

# Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Nowa Era 2022

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

## Odpowiedzi do zadań zamkniętych

| Zadanie | Odpowiedź                               | Pkt |
|---------|-----------------------------------------|-----|
| 1       | B $(-\frac{11}{7})$                     | 1   |
| 2       | C (12)                                  | 1   |
| 3       | C (625)                                 | 1   |
| 4       | D $(-4 - \sqrt{2})$                     | 1   |
| 5       | D (2)                                   | 1   |
| 6       | C $(3x^2 - 8xy - 3y^2)$                 | 1   |
| 7       | D $((3, +\infty))$                      | 1   |
| 8       | B (-5)                                  | 1   |
| 9       | A (12)                                  | 1   |
| 10      | A $(-\frac{\sqrt{3}}{6})$               | 1   |
| 11      | B (największą wartość równą -5)         | 1   |
| 12      | C (9)                                   | 1   |
| 13      | B $((4, 0))$                            | 1   |
| 14      | C (22)                                  | 1   |
| 15      | C $(\frac{3}{2})$                       | 1   |
| 16      | B $(\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4})$ | 1   |
| 17      | D (30)                                  | 1   |
| 18      | D (24)                                  | 1   |
| 19      | B $(36^\circ)$                          | 1   |
| 20      | B $(12\pi)$                             | 1   |
| 21      | A $(a = \frac{2}{3})$                   | 1   |
| 22      | C $(y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2})$  | 1   |
| 23      | D $(a = 1, b = 2)$                      | 1   |
| 24      | A (32)                                  | 1   |
| 25      | A (20)                                  | 1   |

## Rozwiązania krok po kroku

### Zadanie 1

0-1 pkt

Jeśli  $a = \frac{2}{3}$  i  $b = \frac{3}{2}$ , to wartość wyrażenia  $\frac{a+2b}{a-2b}$  jest równa:

**Odpowiedź: B  $(-\frac{11}{7})$**

Podstawiając liczby  $a = \frac{2}{3}$  i  $b = \frac{3}{2}$  do wyrażenia z treści zadania, otrzymamy:

$$\frac{\frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{3}{2}} = , = \frac{\frac{2}{3} + 3}{\frac{2}{3} - 3} = , = \frac{3\frac{2}{3}}{-2\frac{1}{3}} = 3\frac{2}{3} : \left(-2\frac{1}{3}\right) = , = \frac{11}{3} : \left(-\frac{7}{3}\right) = , = \frac{11}{3} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{11}{7}$$

### Zadanie 2

0-1 pkt

Liczba  $\frac{6^{2022} \cdot 2^{2022}}{12^{2021}}$  jest równa:

**Odpowiedź: C (12)**

W liczniku mamy jednakowe wykładniki potęg, zatem możemy wymnożyć przez siebie podstawy, dzięki czemu otrzymamy:

$$\frac{6^{2022} \cdot 2^{2022}}{12^{2021}} = \frac{12^{2022}}{12^{2021}} = 12^{2022-2021} = 12^1 = 12$$

## Zadanie 3

0-1 pkt

W firmie XYZ 48% pracowników zna język angielski, a spośród nich 8% zdało egzamin państwowy z tego języka i posiada międzynarodowy certyfikat językowy. Wynika stąd, że najmniejsza możliwa liczba pracowników firmy to:

**Odpowiedź: C (625)**

Wprowadźmy do treści zadania proste oznaczenia:

$x$  - liczba pracowników

$0,48x$  - liczba pracowników znających angielski

$0,08 \cdot 0,48x = 0,0384x$  - liczba pracowników, którzy mają certyfikat

Mogłoby się wydawać, że skoro ma to być jak najmniejsza liczba pracowników, to liczba mających certyfikat powinna być równa 1. Nie do końca jest to dobre założenie, bo w takim przypadku np. liczba osób znających angielski wyszłaby nam niecałkowita. Jak zatem podejść do zadania? Najprościej będzie sprawdzić, co się stanie, gdy w miejsce  $x$  podstawimy po kolei odpowiedzi z naszego zadania:

$0,0384 \cdot 100 = 3,84$ ,  $0,0384 \cdot 250 = 9,6$ ,  $0,0384 \cdot 625 = 24$ ,  $0,0384 \cdot 1225 = 47,04$

Wynik będący liczbą naturalną otrzymaliśmy jedynie w trzecim przypadku, tak więc to będzie prawidłowa odpowiedź.

## Zadanie 4

0-1 pkt

Liczba  $\frac{7\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$  jest równa:

**Odpowiedź: D ( $-4 - \sqrt{2}$ )**

Zadanie polega na usunięciu niewymierności z mianownika. Aby tego dokonać, musimy licznik i mianownik pomnożyć przez  $1 + 2\sqrt{2}$ , co pozwoli nam w mianowniku zastosować wzór skróconego mnożenia  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ . Całość obliczeń będzie wyglądać następująco:

$$\frac{7\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2} \cdot (1+2\sqrt{2})}{(1-2\sqrt{2}) \cdot (1+2\sqrt{2})} = \frac{7\sqrt{2} + 14 \cdot 2}{1^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{7\sqrt{2} + 28}{1 - 4 \cdot 2} = \frac{7\sqrt{2} + 28}{-7} = \frac{28 + 7\sqrt{2}}{-7} = -4 - \sqrt{2}$$

## Zadanie 5

0-1 pkt

Liczba  $\log_2 12 - \log_2 3 + \log_2 1$  jest równa:

**Odpowiedź: D (2)**

Korzystając z działań na logarytmach, możemy zapisać, że:

$$\log_2 12 - \log_2 3 + \log_2 1 = \log_2 \left( \frac{12}{3} \right) + \log_2 1 = \log_2 4 + \log_2 1 = \log_2 (4 \cdot 1) = \log_2 4 = 2$$

## Zadanie 6

0-1 pkt

Dla dowolnych liczb  $x$  i  $y$  wyrażenie  $(2x - y)^2 - (x + 2y)^2$  jest równe:

**Odpowiedź: C ( $3x^2 - 8xy - 3y^2$ )**

Musimy uprościć nasze wyrażenie, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia. Pamiętając o tym, że  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  oraz że  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  wyjdzie nam wtedy:

$$(2x - y)^2 - (x + 2y)^2 = (4x^2 - 4xy + y^2) - (x^2 + 4xy + 4y^2) = 4x^2 - 4xy + y^2 - x^2 - 4xy - 4y^2 = 3x^2 - 8xy - 3y^2$$

## Zadanie 7

0-1 pkt

Proste o równaniach  $y = x + 4$  i  $y = -2x + m + 1$  przecinają się w punkcie, którego obie współrzędne są dodatnie. Wynika stąd, że  $m$  należy do przedziału:

**Odpowiedź: D**  $((3, +\infty))$

Ustalmy najpierw kiedy te dwie proste się ze sobą przetną. W tym celu musimy rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -2x + m + 1 \end{cases}$$

Korzystając z metody podstawiania otrzymamy:

$$x + 4 = -2x + m + 1, 3x = -3 + m, x = -1 + \frac{1}{3}m$$

Chcemy, by  $x$  był większy od zera, zatem:

$$-1 + \frac{1}{3}m > 0, \frac{1}{3}m > 1, m > 3$$

Wynika stąd, że  $m$  należy do przedziału  $(3, +\infty)$ .

## Zadanie 8

0-1 pkt

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność  $3(x - 4) \leq 5(x - 6) + 29$  jest:

**Odpowiedź: B**  $(-5)$

Aby odpowiedzieć na pytanie, musimy rozwiązać podaną nierówność. W trakcie obliczeń musimy pamiętać o tym, że dzieląc lub mnożąc obydwie strony nierówności przez liczbę ujemną, musimy zmienić znak na przeciwny:

$$3x - 12 \leq 5x - 30 + 29, 3x - 12 \leq 5x - 1, -2x \leq 11, x \geq -5\frac{1}{2}$$

Musimy teraz ustalić, jaka jest najmniejsza liczba całkowita większa od  $-5\frac{1}{2}$ . Taką liczbą będzie  $-5$  i taka też będzie nasza odpowiedź.

## Zadanie 9

0-1 pkt

Liczba wszystkich dodatnich dzielników liczby 60 jest równa:

**Odpowiedź: A** (12)

Dodatnimi dzielnikami liczby 60 są:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$$

Takich dzielników mamy więc 12.

