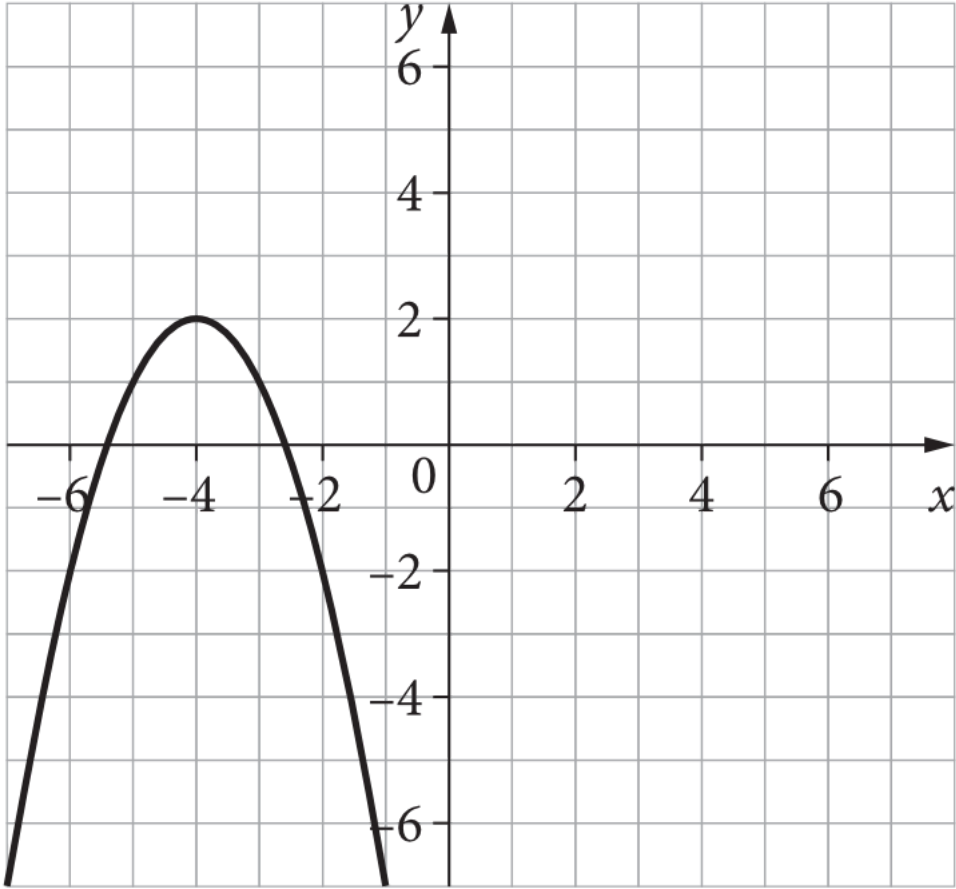


Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Nowa Era 2021

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D (45)	1
2	A (1476zł)	1
3	C ($-\frac{1}{2}$)	1
4	A ($\frac{4\sqrt{3}}{3}$)	1
5	D ($\frac{9}{7}$)	1
6	B ($-\frac{12}{17}$)	1
7	B ($x = -1010$)	1
8	 D ()	1
9	B ($a = 4, b = 3$)	1
10	D (-2)	1
11	B ($y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$)	1
12	D ($\frac{6}{7}$)	1
13	D ($\langle -4, 3 \rangle$)	1
14	C (7)	1
15	A (-10)	1
16	B ($\frac{1}{2}$)	1
17	C (42°)	1
18	A ($16\frac{2}{3}$)	1
19	B (42)	1

20	D ($20\sqrt{2}$)	1
21	B (12π)	1
22	B (32)	1
23	C (216)	1
24	C (3, 5)	1
25	C (18)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

$|\sqrt{1681} - 45| + \sqrt{1681}$ jest równa:

Odpowiedź: D (45)

Powinniśmy zauważyć, że $\sqrt{1681} = 41$. Podstawiając tę informację do naszego równania otrzymamy:

$$|\sqrt{1681} - 45| + \sqrt{1681} = |41 - 45| + 41 = |-4| + 41 = 4 + 41 = 45$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Cena komputera BIT była równa 1968zł. W ramach promocji sklep obniżył ją o 25%. Po obniżce cena tego komputera jest równa:

Odpowiedź: A (1476zł)

Z działu procentów wiemy, że obniżenie ceny o 25% sprawia, iż produkt kosztuje teraz 0,75 wartości początkowej. Możemy zatem zapisać, że po obniżce cena tego komputera wynosi:

$$0,75 \cdot 1968\text{zł} = 1476\text{zł}$$

Oczywiście nic też nie stoi na przeszkodzie, by najpierw obliczyć wysokość obniżki, a potem odliczyć ją od kwoty komputera. Moglibyśmy więc rozpisać to w taki sposób:

Wysokość obniżki wynosi: $0,25 \cdot 1968\text{zł} = 492\text{zł}$

Nowa cena komputera wynosi: $1968\text{zł} - 492\text{zł} = 1476\text{zł}$

Zadanie 3

0-1 pkt

Dane są liczby $a = 2 \cdot \log_4 2$ oraz $b = \log_4 8$. Różnica $a - b$ jest równa:

Odpowiedź: C ($-\frac{1}{2}$)

Do zadania można podejść na różne sposoby, więc pokażmy sobie różne metody rozwiązania takiego przykładu.

I sposób - rozwiązując każdy logarytm osobno.

Zacznijmy od liczby a . Z własności potęg wiemy, że dwójkę stojącą przed logarytmem możemy przenieść w miejsce potęgi liczby logarytmowanej, dzięki czemu otrzymamy:

$$a = 2 \cdot \log_4 2 = \log_4 2^2 = \log_4 4 = 1$$

Logarytm b jest nieco trudniejszy, dlatego rozpiszmy go sobie w taki sposób, by przejść do postaci potęgowej:

$$\log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8$$

Pamiętając o tym, że $4 = 2^2$ oraz że $8 = 2^3$, otrzymamy:

$$4^x = 8, (2^2)^x = 2^3, 2^{2x} = 2^3, 2x = 3, x = 1,5$$

To oznacza, że $b = \log_4 8 = 1,5$

Teraz sprawa jest już prosta, bowiem skoro $a = 1$ oraz $b = 1,5$, to $a - b = 1 - 1,5 = -\frac{1}{2}$.

II sposób - korzystając z działań na logarytmach

Rozpiszmy sobie logarytm a , przenosząc dwójkę w miejsce wykładnika potęgi liczby logarytmowanej:

$$a = 2 \cdot \log_4 2 = \log_4 2^2 = \log_4 4$$

Oczywiście wartość powyższego logarytmu jest równa 1, ale nam postać $\log_4 4$ bardzo pasuje, bo użyjemy jej w odejmowaniu logarytmów, więc możemy ją tak zostawić. Korzystając ze wzoru $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$ możemy zapisać, że:

$$\log_4 4 - \log_4 8 = \log_4 \frac{4}{8} = \log_4 \frac{1}{2}$$

Aby rozwiązać taki logarytm, najprościej będzie przejść do zapisu potęgowego:

$$\log_4 \frac{1}{2} = x \Rightarrow 4^x = \frac{1}{2}$$

Wiedząc, że $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ możemy zapisać, że:

$$4^x = \frac{1}{2}, (2^2)^x = 2^{-1}, 2^{2x} = 2^{-1}, 2x = -1, x = -\frac{1}{2}$$

To oznacza, że $a - b = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 4

0-1 pkt

Wartość wyrażenia $x - 1 + \frac{1}{x-1}$ dla $x = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ jest równa:

Odpowiedź: A ($\frac{4\sqrt{3}}{3}$)

Krok 1. Uproszczenie zapisu liczby x .

Zacznijmy od uproszczenia zapisu liczby x , a dokładniej rzecz ujmując od usunięcia niewymierności z mianownika. W tym celu musimy licznik oraz mianownik ułamka pomnożyć przez wartość znajdującą się w mianowniku, czyli przez $\sqrt{3}$. Obliczenia będą wyglądać następująco:

$$x = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$$

Krok 2. Podstawienie danych do wyrażenia.

Podstawiając wartość x do naszego wyrażenia bardzo wiele rzeczy zacznie się teraz skracać, a całość będzie wyglądać następująco:

$$x - 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - 1} = , = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = , = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = , = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} = , = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = , = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3}$$

Zadanie 5

0-1 pkt

Jeśli $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, a kąt α jest ostry, to wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ jest równa:

Odpowiedź: D ($\frac{9}{7}$)

Korzystając z jedynki trygonometrycznej $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ możemy zapisać, że:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

W związku z tym:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$$

Widzimy, że potrzebujemy znać wartość $\sin^2 \alpha$, a z treści zadania wiemy, że $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Podnieśmy zatem tę wartość do kwadratu, otrzymując:

$$\sin^2 \alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^2, \sin^2 \alpha = \frac{9}{16}$$

Podstawiając teraz tę wartość do naszego wyrażenia, otrzymamy:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{9}{16}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{9}{16} \cdot \frac{16}{7} = \frac{9}{7}$$

Zadanie 6

0-1 pkt

Liczba $\frac{3}{4}$ jest miejscem zerowym funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = \left(\frac{5}{3}m - 4\right)x + 3m + 6$. Wynika z tego, że liczba m jest równa:

Odpowiedź: B ($-\frac{12}{17}$)

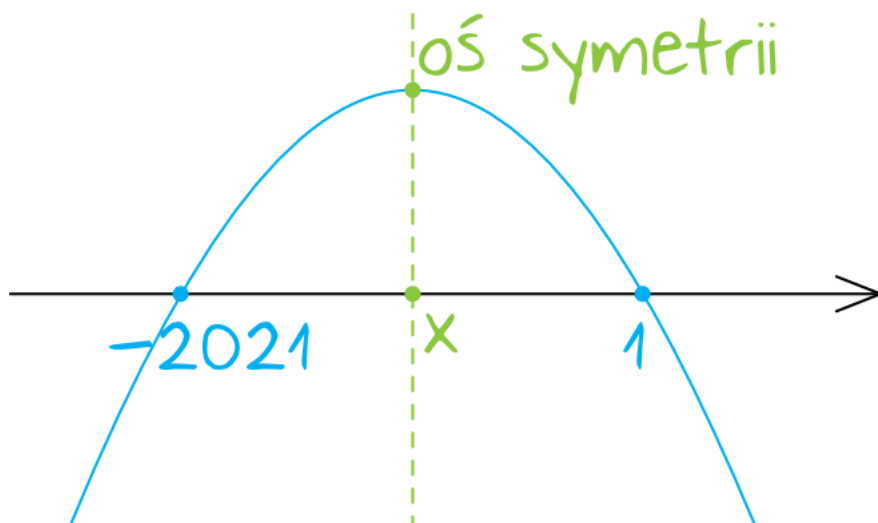
Miejsce zerowe to taki argument x , dla którego funkcja przyjmuje wartość równą 0. Obrazowo rzecz ujmując, musimy do wzoru funkcji podstawić $x = \frac{3}{4}$ i sprawdzić, kiedy wartość tej funkcji będzie równa 0, zatem:

$$\left(\frac{5}{3}m - 4\right) \cdot \frac{3}{4} + 3m + 6 = 0, \frac{15}{12}m - 3 + 3m + 6 = 0, 1\frac{3}{12}m + 3m + 3 = 0, 4\frac{1}{4}m + 3 = 0, 4\frac{1}{4}m = -3, \frac{17}{4}m = -3 \quad / \cdot \frac{4}{17}, m = -\frac{12}{17}$$

Zadanie 7

0-1 pkt

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = -4(x + 2021)(x - 1)$. Oś symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu:



Odpowiedź: B ($x = -1010$)

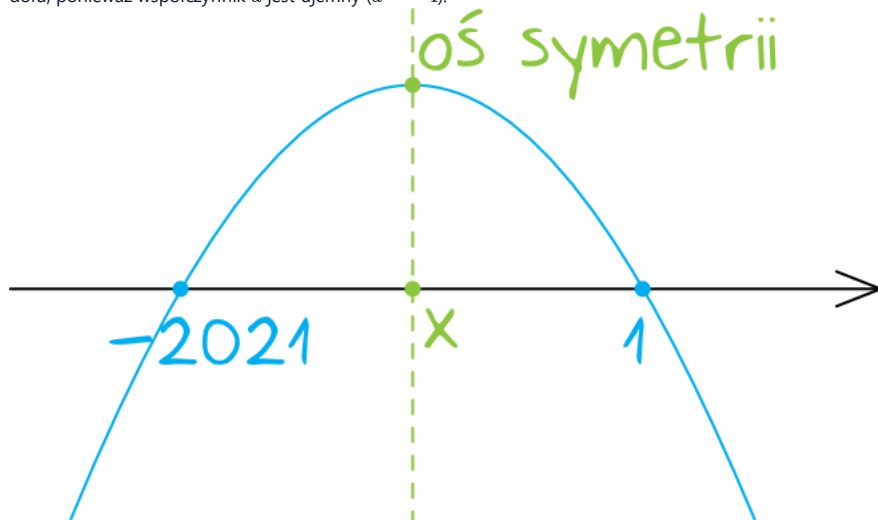
Krok 1. Wyznaczenie miejsc zerowych.

Funkcja zapisana jest w postaci iloczynowej, a to oznacza, że bardzo szybko jesteśmy w stanie wyznaczyć jej miejsca zerowe - wystarczy przyrównać wartości w nawiasach do zera:

$$x + 2021 = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0, \quad x = -2021 \quad \vee \quad x = 1$$

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Naszkicujmy parabolę, która jest wykresem naszej funkcji, zaznaczając oczywiście wyznaczone przed chwilą miejsca zerowe. Ramiona paraboli będą skierowane do dołu, ponieważ współczynnik a jest ujemny ($a = -4$):



Krok 3. Wyznaczenie osi symetrii wykresu funkcji.

