosta przecina oś Ox dla $y = -4$, a druga dla $y = 3\frac{1}{2}$, więc współczynniki b tych prostych powinny być równe odpowiednio $b = -4$ oraz $b = 3\frac{1}{2}$. Tak się składa, że w każdej parze mamy takie współczynniki, więc analizujemy dalej. Widzimy, że jedna prosta jest rosnąca, a druga malejąca, czyli jedna powinna mieć współczynnik kierunkowy a dodatni, a druga ujemny. W ten sposób spośród odpowiedzi D, E, F możemy już odrzucić odpowiedź D. Zostały nam już odpowiedzi E oraz F, które różnią się tylko pierwszym równaniem, które opisuje prostą rosnącą. Sprawdźmy zatem jaką wartość przyjmuje każde z równań dla $x = 2$. Prosta $y = x - 4$ przyjmuje wartość $y = 2 - 4 = -2$, natomiast prosta $y = 2x - 4$ przyjmie wartość $y = 2 \cdot 2 - 4 = 0$. Na wykresie widać, że ta wartość powinna być równa 0, bo prosta przechodzi przez punkt o współrzędnych $(2; 0)$, stąd też po tej prostej analizie możemy stwierdzić, że pierwszą poprawną odpowiedzią będzie F.

Dla upewnienia się, możemy oczywiście analogicznie sprawdzić to drugie równanie $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$, podstawiając np. $x = 7$. Wyjdzie nam, że $y = -\frac{1}{2} \cdot 7 + 3\frac{1}{2} = -3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 0$ i to się zgadza, bo prosta przechodzi przez punkt o współrzędnych $(7; 0)$.

Krok 2. Wybór drugiej poprawnej odpowiedzi.

Druga odpowiedź będzie znajdować się wśród proponowanych A, B oraz C. Mówiąc bardzo obrazowo, musimy sprawdzić które równania da się przekształcić do postaci tych z odpowiedzi F. Tu warto zauważyć, że każdy układ ma różne drugie równania, więc możemy skupić się tylko na nich. Przekształćmy zatem te równania do postaci kierunkowej:

Odp. A. (drugie równanie)

$$-4y - 7(x - 7) = 0, \quad -4y - 7x + 49 = 0, \quad -4y = 7x - 49, \quad y = -\frac{7}{4}x + 12\frac{1}{4}$$

To równanie jest więc na pewno błędne, bo nie otrzymaliśmy postaci $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$.

Odp. B. (drugie równanie)

$$4y + 2(x - 7) = 0, \quad 4y + 2x - 14 = 0, \quad 4y = -2x + 14 = 0, \quad y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$$

To równanie jest poprawne, bo otrzymaliśmy dokładnie to samo co w odpowiedzi F.

Odp. C. (drugie równanie)

$$4y - 2(x - 7) = 0, \quad 4y - 2x + 14 = 0, \quad 4y = 2x - 14, \quad y = \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$$

To równanie jest więc na pewno błędne, bo nie otrzymaliśmy postaci $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$.

I w ten oto sposób udało nam się ustalić, że poprawną odpowiedzią będzie także odpowiedź B.

Zadanie 6

0-1 pkt

Dany jest wielomian $W(x) = 2(x-1)(x+3)(x^2+4)$. Iloczyn wszystkich rzeczywistych pierwiastków tego wielomianu jest równy:

Odpowiedź: B (-3)

Pierwiastkami wielomianu nazywamy wszystkie te zmienne x , dla których wielomian przyjmuje wartość równą 0. Mówiąc wprost, musimy rozwiązać następujące równanie:

$$2(x-1)(x+3)(x^2+4) = 0$$

Jest to równanie w postaci iloczynowej, więc wystarczy przyrównać wszystkie wartości do zera, zatem:

$$x-1=0 \quad \vee \quad x+3=0 \quad \vee \quad x^2+4=0, \quad x=1 \quad \vee \quad x=-3 \quad \vee \quad x^2=-4$$

Z ostatniego równania $x^2 = -4$ nie otrzymamy rozwiązań, ponieważ nie istnieje jakakolwiek liczba rzeczywista, która podniesiona do kwadratu dałaby ujemny wynik. Stąd też jedynymi pierwiastkami tego wielomianu będą $x = 1$ oraz $x = -3$.

Celem zadania jest podanie iloczynu wszystkich rzeczywistych pierwiastków, zatem:

$$1 \cdot (-3) = -3$$

Zadanie 7

0-1 pkt

Równanie $\frac{(2x-4)(2x-6)^2}{(1-x)(2-x)} = 0$ ma w zbiorze liczb rzeczywistych:

Odpowiedź: A (dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 3$.)

Krok 1. Zapisanie założeń.

Z racji tego, iż na matematyce nie istnieje dzielenie przez zero, to mianownik naszego ułamka musi być różny od zera. W związku z tym, moglibyśmy zapisać, że:

$$(1-x)(2-x) \neq 0$$

Mamy postać iloczynową, zatem:

$$1-x \neq 0 \quad \vee \quad 2-x \neq 0, \quad x \neq 1 \quad \vee \quad x \neq 2$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.

Teraz możemy przejść do rozwiązywania równania. Najlepiej jest rozpocząć od wymnożenia całości przez to, co jest w mianowniku ułamka, dzięki czemu otrzymamy:

$$\frac{(2x-4)(2x-6)^2}{(1-x)(2-x)} = 0 \quad \Bigg/ \cdot (1-x)(2-x), \quad (2x-4)(2x-6)^2 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie w postaci iloczynowej, zatem chcąc je rozwiązać, wystarczy przyrównać wartości w nawiasach do zera:

$$2x-4=0 \quad \vee \quad 2x-6=0, \quad 2x=4 \quad \vee \quad 2x=6, \quad x=2 \quad \vee \quad x=3$$

Krok 3. Weryfikacja otrzymanych wyników.

Otrzymane wyniki musimy jeszcze zweryfikować ze względu na zapisane wcześniej założenia. Okazuje się, że rozwiązanie $x = 2$ musimy odrzucić, ponieważ dla tej liczby wartość mianownika wychodziła równa 0. Stąd też to równanie będzie mieć jedynie jedno rozwiązanie i będzie nim $x = 3$.

Zadanie 8

0-1 pkt

Równanie $|x - 3| = m$ z niewiadomą x ma dwa rozwiązania. Jednym z nich jest liczba 5. Drugim rozwiązaniem tego równania jest liczba:

Odpowiedź: C (1)

Krok 1. Obliczenie wartości m .

Skoro jednym z rozwiązań tego równania jest $x = 5$, to możemy podstawić to rozwiązanie do naszego równania, co pozwoli nam dowiedzieć się jaka jest wartość m , zatem:

$$|5 - 3| = m, |2| = m, m = 2$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.

Skoro $m = 2$, to istota zadania opiera się tak naprawdę na tym, by rozwiązać równanie z wartością bezwzględną $|x - 3| = 2$. Wartość bezwzględna z $x - 3$ będzie równa 2 wtedy, gdy $x - 3$ będzie równe 2, lub też gdy $x - 3$ będzie równe -2 . W związku z tym możemy zapisać, że:

$$x - 3 = 2 \quad \vee \quad x - 3 = -2, x = 5 \quad \vee \quad x = 1$$

Widzimy więc, że drugim rozwiązaniem tego równania będzie $x = 1$.

Zadanie 9

0-1 pkt

Dla $x = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5}}$ wartość wyrażenia $\frac{-2}{x - 1}$ jest równa:

Odpowiedź: B ($\sqrt{5}$)

Krok 1. Rozpisanie liczby x .

Całe zadanie będzie nieco prostsze w momencie, gdy trochę przekształcimy podaną liczbę x . Usuwając niewymierność z mianownika, otrzymamy taką oto sytuację:

$$x = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} - 2) \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = , = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5} = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Krok 2. Obliczenie wartości wyrażenia.

Podstawiając teraz wyznaczoną przed chwilą wartość x do naszego wyrażenia, otrzymamy takie oto działanie:

$$\frac{-2}{x - 1} = \frac{-2}{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} - 1} = \frac{-2}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} = , = \frac{2}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = 2 : \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2 \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}} = , = \frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = , = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Zadanie 10

0-2 pkt

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ liczba $8^n - 2^n$ jest podzielna przez 12.

Odpowiedź: Udowodniono korzystając

Wyłączając wspólny czynnik przed nawias, możemy naszą liczbę rozpisać w następujący sposób:

$$8^n - 2^n = 2^n \cdot (4^n - 1)$$

Teraz powinniśmy dostrzec, że wyrażenie w nawiasie da się rozpisać wykorzystując wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Dzięki temu otrzymamy taką oto sytuację:

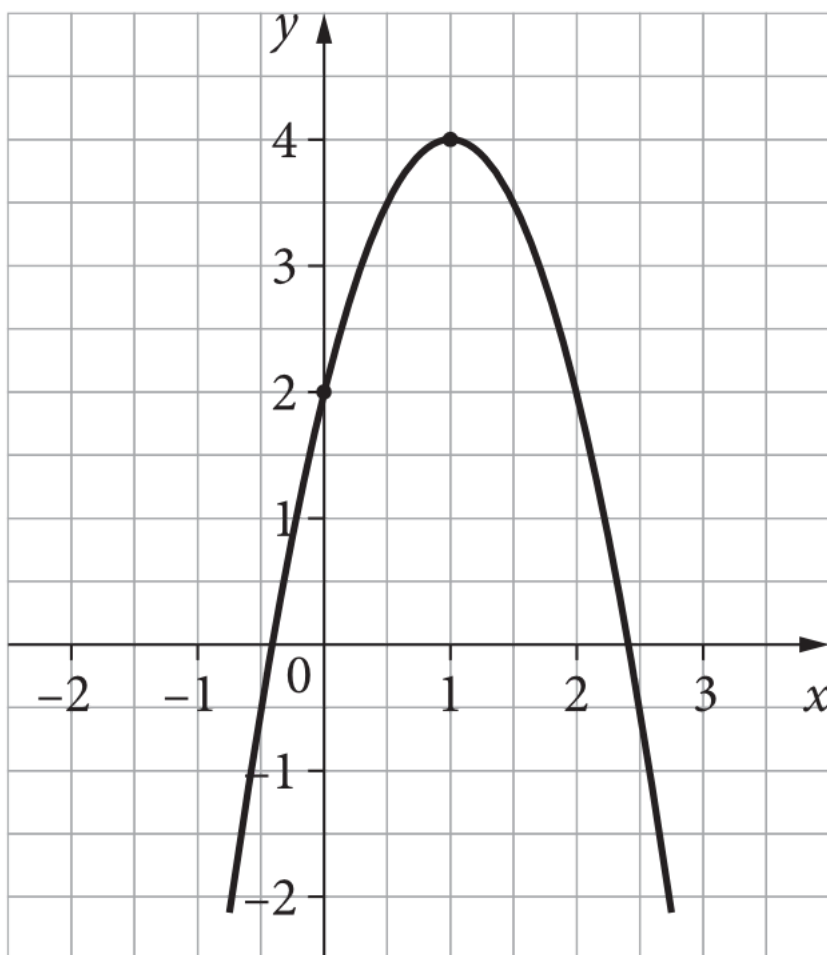
$$2^n \cdot (2^n - 1) \cdot (2^n + 1)$$

Jeśli się dobrze przyjrzymy, to zauważymy, że liczby $2^n - 1$, 2^n oraz $2^n + 1$ to po prostu trzy kolejne liczby naturalne. To z kolei prowadzi nas do wniosku, że jedna z tych liczb jest podzielna przez 3.

Dodatkowo z treści zadania wiemy, że $n \geq 2$, a to by oznaczało, że liczba 2^n jest na pewno liczbą parzystą i to taką, która jest podzielna przez 4.

To oznacza, że nasza liczba jest podzielna przez 3 i przez 4 jednocześnie, więc jest tym samym podzielna przez 12, co należało udowodnić.

Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Ta parabola przecina oś Oy w punkcie $(0, 2)$, a jej wierzchołkiem jest punkt $(1, 4)$.



Zadanie 1.

Wyznacz i zapisz równanie osi symetrii wykresu funkcji f .

Zadanie 2.

Wyznacz wzór funkcji f . Zapisz obliczenia.

Zadanie 3.

Funkcja g jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $g(x) = f(x) + m$, gdzie m jest pewną liczbą rzeczywistą. Jednym z miejsc zerowych funkcji g jest liczba 0. Liczba m jest równa:

A. -2

B. 2

C. -4

D. 4

Odpowiedź: 1. $x = 1$ 2. $\sqrt{f(x)}$

Zadanie 1.

Oś symetrii przechodzi zawsze przez wierzchołek paraboli. Współrzędna x wierzchołka paraboli jest równa 1, stąd też możemy być pewni, że równaniem osi symetrii wykresu funkcji f jest $x = 1$.

Zadanie 2.

Znając współrzędne wierzchołka paraboli, najprościej będzie skorzystać z postaci kanonicznej, czyli $f(x) = a(x - p)^2 + q$. Skoro współrzędne wierzchołka są równe $(1; 4)$, to $p = 1$ oraz $q = 4$, zatem:

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 4$$

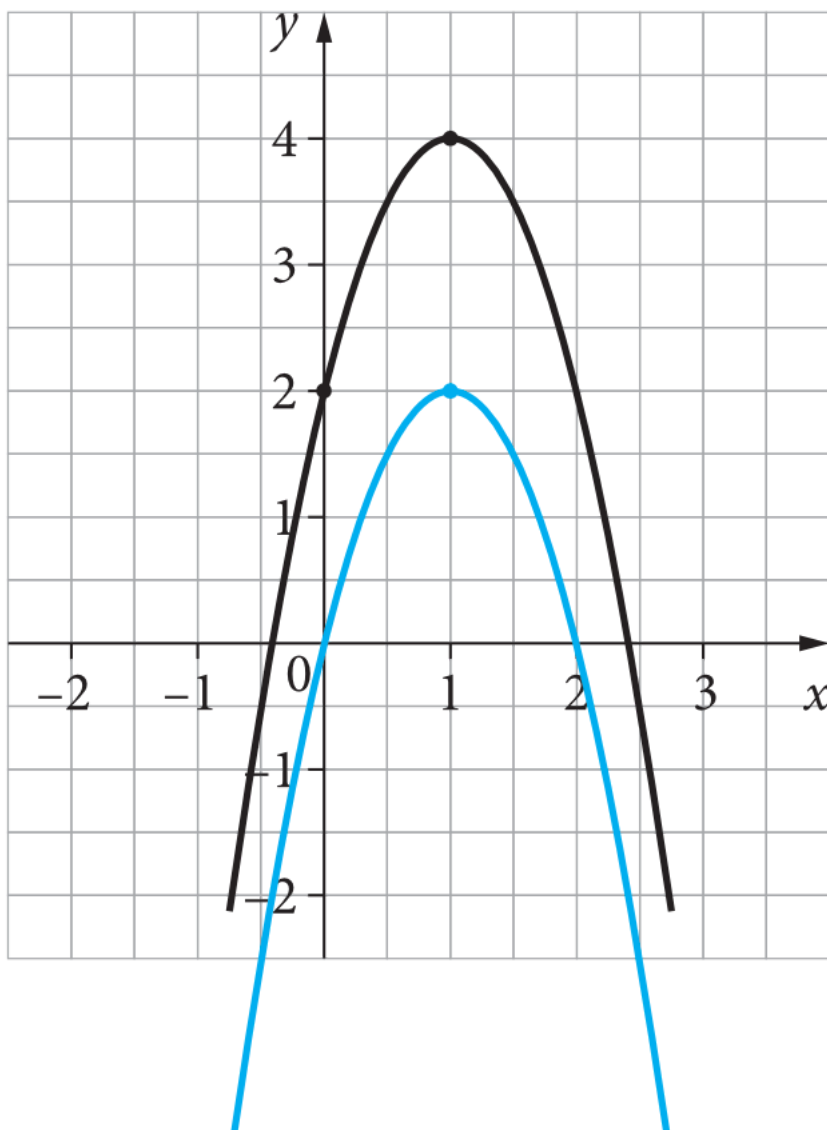
Do pełnego wzoru brakuje nam jeszcze współczynnika a . Aby go poznać, wystarczy podstawić do wyznaczonego przed chwilą równania współrzędne jednego z punktów, przez który przechodzi wykres. Możemy tutaj skorzystać z punktu podanego w treści zadania, czyli $(0; 2)$. W związku z tym:

$$2 = a \cdot (0 - 1)^2 + 4, \quad 2 = a \cdot (-1)^2 + 4, \quad 2 = a \cdot 1 + 4, \quad 2 = a + 4, \quad a = -2$$

To oznacza, że wzorem tej funkcji jest $f(x) = -2(x - 1)^2 + 4$.

Zadanie 3.

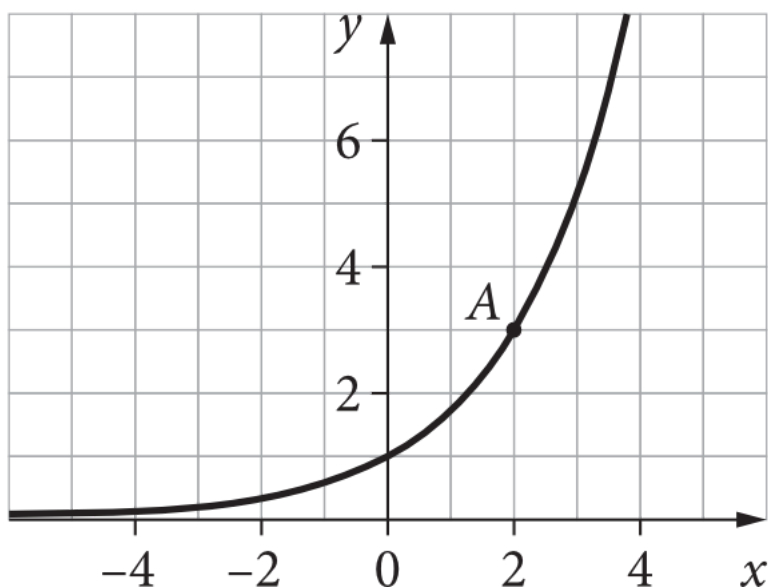
Ze wzoru $g(x) = f(x) + m$ wynika, że funkcja $g(x)$ powstała w wyniku przesunięcia funkcji $f(x)$ o m jednostek w górę lub w dół. Aby funkcja $g(x)$ miała miejsce zerowe równe 0, to funkcja $f(x)$ musiałaby być przesunięta o 2 jednostki w dół, czyli mielibyśmy wtedy wzór $g(x) = f(x) - 2$. To prowadzi nas do wniosku, że $m = -2$.



Zadanie 12

0-4 pkt

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$ oraz leżący na tym wykresie punkt $A = (2, 3)$.



Zadanie 1.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

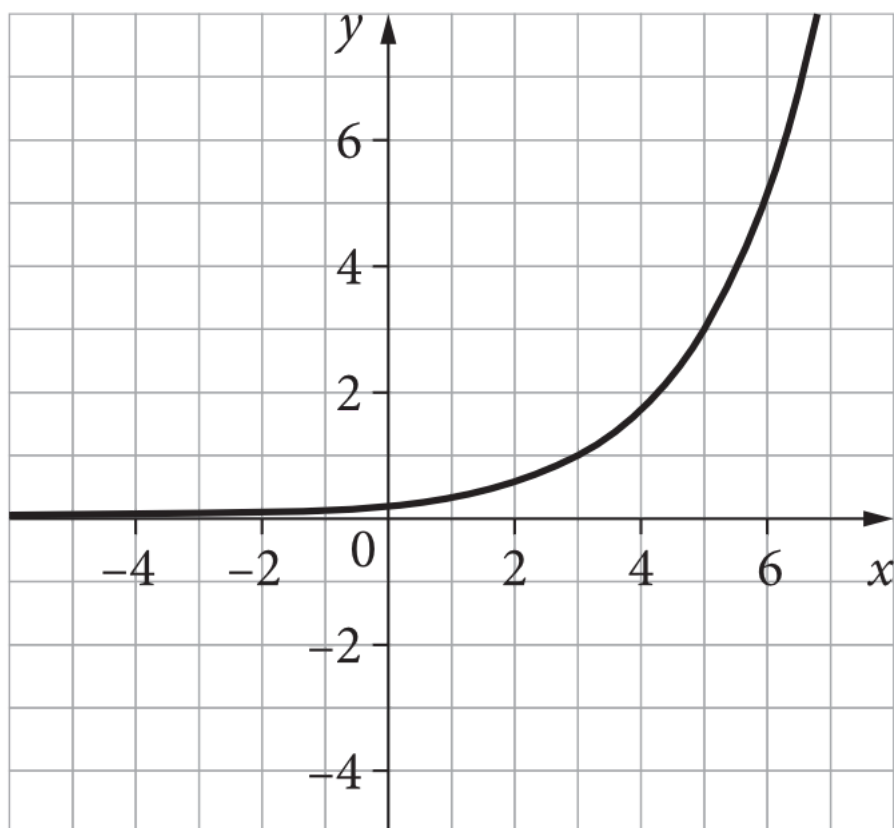
Liczba $f(0) - f(3)$ jest ujemna.	P	F
Liczba $\log_3 f(2)$ jest równa 1.	P	F

Zadanie 2.

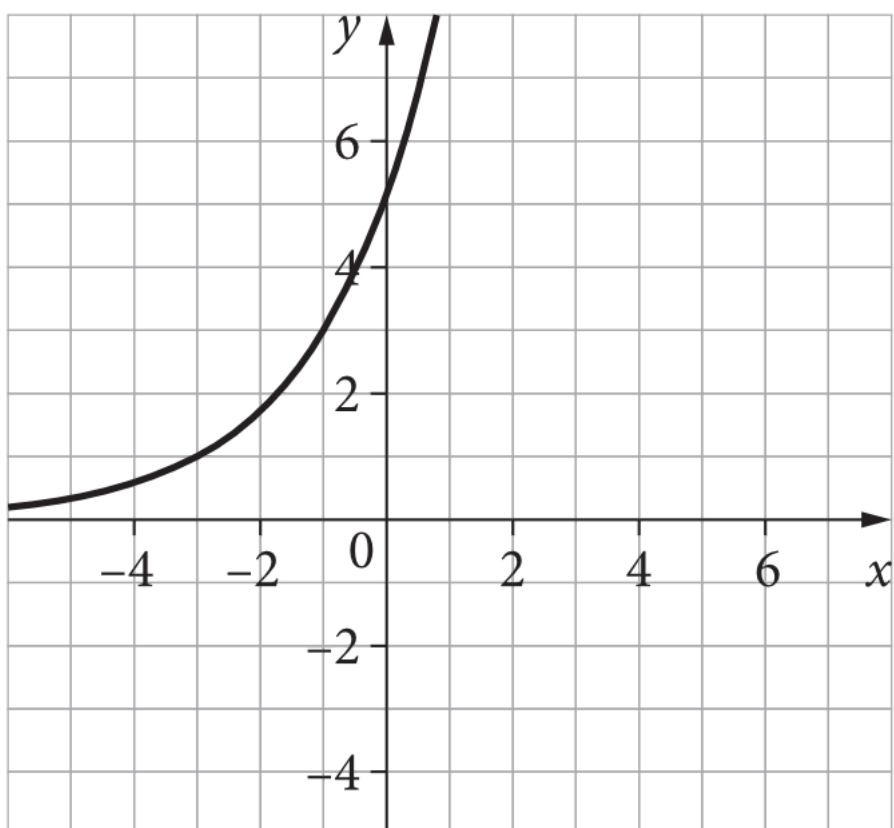
Oblicz wartość a . Zapisz obliczenia.