## Zadanie 10

0-1 pkt

Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x^2 - 9}$  dla wszystkich liczb rzeczywistych różnych od 3 i  $-3$ . Wartość funkcji  $f(-\sqrt{3})$  jest równa:

**Odpowiedź: A**  $(-\frac{\sqrt{3}}{6})$

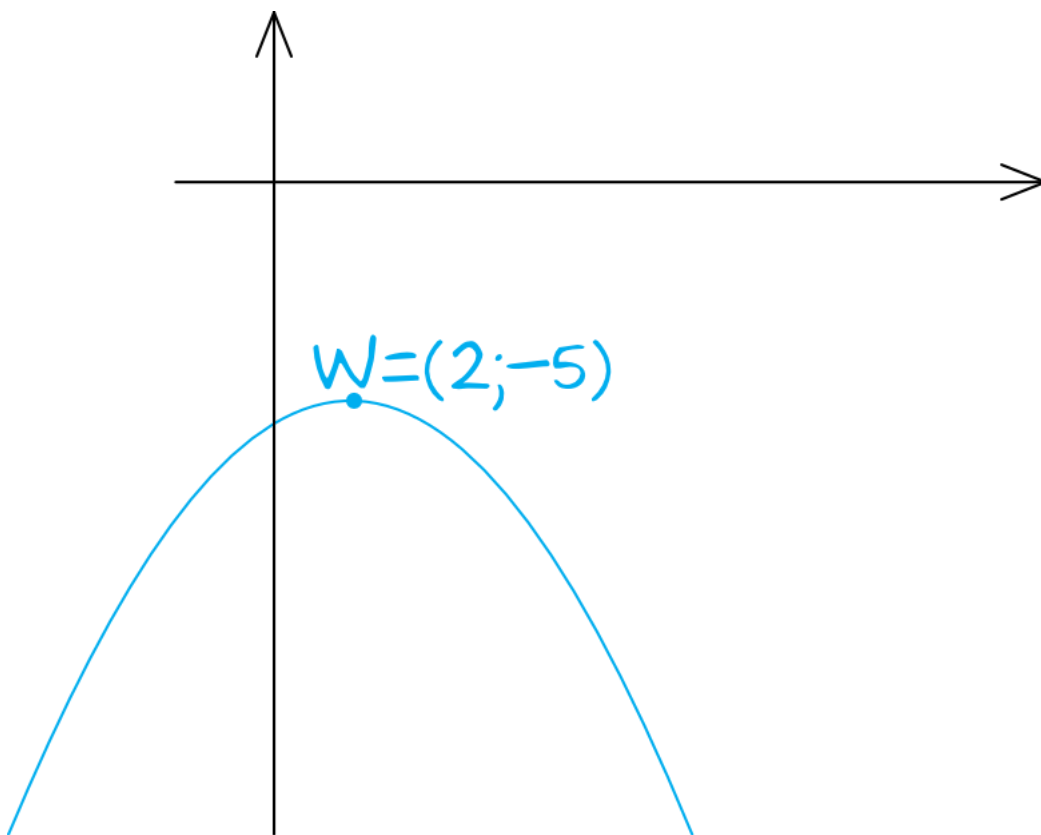
Musimy obliczyć wartość  $f(-\sqrt{3})$ , czyli do wzoru funkcji musimy po prostu podstawić  $-\sqrt{3}$ :

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^2 - (-\sqrt{3}) - 3}{(-\sqrt{3})^2 - 9}, f(-\sqrt{3}) = \frac{3 + \sqrt{3} - 3}{3 - 9}, f(-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{-6} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

## Zadanie 11

0-1 pkt

Funkcja kwadratowa  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = -3(x - 2)^2 - 5$ . Funkcja  $f$  ma:



**Odpowiedź: B (największą wartość równą  $-5$ )**

Krok 1. Odczytanie współrzędnych wierzchołka paraboli.

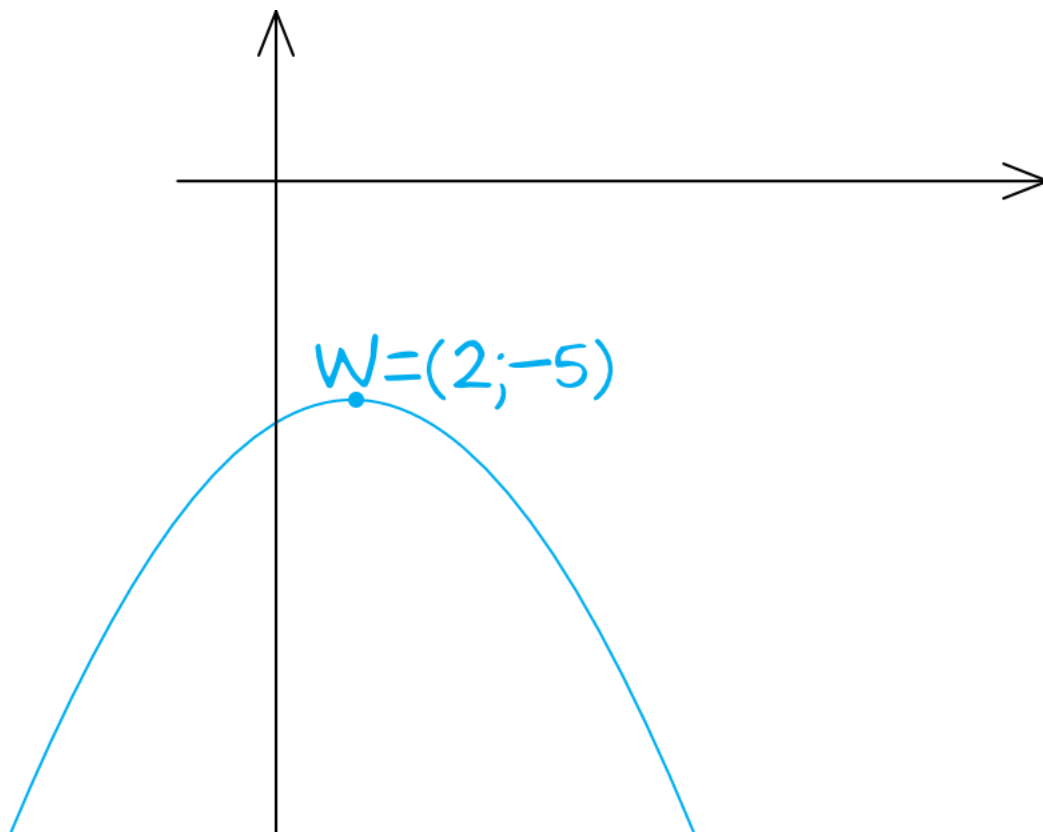
Nasza funkcja zapisana jest w postaci kanonicznej  $f(x) = a(x - p)^2 + q$ . Z tej postaci odczytamy współrzędne wierzchołka paraboli  $W = (p; q)$ , co pozwoli nam za chwilę udzielić odpowiedzi na pytanie o najmniejszą/największą wartość. Aby dobrze odczytać te współrzędne możemy sobie przekształcić wzór funkcji w taki oto sposób:

$$f(x) = -3(x - 2)^2 - 5, \quad f(x) = -3(x - 2)^2 + (-5)$$

Teraz wyraźnie widać, że  $p = 2$  oraz  $q = -5$ .

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Funkcja ma współczynnik  $a$  ujemny ( $a = -3$ ), więc ramiona paraboli będą skierowane do dołu. Możemy zatem szkicowo narysować sobie, że cała sytuacja będzie wyglądać następująco:

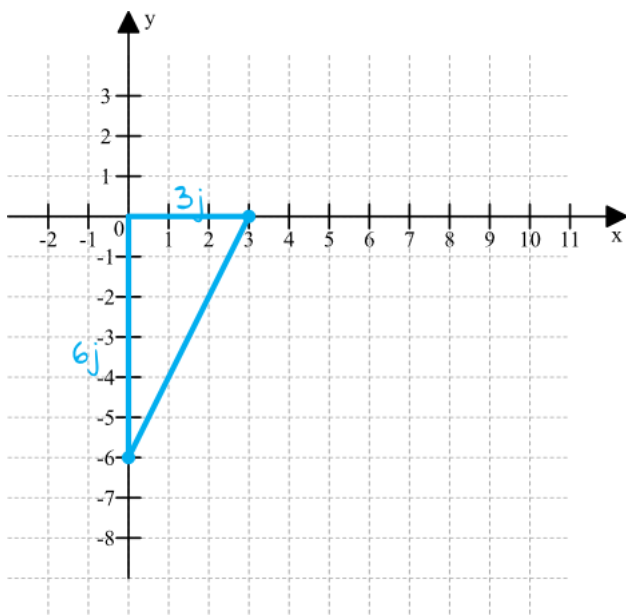


To oznacza, że prawidłową odpowiedzią będzie informacja, że największa wartość tej funkcji jest równa  $-5$ .