Oś symetrii paraboli ma tę własność, że przechodzi dokładnie między miejscami zerowymi funkcji. Naszą prostą wyznaczymy więc wyliczając średnią arytmetyczną dwóch miejsc zerowych:

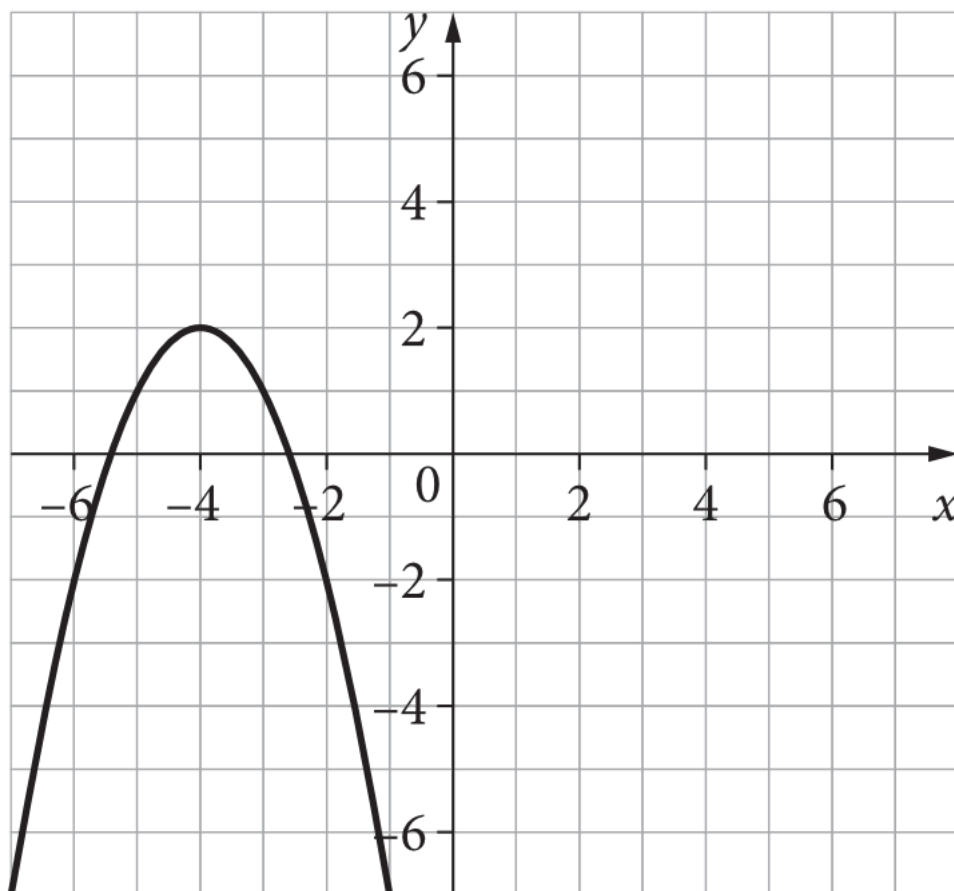
$$\frac{-2021 + 1}{2} = \frac{-2020}{2} = -1010$$

To oznacza, że oś symetrii wykresu tej funkcji jest prosta $x = -1010$.

Zadanie 8

0-1 pkt

Wskaż wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -(x + 4)^2 + 2$.



Odpowiedź: D (

)

Powinniśmy dostrzec, że wzór funkcji zapisany jest w postaci kanonicznej, czyli $f(x) = a(x - p)^2 + q$. To oznacza, że możemy odczytać ze wzoru współrzędne wierzchołka paraboli $W = (p; q)$.

$$f(x) = -(x + 4)^2 + 2, \quad f(x) = -(x - (-4))^2 + 2$$

To oznacza, że $p = -4$ oraz $q = 2$, czyli $W = (-4; 2)$. Taką sytuację mamy jedynie na czwartym rysunku.

W dodatku warto zauważyć, że nasza funkcja ma ujemny współczynnik kierunkowy (to przez minusa stojącego na przodzie), co potwierdza wybór wykresu, bowiem w takiej sytuacji parabola musi mieć ramiona skierowane do dołu.

Zadanie 9

0-1 pkt

Układ równań $\begin{cases} 2x - 3y = a - b \\ 2x + 3y = a + b \end{cases}$ z dwiema niewiadomymi x i y ma jedno rozwiązanie, którym jest para liczb $(2, 1)$. Wynika z tego, że:

Odpowiedź: B ($a = 4, b = 3$)

Aby rozwiązać to zadanie, musimy podstawić do układu równań $x = 2$ oraz $y = 1$, zatem:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = a - b \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = a + b \end{cases},$$

$$\begin{cases} 4 - 3 = a - b \\ 4 + 3 = a + b \end{cases},$$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 7 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a = 1 + b \\ a = 7 - b \end{cases},$$

Korzystając z metody podstawiania możemy teraz zapisać, że:

$$1 + b = 7 - b, 2b = 6, b = 3$$

Znamy już wartość $b = 3$, zatem podstawiając ją do jednego z równań np. $a = 1 + b$, obliczymy poszukiwaną wartość a :

$$a = 1 + b, a = 1 + 3, a = 4$$

Zadanie 10

0-1 pkt

Suma wszystkich rozwiązań równania $(x^3 + 8)(x^2 - 9) = 0$ jest równa:

Odpowiedź: D (-2)

Aby rozwiązać to równanie, musimy działać dokładnie tak jak przy standardowym równaniu zapisanym w postaci iloczynowej, czyli musimy przyrównać wartości w nawiasach do zera. W związku z tym:

$$x^3 + 8 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 9 = 0, x^3 = -8 \quad \vee \quad x^2 = 9, x = -2 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

Naszym celem jest poznanie sumy wszystkich rozwiązań, zatem:

$$-2 + 3 + (-3) = -2$$

Zadanie 11

0-1 pkt

Przekątna AC rombu $ABCD$ jest zawarta w prostej o równaniu $y = -\frac{3}{2}x + 1$. Punkt $S = (2; -2)$ jest środkiem symetrii tego rombu. Wynika z tego, że przekątna BD tego rombu jest zawarta w prostej o równaniu:

Odpowiedź: B ($y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$)

Wbrew pozorom nie musimy wyznaczać równania tej prostej. Wystarczy pamiętać, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, a skoro tak, to będziemy mogli skorzystać z własności prostych prostopadłych. Aby dwie proste były względem siebie prostopadłe, iloczyn ich współczynników kierunkowych musi być równy -1 . Pierwsza prosta ma współczynnik $a = -\frac{3}{2}$, zatem druga (ta przez nas poszukiwana) musi mieć $a = \frac{2}{3}$, bo $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$.

Z proponowanych odpowiedzi tylko druga ma interesujący nas współczynnik kierunkowy, zatem bez dalszych obliczeń możemy stwierdzić, że druga przekątna tego rombu jest zawarta w prostej o równaniu $y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$.

Zadanie 12

0-1 pkt

Prosta o równaniu $y = ax + b$ przechodzi przez punkty $P = (-3; 3)$ i $Q = (4; -2)$. Współczynnik b w równaniu tej prostej jest równy:

Odpowiedź: D ($\frac{6}{7}$)

Aby wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty najprościej będzie skorzystać z metody układu równań. W tym celu do równania $y = ax + b$ musimy podstawić najpierw współrzędne punktu P , a później punktu Q , otrzymując:

$$\begin{cases} 3 = -3a + b \\ -2 = 4a + b \end{cases}$$

Odejmując te równania stronami otrzymamy:

$$5 = -7a, \quad a = -\frac{5}{7}$$

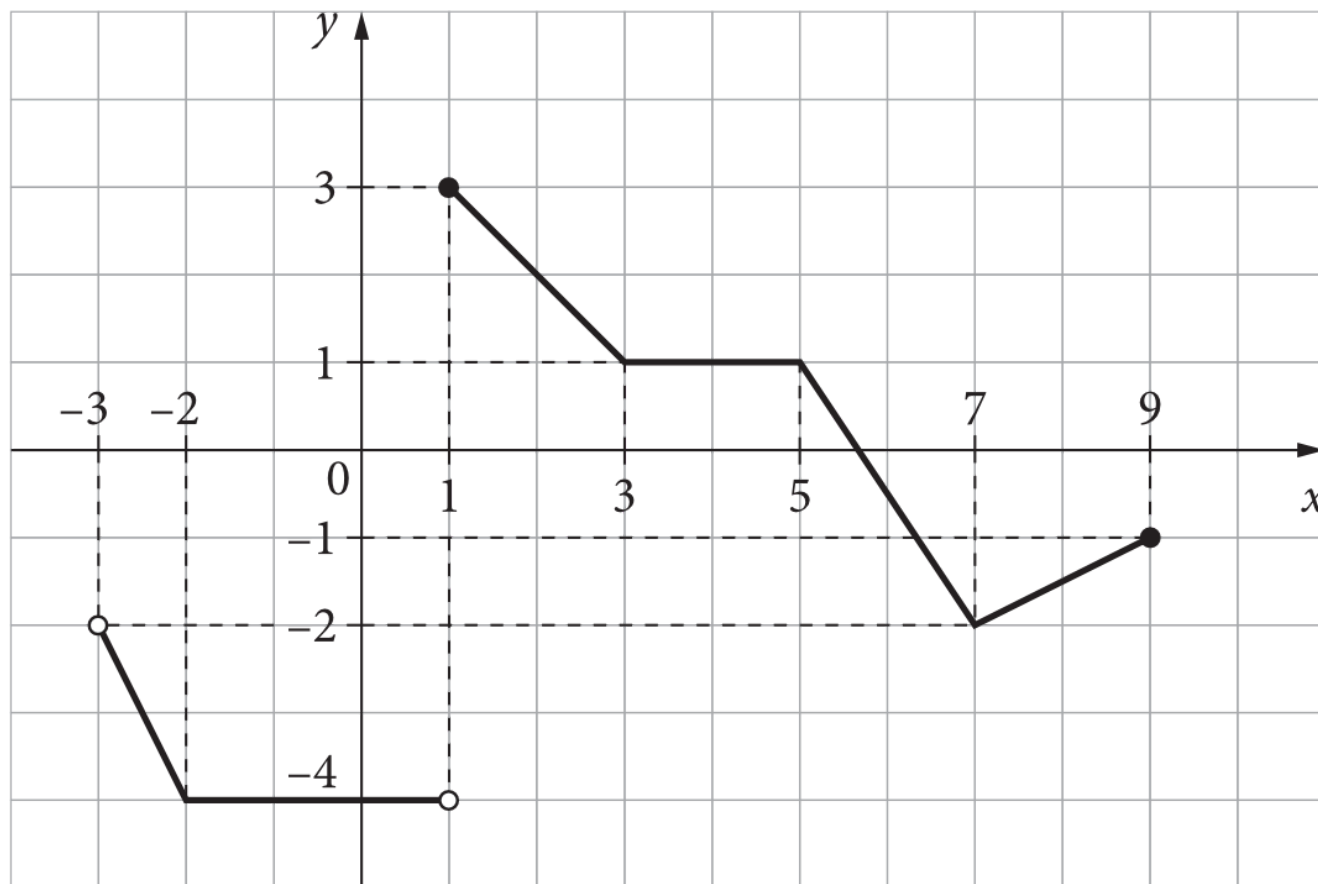
Znamy już wartość współczynnika a , jednak to nie koniec, bo nas interesuje poznanie współczynnika b . Podstawmy zatem obliczone $a = -\frac{5}{7}$ do jednego z równań w układzie (np. do pierwszego), dzięki czemu otrzymamy:

$$3 = -3a + b, \quad 3 = -3 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) + b, \quad 3 = \frac{15}{7} + b, \quad 3 = 2\frac{1}{7} + b, \quad b = \frac{6}{7}$$

Zadanie 13

0-1 pkt

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

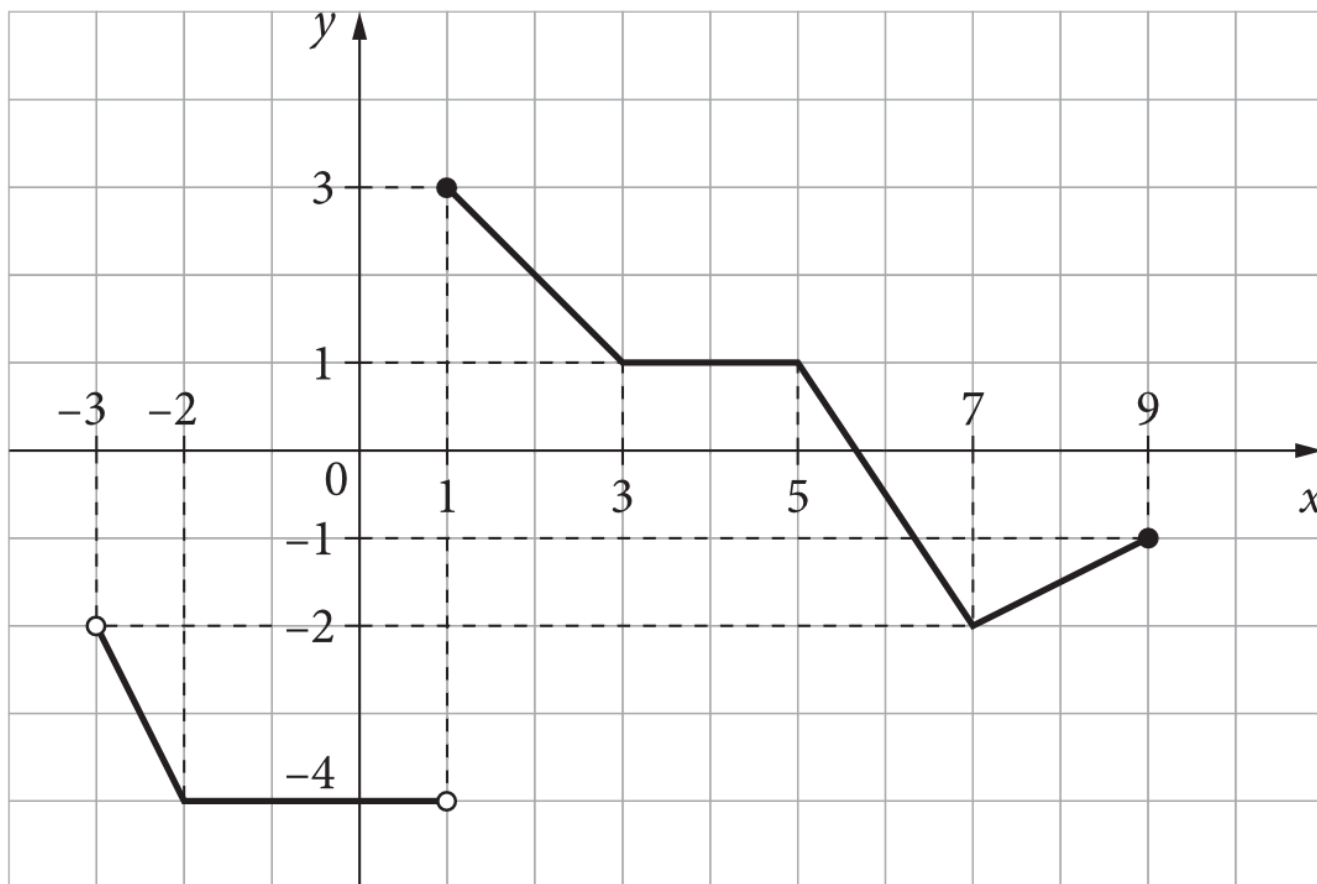


Zbiorem wartości funkcji f jest:

Odpowiedź: D ($\langle -4, 3 \rangle$)

Zbiór wartości funkcji odczytujemy z osi OY . Widzimy, że mimo "przerw" funkcja przyjmuje wartości z przedziału $\langle -4, 3 \rangle$.