Zadania 3.

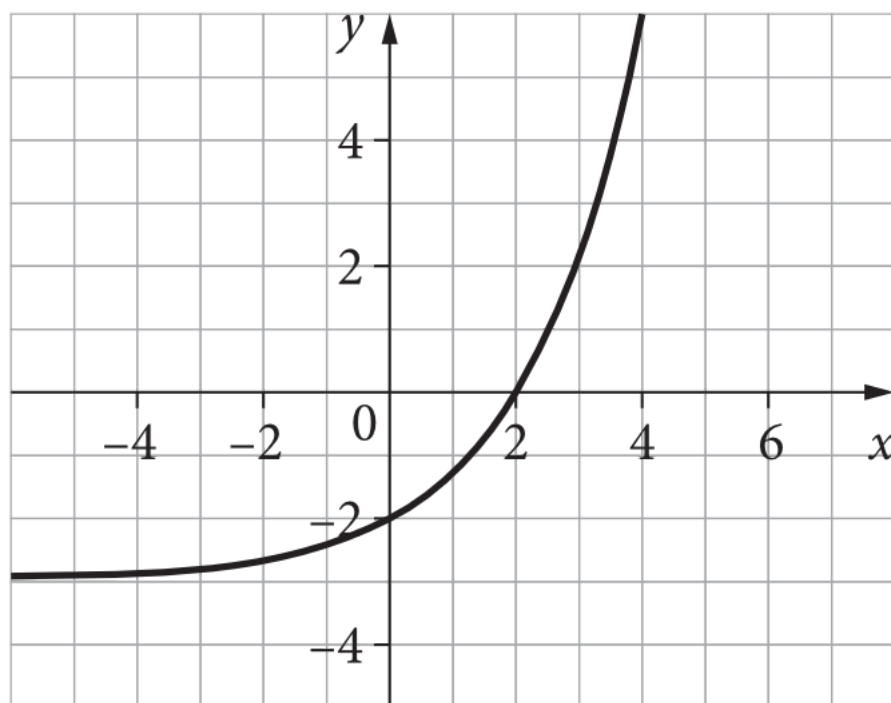
Jeden z poniższych rysunków przedstawia fragment wykresu funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(x - 3)$. Fragment wykresu funkcji g przedstawiono na rysunku:



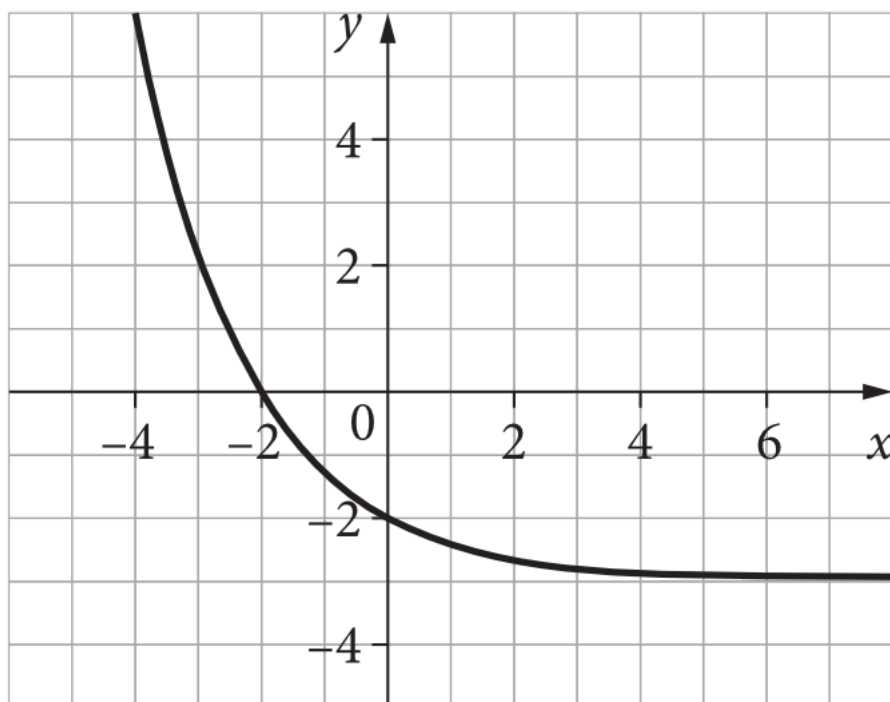
A.



B.



C.



D.

Odpowiedź: 1. P oraz P 2. $\sqrt{a} =$

Zadanie 1.

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Z wykresu funkcji odczytujemy, że $f(0) = 1$ (czyli, że dla argumentu $x = 0$ funkcja przyjmuje wartość równą 1) oraz że $f(3) = 5$. To oznacza, że $f(0) - f(3) = 1 - 5 = -4$, czyli zdanie jest prawdą.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Z wykresu odczytujemy, że $f(2)$ jest równe 3. W takim razie $\log_3 f(2)$ to nic innego jak $\log_3 3$, a ten jest rzeczywiście równy 1. Zdanie jest więc prawdą.

Zadanie 2.

Wiemy, że funkcja $f(x) = a^x$ przechodzi przez punkt $A = (2; 3)$, zatem podstawiając współrzędne tego punktu do wzoru, otrzymamy:

$$3 = a^2, a = \sqrt{3} \quad \vee \quad a = -\sqrt{3}$$

Ujemną wartość a odrzucamy, ponieważ nasza funkcja wykładnicza jest rosnąca, a więc tutaj $a > 1$. To oznacza, że zostaje nam tylko $a = \sqrt{3}$.

Zadanie 3.

Zapis $g(x) = f(x - 3)$ oznacza, że funkcja $g(x)$ powstaje w wyniku przesunięcia funkcji $f(x)$ o 3 miejsca w prawo. Taką sytuację mamy na rysunku z pierwszej odpowiedzi.

Zadanie 13

0-1 pkt

Dana jest prosta k o równaniu $y = \frac{1}{3}x + 4$. Prosta l o równaniu $y = (2m + 1)x - 2$, gdzie m to pewna liczba rzeczywista, jest prostopadła do prostej k .

Liczba m jest równa:

Odpowiedź: B (-2)

Dwie proste są względem siebie prostopadłe wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1 . Prosta k ma ten współczynnik równy $\frac{1}{3}$, natomiast prosta l ma ten współczynnik równy $2m - 1$. Skoro ich iloczyn ma być równy -1 , to:

$$\frac{1}{3} \cdot (2m + 1) = -1, \quad \frac{2}{3}m + \frac{1}{3} = -1, \quad \frac{2}{3}m = -\frac{4}{3} \quad \Bigg/ \cdot \frac{3}{2}, \quad m = -\frac{4}{2}, \quad m = -2$$

Zadanie 14

0-1 pkt

Na początku listopada w bufecie pracowniczym podniesiono cenę za obiad z $20zł$ do $24zł$. Z końcem miesiąca okazało się, że sprzedano mniej obiadów niż w październiku, ale wpływy z ich sprzedaży w listopadzie były o 8% wyższe niż w miesiącu przed podwyżką.

Liczba sprzedanych obiadów w listopadzie spadła o:

Odpowiedź: B (10%)

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

Wprowadźmy do zadania proste oznaczenia:

x - liczba sprzedanych obiadów w październiku (po cenie $20zł$)

y - liczba sprzedanych obiadów w listopadzie (po cenie $24zł$)

To z kolei oznacza, że na obiadach w październiku zarobiono $20x$, a w listopadzie $24y$.

Krok 2. Ustalenie spadku liczby sprzedanych obiadów.

Z treści zadania wynika, że jak wpływy z października powiększymy o 8%, to otrzymamy wpływy z listopada, czyli możemy ułożyć następujące równanie:

$$20x \cdot 1,08 = 24y, \quad 21,6x = 24y \quad \Bigg/ : 24, \quad y = 0,9x$$

Otrzymany zapis oznacza, że liczba sprzedanych obiadów w listopadzie stanowi 90% tych, które były sprzedane w październiku, czyli tym samym sprzedaż spadła o 10%.

Zadanie 15

0-1 pkt

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3 \cdot (-2)^n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 3. Ciąg (a_n) jest malejący.

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 3.

Prawda

Fałsz

Ciąg (a_n) jest malejący.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Patrząc się na wzór ciągu możemy zauważyć, że $q = -2$, bo to właśnie liczba -2 jest podnoszona do potęgi n . Jeśli tego nie dostrzegamy, to zawsze możemy obliczyć a_1 oraz a_2 , zatem:

$$a_1 = 3 \cdot (-2)^1 = 3 \cdot (-2) = -6, \quad a_2 = 3 \cdot (-2)^2 = 3 \cdot 4 = 12$$

W takim razie iloraz będzie równy:

$$q = \frac{a_2}{a_1}, \quad q = \frac{12}{-6}, \quad q = -2$$

Zdanie jest więc fałszem.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Już po obliczeniu pierwszych dwóch wyrazów w pierwszym kroku widać wyraźnie, że ten ciąg na pewno nie jest malejący (nie będzie też rosnący, tylko będzie niemonotoniczny).

Zadanie 16

Kąt α jest ostry, a $\sin \alpha = 2 \cdot \cos \alpha$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. $\tan \alpha = 2$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\tan \alpha = 2$$

Prawda

Fałsz

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Z własności funkcji trygonometrycznych wiemy, że $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Skoro tak, to podane w treści równanie możemy przekształcić w następujący sposób:

$$\sin \alpha = 2 \cdot \cos \alpha, \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2, \quad \tan \alpha = 2$$

Zdanie jest więc prawdą.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Tym razem skorzystamy z jedynki trygonometrycznej, czyli zależności $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Z równania $\sin \alpha = 2 \cdot \cos \alpha$ wynika, że $\cos \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$. Podstawiając to otrzymamy:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{2} \sin \alpha \right)^2 = 1, \quad \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha = 1, \quad \frac{5}{4} \sin^2 \alpha = 1 \quad \left/ \cdot \frac{4}{5} \right., \quad \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} \quad \vee \quad \sin \alpha = -$$

Skoro α jest kątem ostrym, to sinus takiego kąta musi być dodatni, więc ujemne rozwiązanie odrzucamy i zostaje nam jedynie $\sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{5}}$, co możemy jeszcze rozpisać:

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Sinus nie jest więc równy $\frac{1}{2}$, czyli zdanie jest fałszem.

Zadanie 17

Dany jest trójkąt ABC , w którym $2 \cdot |AB| = 3 \cdot |BC| = 4 \cdot |AC| = 12$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. Obwód trójkąta ABC jest równy 12. Trójkąt ABC jest ostrokątny.

Obwód trójkąta ABC jest równy 12.

Prawda

Fałsz

Trójkąt ABC jest ostrokątny.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Obliczenie długości wszystkich boków trójkąta.
Z równania wynika, że:

$$2|AB| = 12, |AB| = 6$$

$$3|BC| = 12, |BC| = 4$$

$$4|AC| = 12, |AC| = 3$$

Krok 2. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.
Obwód tego trójkąta jest równy:

$$Obw = 6 + 4 + 3, Obw = 13$$

Zdanie jest więc fałszem.