## Zadanie 12

0-1 pkt

Dwa boki trójkąta zawierają się w osiach układu współrzędnych, a trzeci jest zawarty w prostej o równaniu  $y = 2x - 6$ . Pole tego trójkąta wynosi:



**Odpowiedź: C (9)**

Krok 1. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołków trójkąta.

Jeżeli boki trójkąta zawierają się w osiach układu współrzędnych, to znaczy, że jeden wierzchołek leży na osi  $Ox$ , drugi na osi  $Oy$ , a trzeci jest w punkcie  $(0; 0)$ . Spróbujmy zatem wyznaczyć współrzędne pierwszego i drugiego wierzchołka.

Wierzchołek leżący na osi  $Ox$  ma współrzędną  $y = 0$ , zatem podstawiając to do równania prostej otrzymamy:

$$0 = 2x - 6, \quad -2x = -6, \quad x = 3$$

To oznacza, że jednym z wierzchołków trójkąta jest punkt  $(3; 0)$ .

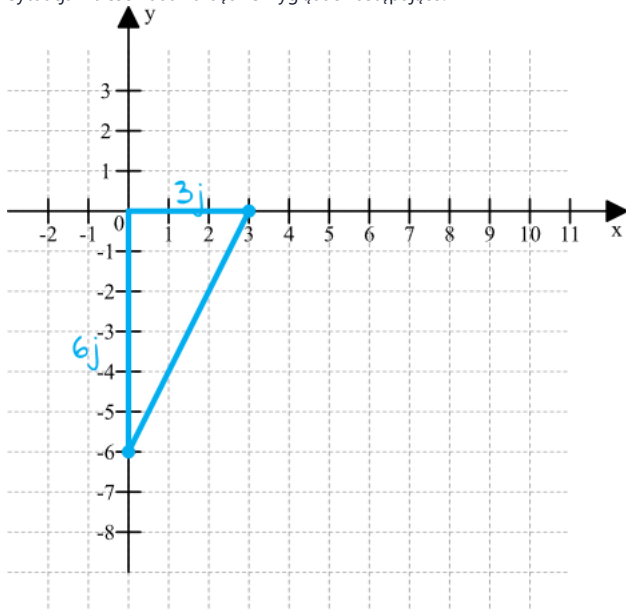
I analogicznie wierzchołek leżący na osi  $Oy$  ma współrzędną  $x = 0$ , zatem podstawiając to do równania prostej otrzymamy:

$$y = 2 \cdot 0 - 6, \quad y = 0 - 6, \quad y = -6$$

Czyli tutaj wierzchołkiem będzie punkt o współrzędnych  $(0; -6)$ .

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Sytuacja z treści zadania będzie wyglądać następująco:



Krok 3. Obliczenie pola powierzchni trójkąta.

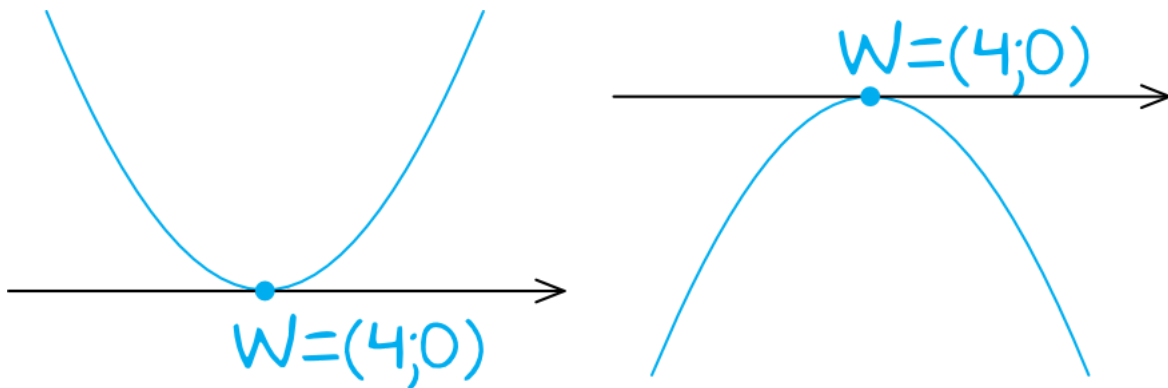
Z rysunku wynika, że mamy trójkąt prostokątny w którym  $a = 3$  oraz  $h = 6$ , zatem:

$$P = \frac{1}{2}ah, P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6, P = 9$$

**Zadanie 13**

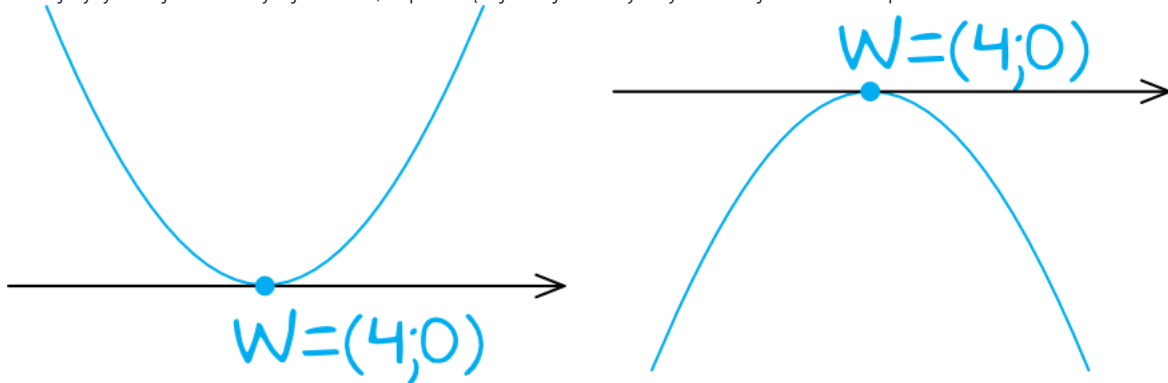
0-1 pkt

Jeśli jedynym miejscem zerowym funkcji kwadratowej  $f(x) = a(x - p)^2 + q$  jest liczba 4, to wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji  $f$  ma współrzędne:



**Odpowiedź: B ((4, 0))**

Skoro jedynym miejscem zerowym jest  $x = 4$ , to parabolę tej funkcji możemy narysować na jeden z dwóch sposobów:



Z rysunku wynika wprost, że niezależnie od ułożenia ramion, wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie  $W = (4; 0)$ .

**Zadanie 14**

0-1 pkt

Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 3 i mniejszych od 77 jest:

**Odpowiedź: C (22)**

Do zadania możemy podejść na różne sposoby (teoretycznie możemy nawet wypisać wszystkie interesujące nas liczby). Najlepszą metodą będzie potraktowanie tego zadania tak, jakby był to ciąg arytmetyczny. Pomoże nam w tym wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Najmniejszą liczbą dwucyfrową podzielną przez 3 jest 12, więc moglibyśmy zapisać, że  $a_1 = 12$ . Różnica ciągu jest równa  $r = 3$  (bo co trzeci wyraz będzie podzielny przez 3). Chcemy, by wartość  $a_n$  była mniejsza od 77, zatem:

$$a_1 + (n - 1)r < 77, 12 + (n - 1) \cdot 3 < 77, 12 + 3n - 3 < 77, 9 + 3n < 77, 3n < 68, n < 22\frac{2}{3}$$

Co ten wynik oznacza? W ciągach  $n$  musi być liczbą naturalną, a skoro z nierówności wyszło nam, że  $n < 22\frac{2}{3}$ , to interesującymi nas rozwiązaniami będą  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 21, 22\}$ . To oznacza, że będziemy mieć dokładnie 22 liczby, które spełniają warunki zadania.

## Zadanie 15

0-1 pkt

Ciąg  $(4x, 3x + 6, 9x)$  jest geometryczny i rosnący. Jego iloraz jest równy:

**Odpowiedź: C** ( $\frac{3}{2}$ )

Z własności ciągów geometrycznych wiemy, że dla trzech kolejnych wyrazów ciągu zachodzi następująca relacja:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Podstawiając dane z treści zadania, otrzymamy:

$$(3x + 6)^2 = 4x \cdot 9x, \quad 9x^2 + 36x + 36 = 36x^2, \quad -27x^2 + 36x + 36 = 0, \quad -3x^2 + 4x + 4 = 0$$

Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Teraz możemy przystąpić do obliczenia miejsc zerowych.

Współczynniki:  $a = -3$ ,  $b = 4$ ,  $c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 16 - (-48) = 64, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 8}{2 \cdot (-3)} = \frac{-12}{-6} = 2, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 8}{2 \cdot (-3)} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

Krok 3. Interpretacja otrzymanych wyników.