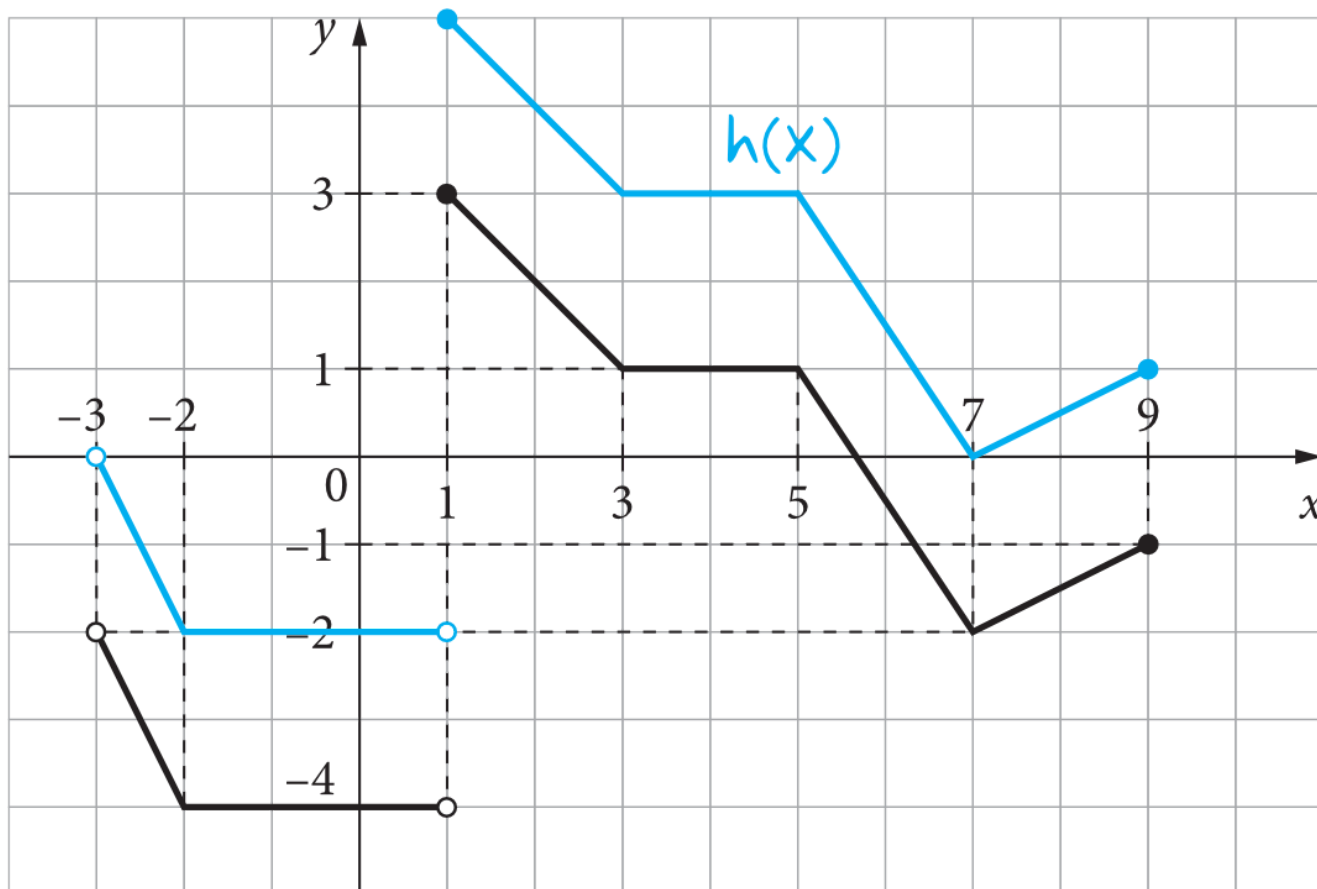
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Miejscem zerowym funkcji h , określonej wzorem $h(x) = f(x) + 2$ jest liczba:

Odpowiedź: C (7)

Ze wzoru $h(x) = f(x) + 2$ wynika, że funkcja $h(x)$ jest tak naprawdę przesunięciem funkcji $f(x)$ o dwie jednostki w górę. Możemy to sobie nawet zobrazować na rysunku:



Miejsce zerowe to argument x , dla którego funkcja przyjmuje wartość równą 0, czyli tak naprawdę interesuje nas miejsce przecięcia się wykresu z osią OX . Z rysunku szkicowego wynika wprost, że tym argumentem będzie $x = 7$.

Przy okazji zwróć uwagę, że $x = -3$ nie jest miejscem zerowym, bo mamy tutaj niezamalowaną kropkę, więc ten punkt nie należy do wykresu funkcji.

Zadanie 15

0-1 pkt

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla $n \geq 1$. Drugi i piąty wyraz tego ciągu spełniają równość $a_2 + 20 = a_5 + 50$. Różnica r ciągu (a_n) jest równa:

Odpowiedź: A (-10)

Z własności ciągów arytmetycznych wiemy, że $a_5 = a_2 + 3r$. Skoro tak, to w podanej w zadaniu równości podstawmy pod a_5 wartość $a_2 + 3r$ i rozwiążmy powstałe równanie:

$$a_2 + 20 = a_2 + 3r + 50, \quad 20 = 3r + 50, \quad -30 = 3r, \quad r = -10$$

Dany jest ciąg geometryczny $(4x + 4, x + 3, x + 1)$, którego wszystkie wyrazy są dodatnie. Iloraz q tego ciągu jest równy:

Odpowiedź: B ($\frac{1}{2}$)

Do zadania możemy podejść na różne sposoby.

I sposób - dla spostrzegawczych.

Moglibyśmy dostrzec, że trzeci wyraz $x + 1$ jest 4 razy mniejszy od pierwszego wyrazu $4x + 4$, a to znacząco uprości obliczenia. Z własności ciągów geometrycznych wiemy, że $a_3 = a_1 \cdot q^2$, a więc $q^2 = \frac{a_3}{a_1}$. Skoro tak, to:

$$q^2 = \frac{x+1}{4x+4}, \quad q^2 = \frac{x+1}{4 \cdot (x+1)}, \quad q^2 = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{1}{2} \quad \vee \quad q = -\frac{1}{2}$$

Ujemne q odrzucamy, bo dla ujemnego q nigdy nie otrzymamy ciągu o dodatnich wyrazach (a zgodnie z treścią zadania - ciąg ma mieć wszystkie wyrazy dodatnie). Zostaje nam więc $q = \frac{1}{2}$.

II sposób - korzystając z własności trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

Z własności ciągów geometrycznych wiemy, że dla trzech kolejnych wyrazów ciągu zachodzi następująca równość:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Podstawiając do tego wzoru wartości naszych wyrazów, otrzymamy:

$$(x+3)^2 = (4x+4) \cdot (x+1), \quad x^2 + 6x + 9 = 4x^2 + 4x + 4x + 4, \quad x^2 + 6x + 9 = 4x^2 + 8x + 4, \quad -3x^2 - 2x + 5 = 0$$

Powstało nam do rozwiązania równanie kwadratowe w postaci ogólnej, zatem z pomocą przyjdzie nam delta.

Współczynniki: $a = -3$, $b = -2$, $c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 = 4 - (-60) = 4 + 60 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - 8}{2 \cdot (-3)} = \frac{2 - 8}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + 8}{2 \cdot (-3)} = \frac{2 + 8}{-6} = \frac{10}{-6} = -1\frac{2}{3}$$

Z otrzymanych rozwiązań pasuje nam jedynie $x = 1$, bo tylko wtedy nasze wyrazy będą dodatnie. Podstawmy zatem $x = 1$ do naszych wyrazów:

$$a_1 = 4x + 4 = 4 + 4 = 8, \quad a_2 = x + 3 = 1 + 3 = 4, \quad a_3 = x + 1 = 1 + 1 = 2$$

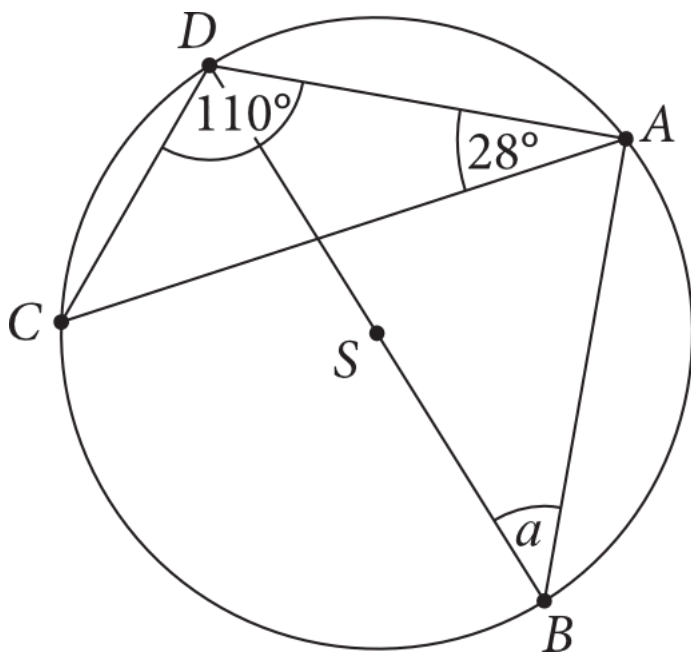
Znając wartości dwóch dowolnych wyrazów, obliczenie q jest już tylko formalnością:

$$q = \frac{a_2}{a_1}, \quad q = \frac{4}{8}, \quad q = \frac{1}{2}$$

Zadanie 17

0-1 pkt

Punkty A, B, C i D leżą na okręgu o środku S . Odcinek BD jest średnicą tego okręgu, a miary kątów ADC i CAD , wpisanych w ten okrąg, są równe odpowiednio 110° i 28° (jak na rysunku).



Miara α kąta wpisanego ABD jest równa:

Odpowiedź: C (42°)

Krok 1. Obliczenie miary kąta DCA .

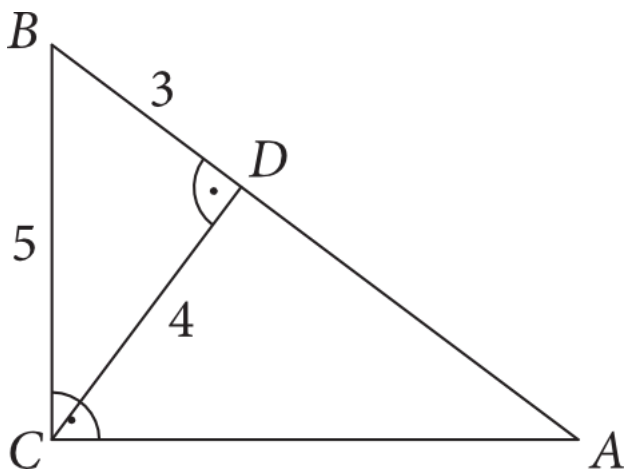
Spójrzmy na trójkąt CAD . Znamy miary dwóch kątów tego trójkąta, zatem i trzecią obliczymy bez problemu:

$$|\angle DCA| = 180^\circ - 110^\circ - 28^\circ, \quad |\angle DCA| = 42^\circ$$

Krok 2. Wyznaczenie miary kąta α .

Jeżeli się dobrze przyjrzymy, to zauważymy, że zarówno kąt DCA jak i kąt α są kątami wpisanymi, które są oparte na tym samym łuku. Z własności kątów wpisanych wiemy, że w takiej sytuacji miara kątów jest jednakowa, stąd też $\alpha = 42^\circ$.

Przyprostokątna BC trójkąta prostokątnego ABC ma długość 5. Wysokość CD tego trójkąta, opuszczona na przeciwprostokątną, jest równa 4, a długość odcinka BD jest równa 3 (jak na rysunku).



Pole trójkąta ABC jest równe:

Odpowiedź: A ($16\frac{2}{3}$)

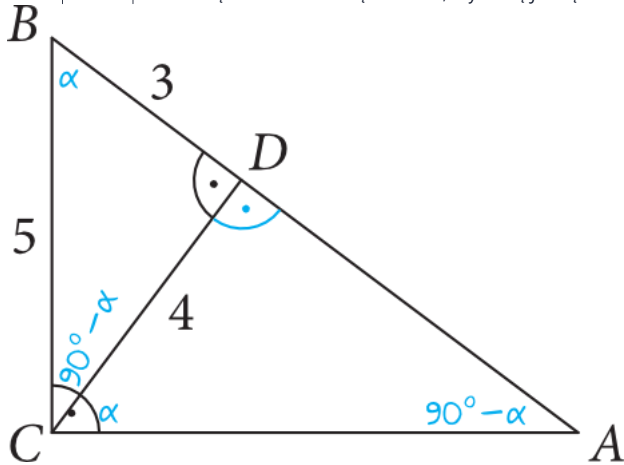
Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Powinniśmy dostrzec, że trójkąty BCD oraz CAD są trójkątami podobnymi. Skąd to wiemy? Jeżeli kąt CBD oznaczmy sobie jako α , to kąt BCD ma miarę $90^\circ - \alpha$.

To z kolei prowadzi nas do wniosku, że skoro kąt BCA jest kątem prostym, to miara kąta DCA będzie równa:

$$|\angle DCA| = 90^\circ - |\angle BCD|, |\angle DCA| = 90^\circ - (90^\circ - \alpha), |\angle DCA| = \alpha$$

Skoro $|\angle DCA| = \alpha$ to kąt CAD ma miarę $90^\circ - \alpha$, czyli taką jak kąt BCD .



Krok 2. Obliczenie skali podobieństwa.

Zastanówmy się teraz jaka jest skala podobieństwa tych trójkątów. Szukamy długości boków odpowiadających i widzimy, że taką parę stanowią jedno z przyprostokątnych tych dwóch trójkątów, czyli BD oraz DC , które mają długości równe 3 oraz 4. Przyjmując, że trójkąt CAD jest trójkątem podobnym do BCD możemy zapisać, że w takim razie skala podobieństwa wynosi $k = \frac{4}{3}$.

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni trójkąta BCD .

Zanim wykorzystamy własności trójkątów podobnych, to obliczmy miarę trójkąta BCD . Znamy wszystkie miary tego trójkąta, więc nie będzie z tym żadnego problemu:

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3, P_{BCD} = 6$$

Krok 4. Obliczenie pola powierzchni trójkąta CAD .