Krok 3. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że jeżeli $a^2 + b^2 = c^2$ to trójkąt jest prostokątny. Możemy tutaj też dodać, że jeżeli $a^2 + b^2 > c^2$ to trójkąt jest ostrokątny, a jeżeli $a^2 + b^2 < c^2$ to trójkąt jest rozwartokątny. Musimy więc obliczyć ile to jest $a^2 + b^2$ i odnieść ten wynik do wartości c^2 . I tu uwaga - pod a oraz b zawsze podstawimy krótsze boki, natomiast c to najdłuższy bok, czyli przeciwprostokątną. W tym przypadku mamy $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$.

$$a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2, a^2 + b^2 = 9 + 16, a^2 + b^2 = 25$$

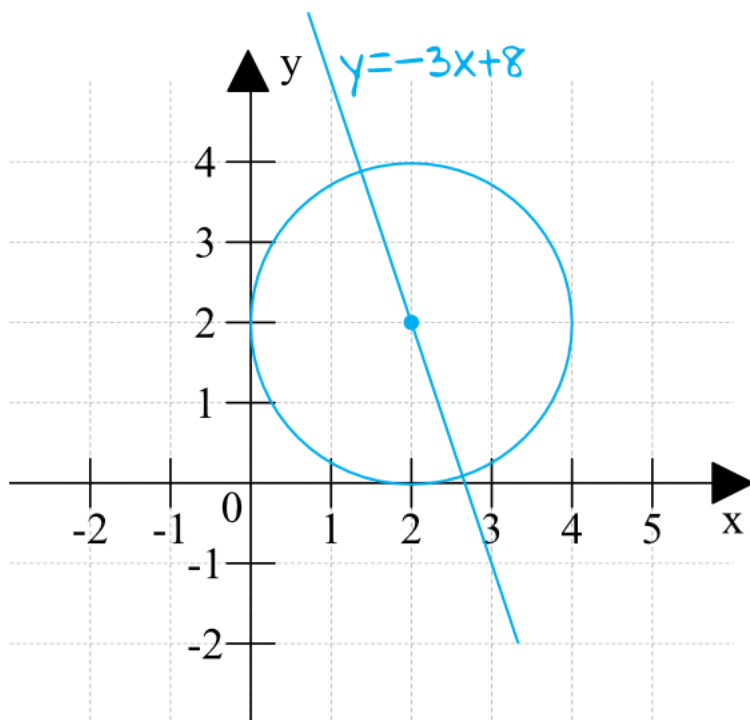
$$c^2 = 6^2, c^2 = 36$$

Wyszło nam więc, że $a^2 + b^2 < c^2$, ponieważ $25 < 36$. To oznacza, że ten trójkąt jest rozwartokątny, czyli zdanie jest fałszem.

Zadanie 18

Punkt A jest środkiem okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych i leży na prostej o równaniu $y = -3x + 8$. Obie współrzędne punktu A są dodatni

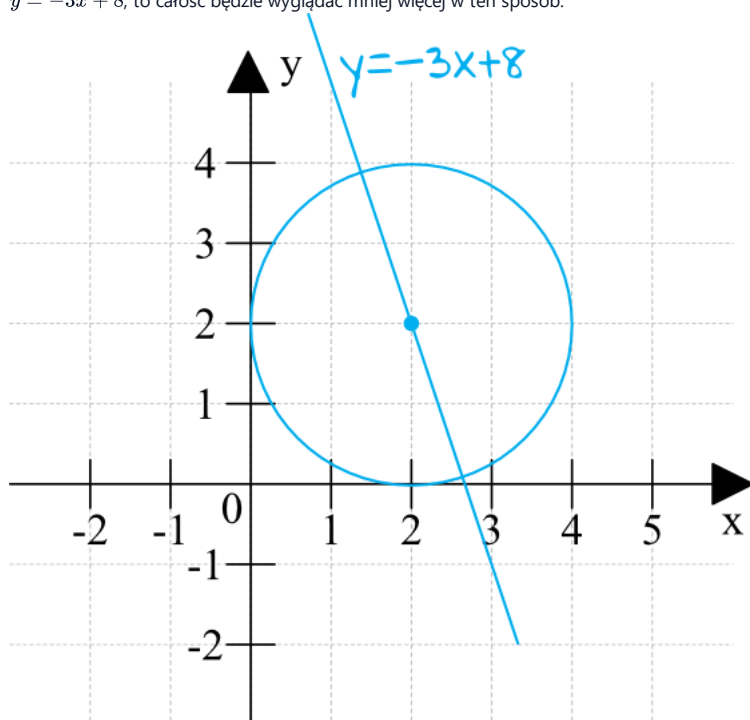
Promień omawianego okręgu jest równy:



Odpowiedź: A (2)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Jeżeli okrąg jest styczny do osi układu współrzędnych i obie współrzędne ma dodatnie, to musi znajdować się w pierwszej ćwiartce układu. Jeżeli do tego dorysujemy $y = -3x + 8$, to całość będzie wyglądać mniej więcej w ten sposób:

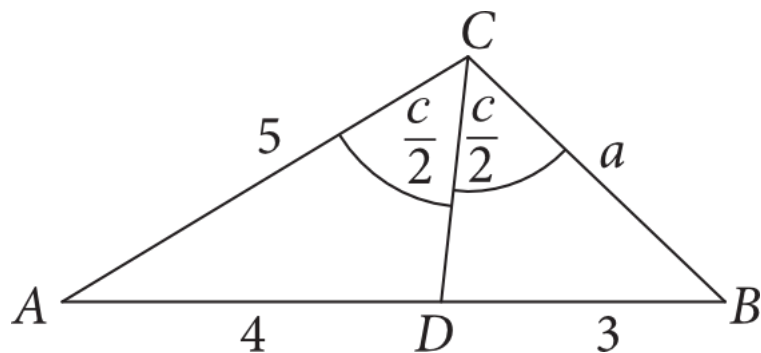


Krok 2. Obliczenie długości promienia okręgu.

Tu powinniśmy dostrzec, że aby okrąg był styczny do osi układu, to jego współrzędne środka okręgu muszą mieć jednakową współrzędną. Po prowadzi nas do punktu $S = (2; 2)$. Tym samym widzimy, że promień okręgu musi mieć długość $r = 2$.

Zadanie 19

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 5$. Dwusieczna CD kąta ACB dzieli bok AB na odcinki o długości $|AD| = 4$, $|DB| = 3$ (zobacz rysunek).



Oblicz długość a boku BC trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $|BC| = \frac{15}{4}$

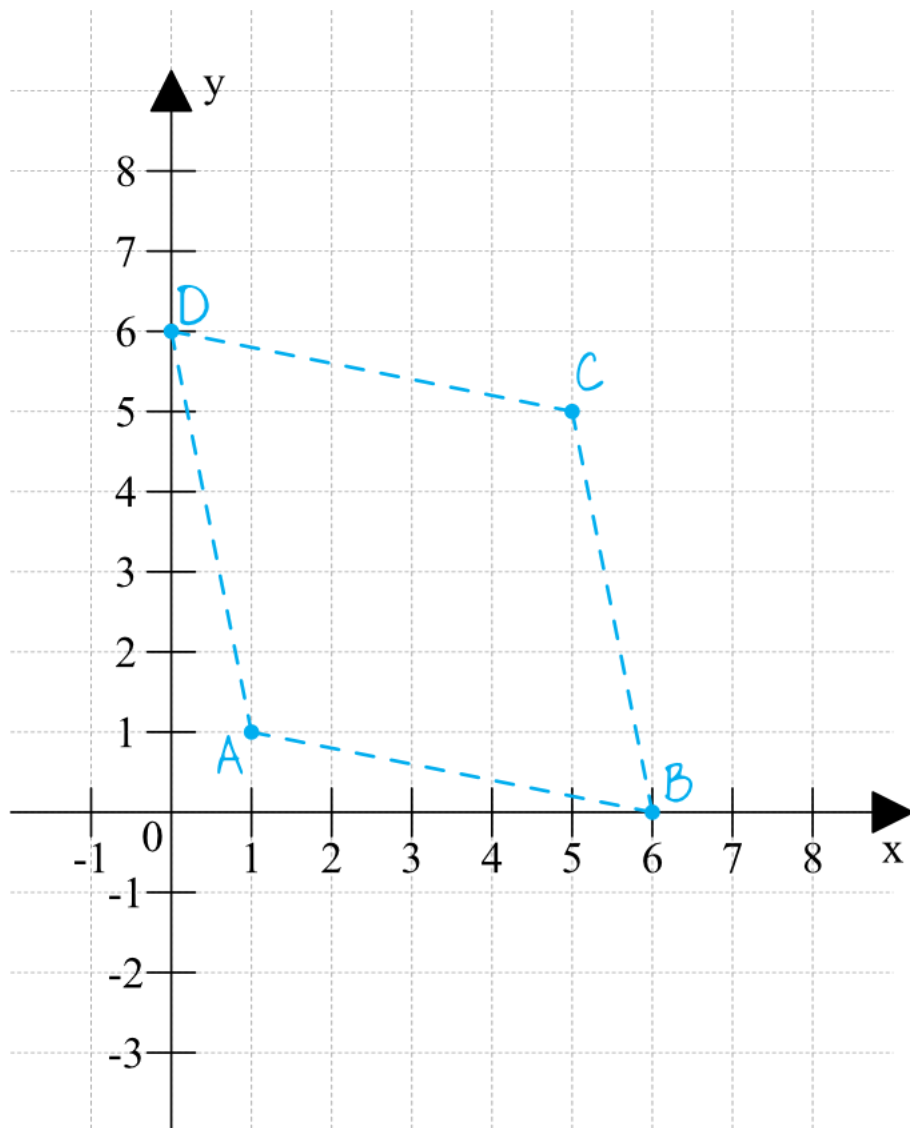
W tym zadaniu skorzystamy z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie. Na jego podstawie możemy ułożyć następującą proporcję:

$$\frac{a}{3} = \frac{5}{4} \quad / \cdot 3, \quad a = \frac{15}{4}$$

Zadanie 20

Punkty $A = (1, 1)$ i $C = (5, 5)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu $ABCD$. Wierzchołek B leży na osi Ox układu współrzędnych.

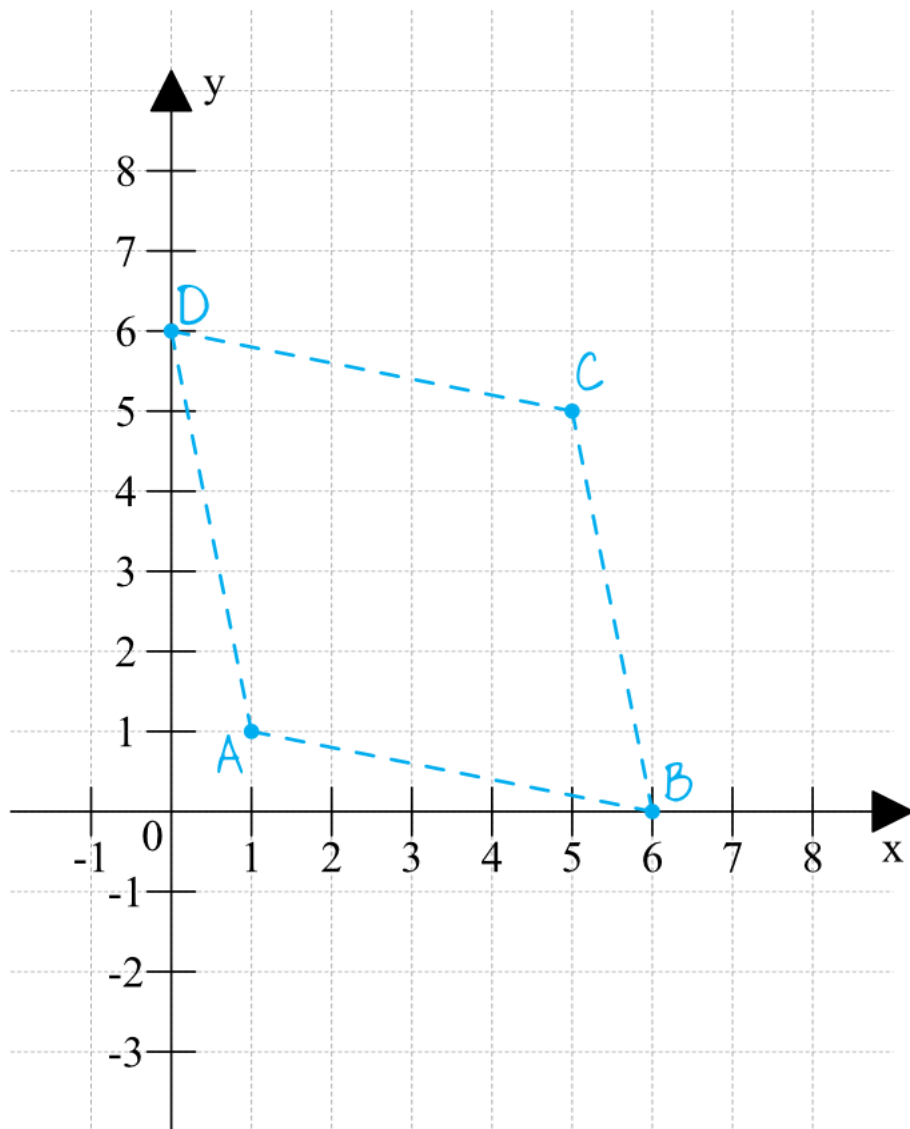
Wierzchołek B ma współrzędne:



Odpowiedź: C ((6, 0))

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanieśmy na układ współrzędnych znane punkty A oraz C i spróbujmy naszkicować omawiany romb. Wiemy, że wszystkie boki rombu mają jednakową długość. Punkt B musi być oddalony o jednakową odległość zarówno od punktu A jak i C . Sytuacja z treści zadania będzie więc wyglądać następująco:



Krok 2. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka B .