Otrzyaliśmy dwa różne wyniki, ale czy oba są poprawne? Aby to ustalić, sprawdzimy co się stanie, gdy podstawimy do wyrazów ciągu wartości  $x = 2$  oraz  $x = -\frac{2}{3}$ .

Dla  $x = 2$ :

$$a_1 = 4 \cdot 2 = 8, \quad a_2 = 3 \cdot 2 + 6 = 12, \quad a_3 = 9 \cdot 2 = 18$$

Dla  $x = -\frac{2}{3}$ :

$$a_1 = 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}, \quad a_2 = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 6 = 4, \quad a_3 = 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -6$$

Widzimy, że nasz ciąg jest rosnący tylko dla  $x = 2$ .

Krok 4. Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego.

Celem naszego zadania jest obliczenie ilorazu ciągu. Skoro tak, to możemy zapisać, że:

$$q = \frac{a_2}{a_1}, \quad q = \frac{12}{8}, \quad q = \frac{3}{2}$$

## Zadanie 16

0-1 pkt

Jeśli kąt  $\alpha$  jest ostry, a  $\cos \alpha = \frac{1}{4}$  to:

**Odpowiedź: B** ( $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ )

Z jedynki trygonometrycznej wiemy, że  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  w związku z tym podstawiając wartość cosinusa otrzymamy:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1, \quad \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{16}\right)^2 = 1, \quad \sin^2 \alpha = \frac{15}{16}, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{15}{16}} \quad \vee \quad \sin \alpha = -\sqrt{\frac{15}{16}}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \vee \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Z treści zadania wiemy, że  $\alpha$  jest kątem ostrym, a dla takich kątów sinus przyjmuje wartości dodatnie. Z tego też względu ujemne rozwiązanie musimy odrzucić i zostaje nam  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

## Zadanie 17

0-1 pkt

W trójkącie prostokątnym sinus jednego z kątów ostrych jest równy  $\frac{8}{17}$ , a przeciwprostokątna ma długość 34. Dłuższa z przyprostokątnych tego trójkąta ma długość równą:

**Odpowiedź: D (30)**

Krok 1. Obliczenie długości pierwszej przyprostokątnej.

Sinus odpowiada za stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko dane kąta względem przeciwprostokątnej. Skoro więc przeciwprostokątna ma długość 34, to możemy zapisać, że:

$$\frac{8}{17} = \frac{a}{34}, 8 \cdot 34 = 17a, 17a = 272, a = 16$$

W ten sposób udało nam się ustalić, że jedna z przyprostokątnych ma długość 16.

Krok 2. Obliczenie długości drugiej przyprostokątnej.

Nie wiemy jeszcze jednak, czy obliczona przed chwilą przyprostokątna jest tą dłuższą. Aby to ustalić, musimy obliczyć długość drugiej przyprostokątnej. Pomoże nam w tym Twierdzenie Pitagorasa:

$$16^2 + b^2 = 34^2, 256 + b^2 = 1156, b^2 = 1156 - 256, b^2 = 900, b = 30 \vee b = -30$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam  $b = 30$ , co jak się okazuje, jest dłuższą przyprostokątną trójkąta.

## Zadanie 18

0-1 pkt

Pole równoległoboku o bokach długości 6 i 8 oraz kącie rozwartym o mierze  $150^\circ$  wynosi:

**Odpowiedź: D (24)**

Korzystając ze wzoru na pole równoległoboku z sinusem możemy zapisać, że:

$$P = a \cdot b \cdot \sin \alpha, P = 6 \cdot 8 \cdot \sin 150^\circ$$

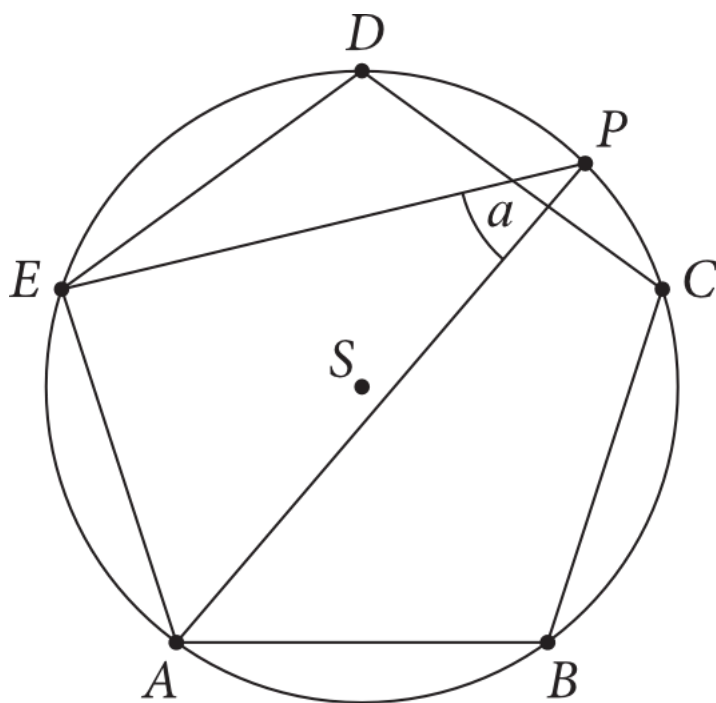
Ustalmy teraz wartość  $\sin 150^\circ$ . Jest to sinus kąta rozwartego, zatem z pomocą muszą nam przyjść wzory rekurencyjne np.  $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ . Korzystając z tego wzoru możemy zapisać, że:

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Podstawiając obliczoną wartość sinusa możemy wrócić do naszych obliczeń pola równoległoboku:

$$P = 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}, P = 24$$

Punkty  $A, B, C, D, E$ , leżące na okręgu o środku  $S$ , są wierzchołkami pięciokąta, którego wszystkie boki mają jednakowe długości. Punkt  $P$  leży na krótszym łuku  $CD$  (jak na rysunku).



Miara  $\alpha$  kąta  $APE$  wynosi:

**Odpowiedź: B ( $36^\circ$ )**

Krok 1. Wyznaczenie miary kąta  $ASE$ .

Kąt  $ASE$  jest kątem środkowym, opartym na łuku  $AE$ . Z treści zadania możemy wywnioskować, że odległość między punktami jest jednakowa (bo tylko w ten sposób powstałby nam pięciokąt o jednakowej długości boków), a to oznacza, że łuk  $AE$  stanowi  $\frac{1}{5}$  długości całego okręgu.

Z własności okręgów wynika, że w takiej sytuacji kąt środkowy będzie stanowił  $\frac{1}{5}$  kąta pełnego, czyli będzie miał miarę:

$$\frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$$

Krok 2. Obliczenie miary kąta  $APE$ .

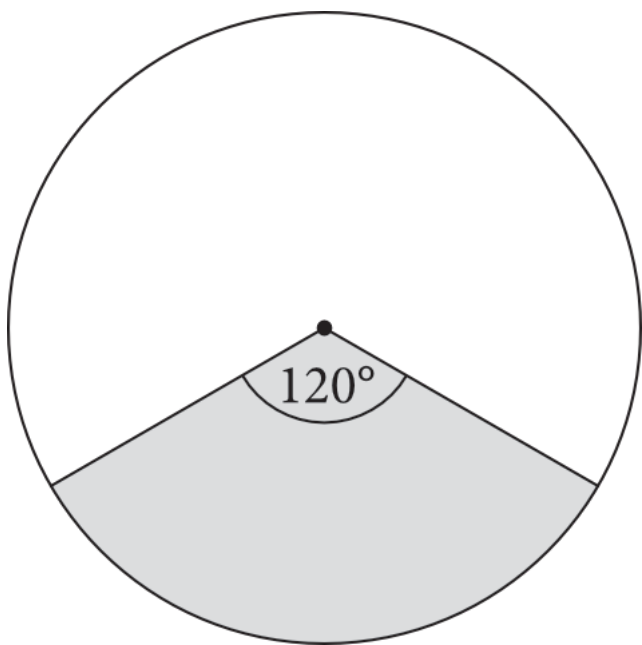
Kąt  $APE$  jest kątem wpisanym, opartym na tym samym łuku co kąt środkowy  $ASE$ . Z własności kątów wpisanych i środkowych wiemy, że w takim razie miara kąta  $APE$  będzie dwa razy mniejsza od kąta  $ASE$ , czyli:

$$|\angle APE| = 72^\circ : 2 = 36^\circ$$

## Zadanie 20

0-1 pkt

Na rysunku przedstawiono wycinek koła o kącie środkowym  $120^\circ$  i polu równym  $12\pi$ .



Obwód tego koła jest równy:

**Odpowiedź: B ( $12\pi$ )**

Krok 1. Obliczenie pola powierzchni koła.