Z własności trójkątów podobnych wiemy, że przy skali podobieństwa równej k , trójkąt podobny ma pole powierzchni k^2 razy większe od trójkąta podstawowego. Skoro tak, to:

$$P_{CAD} = k^2 \cdot P_{BCD}, P_{CAD} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 6, P_{CAD} = \frac{16}{9} \cdot 6, P_{CAD} = \frac{96}{9} = 10\frac{6}{9} = 10\frac{2}{3}$$

Krok 5. Obliczenie pola powierzchni trójkąta ABC .

Na koniec została już tylko formalność, bowiem suma pól trójkątów BCD oraz CAD daje nam poszukiwane pole powierzchni trójkąta ABC :

$$P_{ABC} = P_{BCD} + P_{CAD}, P_{ABC} = 6 + 10\frac{2}{3}, P_{ABC} = 16\frac{2}{3}$$

Zadanie 19

0-1 pkt

Trójkąty ABC i PQR są podobne. Boki trójkąta ABC mają długości: 12, 6, 10. Różnica między długością najdłuższego boku trójkąta PQR a długością jego boku najkrótszego jest równa 9. Obwód trójkąta PQR jest równy:

Odpowiedź: B (42)

Krok 1. Obliczenie skali podobieństwa.

W trójkącie ABC różnica między długością najdłuższego i najkrótszego boku jest równa $12 - 6 = 6$. Z treści zadania wynika, że w trójkącie PQR ta różnica jest większa i wynosi 9. Skoro są to trójkąty podobne, to na podstawie tej informacji możemy wysnuć wniosek, że skala podobieństwa trójkąta PQR do trójkąta ABC będzie równa:

$$k = \frac{9}{6}, k = 1,5$$

Krok 2. Obliczenie obwodu trójkąta PQR .

Trójkąt ABC ma obwód równy:

$$Obw_{ABC} = 12 + 6 + 10 = 28$$

Z własności trójkątów podobnych wynika, że trójkąt PQR będzie miał ten obwód k razy większy, a skoro $k = 1,5$, to:

$$Obw_{PQR} = k \cdot Obw_{ABC}, Obw_{PQR} = 1,5 \cdot 28, Obw_{PQR} = 42$$

Zadanie 20

0-1 pkt

Punkt $A = (-4; 1)$ jest wierzchołkiem kwadratu $ABCD$. Przekątne tego kwadratu przecinają się w punkcie $S = (0; 4)$. Obwód tego kwadratu jest równy:

Odpowiedź: D ($20\sqrt{2}$)

Krok 1. Obliczenie długości odcinka AS .

Na początek obliczmy długość odcinka AS , czyli tak naprawdę połowę długości przekątnej kwadratu. Korzystając ze wzoru na długość odcinka możemy zapisać, że:

$$|AS| = \sqrt{(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2}, |AS| = \sqrt{(0 - (-4))^2 + (4 - 1)^2}, |AS| = \sqrt{4^2 + 3^2}, |AS| = \sqrt{16 + 9}, |AS| = \sqrt{25}, |AS| = 5$$

Krok 2. Obliczenie długości przekątnej kwadratu.

Skoro obliczony odcinek $|AS|$ ma długość równą połowie przekątnej kwadratu, to cała przekątna będzie mieć miarę:

$$d = 2 \cdot |AS|, d = 2 \cdot 5, d = 10$$

Krok 3. Obliczenie długości boku kwadratu.

Z własności kwadratów wiemy, że kwadrat o boku a ma przekątną o długości $a\sqrt{2}$. Przekątna naszego kwadratu ma długość 10, zatem:

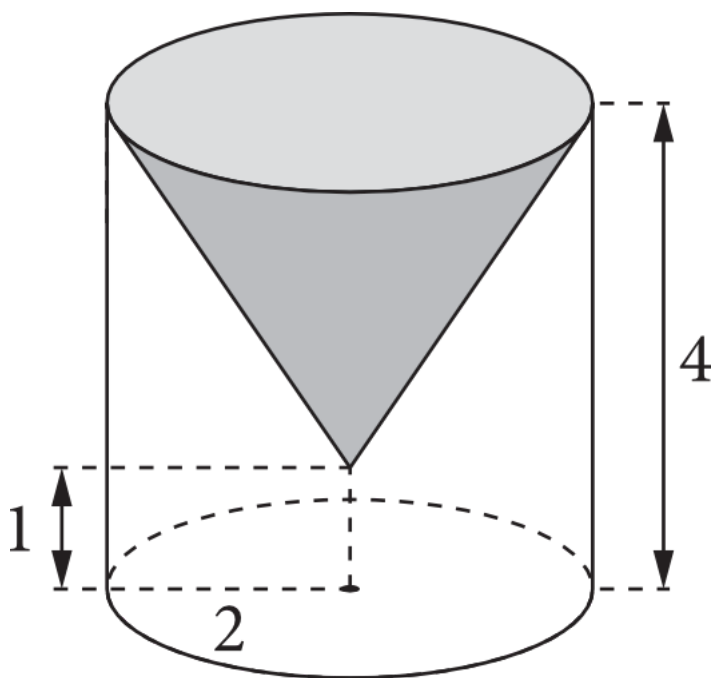
$$a\sqrt{2} = 10, a = \frac{10}{\sqrt{2}}, a = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}, a = \frac{10\sqrt{2}}{2}, a = 5\sqrt{2}$$

Krok 4. Obliczenie obwodu kwadratu.

Na koniec została już tylko formalność, czyli obliczenie obwodu kwadratu:

$$Obw = 4 \cdot 5\sqrt{2}, Obw = 20\sqrt{2}$$

Rozważmy bryłę powstałą w następujący sposób: w walcu, którego wysokość jest równa 4, a promień podstawy 2, wydrążono stożek o podstawie pokrywającej się z górną podstawą walca i wierzchołku leżącym w odległości 1 od dolnej podstawy walca (jak na rysunku).



Objętość powstałej bryły jest równa:

Odpowiedź: B (12π)

Krok 1. Obliczenie objętości stożka.

Na początek obliczmy objętość wydrążonego stożka. Wiemy, że $r = 2$ oraz $H = 3$, zatem:

$$V_s = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H, \quad V_s = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \pi \cdot 3, \quad V_s = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 3, \quad V_s = 4\pi$$

Krok 2. Obliczenie objętości walca.

Teraz obliczmy objętość walca, podstawiając do stosownego wzoru $r = 2$ oraz $H = 4$:

$$V_w = P_p \cdot H, \quad V_w = 2^2 \cdot \pi \cdot 4, \quad V_w = 4\pi \cdot 4, \quad V_w = 16\pi$$

Krok 3. Obliczenie objętości powstałej bryły.

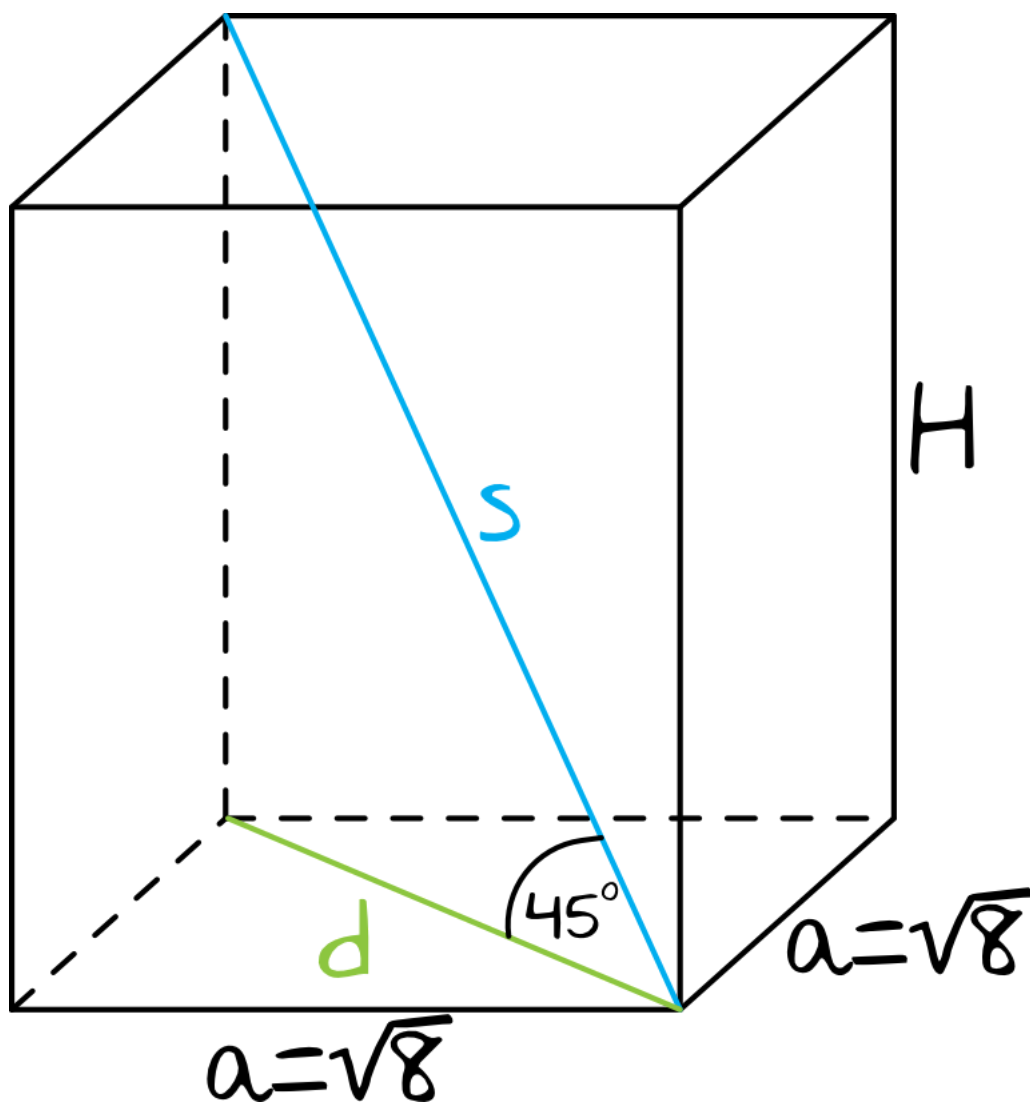
Interesującą nas objętość bryły będzie różnicą między objętością walca i stożka, zatem:

$$V = V_w - V_s, \quad V = 16\pi - 4\pi, \quad V = 12\pi$$

Zadanie 22

0-1 pkt

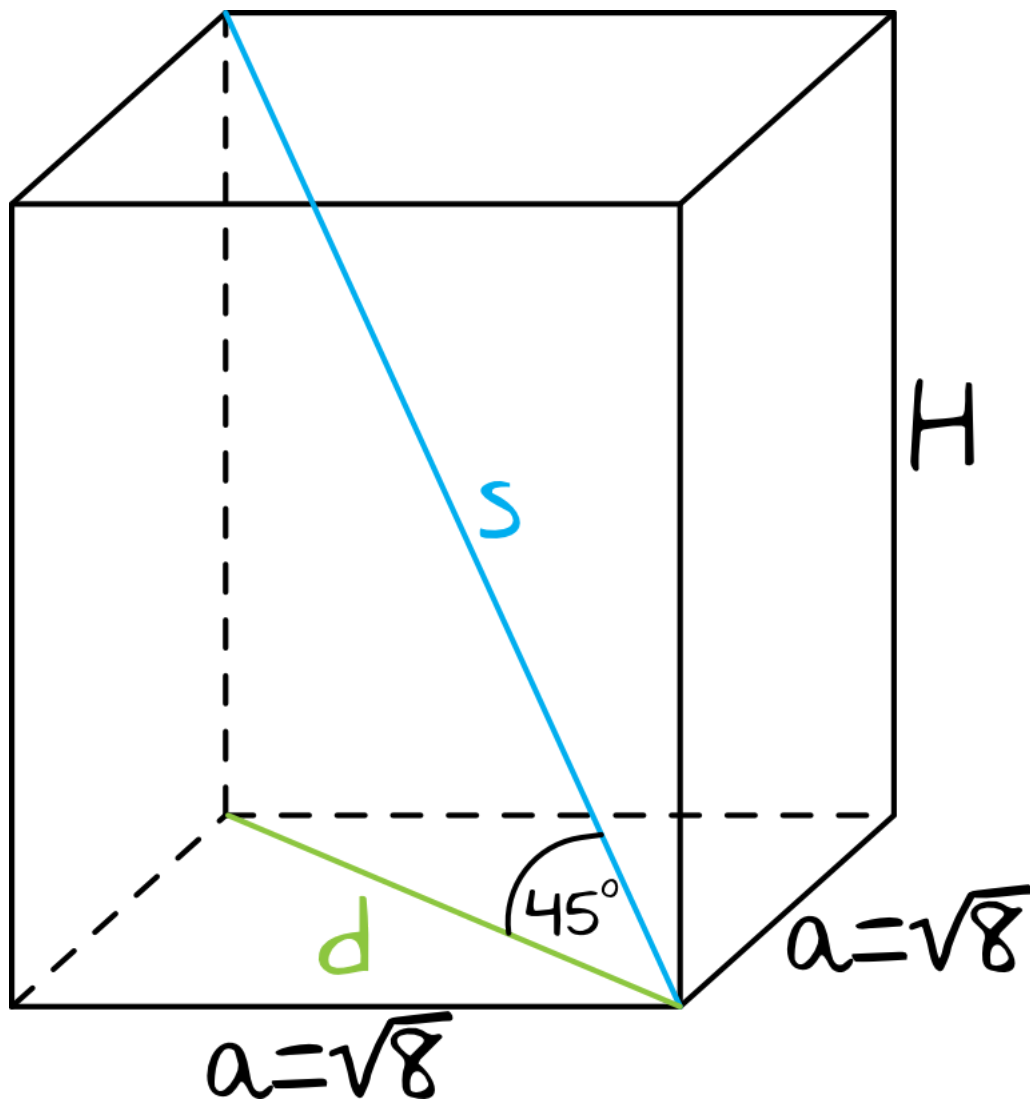
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna tworzy z podstawą kąt 45° , a krawędź podstawy ma długość $\sqrt{8}$. Objętość tego graniastosłupa jest równa:



Odpowiedź: B (32)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Narysujmy sobie tę sytuację, zaznaczając odpowiednie miary na graniastosłupie:



Kluczową obserwacją jest dostrzeżenie, że tak naprawdę długość przekątnej podstawy jest równa wysokości graniastosłupa. Skąd to wiemy? Zaznaczony na rysunku trójkąt to charakterystyczny trójkąt o kątach 45° , 45° , 90° a więc trójkąt równoramienny.