Wiemy, że wierzchołek B leży na osi Ox , czyli wiemy, że jego współrzędna $y_B = 0$. Brakuje nam tylko współrzędnej x tego punktu. Punktem wyjścia do jej wyznaczenia są długości boków rombu, które mają jednakową miarę, zatem korzystając ze wzoru na długość odcinka moglibyśmy zapisać, że:

$$|AB| = |BC|, \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}, (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2$$

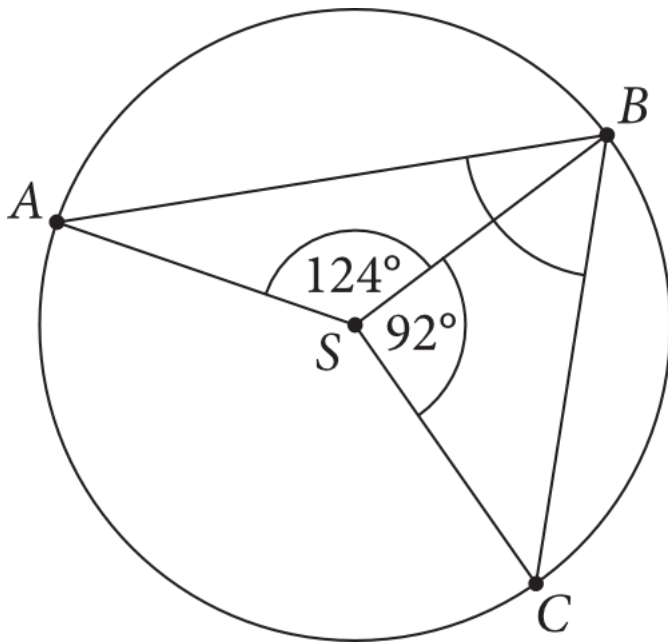
Teraz wystarczy podstawić do tego równania znane nam współrzędne. W przypadku punktu B w miejsce y_B podstawimy oczywiście 0, a w miejsce x_B możemy przejrzystość zapisu, zatem:

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2, (x - 1)^2 + (0 - 1)^2 = (5 - x)^2 + (5 - 0)^2, x^2 - 2x + 1 + 1 = 25 - 10x + x^2 + 25, -2x +$$

To oznacza, że wierzchołek B ma współrzędne $(6; 0)$.

Zadanie 21

Na okręgu o środku S wybrano takie punkty: A , B i C , że $|\angle ASB| = 124^\circ$, a $|\angle BSC| = 92^\circ$ (zobacz rysunek).



Miara kąta ABC jest równa:

Odpowiedź: C (72°)

Krok 1. Obliczenie miary kąta ASC .

Kąt ASC oraz kąty 124° i 92° tworzą kąt pełny. To oznacza, że miara kąta ASC będzie równa:

$$|\angle ASC| = 360^\circ - 124^\circ - 92^\circ = 144^\circ$$

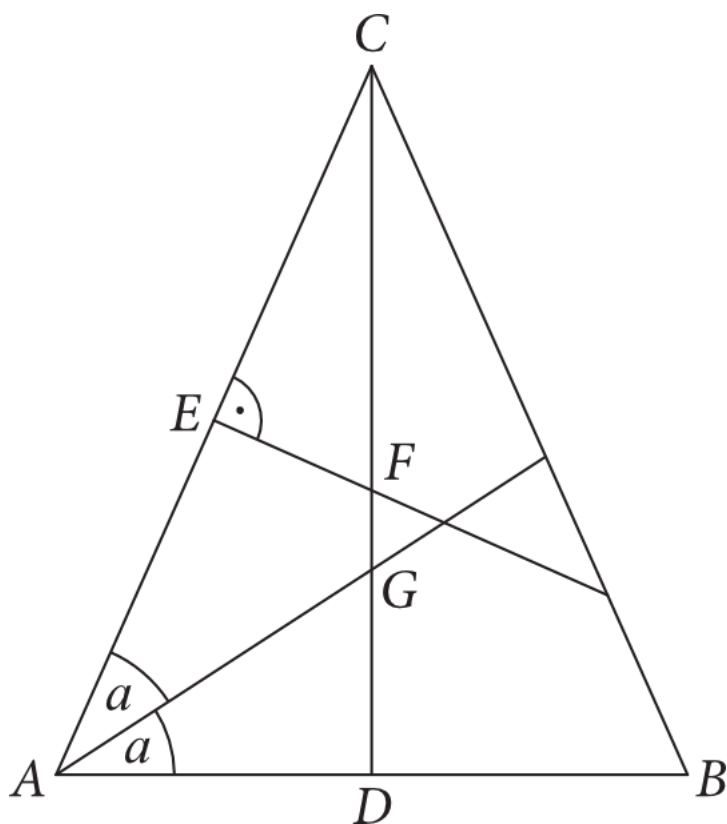
Krok 2. Obliczenie miary kąta ABC .

Kąt ABC jest kątem wpisanym, który opiera się na tym samym łuku co kąt środkowy ASC . Z własności kątów środkowych i wpisanych wiemy, że miara kąta ABC jest dwa razy mniejsza od kąta środkowego ASC , zatem:

$$|\angle ABC| = 144^\circ : 2 = 72^\circ$$

Zadanie 22

Trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym, w którym $|AC| = |BC|$. Punkt D jest środkiem podstawy AB trójkąta, a E – środkiem boku AC . Półproste ED i BE przecinają się w punkcie F i G (jak na rysunku).



Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest punkt:

A.	$F,$	ponieważ jest on punktem przecięcia	1.	symetralnych boków
			2.	dwusiecznych kątów
B.	$G,$		3.	środkowych trójkątów

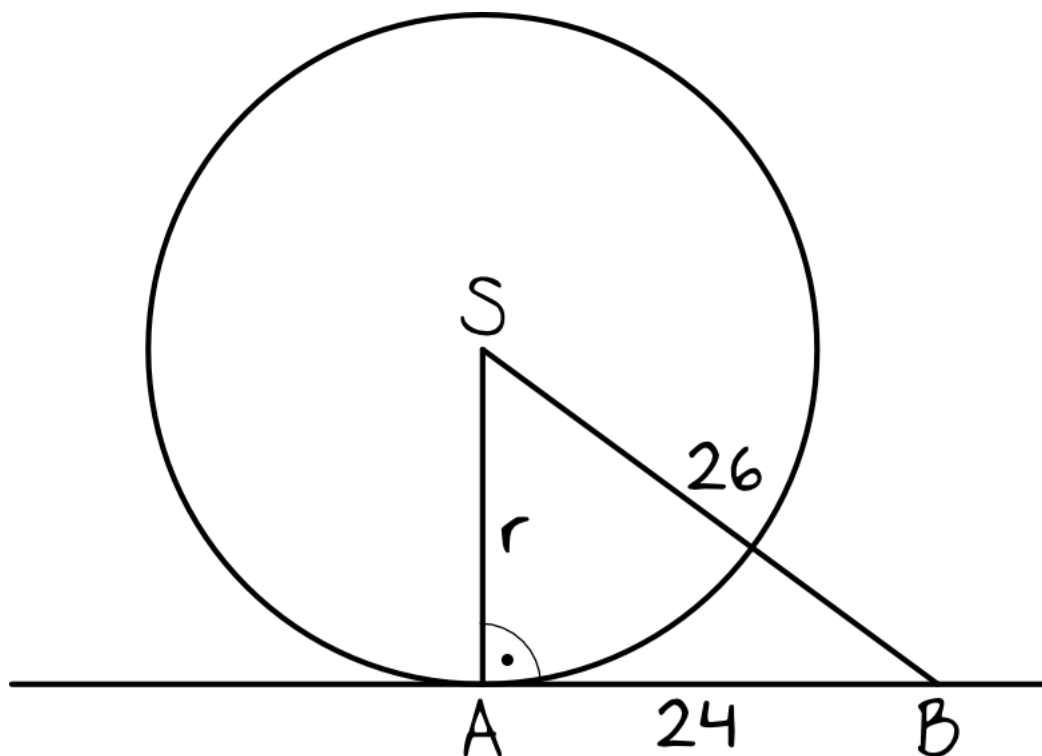
Odpowiedź: B., ponieważ 2.

Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt jest zawsze punkt przecięcia się dwusiecznych trójkąta. W takim razie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest punkt przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta ABC .

Zadanie 23

Okrąg o środku S jest styczny do prostej k w punkcie A . Punkt B leży na prostej k w odległości 24 od punktu A i w odległości 26 od punktu S .

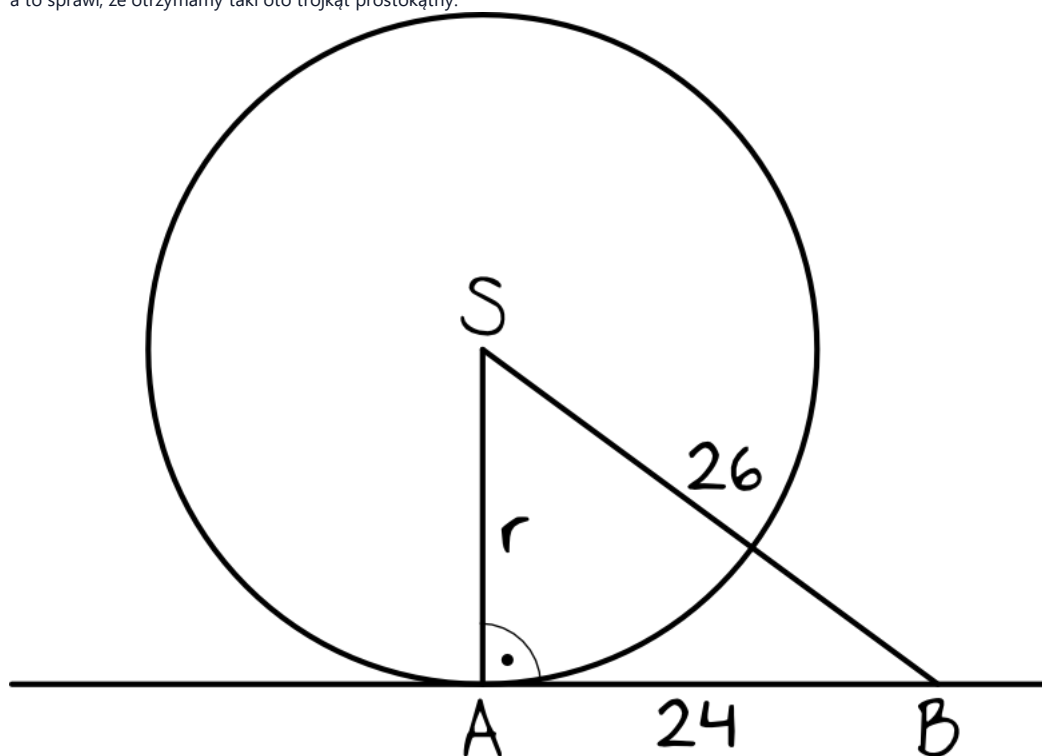
Promień tego okręgu jest równy:



Odpowiedź: B (10)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Kluczem do sukcesu będzie dobry rysunek pomocniczy. Tu powinniśmy pamiętać o tym, że z własności stycznych do okręgu wynika, że promień naszego okręgu a to sprawi, że otrzymamy taki oto trójkąt prostokątny:



Krok 2. Obliczenie długości promienia okręgu.