Jeżeli kąt środkowy ma miarę  $120^\circ$ , a pełne koło ma  $360^\circ$ , to ten wycinek będzie stanowił  $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$  pola powierzchni koła.

Skoro więc wycinek koła ma pole równe  $12\pi$ , to całe koło będzie mieć powierzchnię trzy razy większą, czyli  $36\pi$ .

Krok 2. Obliczenie promienia koła.

Korzystając ze wzoru na pole koła możemy zapisać, że:

$$P = \pi r^2, 36\pi = \pi r^2, r^2 = 36, r = 6 \vee r = -6$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam  $r = 6$ .

Krok 3. Obliczenie obwodu koła.

Znając długość promienia  $r = 6$  możemy bez problemu obliczyć obwód koła:

$$Obw = 2\pi r, Obw = 2\pi \cdot 6, Obw = 12\pi$$

## Zadanie 21

0-1 pkt

Przez punkty  $A = (-2, 5)$  i  $B = (4, 9)$  poprowadzono prostą. Współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy:

**Odpowiedź: A ( $a = \frac{2}{3}$ )**

Nie musimy wyznaczać równania całej prostej. Aby poznać wartość współczynnika  $a$  możemy skorzystać ze wzoru:

$$a = \frac{9 - 5}{4 - (-2)}, a = \frac{4}{6}, a = \frac{2}{3}$$

## Zadanie 22

0-1 pkt

Odcinek o końcach  $A = (1, 3)$  i  $B = (5, 11)$  jest zawarty w prostej o równaniu  $y = 2x + 1$ . Symetralna odcinka  $AB$  ma równanie:

**Odpowiedź: C** ( $y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$ )

Krok 1. Wyznaczenie współrzędnych środka odcinka.

Symetralna odcinka to prosta prostopadła, która przechodzi przez środek tego odcinka. Wyznamy zatem najpierw współrzędne środka odcinka  $AB$ . Korzystając ze wzoru na środek odcinka możemy zapisać, że:

$$S = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right), S = \left( \frac{1+5}{2}, \frac{3+11}{2} \right), S = \left( \frac{6}{2}, \frac{14}{2} \right), S = (3; 7)$$

Krok 2. Wyznaczenie równania symetralnej odcinka  $AB$ .

Symetralna musi być prostą prostopadłą do prostej o równaniu  $y = 2x + 1$ . Dwie proste są względem siebie prostopadłe tylko wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy  $-1$ . Skoro tak, to nasza symetralna musi mieć  $a = -\frac{1}{2}$ , bo  $(-\frac{1}{2}) \cdot 2 = -1$ . To oznacza, że symetralna wyrażać się będzie równaniem  $y = -\frac{1}{2}x + b$ .

Brakujący współczynnik  $b$  obliczymy podstawiając współrzędne środka odcinka  $AB$ , zatem:

$$7 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b, 7 = -\frac{3}{2} + b, b = 8\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

To oznacza, że symetralna odcinka  $AB$  ma równanie  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$ .

## Zadanie 23

0-1 pkt

Wykresy funkcji liniowych  $f$  i  $g$ , określonych wzorami  $f(x) = ax + b$  i  $g(x) = bx - a$ , przecinają się w punkcie  $M = (3, 5)$ . Zatem:

**Odpowiedź: D** ( $a = 1, b = 2$ )

Z geometrycznej interpretacji układu równań wiemy, że chcąc poznać współrzędne miejsc przecięcia się funkcji, musimy rozwiązać układ równań składający się ze wzorów tych funkcji. My już wiemy, że współrzędne tego punktu to  $M = (3, 5)$ , zatem podstawmy  $x = 3$  oraz  $y = 5$  do wzorów obydwu funkcji:

$$\begin{cases} 5 = a \cdot 3 + b \\ 5 = b \cdot 3 - a \end{cases},$$

$$\begin{cases} 5 = 3a + b \\ 5 = 3b - a \end{cases},$$

Korzystając z metody podstawiania możemy teraz zapisać, że:

$$3a + b = 3b - a, 4a = 2b, a = \frac{1}{2}b$$

Jeżeli teraz podstawimy wyznaczone  $a = \frac{1}{2}b$  do np. równania  $5 = 3a + b$ , to otrzymamy:

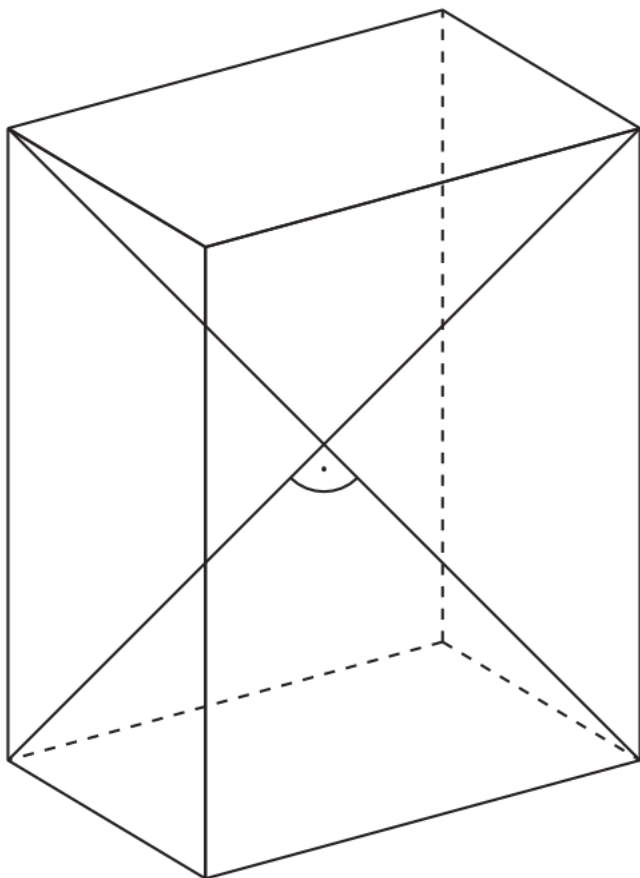
$$5 = 3 \cdot \frac{1}{2}b + b, 5 = 1,5b + b, 5 = 2,5b, b = 2$$

Wiedząc, że  $b = 2$  i że  $a = \frac{1}{2}b$ , wyjdzie nam, że:

$$a = \frac{1}{2} \cdot 2, a = 1$$

To oznacza, że warunki zadania są spełnione dla  $a = 1, b = 2$ .

Krawędź podstawy graniastopuła prawidłowego czworokątnego ma długość  $2\sqrt{2}$ , a jego przekątne są prostopadłe (jak na rysunku).



Objętość tego graniastopuła jest równa:

**Odpowiedź: A (32)**

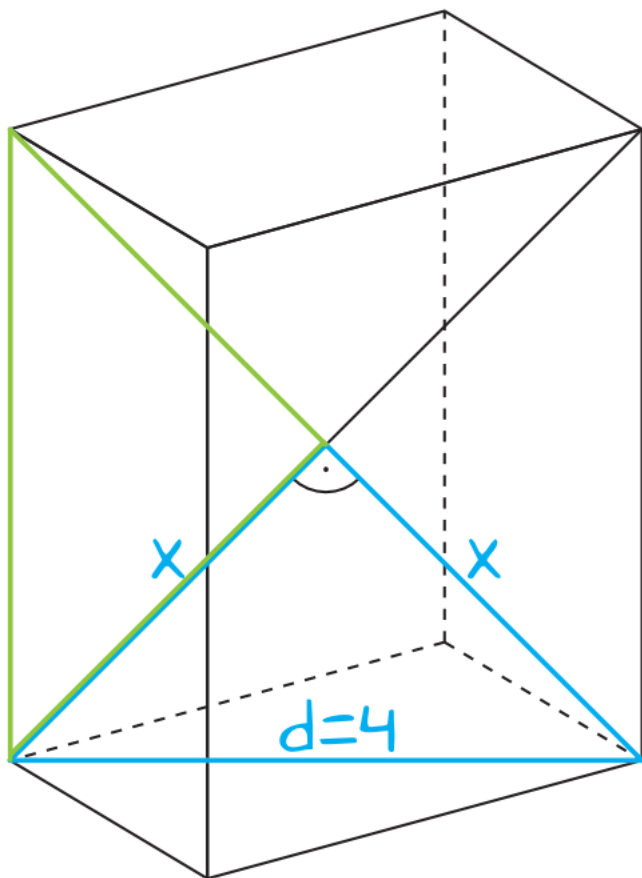
Krok 1. Obliczenie długości przekątnej podstawy.