Krok 2. Obliczenie długości przekątnej podstawy oraz wysokości graniastosłupa.

W podstawie mamy kwadrat, a z własności kwadratów wiemy, że ich przekątną można obliczyć ze wzoru $d = a\sqrt{2}$. Skoro krawędź podstawy ma długość $a = \sqrt{8}$, to:

$$d = a\sqrt{2}, d = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}, d = \sqrt{16}, d = 4$$

Tym samym, zgodnie z informacją omówioną w kroku pierwszym, możemy zapisać, że także $H = 4$.

Krok 3. Obliczenie objętości graniastosłupa.

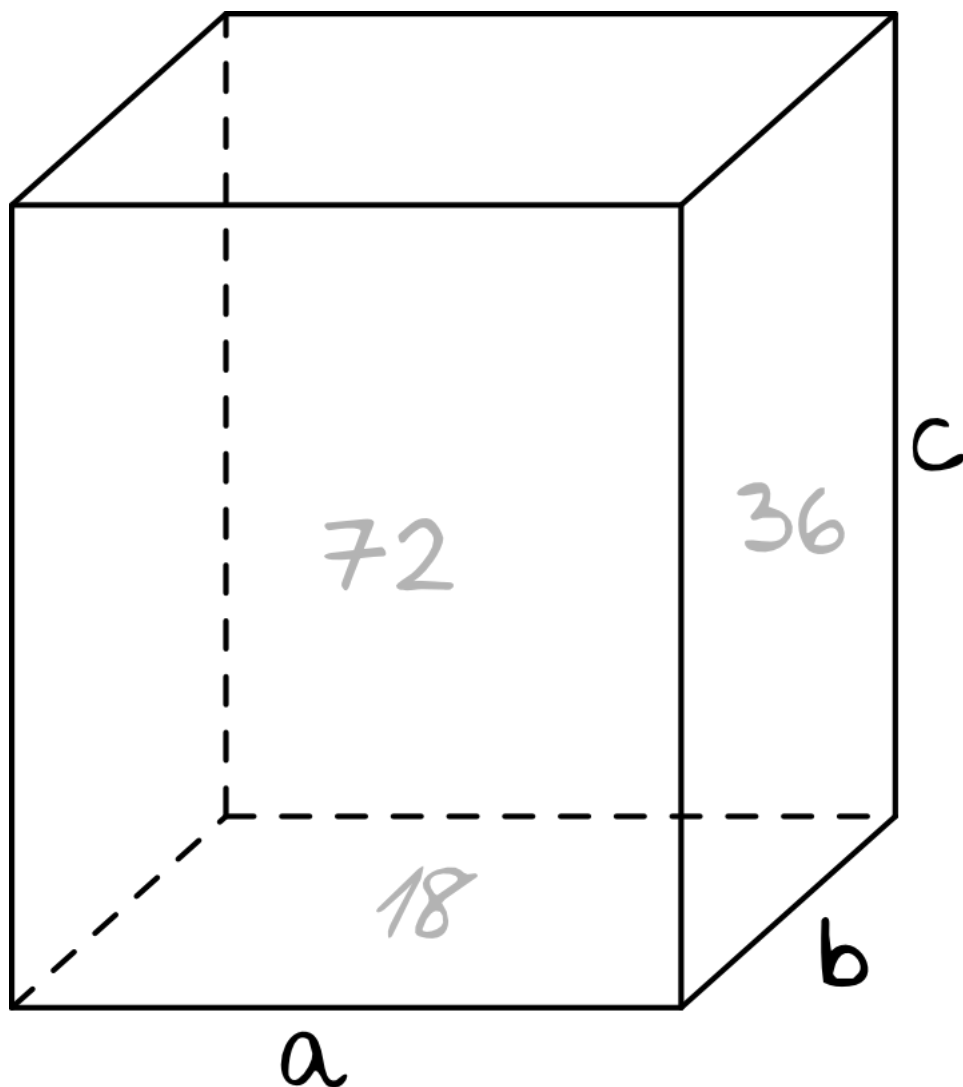
Obliczenie objętości jest już tylko formalnością:

$$V = P_p \cdot H, V = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} \cdot 4, V = 8 \cdot 4, V = 32$$

Zadanie 23

0-1 pkt

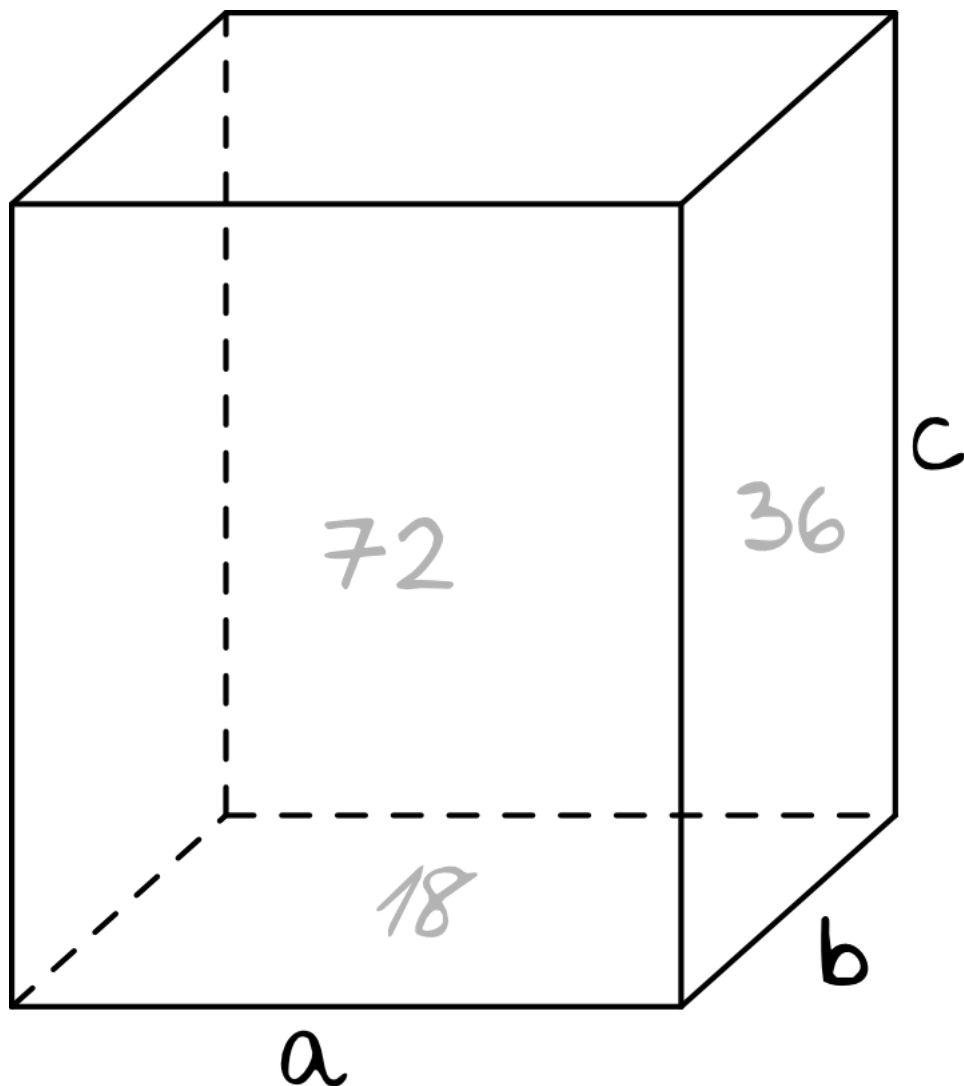
Pola trzech ścian prostopadłościanu wynoszą 72, 36 i 18. Objętość tego prostopadłościanu jest równa:



Odpowiedź: C (216)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Narysujmy sobie prostopadłościan i zastanówmy się, co tak naprawdę wynika z treści zadania:



Nie jest istotne jakimi symbolami opiszemy te ściany. Ważne jest to, że powstaną nam tak naprawdę trzy różne prostokąty, których pola zapisane są w treści zadania. Korzystając ze wzoru na pole prostokąta możemy ułożyć trzy następujące równania, które stworzą nam tym samym układ równań:

$$\begin{cases} a \cdot b = 18 \\ b \cdot c = 36 \\ a \cdot c = 72 \end{cases}$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałego układu równań.

Naszym zadaniem jest teraz rozwiązanie układu równań. Jest wiele dróg na dojście do wyniku, ale najprościej będzie chyba przekształcić pierwsze i drugie równanie w taki sposób:

$$\begin{cases} a = \frac{18}{b} \\ c = \frac{36}{b} \\ a \cdot c = 72 \end{cases}$$

Podstawmy teraz do trzeciego równania to, co otrzymaliśmy w równaniu pierwszym i drugim:

$$\frac{18}{b} \cdot \frac{36}{b} = 72, \frac{648}{b^2} = 72, 72b^2 = 648, b^2 = 9, b = 3 \vee b = -3$$

Oczywiście ujemną długość musimy odrzucić, więc zostaje nam $b = 3$. Teraz korzystając z odpowiednich równań z układu, możemy dojść do brakujących długości a oraz c :

$$a \cdot b = 18, a \cdot 3 = 18, a = 6$$

$$b \cdot c = 36, 3 \cdot c = 36, c = 12$$

Krok 3. Obliczenie objętości prostopadłościanu.

Znając wszystkie długości boków prostopadłościanu, możemy bez problemu obliczyć jego objętość:

$$V = 6 \cdot 3 \cdot 12, \quad V = 216$$

Zadanie 24

0-1 pkt

W grupie 64 dorosłych osób przeprowadzono ankietę dotyczącą nauki języków obcych. Wyniki ankiety przedstawiono w tabeli.

Liczba lat nauki	0	1	2	3	4	5
Liczba osób	11	6	5	10	14	18

Mediana wyrażonego w latach czasu nauki języków obcych jest równa:

Odpowiedź: C (3, 5)

Z treści zadania wynika, że mamy 64 osoby, czyli jest to parzysta liczba. To oznacza, że jak uporządkujemy wyniki zapisane w tabeli, to medianą będzie średnia arytmetyczna między wynikiem osoby numer 32 oraz 33.

Aby dobrze sobie uzmysłowić tę sytuację to możemy powiedzieć, że zestaw liczb z którego chcemy policzyć medianę wygląda mniej więcej w ten sposób:

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, \dots, 5, 5, 5$$

Nas interesuje wartość wyrazu numer 32 oraz 33. Oczywiście nie będziemy wypisywać ponad trzydziestu liczb. Wystarczy zauważyć, że osób które mają 0, 1, 2 lub 3 lata nauki mamy $11 + 6 + 5 + 10 = 32$. To prowadzi nas do wniosku, że trzydziesta druga osoba ma 3 lata nauki, a trzydziesta trzecia ma 4 lata. Skoro tak, to mediana będzie równa:

$$m = \frac{3+4}{2}, \quad m = \frac{7}{2}, \quad m = 3,5$$

Zadanie 25

0-1 pkt

W pojemniku są kule białe i czarne. Kul białych jest o 6 więcej niż kul czarnych. Losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{2}{3}$.

Wynika z tego, że wszystkich kul w pojemniku jest:

Odpowiedź: C (18)

Krok 1. Wypisanie danych z treści zadania.

Korzystając z informacji z treści zadania możemy zapisać, że:

x - liczba kul czarnych

$x + 6$ - liczba kul białych

$x + x + 6 = 2x + 6$ - liczba wszystkich kul

Dodatkowo wiemy, że prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{2}{3}$.

Krok 2. Obliczenie liczby kul w pojemniku.

Skoro białych kul mamy $x + 6$, wszystkich kul jest $2x + 6$, a szanse na wylosowanie białej kuli wynoszą $\frac{2}{3}$, to możemy zapisać, że:

$$\frac{x+6}{2x+6} = \frac{2}{3}$$

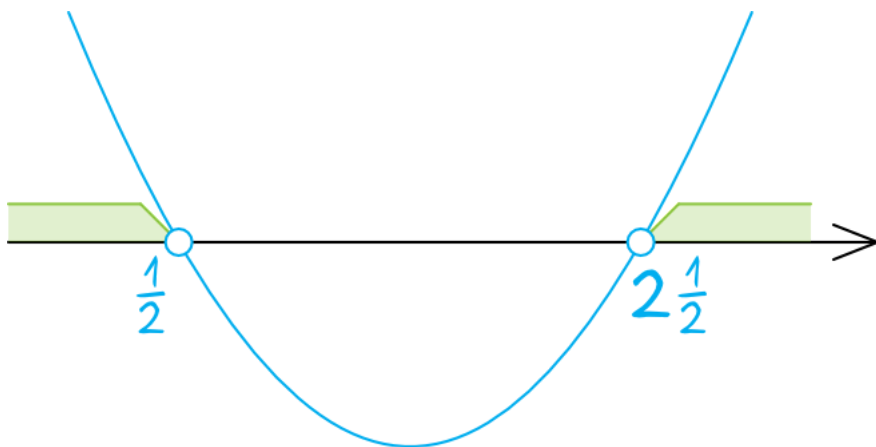
To równanie najprościej będzie rozwiązać wykonując tak zwane mnożenie na krzyż:

$$(x+6) \cdot 3 = (2x+6) \cdot 2, \quad 3x+18 = 4x+12, \quad -x = -6, \quad x = 6$$

I tutaj uwaga - zgodnie z naszymi oznaczeniami, x jest liczbą czarnych kul, a nas interesuje liczba wszystkich kul w pojemniku. Wszystkich kul jest $2x + 6$, zatem jest ich $2 \cdot 6 + 6 = 12 + 6 = 18$.

Zadanie 26

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $(2x - 1)^2 - 4(2x - 1) > 0$.**Odpowiedź:** $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2\frac{1}{2}; +\infty)$

Tę nierówność możemy rozwiązać na różne sposoby, oto dwa z nich:

I sposób - korzystając z delty

Krok 1. Wymnożenie poszczególnych wyrazów.