Mamy trójkąt prostokątny, w którym znamy długości dwóch boków. Trzecim bokiem jest promień, którego szukamy, zatem jest to idealna sytuacja do zastosowania

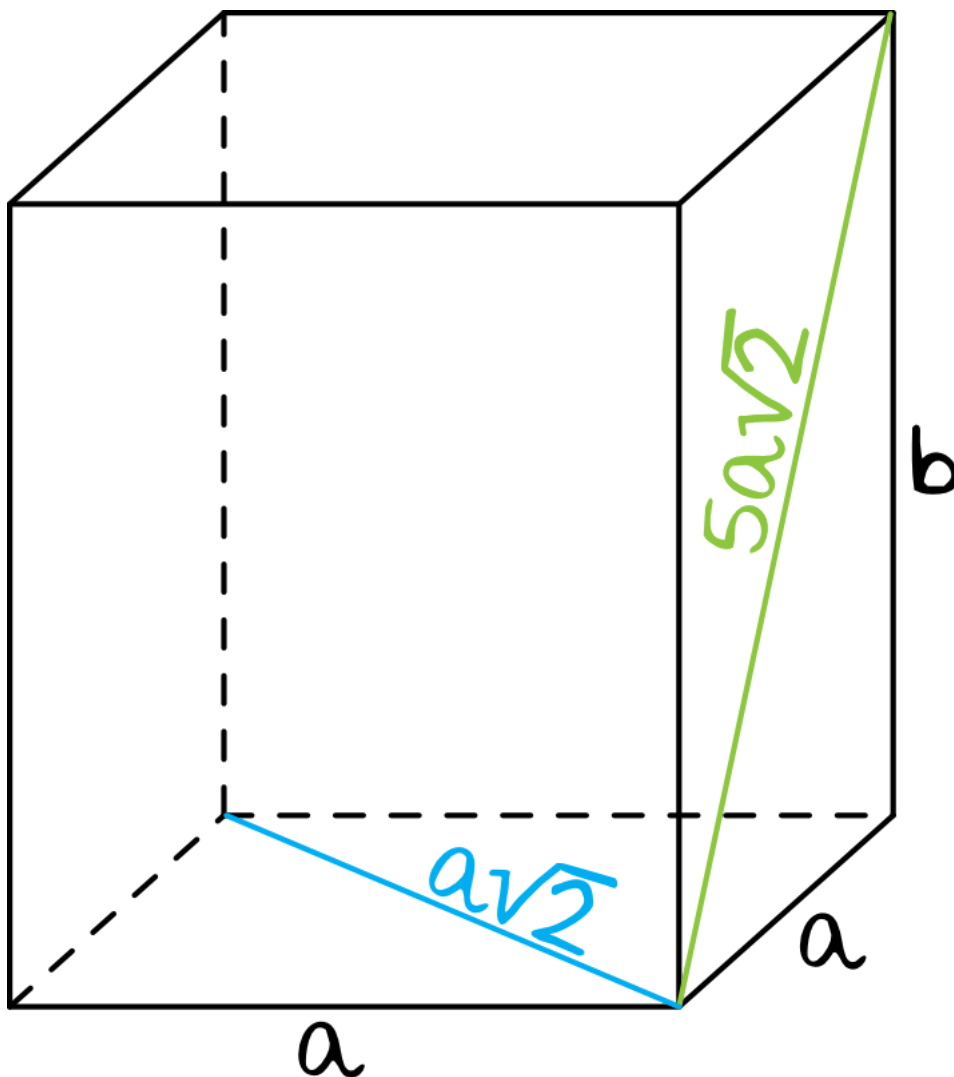
$$r^2 + 24^2 = 26^2, \quad r^2 + 576 = 676, \quad r^2 = 100, \quad r = 10 \quad \vee \quad r = -10$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, ponieważ promień musi być liczbą dodatnią, stąd też zostaje nam $r = 10$.

Zadanie 24

W pewnym graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna ściany bocznej jest pięć razy dłuższa od przekątnej podstawy.

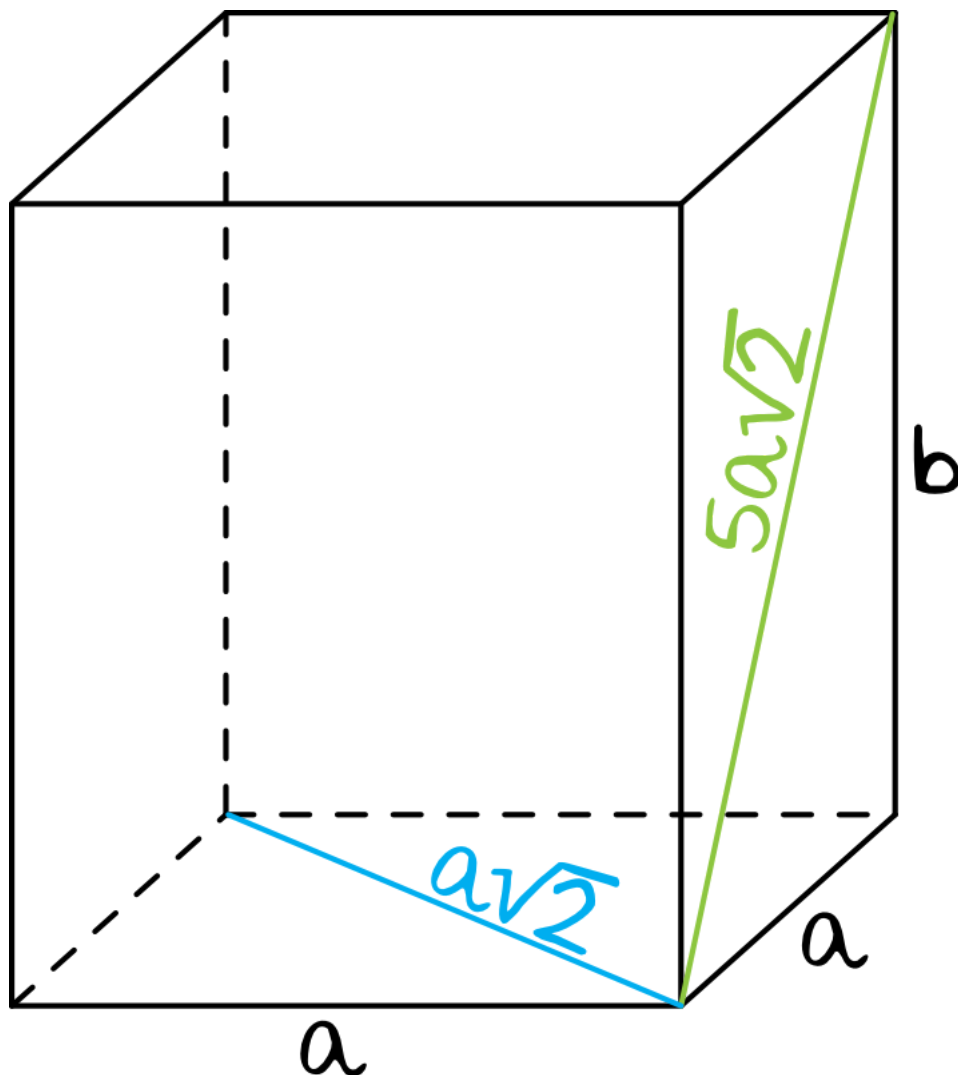
Stosunek długości krawędzi bocznej tego graniastosłupa do długości krawędzi jego podstawy jest równy:



Odpowiedź: D (7)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Graniastosłup jest prawidłowy czworokątny, czyli w podstawie będzie miał kwadrat. Oznaczmy zatem krawędź podstawy jako a , natomiast krawędź boczną jako przekątną podstawy ma długość $a\sqrt{2}$ (bo jest to przekątna podstawy o boku a), a przekątna ściany bocznej będzie pięciokrotnie dłuższa, czyli będzie miała długość następującą:



Krok 2. Obliczenie stosunku długości krawędzi bocznej do krawędzi podstawy.

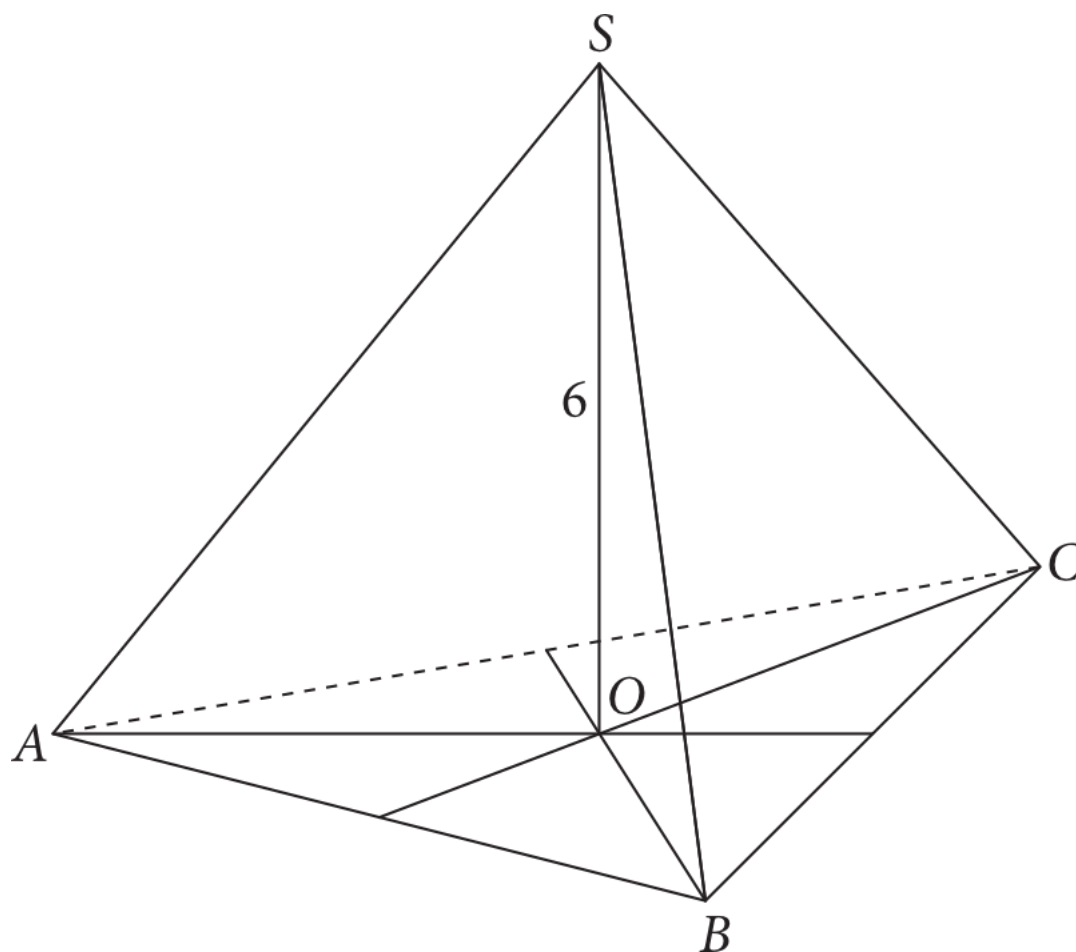
Spójrzmy teraz na trójkąt prostokątny, który powstał nam na ścianie bocznej. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$a^2 + b^2 = (5a\sqrt{2})^2, \quad a^2 + b^2 = 25 \cdot a^2 \cdot 2, \quad a^2 + b^2 = 50a^2, \quad b^2 = 49a^2, \quad b = \sqrt{49a^2} \quad \vee \quad b = -\sqrt{49a^2}, \quad b = 7a \quad \vee \quad b = -7a$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, bo długość boku nie może być ujemna. W takim razie zostaje nam wynik $b = 7a$, który informuje nas, że krawędź boczna podstawy.