W podstawie mamy kwadrat o boku  $a = 2\sqrt{2}$  (wiemy, że jest to kwadrat, bo graniastopuła jest prawidłowy czworokątny). Z własności kwadratów wynika, że przekątna ma długość  $d = a\sqrt{2}$ , zatem:

$$d = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}, \quad d = 2 \cdot 2, \quad d = 4$$

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Jest to graniastopuła prawidłowy czworokątny, zatem jego przekątne przecinają się w połowie swojej długości. Skoro przecinają się w dodatku pod kątem prostym, to będziemy mieć taką oto sytuację:



Zaznaczony na rysunku trójkąt jest równoramienny, a skoro jest on jeszcze prostokątny, to będzie to na pewno trójkąt o kątach  $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ .

Krok 3. Obliczenie wysokości graniastopu

Powinniśmy dostrzec, że trójkąty zaznaczone na niebiesko i zielono są tak naprawdę trójkątami przystającymi (obydwa mają jednakowe długości przyprostokątnych i miarę kąta między nimi). Skoro tak, to wysokość graniastopu będzie taka sama jak długość przekątnej podstawy, czyli  $H = 4$ .

Krok 4. Obliczenie objętości graniastopu.

Znając wszystkie miary, możemy już bez problemu przystąpić do liczenia objętości:

$$V = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4, \quad V = 4 \cdot 2 \cdot 4, \quad V = 32$$

#### Zadanie 25

0-1 pkt

Klasę 3c w pewnej szkole tworzy 12 chłopców i pewna liczba dziewcząt. Prawdopodobieństwo, że osoba wybrana losowo z tej klasy jest dziewczyną, wynosi  $\frac{2}{5}$ .

Wynika stąd, że liczba osób w tej klasie jest równa:

**Odpowiedź: A (20)**

Wprowadźmy do zadania proste oznaczenia:

$x$  - liczba dziewcząt

12 - liczba chłopców

$x + 12$  - łączna liczba uczniów

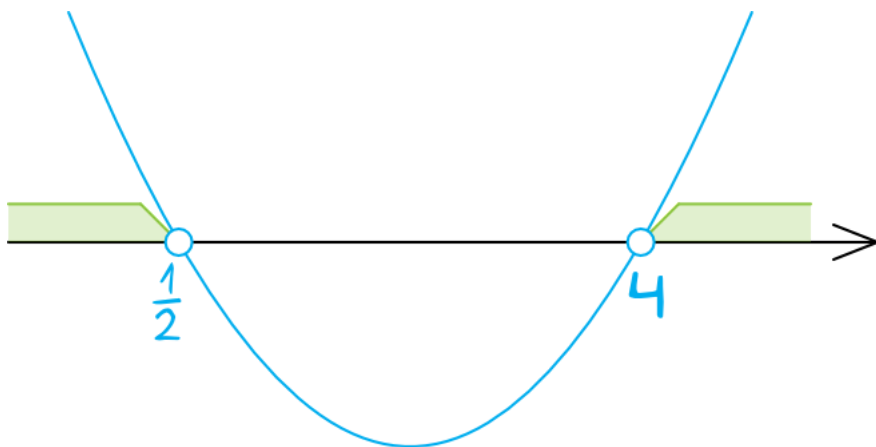
Skoro prawdopodobieństwo wylosowania dziewczyny (czyli  $x$  z liczby  $x + 12$ ) jest równe  $\frac{2}{5}$ , to:

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{x + 12}, \quad 2 \cdot (x + 12) = 5x, \quad 2x + 24 = 5x, \quad 3x = 24, \quad x = 8$$

To oznacza, że w tej klasie mamy  $8 + 12 = 20$  uczniów.

## Zadanie 26

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność  $x(2x - 1) + 4 > 8x$ .**Odpowiedź:**  $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (4; +\infty)$ 

Krok 1. Zapisanie nierówności w postaci ogólnej.

Zanim zaczniemy liczyć, musimy przekształcić zapis nierówności. Będziemy dążyć do postaci ogólnej, zatem wszystkie wyrazy musimy przenieść na lewą stronę i poprawnie wymnożyć nawias:

$$x(2x - 1) + 4 > 8x, \quad x(2x - 1) + 4 - 8x > 0, \quad 2x^2 - x + 4 - 8x > 0, \quad 2x^2 - 9x + 4 > 0$$

Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

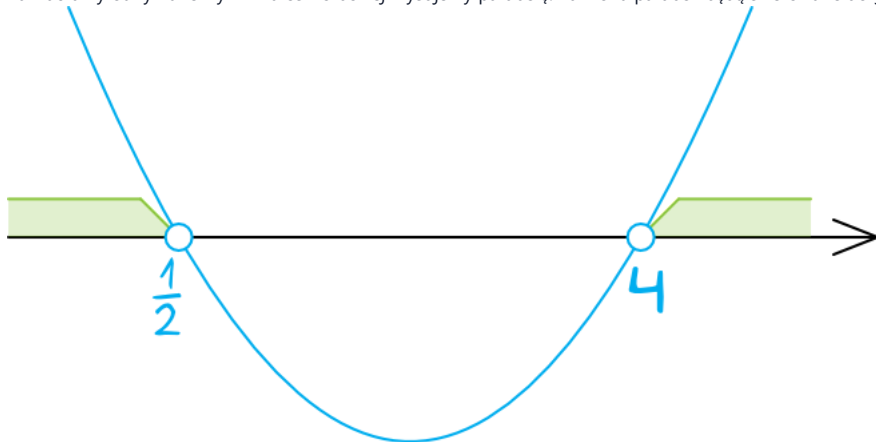
Teraz możemy przystąpić do obliczenia miejsc zerowych.

Współczynniki:  $a = 2$ ,  $b = -9$ ,  $c = 4$ 

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 81 - 32 = 49, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) - 7}{2 \cdot 2} = \frac{9 - 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) + 7}{2 \cdot 2} = \frac{9 + 7}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Zaznaczamy otrzymane wyniki na osi liczbowej i rysujemy parabolę. Ramiona paraboli będą skierowane do góry, bo współczynnik  $a$  jest dodatni, zatem:

Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas miejsca w których funkcja przyjmuje wartości większe zero. Patrzymy się zatem co znajduje się nad osią i widzimy, że rozwiązaniem tej nierówności będzie suma przedziałów  $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (4; +\infty)$

## Zadanie 27

0-2 pkt

Liczba 4 jest pierwszym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Drugi wyraz tego ciągu jest równy  $x + 4$ , a suma trzech jego początkowych wyrazów wynosi  $16\frac{1}{2}$ . Oblicz różnicę tego ciągu.

**Odpowiedź:**  $r = 1, 5$

Z treści zadania wynika, że  $a_1 = 4$  oraz  $a_2 = x + 4$ . To oznacza, że różnica tego ciągu to:

$$r = a_2 - a_1, r = x + 4 - 4, r = x$$

Skoro każdy kolejny wyraz jest o  $x$  większy od poprzedniego, to wartość  $a_3$  będzie równa:

$$a_3 = x + 4 + x = 2x + 4$$

Suma trzech pierwszych wyrazów jest równa  $16\frac{1}{2}$ , zatem:

$$4 + x + 4 + 2x + 4 = 16\frac{1}{2}, 3x + 12 = 16\frac{1}{2}, 3x = 4\frac{1}{2}, x = 1,5$$

To oznacza, że różnica tego ciągu wynosi  $r = 1,5$ .

## Zadanie 28

0-2 pkt

W urnie znajdują się jedynie kule białe i czarne. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrana kula z tej urny będzie biała, jest równe  $\frac{1}{3}$ . Jeżeli do urny dołożymy jedną białą kulę, to prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej zwiększy się o  $\frac{1}{51}$ . Ustal liczbę kul w tej urnie przed dołożeniem dodatkowej kuli białej.

**Odpowiedź:** 33

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

Liczba wszystkich kul:  $x$

Liczba białych kul:  $\frac{1}{3}x$

Liczba czarnych kul:  $\frac{2}{3}x$

Po dołożeniu jednej kuli białej będziemy mieć:

Liczba wszystkich kul:  $x + 1$

Liczba białych kul:  $\frac{1}{3}x + 1$

Krok 2. Obliczenie liczby kul przed dołożeniem dodatkowej kuli.

Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli będzie zatem równe:

$$\frac{\frac{1}{3}x + 1}{x + 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{51}, \frac{\frac{1}{3}x + 1}{x + 1} = \frac{17}{51} + \frac{1}{51}, \frac{\frac{1}{3}x + 1}{x + 1} = \frac{18}{51}$$

Mnożąc na krzyż, otrzymamy:

$$\left(\frac{1}{3}x + 1\right) \cdot 51 = (x + 1) \cdot 18, 17x + 51 = 18x + 18, -x = -33, x = 33$$

To oznacza, że liczba wszystkich kul przed dołożeniem dodatkowej białej kuli była równa 33.