Na początek spróbujmy doprowadzić zapis do postaci ogólnej, a w tym celu musimy wymnożyć wszystkie wyrazy znajdujące się po lewej stronie. Przyda nam się tu przy okazji wzór skróconego mnożenia $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, zatem:

$$(2x - 1)^2 - 4(2x - 1) > 0, 4x^2 - 4x + 1 - (8x - 4) > 0, 4x^2 - 4x + 1 - 8x + 4 > 0, 4x^2 - 12x + 5 > 0$$

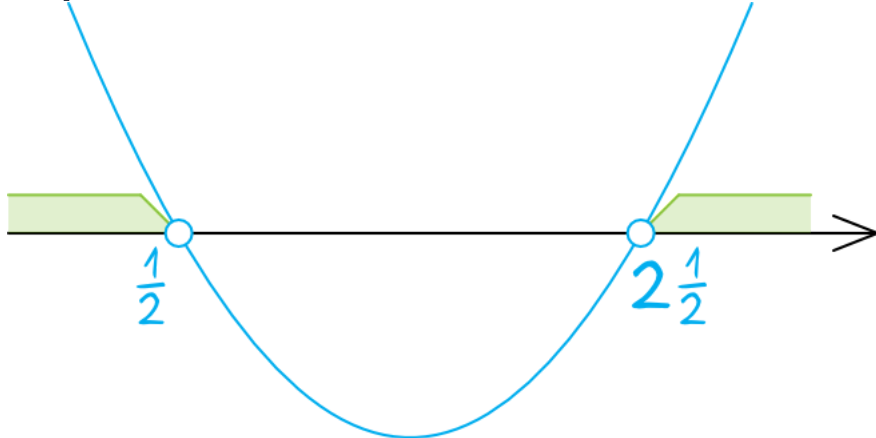
Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Współczynniki: $a = 4$, $b = -12$, $c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64, \sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) - 8}{2 \cdot 4} = \frac{12 - 8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) + 8}{2 \cdot 4} = \frac{12 + 8}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Współczynnik kierunkowy a jest dodatni, więc parabola będzie mieć ramiona skierowane do góry. Zaznaczamy na osi wyznaczone miejsca zerowe $x = \frac{1}{2}$ oraz $x = 2\frac{1}{2}$ (kropki będą niezamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $>$) i rysujemy parabolę:

Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas wyniki większe od zera, zatem przyglądamy się temu co znalazło się nad osią. To oznacza, że rozwiązaniem tej nierówności jest suma przedziałów:

$$x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2\frac{1}{2}; +\infty)$$

II sposób - wyłączając wspólny czynnik przed nawias

Krok 1. Wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias.

Jeśli przyjrzymy się tej nierówności to zauważymy, że wspólnym elementem $(2x - 1)^2$ oraz $4(2x - 1)$ jest $2x - 1$. Skoro tak, to możemy wyłączyć tę wartość przed nawias. Cały proces będzie wyglądał następująco:

$$(2x - 1)^2 - 4(2x - 1) > 0, (2x - 1) \cdot (2x - 1) - 4(2x - 1) > 0, (2x - 1 - 4) \cdot (2x - 1) > 0, (2x - 5) \cdot (2x - 1) > 0$$

Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Mając taki zapis, poznanie miejsc zerowych jest bardzo proste, ponieważ wystarczy zachować się tak jak przy postaci iloczynowej, czyli przyrównać wartości w nawiasach do zera. W związku z tym:

$$2x - 5 = 0 \quad \vee \quad 2x - 1 = 0, \quad 2x = 5 \quad \vee \quad 2x = 1, \quad x = 2\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$

Cała reszta rozwiązania jest już taka sama jak w trzecim i czwartym kroku I sposobu. Wyjdzie nam więc, że $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2\frac{1}{2}; +\infty)$.

Zadanie 27

0-2 pkt

Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = 2x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = (1; -8)$. Oblicz wartości współczynników b i c we wzorze funkcji f .

Odpowiedź: $b = -4$ oraz $c = -6$

Krok 1. Zapisanie wzoru w postaci kanonicznej.

Znając współrzędne wierzchołka paraboli, możemy bez problemu zapisać wzór tej funkcji w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$. Podstawiając $p = 1$ oraz $q = -8$, otrzymamy:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \quad f(x) = a \cdot (x - 1)^2 + (-8)$$

Ze wzoru podanego w treści zadania wynika, że $a = 2$, zatem możemy jeszcze zapisać, że:

$$f(x) = 2 \cdot (x - 1)^2 - 8$$

Krok 2. Przekształcenie wzoru funkcji do postaci ogólnej.

Celem zadania jest poznanie wzoru w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$, bo tylko wtedy będziemy w stanie podać wartości współczynników b i c . W tym celu wystarczy po prostu wykonać mnożenie i potęgowanie, które znalazło się w postaci kanonicznej. Całość będzie wyglądać następująco:

$$f(x) = 2 \cdot (x - 1)^2 - 8, \quad f(x) = 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) - 8, \quad f(x) = 2x^2 - 4x + 2 - 8, \quad f(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

To oznacza, że $b = -4$ oraz $c = -6$.

Zadanie 28

0-2 pkt

W pojemniku jest sześć kul, w tym trzy kule czerwone i trzy kule białe. Każda kula czerwona jest oznaczona inną liczbą ze zbioru $\{1, 2, 3\}$. Analogicznie ponumerowano kule białe. Doświadczenie polega na losowaniu z tego pojemnika dwóch kul bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowane kule mają taki sam kolor lub taki sam numer.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{3}{5}$

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

W pojemniku mamy 3 kule czerwone i 3 białe, czyli łącznie jest to 6 kul. Losujemy dwie kule (bez zwracania), zatem w pierwszym losowaniu mamy możliwość wylosowania jednej z sześciu kul, a w drugim losowaniu jednej z pięciu kul. To z kolei oznacza, że wszystkich możliwości wylosowania kul mamy zgodnie z regułą mnożenia $|\Omega| = 6 \cdot 5 = 30$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Zadanie jest dość podchwytliwe. To nie jest typowa sytuacja, dlatego musimy sobie to wszystko bardzo dokładnie rozpiszać. Zdarzeniem sprzyjającym jest wylosowanie kul, które mają taki sam kolor lub numer. Wypiszmy sobie zatem te zdarzenia, dzieląc je na dwie grupy - te, które pasują nam ze względu na kolor oraz te, które pasują ze względu na numer

Ze względu na kolor:

$(1c, 2c); (1c, 3c); (2c, 1c); (2c, 3c); (3c, 1c); (3c, 2c), (1b, 2b); (1b, 3b); (2b, 1b); (2b, 3b); (3b, 1b); (3b, 2b)$

Ze względu na numer:

$(1c, 1b), (2c, 2b), (3c, 3b), (1b, 1c), (2b, 2c), (3b, 3c)$

Łącznie mamy 12 zdarzeń sprzyjających ze względu na kolor i 6 zdarzeń sprzyjających ze względu na numer. Łącznie tych zdarzeń jest więc $|A| = 12 + 6 = 18$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

Zadanie 29

0-2 pkt

Udowodnij, że dla każdej ujemnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $\frac{x}{9} + \frac{4}{x} \leq -\frac{4}{3}$.

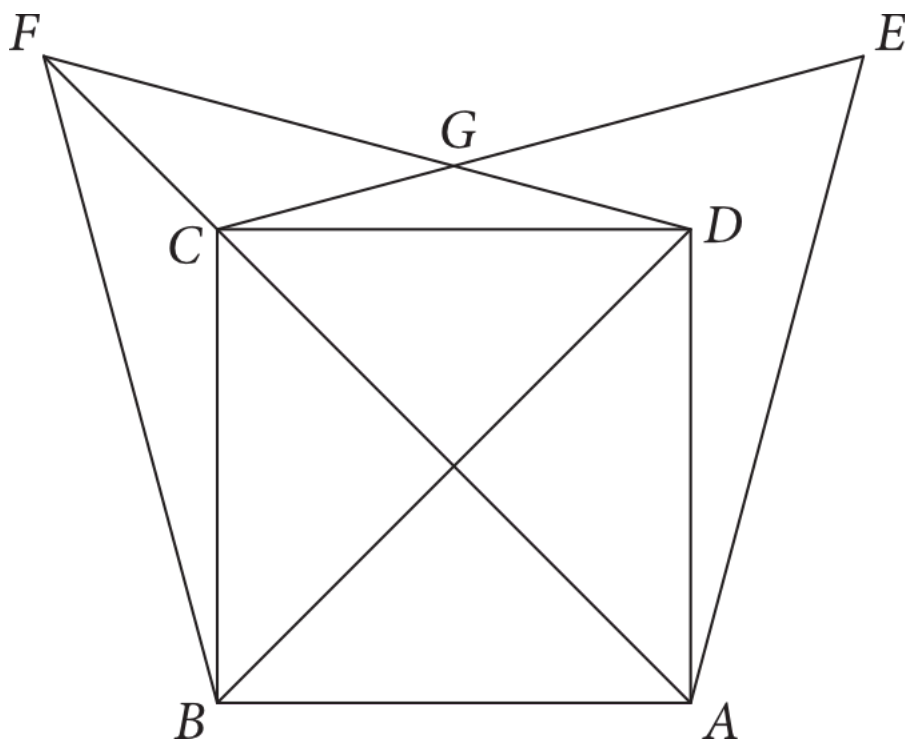
Odpowiedź: Udowodniono, korzyst

Przekształcając nierówność otrzymamy następujący zapis:

$$\frac{x}{9} + \frac{4}{x} \leq -\frac{4}{3} \quad \Bigg/ \cdot 9, \quad x + \frac{36}{x} \leq -12 \quad \Bigg/ \cdot x, \quad x^2 + 36 \geq -12x, \quad x^2 + 12x + 36 \geq 0, \quad (x + 6)^2 \geq 0$$

Każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu jest większa lub równa 0, zatem nasze dowodzenie możemy uznać za zakończone.

Dany jest kwadrat $ABCD$. Zbudowano trójkąty równoboczne ACE i BDF tak, że wierzchołek D kwadratu leży wewnątrz trójkąta ACE , a wierzchołek C - wewnątrz trójkąta BDF . Odcinki CE i DF przecinają się w punkcie G (jak na rysunku).

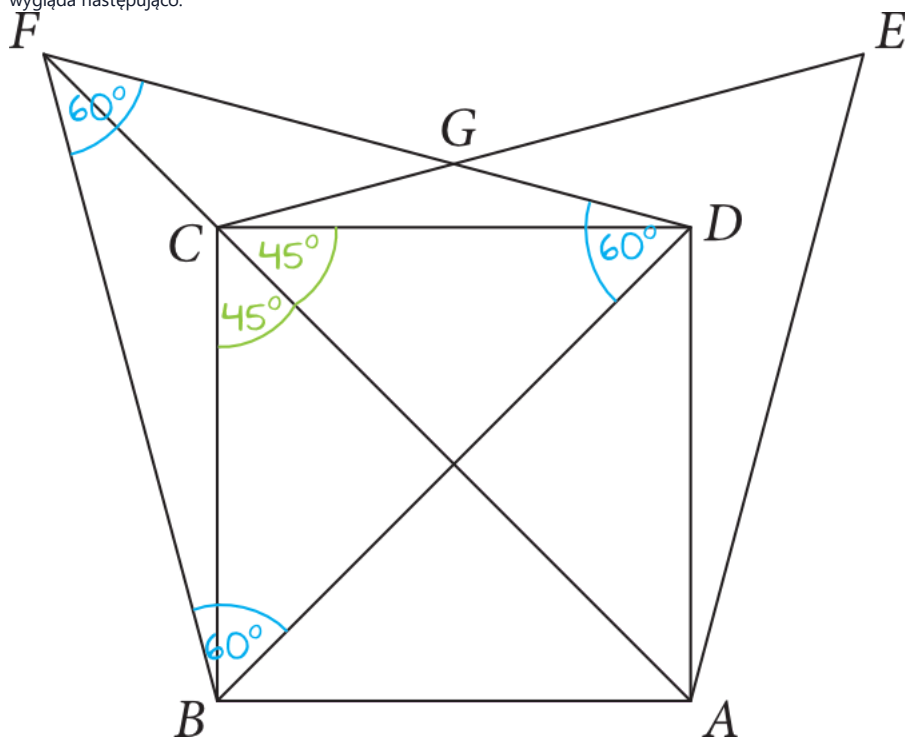


Wykaż, że $|CG| = |CF|$.

Odpowiedź: Udowodniono, korzyst

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Skoro trójkąty ACE i BDF są równoboczne (czyli mają wszystkie kąty o mierze 60°), a przekątne kwadratu tworzą z bokami kąty 45° , to sytuacja z treści zadania wygląda następująco:



Krok 2. Obliczenie miar poszczególnych kątów.

Korzystając z rysunku możemy teraz obliczyć miarę np. kąta CDF :

$$|\angle CDF| = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

Można więc powiedzieć, że w takim razie w trójkącie równoramiennym CDG kąty przy podstawie mają 15° , zatem kąt CGD ma:

$$|\sphericalangle CGD| = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ$$

Spójrzmy teraz na kąt CGF . Jest on kątem przystającym do kąta CGD , zatem jego miara jest równa:

$$|\sphericalangle CGF| = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

Bardzo podobnie możemy obliczyć miarę kąta FCG .

$$|\sphericalangle FCG| = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ$$

I teraz spoglądamy na trójkąt CGF . Znamy już dwie miary kątów w tym trójkącie i są to kąty o mierze 30° oraz 120° , zatem trzeci kąt ma miarę:

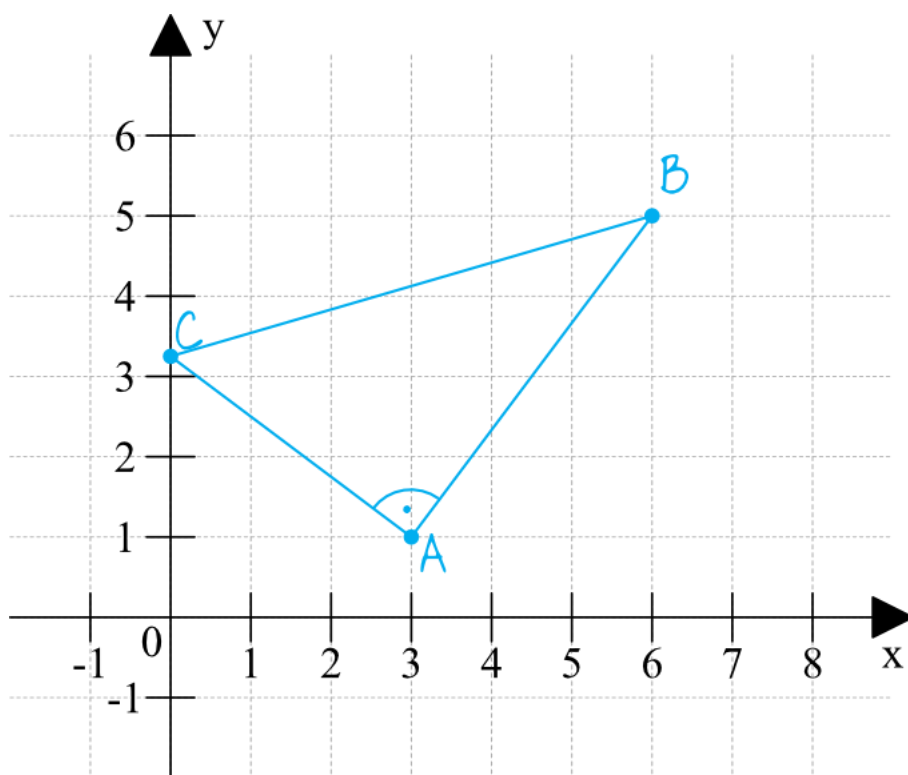
$$|\sphericalangle FCG| = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

To oznacza, że kąty przy boku FG mają jednakową miarę, czyli że trójkąt CGF jest równoramienny. Skoro tak, to faktycznie $|CG| = |CF|$, co należało udowodnić.