Zadanie 25

Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC . Pole ściany bocznej ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy. Wysokość ostrosłupa poprowadzona z wierzchołka S do ściany bocznej ABS jest równa 6 (zobacz rysunek).

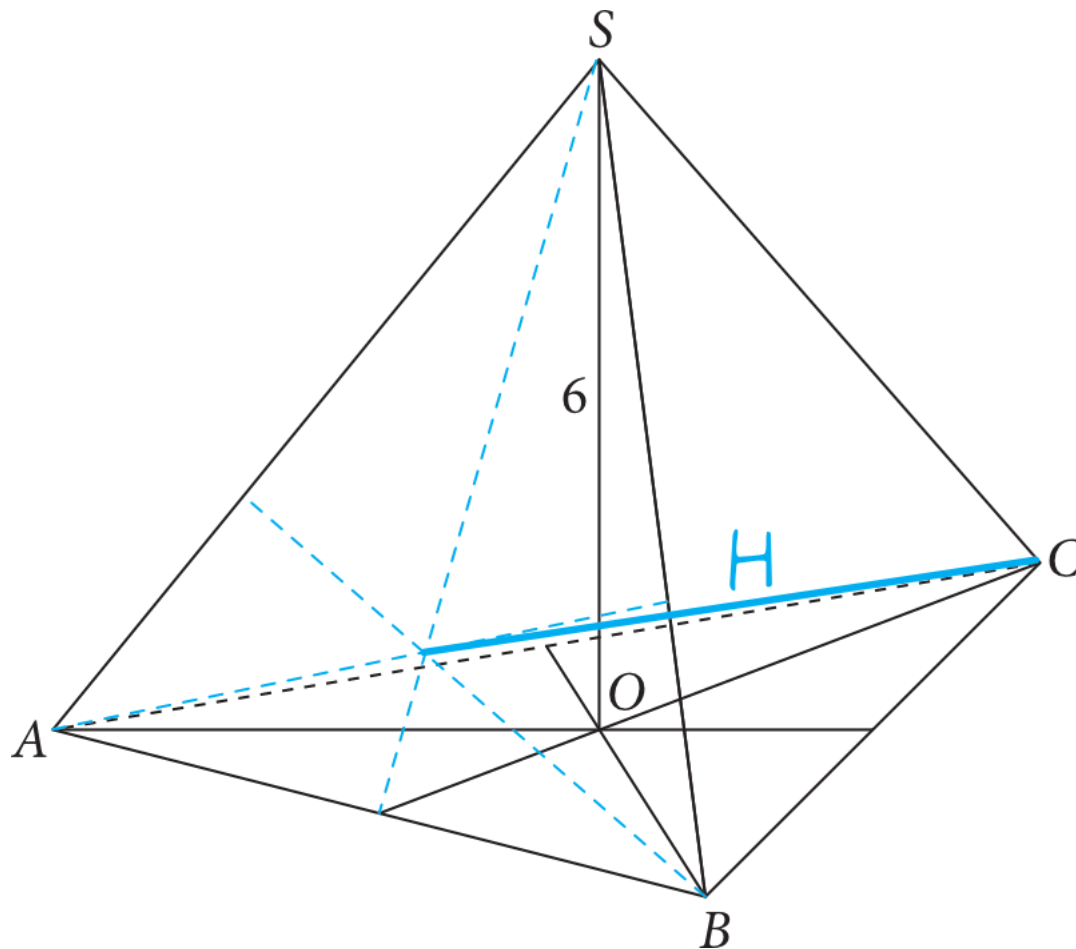


Wysokość ostrosłupa poprowadzona z wierzchołka C do ściany bocznej ABS jest równa:

Odpowiedź: C (3)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zanim zaczniemy cokolwiek liczyć, spróbujmy zaznaczyć na rysunku jakiej wysokości szukamy, bo jest to dość rzadko spotykana sytuacja:



Mówiąc bardziej obrazowo, szukamy wysokości ostrosłupa, tak jakby ostrosłup $ABCS$ był przewrócony (trójkąt ABS byłby wtedy jego podstawą).

Krok 2. Obliczenie wysokości ostrosłupa z wierzchołka C .

Niezależnie od tego jak jest ułożony ostrosłup, to jego objętość będzie taka sama i to będzie nasz punkt wyjścia do dalszych obliczeń. Jeżeli przyjmiemy, że pole objętość ostrosłupa będzie równa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H, \quad V = \frac{1}{3}x \cdot 6, \quad V = 2x$$

Z treści zadania wynika, że ściana boczna ma pole powierzchni dwa razy większe od podstawy. Tym samym pole ściany ABS będzie równe $2x$. Jeżeli potraktuje ostrosłup, to opuszczona na nią wysokość z wierzchołka C musi być na tyle długa, by objętość bryły w dalszym ciągu była równa $2x$, czyli:

$$2x = \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot H_C, \quad H_C = 3$$

Zadanie 26

W dwóch pudełkach umieszczono 7 kul. W jednym z pudełek znalazły się cztery kule ponumerowane liczbami: 1, 2, 3 i 4, a w drugim pudełku – trzy kule ponumerowane liczbami: 1, 2 i 3. Gra polega na losowaniu dwóch kul – po jednej z każdego pudełka, a kończy się wygraną, jeśli suma liczb z wylosowanych kul jest podzielna przez 3.

Prawdopodobieństwo wygranej w tej grze jest równe:

Odpowiedź: C ($\frac{1}{3}$)

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

W pierwszym pudełku mamy 4 kule, w drugim mamy 3 kule, czyli zgodnie z regułą mnożenia, wszystkich zdarzeń elementarnych będziemy mieć $|\Omega| = 4 \cdot 3 = 12$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Zdarzeniem sprzyjającym jest sytuacja, w której wylosowane kule utworzą liczbę podzielną przez 3. Spróbujmy zatem wypisać interesujące nas możliwości:

$$(1; 2), (2; 4), (3; 3), (4; 2)$$

Widzimy, że są 4 sprzyjające zdarzenia, czyli $|A| = 4$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Zadanie 27

Ciąg arytmetyczny (a_n) ma dwanaście wyrazów, których suma jest równa 168. Różnica $a_1 - a_{12}$ wynosi 22.

Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $a_n = -2n + 27$

Krok 1. Obliczenie wartości a_1 oraz a_{12} .

Korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu, możemy zapisać, że:

$$S_n = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12, 168 = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12, 14 = \frac{a_1 + a_{12}}{2}, a_1 + a_{12} = 28$$

Z treści zadania wiemy, że $a_1 - a_{12} = 22$, czyli że tym samym $a_1 = 22 + a_{12}$. Podstawiając tę informację do równania $a_1 + a_{12} = 28$, wyjdzie nam, że:

$$22 + a_{12} + a_{12} = 28, 2a_{12} = 6, a_{12} = 3$$

Musimy jeszcze obliczyć wartość a_1 . Zapisaliśmy przed chwilą, że $a_1 = 22 + a_{12}$, zatem:

$$a_1 = 22 + 3, a_1 = 25$$

Krok 2. Obliczenie różnicy ciągu.

Do wyznaczenia wzoru potrzebujemy jeszcze różnicy ciągu arytmetycznego. Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego wiemy, że:

$$a_{12} = a_1 + 11r$$

Podstawiając do tego równania znane nam $a_1 = 25$ oraz $a_{12} = 3$, otrzymamy:

$$3 = 25 + 11r, 11 = -22, r = -2$$

Krok 3. Zapisanie wzoru.

Do zapisania wzoru skorzystamy ze standardowego wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

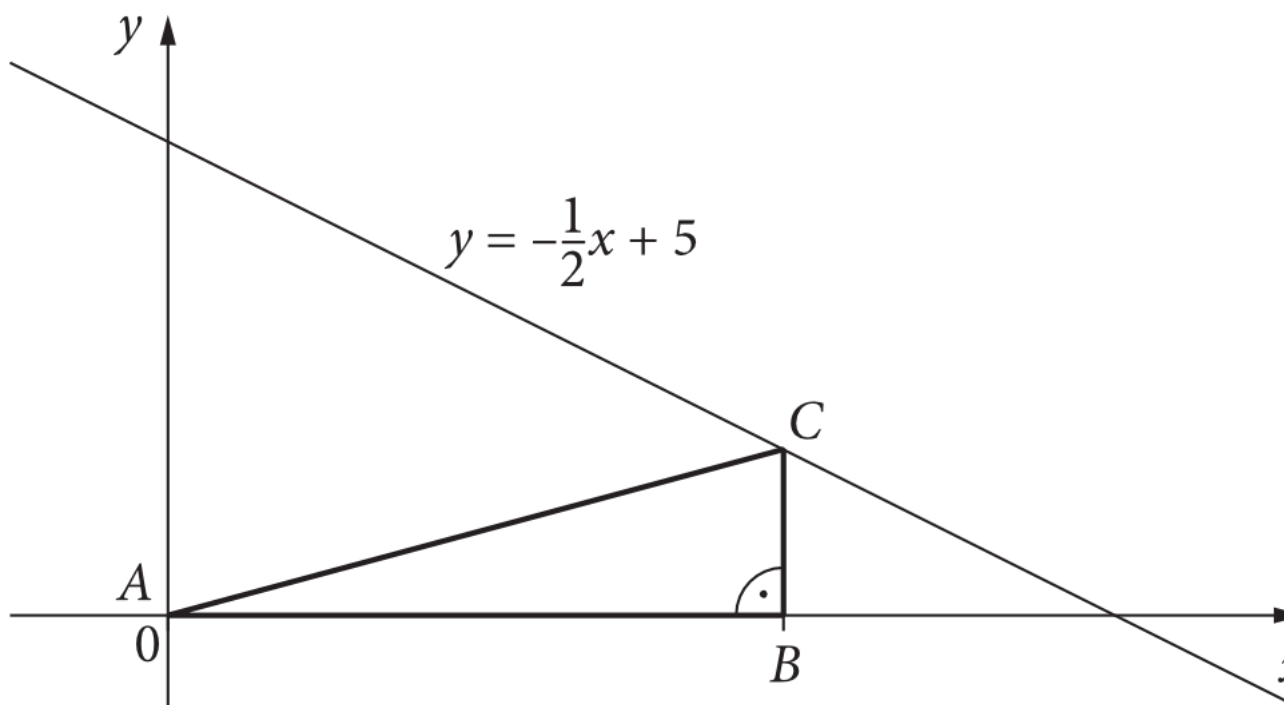
$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Podstawiając do niego $a_1 = 25$ oraz $r = -2$, otrzymamy:

$$a_n = 25 + (n - 1) \cdot (-2), a_n = 25 - 2n + 2, a_n = -2n + 27$$

Zadanie 28

Rozważamy wszystkie trójkąty prostokątne ABC o przeciwprostokątnej AC , w których $A = (0, 0)$, $B = (m, 0)$, a wierzchołek C leży na prostej o równaniu y współrzędne są liczbami dodatnimi. Na rysunku przedstawiono jeden z takich trójkątów.



Zadanie 1.