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  liczba  $64^n - 4^n$  jest podzielna przez 12.

**Odpowiedź: Wykazano, pokazując**

Do zadania można podejść na różne sposoby, ale najprościej będzie zauważyć, że:

$$64^n - 4^n = 4^n \cdot (16^n - 1)$$

Wartość  $16^n - 1$  znajdującą się w nawiasie możemy jeszcze rozpisać zgodnie ze wzorem skróconego mnożenia  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  jako  $(4^n - 1)(4^n + 1)$ . Otrzymamy wtedy:

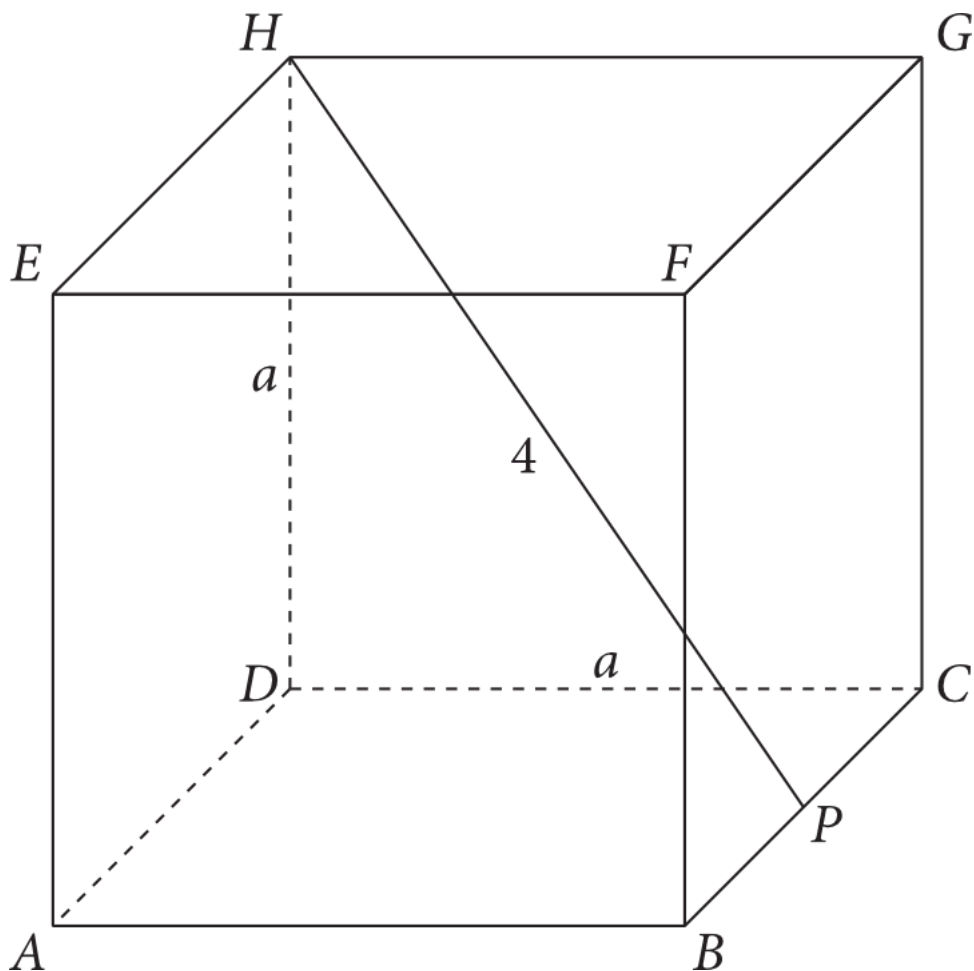
$$4^n \cdot (16^n - 1) = 4^n \cdot (4^n - 1)(4^n + 1)$$

Powinniśmy teraz dostrzec, że otrzymaliśmy mnożenie trzech kolejnych liczb naturalnych. Będzie to dobrze widać, gdy zamienimy wyrazy miejscami:

$$(4^n - 1) \cdot 4^n \cdot (4^n + 1)$$

Skoro są to trzy kolejne liczby naturalne, to któraś z nich jest na pewno podzielna przez 3. Dodatkowo widzimy, że  $4^n$  jest podzielne przez 4. Skoro więc ten nasz iloczyn dzieli się przez 3 i 4, to będzie także podzielny przez iloczyn tych wartości, czyli przez 12, co należało właśnie udowodnić.

Dany jest sześcian  $ABCDEFGH$ . Odcinek łączący wierzchołek  $H$  ze środkiem krawędzi  $BC$  ma długość  $HP = 4$  (jak na rysunku).



Oblicz objętość tego sześcianu.

**Odpowiedź:**  $\sqrt[3]{V=18\frac{26}{27}}$

Krok 1. Obliczenie długości krawędzi sześcianu.

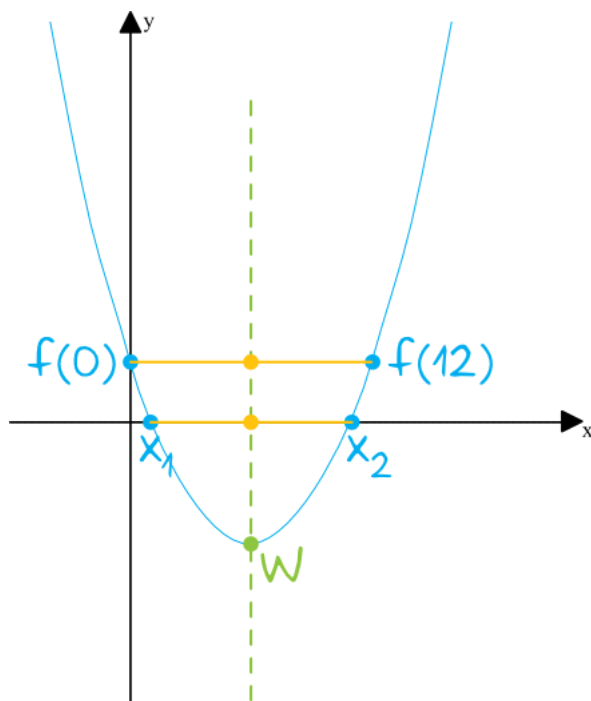
Kluczem do sukcesu jest dostrzeżenie, iż trójkąt  $PCH$  jest prostokątny. Skoro tak, to pomoże nam tutaj Twierdzenie Pitagorasa. Jeżeli przyjmemy, że długość krawędzi sześcianu ma długość  $a$ , to  $|PC| = \frac{1}{2}a$  natomiast  $|CH| = a\sqrt{2}$  (bo jest to przekątna kwadratu o boku  $a$ ). W treści zadania mamy jeszcze podaną długość  $|HP| = 4$  (która jest przeciwprostokątną naszego trójkąta), zatem:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 = 4^2, \quad \frac{1}{4}a^2 + 2a^2 = 16, \quad \frac{9}{4}a^2 = 16 \quad \Bigg/ \cdot \frac{4}{9}, \quad a^2 = \frac{64}{9}, \quad a = \sqrt{\frac{64}{9}} \quad \vee \quad a = -\sqrt{\frac{64}{9}}, \quad a = \frac{8}{3} \quad \vee \quad a = -\frac{8}{3}$$

Krok 2. Obliczenie objętości sześcianu.

$$V = a^3, \quad V = \left(\frac{8}{3}\right)^3, \quad V = \frac{512}{27} = 18\frac{26}{27}$$

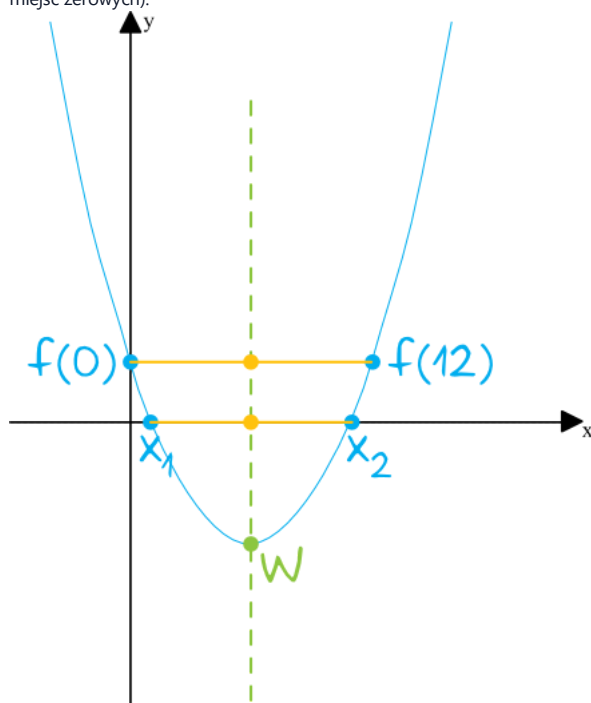
Liczba 4 jest jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej  $f$ , a ponadto  $f(0) = f(12) = 2$ . Wyznacz najmniejszą wartość funkcji  $f$ .