Zadanie 31

0-2 pkt

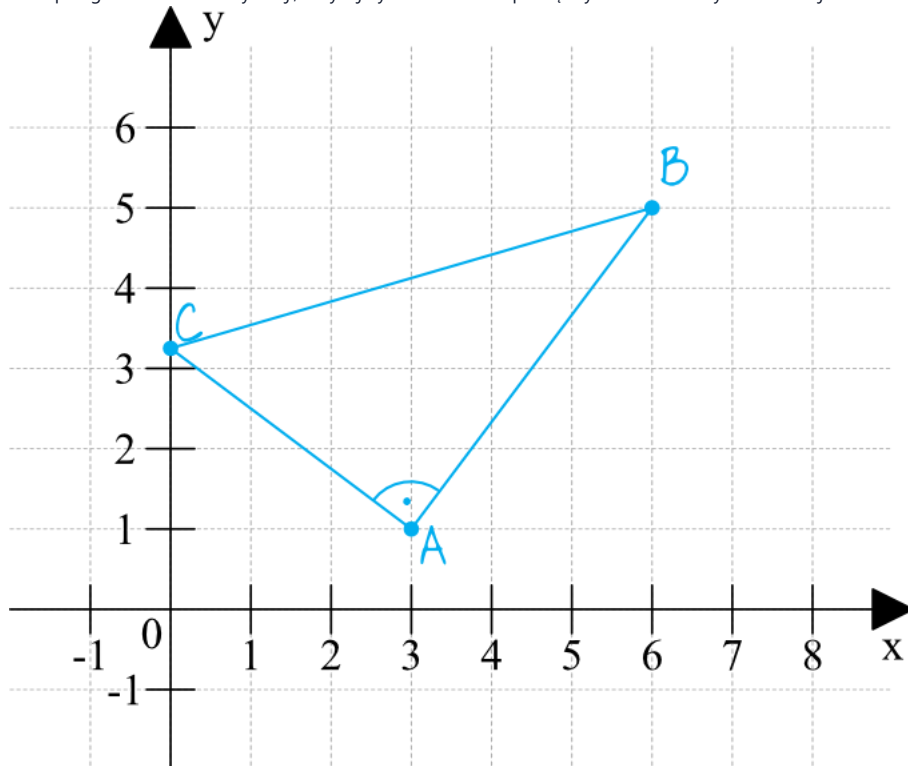
Punkty $A = (3; 1)$, $B = (6; 5)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC , w którym $|\angle BAC| = 90^\circ$. Wierzchołek C tego trójkąta leży na osi Oy układu współrzędnych. Oblicz współrzędne wierzchołka C .



Odpowiedź: $C = \left(0; \frac{1}{3}\right)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Dla lepszego zobrazowania sytuacji, narysujmy sobie układ współrzędnych z zaznaczonymi informacjami z treści zadania:



Z rysunku jasno wynika, że kluczem do sukcesu będzie najpierw poznanie równania prostej AB , a następnie odszukanie prostej prostopadłej, która przechodzi przez punkt C . To właśnie pozwoli nam na wyznaczenie współrzędnych punktu C .

Krok 2. Wyznaczenie współczynnika kierunkowego a prostej AB .

Znając współrzędne punktów A oraz B , możemy bez problemu wyznaczyć wzór prostej AB , która przez te punkty przechodzi. W tym celu możemy skorzystać z bardzo rozbudowanego wzoru z tablic lub z metody układu równań. Jednak nam tak naprawdę wystarczy poznanie współczynnika kierunkowego a tej prostej, bo to właśnie jego potrzebujemy do dalszego rozwiązywania. Możemy więc skorzystać ze wzoru na współczynnik a , czyli:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, a = \frac{5 - 1}{6 - 3}, a = \frac{4}{3}$$

Oczywiście jeśli nie pamiętamy o tym wzorze, to możemy wyznaczyć ten współczynnik a w standardowy sposób, czyli w trakcie wyznaczania równania prostej. W tym celu do równania prostej $y = ax + b$ musimy podstawić najpierw współrzędne punktu A , a potem współrzędne punktu B , otrzymując takie oto dwa równania:

$$\begin{cases} 1 = 3a + b \\ 5 = 6a + b \end{cases}$$

Odejmując te równania stronami otrzymamy:

$$-4 = -3a, a = \frac{4}{3}$$

Współczynnika b nie musimy już wyznaczać, wystarczy nam informacja, że $a = \frac{4}{3}$.

Krok 3. Wyznaczenie równania prostej AC .

Prosta AC musi być prostopadła do AB . Z własności prostych wiemy, że aby tak się stało, to iloczyn współczynników kierunkowych a musi być równy -1 . Skoro prosta AB ma ten współczynnik równy $a = \frac{4}{3}$, to prosta AC będzie mieć $a = -\frac{3}{4}$, bo $-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = -1$.

To oznacza, że prosta AC wyraża się równaniem $y = -\frac{3}{4}x + b$. Musimy jeszcze odnaleźć brakujący współczynnik b tej prostej, a dokonamy tego, podstawiając do tego równania współrzędne znanego nam punktu, który do tej prostej należy, czyli w tym przypadku punktu A , zatem:

$$y = -\frac{3}{4}x + b, 1 = -\frac{3}{4} \cdot 3 + b, 1 = -\frac{9}{4} + b, b = 3\frac{1}{4}$$

To oznacza, że prosta AC wyraża się równaniem $y = -\frac{3}{4}x + 3\frac{1}{4}$.

Krok 4. Ustalenie współrzędnych punktu C .

Punkt C leży na osi Oy , zatem na pewno współrzędna $x = 0$. Współrzędną y możemy w takim razie odczytać wprost z równania prostej AC - jest ona równa współczynnikowi b , czyli jest równa $3\frac{1}{4}$. Jeśli o tej własności nie pamiętamy, to możemy po prostu podstawić $x = 0$ do wzoru prostej $y = -\frac{3}{4}x + 3\frac{1}{4}$. Otrzymamy wtedy:

$$y = -\frac{3}{4} \cdot 0 + 3\frac{1}{4}, y = 0 + 3\frac{1}{4}, y = 3\frac{1}{4}$$

To oznacza, że poszukiwane współrzędne to $C = (0; 3\frac{1}{4})$.

Ciąg arytmetyczny (a_n) składa się z dwudziestu jeden wyrazów, których suma jest równa 147. Jeśli odrzucimy dwa początkowe i trzy końcowe wyrazy tego ciągu, to suma wszystkich pozostałych wyrazów będzie równa 108. Zapisz wzór ogólny ciągu (a_n) .

Odpowiedź: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}n\right\}$

Krok 1. Rozpisanie sumy dwudziestu jeden wyrazów.

W tym zadaniu skorzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu. Nasz ciąg ma 21 wyrazów, zatem $n = 21$. Wiemy też, że suma tych wyrazów jest równa 147. Podstawiając te informacje do wzoru, otrzymamy taki oto zapis:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_{21} = \frac{a_1 + a_{21}}{2} \cdot 21, \quad 147 = \frac{a_1 + a_{21}}{2} \cdot 21, \quad 7 = \frac{a_1 + a_{21}}{2}, \quad a_1 + a_{21} = 14$$

Z własności ciągów wiemy, że $a_{21} = a_1 + 20r$. Skoro tak, to możemy kontynuować obliczenia i zapisać, że:

$$a_1 + a_{21} = 14, \quad a_1 + a_1 + 20r = 14, \quad 2a_1 + 20r = 14, \quad a_1 + 10r = 7$$

Krok 2. Zapisanie równania po odjęciu dwóch początkowych i trzech końcowych wyrazów.

Z treści zadania wynika, że kiedy odjęliśmy dwa początkowe i trzy końcowe wyrazy, to suma wszystkich wyrazów zmalała do 108, czyli zmalała o $147 - 108 = 39$. Możemy więc matematycznie zapisać, że:

$$a_1 + a_2 + a_{19} + a_{20} + a_{21} = 39$$

Póki co mamy bardzo dużo niewiadomych, więc spróbujmy uprościć cały zapis. Korzystając z własności ciągu, możemy teraz rozpisać, że np. $a_2 = a_1 + r$ albo też $a_{21} = a_1 + 20r$. Nasz zapis możemy więc przekształcić do następującej postaci:

$$a_1 + a_1 + r + a_1 + 18r + a_1 + 19r + a_1 + 20r = 39, \quad a_1 + a_1 + r + a_1 + 18r + a_1 + 19r + a_1 + 20r = 39, \quad 5a_1 + 58r = 39$$

Krok 3. Obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego.

Z pierwszego kroku wiemy już, że $a_1 + 10r = 7$, a z drugiego wiemy, że $5a_1 + 58r = 39$. Mamy więc dwa równania i dwie niewiadome, zatem z pomocą może nam przyjść układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + 10r = 7 \\ 5a_1 + 58r = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 7 - 10r \\ 5a_1 + 58r = 39 \end{cases}$$

Korzystając z metody podstawiania możemy teraz podstawić pierwsze równanie do drugiego i zapisać, że:

$$5 \cdot (7 - 10r) + 58r = 39, \quad 35 - 50r + 58r = 39, \quad 35 + 8r = 39, \quad 8r = 4, \quad r = \frac{1}{2}$$

Krok 4. Wyznaczenie wartości pierwszego wyrazu.

Korzystając z wybranego równania np. $a_1 + 10r = 7$, możemy podstawić $r = \frac{1}{2}$ i obliczyć wartość a_1 , zatem:

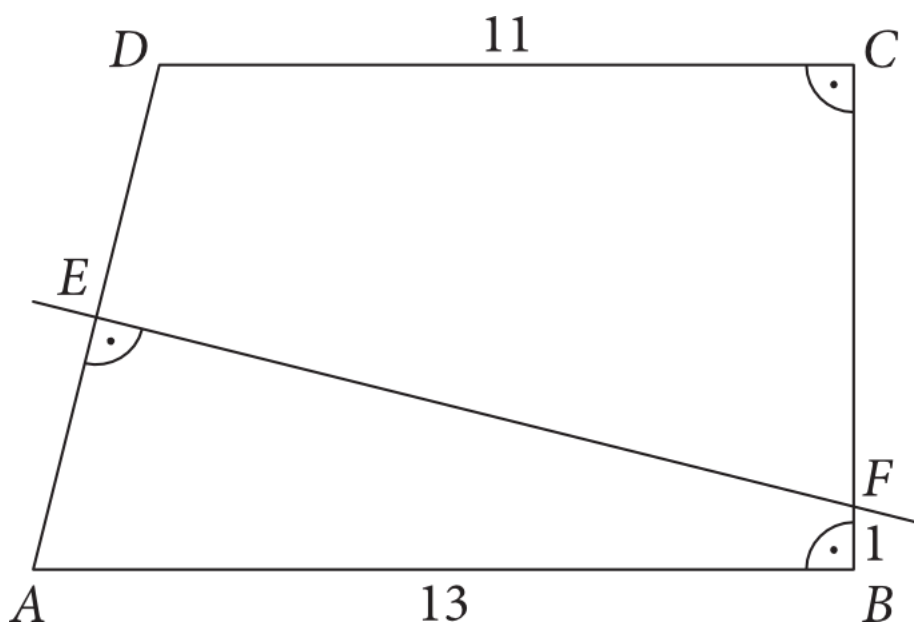
$$a_1 + 10r = 7, \quad a_1 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 7, \quad a_1 + 5 = 7, \quad a_1 = 2$$

Krok 5. Zapisanie wzoru ciągu.

Znając $r = \frac{1}{2}$ oraz $a_1 = 2$, możemy bez przeszkód wyznaczyć wzór ogólny ciągu, podstawiając te dwie dane do wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \quad a_n = 2 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2}, \quad a_n = 2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{1}{2}n + 1\frac{1}{2}$$

Podstawy trapezu prostokątnego $ABCD$ mają długości $AB = 13$, $CD = 11$. Prosta będąca symetralną ramienia AD przecina to ramię w punkcie E , a ramię BC - prostopadłe do podstaw trapezu - w punkcie F , takim że $BF = 1$ (jak na rysunku).

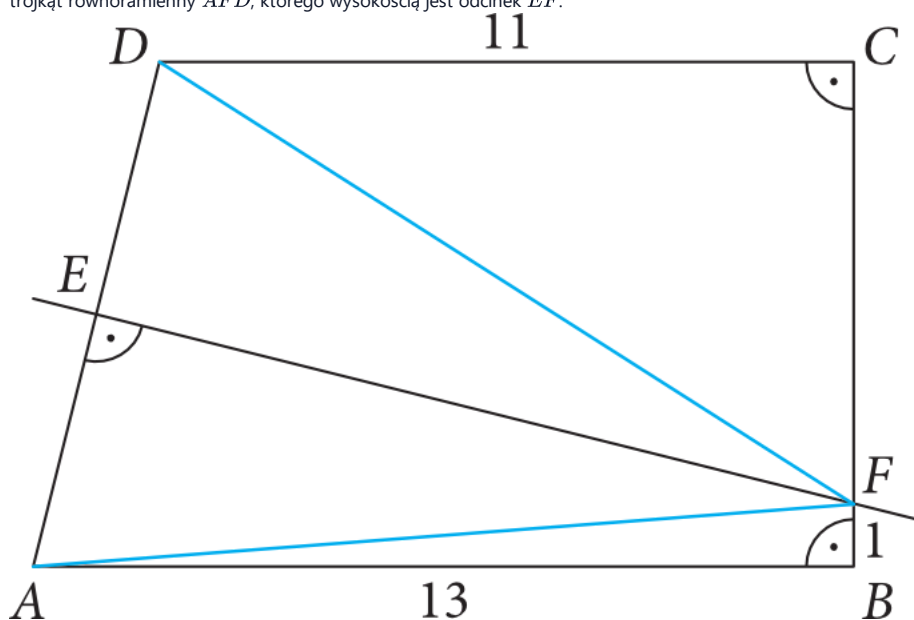


Oblicz pole trapezu $ABCD$.