Wyznacz długość przeciwprostokątnej AC trójkąta – spośród rozważanych – w którym długość przyprostokątnej BC jest równa 2. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2.

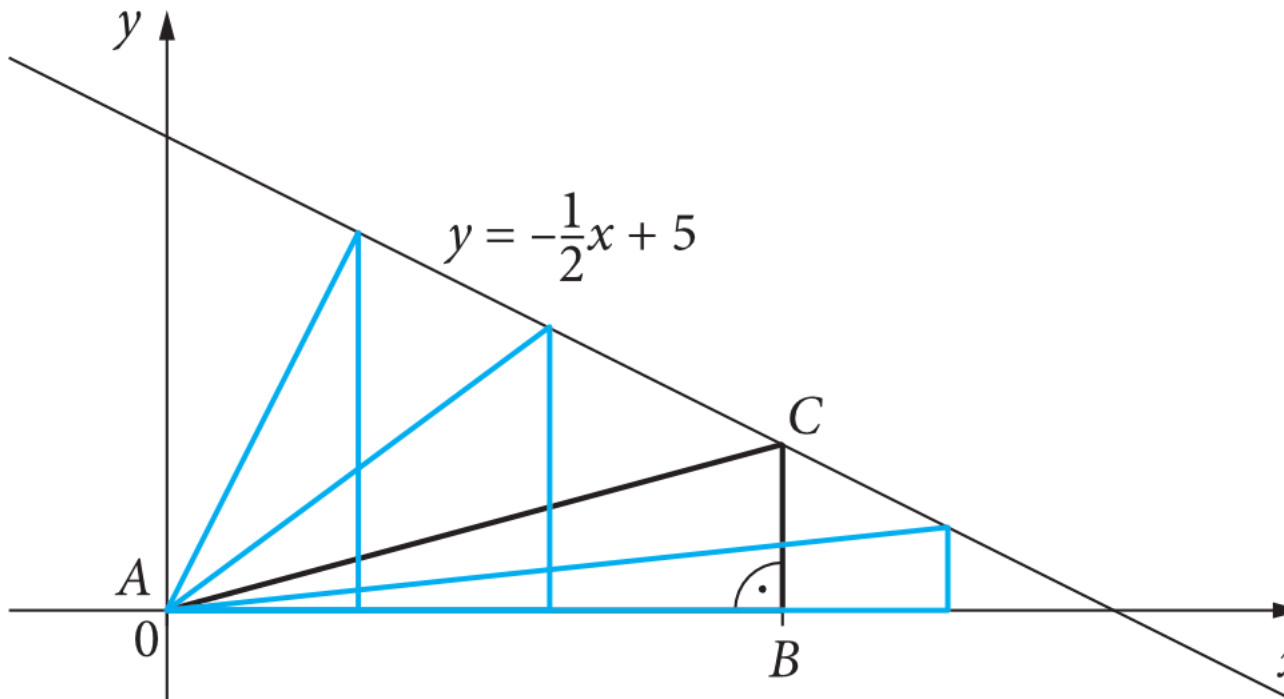
Podaj wzór i dziedzinę funkcji opisującej zależność pola trójkąta ABC od m . Oblicz współrzędne wierzchołka C tego spośród rozważanych trójkątów, który ma

Odpowiedź: 1. $|AC| = 2\sqrt{10}$

Zadanie 1.

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Co prawda nie jest to konieczne do wykonania obliczeń, ale zobrazujmy sobie może o co w ogóle chodzi z tymi trójkątami, które spełniają warunki zadania. Także zrozumieniu istoty zadania. Ogólnie chodzi o to, że te trójkąty mogą wyglądać w ten sposób:



W tym zadaniu interesuje nas jeden konkretny trójkąt - ten, którego przprostokątna BC ma długość 2.

Krok 2. Wyznaczenie współrzędnych punktu C .

Jeżeli długość boku BC jest równa 2, a punkt B leży na osi OX , to współrzędna y punktu C na pewno jest równa $y_C = 2$. Spróbujmy teraz obliczyć współrzędną x punktu C na prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 5$, to moglibyśmy zapisać, że:

$$2 = -\frac{1}{2}x + 5, \quad -3 = -\frac{1}{2}x, \quad x = 6$$

To oznacza, że $C = (6; 2)$.

Krok 3. Obliczenie długości przeciwprostokątnej AC .

Znając współrzędne punktów A oraz C możemy obliczyć długość przeciwprostokątnej AC , korzystając po prostu ze wzoru na długość odcinka:

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}, \quad |AC| = \sqrt{(6 - 0)^2 + (2 - 0)^2}, \quad |AC| = \sqrt{6^2 + 2^2}, \quad |AC| = \sqrt{36 + 4}, \quad |AC| = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$$

Ewentualnie moglibyśmy oczywiście skorzystać z twierdzenia Pitagorasa, dostrzegając że $|AB| = 6$ oraz $|BC| = 2$, zatem:

$$6^2 + 2^2 = |AC|^2, \quad 36 + 4 = |AC|^2, \quad |AC|^2 = 40, \quad |AC| = \sqrt{40} \quad \vee \quad |AC| = -\sqrt{40}$$

Ujemny wynik odrzucamy, ponieważ długość boku musi być dodatnia, zatem zostaje nam $|AC| = \sqrt{40}$, co możemy jeszcze rozisać jako $|AC| = 2\sqrt{10}$.

Zadanie 2.

Krok 1. Rozpisanie współrzędnych punktu C .

Powinniśmy dostrzec, że współrzędna x_C musi być taka sama jak x_B (dobrze to było widać chociażby w poprzedniej części zadania). Skoro więc współrzędna x_B to także $x_C = m$. Dodatkowo, skoro punkt C leży na prostej określonej równaniem $y = -\frac{1}{2}x + 5$, to możemy zapisać, że $y_C = -\frac{1}{2}m + 5$.

To pozwala nam zapisać, że $C = (m; -\frac{1}{2}m + 5)$.

Krok 2. Zapisanie wzoru funkcji $P(m)$.

Pole trójkąta ABC obliczymy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC|$$

Powinniśmy zauważyć, że długość odcinka AB będzie równa tyle, co współrzędna x punktu B , czyli $|AB| = m$. Z kolei wysokość $|BC|$ będzie równa tyle, ile w $|BC| = -\frac{1}{2}m + 5$. Jeśli tego nie dostrzegasz, to zwróć uwagę na pierwsze zadanie, tam jest to bardzo dobrze widoczne.

Możemy więc zapisać, że:

$$P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(-\frac{1}{2}m + 5\right), \quad P = -\frac{1}{4}m^2 + \frac{5}{2}m$$

Otrzymaliśmy informację, że pole powierzchni można opisać wzorem $-\frac{1}{4}m^2 + \frac{5}{2}m$. W ten sposób udało nam się zapisać wzór na pole z użyciem tylko jednej m potraktować jak funkcję kwadratową (dla jakiejś wartości m otrzymamy konkretne pole P). Zapisalibyśmy więc, że $P(m) = -\frac{1}{4}m^2 + \frac{5}{2}m$.

Krok 3. Wyznaczenie dziedziny funkcji.

Współrzędne punktu C są dodatnie (tak wynika z treści zadania), zatem:

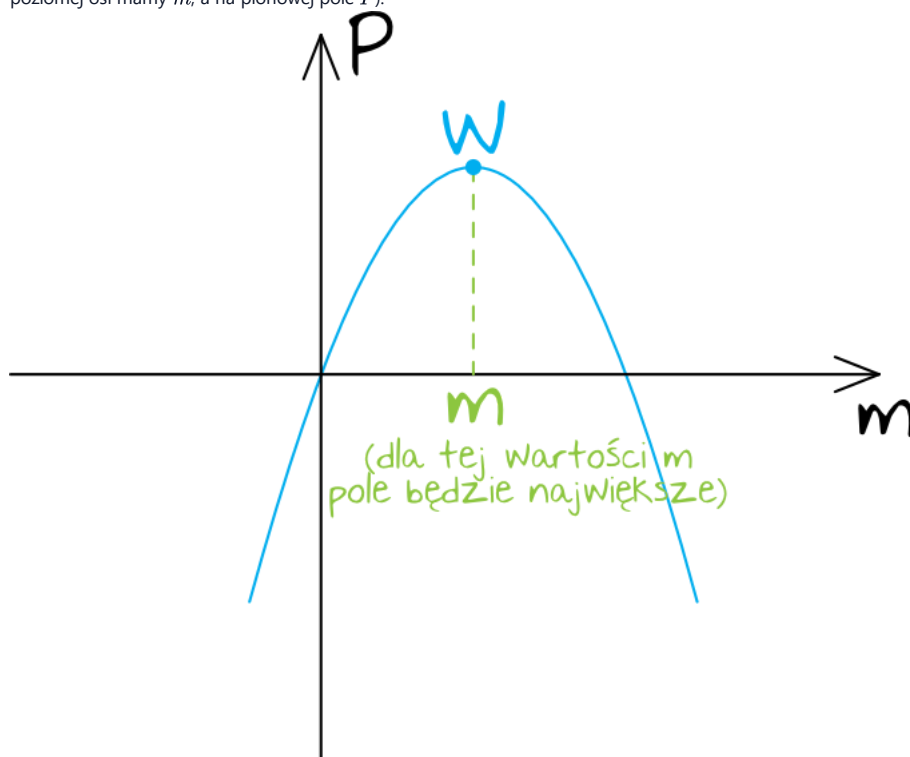
$$m > 0 \quad \text{oraz} \quad -\frac{1}{2}m + 5 > 0, \quad m > 0 \quad \text{oraz} \quad -\frac{1}{2}m > -5, \quad m > 0 \quad \text{oraz} \quad m < 10$$

Przy okazji zwróć uwagę, że zmienił się znak drugiej nierówności na przeciwny. Stało się tak dlatego, ponieważ mając postać $-\frac{1}{2}m > -5$ wykonywaliśmy obustronne mnożenie lub dzielenie nierówności przez liczbę ujemną zawsze trzeba zmienić znak na przeciwny.

Wyszło nam więc, że m musi być większe od 0 i mniejsze od 10, stąd też dziedziną funkcji $P(m)$ będzie $m \in (0; 10)$.

Krok 4. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Tutaj parabola będzie mieć ramiona skierowane do dołu (bo współczynnik $a = -\frac{1}{4}$). Sytuacja będzie więc wyglądać tak jak poniżej:



Chcemy się dowiedzieć, dla jakiego m osiągniemy jak największe pole P . Z własności parabol wiemy, że parabola skierowana ramionami do dołu osiągnie swoją maksymalną wartość w wierzchołku. Obliczmy zatem dla jakiej wartości m to największe pole jest przyjmowane, a pomoże nam w tym wzór na pierwszą współzrzedną wierzchołka paraboli:

$$x_W = \frac{-b}{2a}$$

W naszym przypadku współczynnik $a = -\frac{1}{4}$ oraz $b = \frac{5}{2}$, zatem:

$$x_W = \frac{-\frac{5}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}, \quad x_W = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}, \quad x_W = \left(-\frac{5}{2}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right), \quad x_W = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot (-2), \quad x_W = 5$$

Tu warto przy okazji dodać, że otrzymany wynik mieści się w naszej dziedzinie, zatem wszystko jest w porządku.

Krok 5. Wyznaczenie współrzędnych punktu C .

W poprzednim kroku otrzymaliśmy informację, że pole powierzchni będzie największe wtedy, gdy współrzędna x będzie równa 5. W naszym przypadku współrzędna m , zatem to pole będzie największe wtedy, gdy $m = 5$. Współrzędna y punktu C jest opisana jako $-\frac{1}{2}m + 5$, zatem:

$$y_C = -\frac{1}{2} \cdot 5 + 5, y_C = -2\frac{1}{2} + 5, y_C = 2\frac{1}{2}$$

To oznacza, że największe pole powierzchni otrzymamy wtedy, gdy $C = (5; 2\frac{1}{2})$.