**Odpowiedź:**  $y = -\frac{1}{4}$

Krok 1. Wyznaczenie współrzędnej  $p$  wierzchołka paraboli.

Wykresem funkcji kwadratowej jest zawsze parabola. Jedną z własności parabol jest to, że jej wierzchołek znajduje się zawsze w równej odległości od argumentów o jednakowej wartości (zwyczajowo mówimy, że wierzchołek znajduje się dokładnie między miejscami zerowymi, choć ta zależność dotyczy tak naprawdę nie tylko miejsc zerowych).



Możemy więc zapisać, że:

$$p = \frac{0+12}{2}, p = \frac{12}{2}, p = 6$$

Krok 2. Wyznaczenie drugiego miejsca zerowego.

Teraz skorzystamy z dokładnie tej samej własności co przed chwilą, tylko w drugą stronę. Odległość od pierwszego miejsca zerowego do wierzchołka jest taka sama jak od wierzchołka do drugiego miejsca, czyli:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = p, \frac{4 + x_2}{2} = 6, 4 + x_2 = 12, x_2 = 8$$

Krok 3. Zapisanie wzoru funkcji w postaci iloczynowej.

Znając wszystkie miejsca zerowe, możemy przystąpić do zapisania wzoru funkcji w postaci iloczynowej:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2), y = a(x - 4)(x - 8)$$

Brakuje nam jeszcze znajomości współczynnika  $a$ . Możemy skorzystać z informacji, że np.  $f(0) = 2$ , czyli że dla argumentu  $x = 0$  funkcja przyjmuje wartość  $y = 2$ . Podstawiając zatem te współrzędne do wyznaczonej postaci iloczynowej, otrzymamy:

$$2 = a \cdot (0 - 4) \cdot (0 - 8), 2 = a \cdot (-4) \cdot (-8), 2 = 32a, a = \frac{1}{16}$$

To oznacza, że pełnym wzorem tej funkcji w postaci iloczynowej jest:

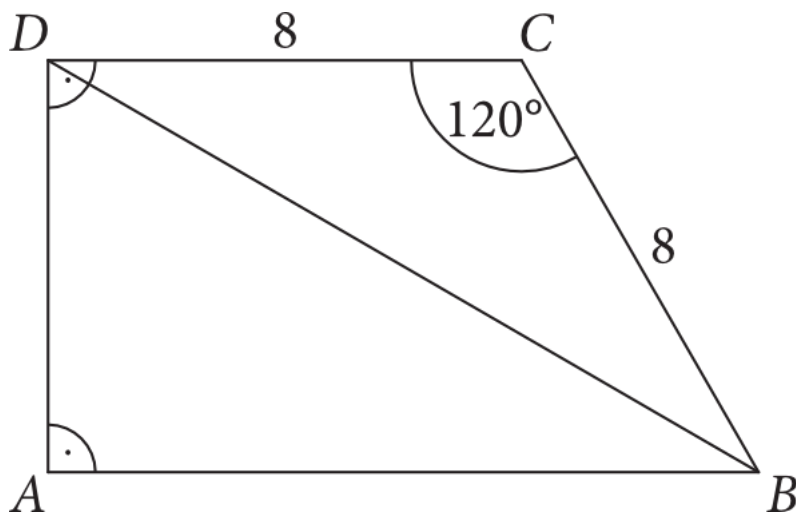
$$y = \frac{1}{16}(x - 4)(x - 8)$$

Krok 4. Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji.

Funkcja ma ramiona skierowane do góry (bo współczynnik  $a$  jest dodatni), więc najmniejsza wartość tej funkcji jest przyjmowana w wierzchołku. Nie będziemy tutaj korzystać ze wzoru na współrzędną  $q$ , czyli  $q = \frac{-\Delta}{4a}$ , bo nie mamy postaci ogólnej. Możemy postąpić sprytniej i obliczyć wartość funkcji dla  $x = 6$ , czyli właśnie wartość przyjmowaną w wierzchołku:

$$y = \frac{1}{16} \cdot (6 - 4) \cdot (6 - 8), y = \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot (-2), y = \frac{1}{16} \cdot (-4), y = -\frac{1}{4}$$

Ramię  $AD$  trapezu  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$  jest zarazem wysokością tego trapezu. Podstawa  $CD$  i ramię  $BC$  mają długości równe 8, a kąt między tymi bokami jest równy  $120^\circ$  (jak na rysunku).



Oblicz pole trapezu  $ABCD$  oraz długość jego przekątnej  $BD$ .

**Odpowiedź:**  $P = 40\sqrt{3}$  ora

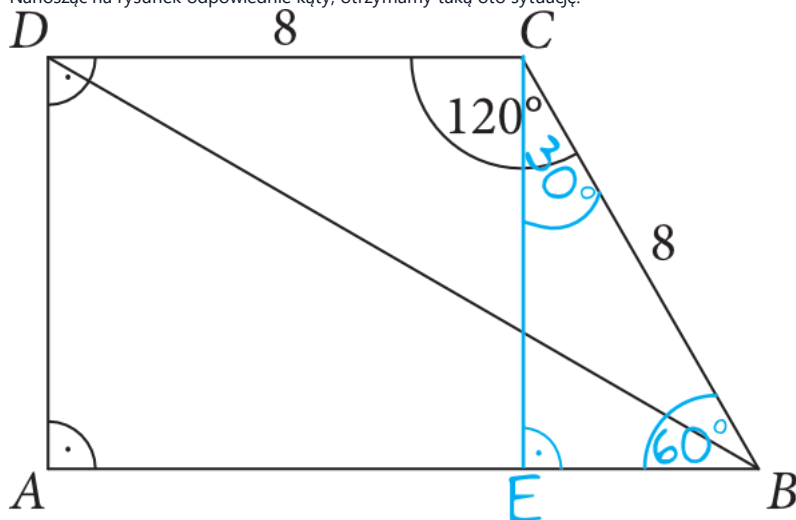
Krok 1. Obliczenie miar kątów.

Możemy skorzystać z własności trapezów, która mówi nam, że kąty przy jednym ramieniu trapezu mają łączną miarę  $180^\circ$ . Skoro więc kąt  $BCD$  ma miarę  $120^\circ$ , to kąt  $ABC$  będzie miał:

$$|\angle ABC| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanosząc na rysunek odpowiednie kąty, otrzymamy taką oto sytuację:



Wyszło nam, że trójkąt  $EBC$  jest trójkątem prostokątnym o kątach  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  i to będzie punkt wyjścia do dalszych obliczeń.

Krok 3. Obliczenie długości odcinków  $EB$  oraz  $EC$ .

Z własności trójkątów o kątach  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  wynika, że, bok  $EB$  będzie miał miarę dwa razy krótszą od przeciwprostokątnej  $BC$ , czyli że  $|EB| = 4$ . Dodatkowo z tych samych własności wynika, że przyprostokątna  $EC$  będzie  $\sqrt{3}$  razy dłuższa od przyprostokątnej  $EB$ , czyli  $|EC| = 4\sqrt{3}$ .

Krok 4. Obliczenie pola powierzchni trapezu.

Znamy już tak naprawdę wszystkie potrzebne dane do obliczenia pola trapezu. Dolna podstawa  $AB$  będzie miała długość  $|AB| = 8 + 4 = 12$ , górna podstawa ma długość  $|DC| = 8$ , a wysokość naszego trapezu to  $|EC| = 4\sqrt{3}$ . Skoro tak, to:

$$P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h, P = \frac{1}{2} \cdot (12+8) \cdot 4\sqrt{3}, P = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 4\sqrt{3}, P = 10 \cdot 4\sqrt{3}, P = 40\sqrt{3}$$

Krok 5. Obliczenie długości przekątnej  $BC$ .

Musimy jeszcze obliczyć długość przekątnej  $BC$ . Dokonamy tego korzystając z Twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $ABD$ . Możemy zapisać, że:

$$12^2 + (4\sqrt{3})^2 = |BD|^2, \quad 144 + 16 \cdot 3 = |BD|^2, \quad 144 + 48 = |BD|^2, \quad |BD|^2 = 192, \quad |BD| = \sqrt{192} \quad \vee \quad |BD| = -\sqrt{192}$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam  $|BD| = \sqrt{192}$ , co możemy jeszcze rozisać jako  $|BD| = \sqrt{64 \cdot 3} = 8\sqrt{3}$ .