Odpowiedź: $P = 96$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Skoro punkt E przecina odcinek AD w połowie długości, a bok EF jest prostopadły do boku AD , to łącząc punkty A z F oraz D z F otrzymamy tak naprawdę trójkąt równoramienny AFD , którego wysokością jest odcinek EF :



A skąd wiemy, że jest to trójkąt równoramienny? Możemy być tego pewni, ponieważ wysokość trójkąta dzieli podstawę na dwie równe części, a to charakterystyczny element trójkątów równoramiennych.

Krok 2. Obliczenie długości odcinka AF oraz DF .

Spójrzmy na trójkąt prostokątny ABF . To właśnie z tego trójkąta jesteśmy w stanie obliczyć długość odcinka AF , korzystając z Twierdzenia Pitagorasa:

$$13^2 + 1^2 = |AF|^2, \quad 169 + 1 = |AF|^2, \quad |AF|^2 = 170, \quad |AF| = \sqrt{170} \quad \vee \quad |AF| = -\sqrt{170}$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, bo długość boku nie może być ujemna. To oznacza, że zarówno $|AF| = \sqrt{170}$ jak i $|DF| = \sqrt{170}$. Póki co możemy te wyniki zostawić w takiej postaci.

Krok 3. Obliczenie długości odcinka CF .

Spójrzmy teraz na trójkąt DCF . Jest to także trójkąt prostokątny, znamy dwie długości boków tego trójkąta, zatem z pomocą po raz kolejny przyjdzie nam Twierdzenie Pitagorasa:

$$11^2 + |CF|^2 = (\sqrt{170})^2, \quad 121 + |CF|^2 = 170, \quad |CF|^2 = 49, \quad |CF| = 7 \quad \vee \quad |CF| = -7$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $|CF| = 7$.

Krok 4. Obliczenie długości boku BC .

Jest to trapez prostokątny, zatem bok BC będzie jednocześnie wysokością naszej figury. Skoro znamy długości odcinków $|BF| = 1$ oraz $|CF| = 7$, to wyznaczenie długości boku BC jest formalnością:

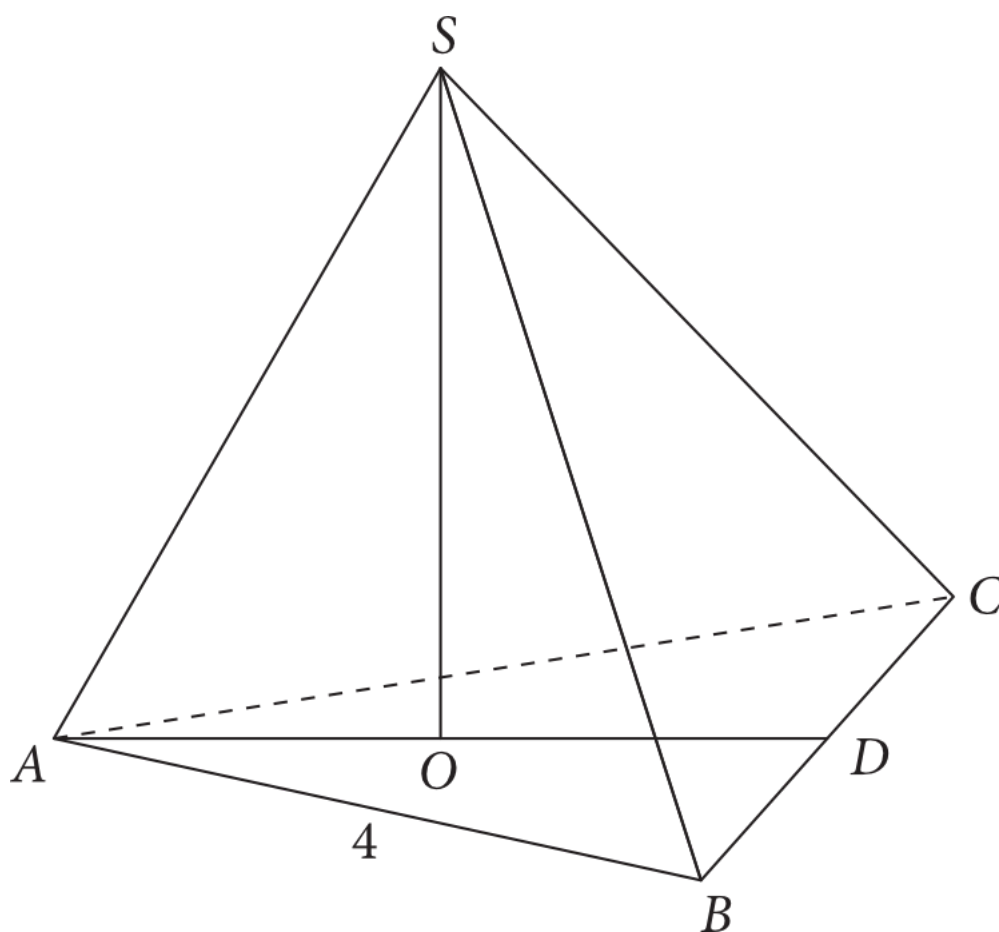
$$|BC| = |BF| + |CF|, \quad |BC| = 1 + 7, \quad |BC| = 8$$

Krok 5. Obliczenie pola powierzchni trapezu.

Mamy wszystkie potrzebne dane do obliczenia pola trapezu, ponieważ znamy długości obydwu podstaw oraz wysokości. W związku z tym:

$$P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h, \quad P = \frac{1}{2}(13 + 11) \cdot 8, \quad P = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 8, \quad P = 12 \cdot 8, \quad P = 96$$

W ostrosłupie $ABCS$ podstawą jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 4, ściana boczna BCS też jest trójkątem równobocznym, a spodek O wysokości SO ostrosłupa jest środkiem wysokości AD trójkąta ABC (jak na rysunku).

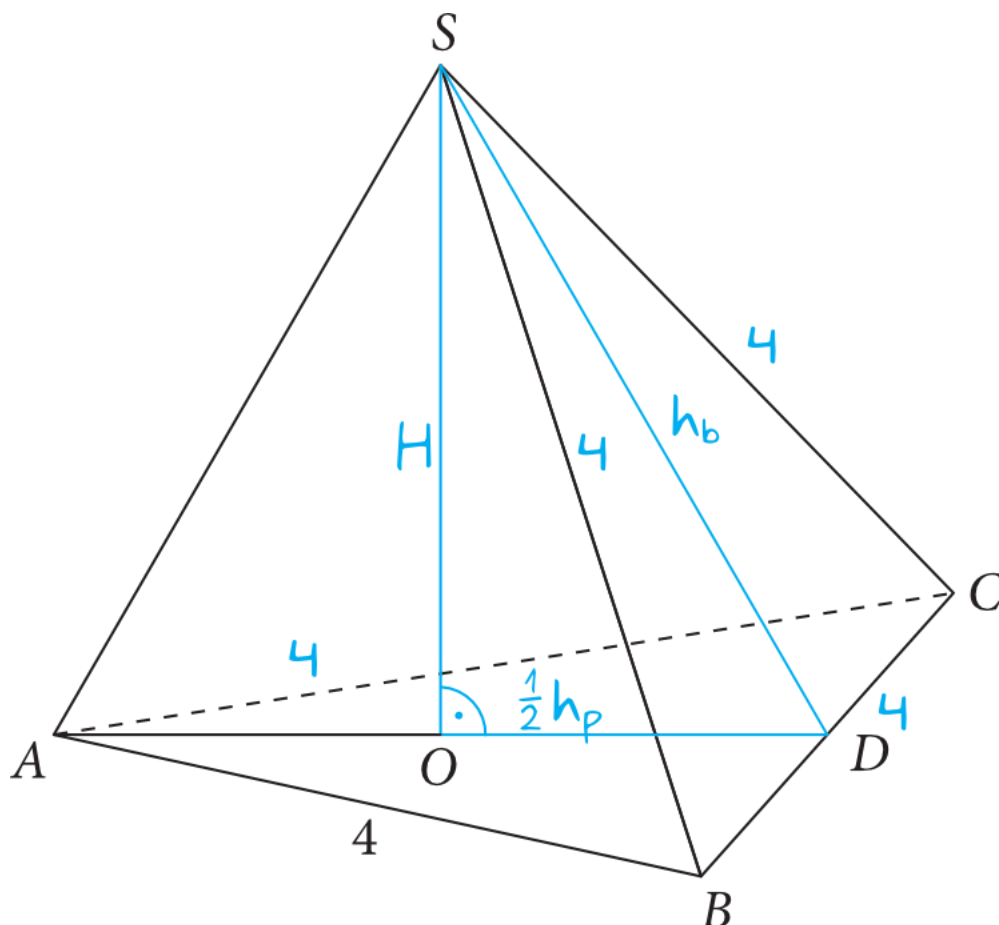


Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Odpowiedź: $V = 4\sqrt{3}$ oraz

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanosząc na rysunek kluczowe informacje, otrzymamy taką oto sytuację:



Krok 2. Obliczenie wysokości trójkąta znajdującego się w podstawie.

W podstawie mamy trójkąt równoboczny o boku $a = 4$. Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego możemy zapisać, że:

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}, h_p = \frac{4\sqrt{3}}{2}, h_p = 2\sqrt{3}$$

Krok 3. Obliczenie długości odcinka OD .

Wysokość ostrosłupa SO dzieli nam wysokość podstawy na dwie równe części (tak wynika wprost z zadania). Każda z tych części ma długość $\frac{1}{2}h_p$. Skoro tak, to odcinek OD będzie mieć długość:

$$|OD| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}, |OD| = \sqrt{3}$$

Krok 4. Obliczenie wysokości trójkąta BCS .

Trójkąt BCS jest także trójkątem równobocznym o boku $a = 4$ (wynika to z zadania). Jego wysokość obliczymy więc dokładnie tak samo, jak wysokość h_p , zatem:

$$h_b = \frac{a\sqrt{3}}{2}, h_b = \frac{4\sqrt{3}}{2}, h_b = 2\sqrt{3}$$

Krok 5. Obliczenie wysokości ostrosłupa.

Spoglądamy teraz na kluczowy trójkąt prostokątny SOD . Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć wysokość ostrosłupa:

$$(\sqrt{3})^2 + H^2 = (2\sqrt{3})^2, 3 + H^2 = 4 \cdot 3, 3 + H^2 = 12, H^2 = 9, H = 3 \quad \vee \quad H = -3$$

Ujemną wartość oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $H = 3$.

Krok 6. Obliczenie pola powierzchni podstawy.

W podstawie mamy trójkąt równoboczny o boku $a = 4$. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta równobocznego możemy zapisać, że:

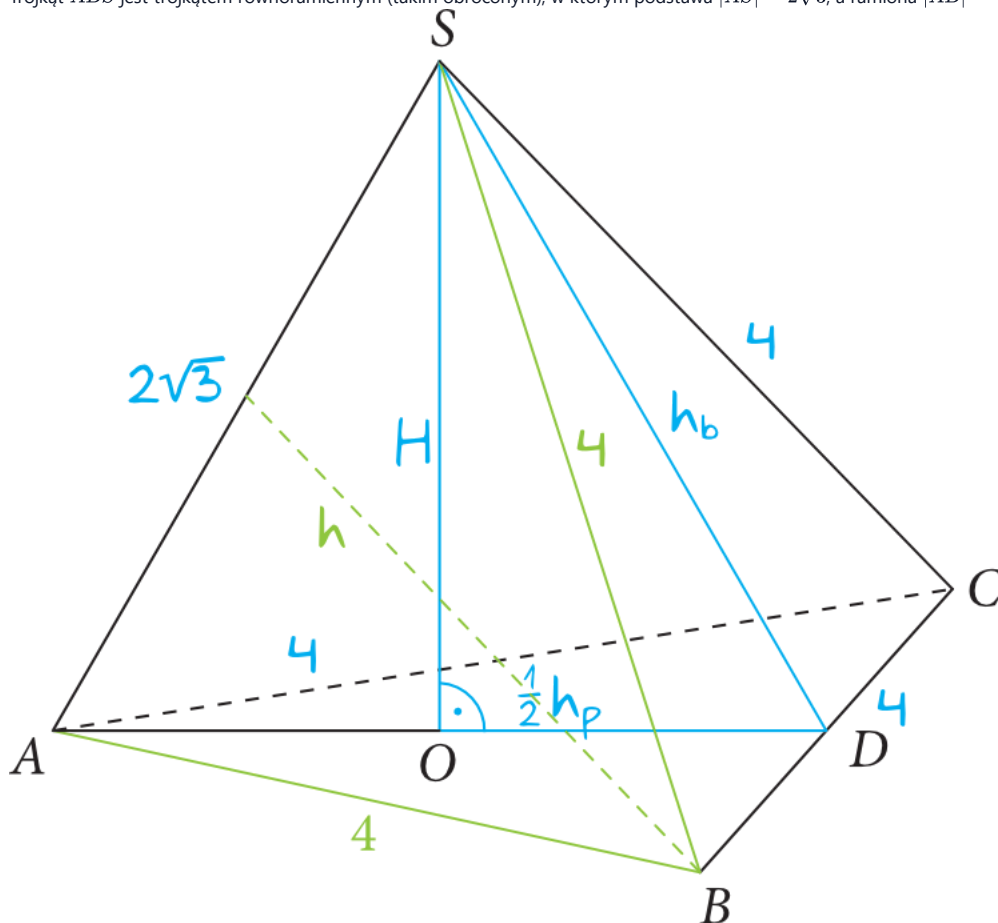
$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, P_p = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}, P_p = \frac{16\sqrt{3}}{4}, P_p = 4\sqrt{3}$$

Wiemy, że $P_p = 4\sqrt{3}$. Wysokość ostrosłupa też już znamy, bowiem $H = 3$. Możemy zatem przystąpić do obliczenia objętości:

Krok 8. Obliczenie długości krawędzi AS .

$$(\sqrt{3})^2 + 3^2 = |AS|^2, \quad 3 + 9 = |AS|^2, \quad |AS|^2 = 12, \quad |AS| = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Trójkąt ABS jest trójkątem równoramiennym (takim obróconym), w którym podstawa $|AS| = 2\sqrt{3}$, a ramiona $|AB| = 4$ oraz $|BS| = 4$.


$$(\sqrt{3})^2 + h^2 = 4^2, \quad 3 + h^2 = 16, \quad h = \sqrt{13}$$
$$P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}, P_{ABS} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{13}, P_{ABS} = \sqrt{39}$$

Krok 10. Obliczenie pola powierzchni całkowitej.

matematix.pl · Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Nowa Era 2021

$$P_c = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{39} + \sqrt{39} = 8\sqrt{3} + 2\sqrt{39}$$