

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Nowa Era 2020

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	C (4)	1
2	A ($\frac{1}{2}$)	1
3	C (o 4% niższa od ceny początkowej)	1
4	C (-4)	1
5	C ($5000 \cdot (1 + 0,81 \cdot 0,03)^{2z}$)	1
6	D ($\langle -3, 0 \rangle$)	1
7	A ($a = 9$)	1
8	D (cztery rozwiązania, których suma jest równa -5)	1
9	D ($x = 2, 196$)	1
10	D ($\log \frac{100}{27} = 2 - 3a$)	1
11	A ((0, 4))	1
12	A ($y = \frac{1}{3}x + 1$)	1
13	B ($f(x) = -3(x - 2)^2 - 2$)	1
14	B ($\frac{2\sqrt{2}}{3}$)	1
15	C ($D = \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3)$ i funkcja ma jedno miejsce zerowe)	1
16	B (4)	1
17	D ($a = 2$ lub $a = -4$)	1
18	A ($4\sqrt{5}$)	1
19	A ($x - 3y + 3 = 0$)	1
20	C ($4(\sqrt{3} + 1)$)	1
21	D (216°)	1
22	C ($P_c = \frac{3}{2} \cdot P_h$)	1
23	B (45°)	1
24	B (4)	1
25	B ($\frac{1}{4}$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Dany jest ułamek dziesiętny nieskończony okresowy $0,1(2345)$. Na setnym miejscu po przecinku znajduje się w nim cyfra:

Odpowiedź: C (4)

W okresie ułamka znajduje się wartość 2345, czyli nasz ułamek będzie wyglądał w ten oto sposób:

0,1234523452345...

Teraz do zadania można podejść na wiele sposobów (tak jak jest nam wygodniej). Przykładowo możemy dostrzec, że jak wypiszemy sobie 24 razy okres naszego ułamka (a okres składa się z czterech cyfr), to będziemy mieć $1 + 4 \cdot 24 = 97$ cyfr po przecinku. To by oznaczało, że dziewięćdziesiąt siódmą cyfrą po przecinku jest piątka, czyli dziewięćdziesiąt ósmą cyfrą będzie dwójka, dziewięćdziesiąt dziewiątą cyfrą będzie trójka, a setną cyfrą będzie czwórka.

Możemy też do zadania podejść w nieco inny sposób. Spójrzmy na to którymi cyframi po przecinku jest np. dwójka. Widzimy, że to będzie druga, szósta, dziesiąta, czternasta itd. cyfra po przecinku. Można więc powiedzieć, że począwszy od drugiej cyfry, to co czwarta cyfra po przecinku jest dwójką. Skoro co czwarta cyfra (począwszy od drugiej) jest dwójką, to i co czterdziesta będzie dwójką. To by oznaczało, że czterdziesta druga cyfra jest dwójką, tak jak i osiemdziesiąt druga także jest dwójką. Czyli osiemdziesiąt szósta, dziewięćdziesiąt, dziewięćdziesiąt czwarta i dziewięćdziesiąt ósma także są dwójkami. To prowadzi nas do wniosku, że dziewięćdziesiąt dziewiątą będzie trójka, a setną będzie czwórka.

Zadanie 2

0-1 pkt

Liczba przeciwna do liczby $\frac{(-2)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}}{(\sqrt{8})^6}$ jest równa:

Odpowiedź: A $\left(\frac{1}{2}\right)$

Krok 1. Obliczenie wartości liczby.

Obliczmy wartość naszej liczby, wykonując działania na potęgach. Tutaj dobrze jest od razu zamienić sobie podstawy poszczególnych potęg na takie, by były one równe 2. Całość będzie wyglądać następująco:

$$\frac{(-2)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}}{(\sqrt{8})^6} = \frac{(-2)^3 \cdot 2^5}{(2^{\frac{3}{2}})^6} = , = \frac{-1 \cdot 2^3 \cdot 2^5}{(2^{\frac{3}{2}})^6} = \frac{-1 \cdot 2^8}{2^{\frac{18}{2}}} = \frac{-1 \cdot 2^8}{2^9} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Krok 2. Wyznaczenie liczby przeciwnej.

Musimy jeszcze ustalić jaka jest liczba przeciwna do $-\frac{1}{2}$. Liczba przeciwna ma jak sama nazwa wskazuje - przeciwny znak, zatem liczbą przeciwną do ułamka $-\frac{1}{2}$ będzie $\frac{1}{2}$ i to jest nasza odpowiedź.

Zadanie 3

0-1 pkt

Cenę pewnego towaru podwyższono o 20%, następnie otrzymaną w ten sposób nową cenę obniżono o 20%. Cena końcowa jest:

Odpowiedź: C (o 4% niższa od ceny początkowej)

Rozpiszmy to sobie po kolei:

Cena początkowa: x

Teraz cena jest podwyższona o 20%, czyli nowa cena będzie stanowiła 120% ceny początkowej. Możemy zapisać, że:

Cena po podwyżce: $1,2 \cdot x = 1,2x$

Teraz cena jest obniżona o 20%, czyli nowa cena będzie stanowiła 80% ceny po pierwszej podwyżce (która była równa $1,2x$). Możemy zapisać, że:

Cena po obniżce: $0,8 \cdot 1,2x = 0,96x$

Skoro cena początkowa była równa x , a po podwyżce i obniżce jest równa ostatecznie $0,96x$, to widzimy wyraźnie, że cena spadła o $0,04x$, czyli o 4%.

Zadanie 4

0-1 pkt

Liczba $\frac{1}{\sqrt{3}-2} - \frac{1}{\sqrt{3}+2}$ jest równa:

Odpowiedź: C (-4)

To zadanie będzie najprościej rozwiązać obliczając oddzielnie wartość wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$ i oddzielnie wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$.

Krok 1. Obliczenie wartości wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$.

Zacznijmy od $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$. Musimy usunąć niewymierność z mianownika i to jest ten trudniejszy przypadek, gdzie w mianowniku nie mamy jedynie pierwiastka, a całe wyrażenie. W takiej sytuacji musimy pomnożyć licznik i mianownik przez wartość $\sqrt{3} + 2$ (uwaga na znak!), dzięki czemu w mianowniku ułamka skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Całość będzie wyglądać następująco:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2) \cdot (\sqrt{3}+2)} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}^2-2^2} = , = \frac{\sqrt{3}+2}{3-4} = \frac{\sqrt{3}+2}{-1} = -\sqrt{3}-2$$

Krok 2. Obliczenie wartości wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$.

Analogicznie jak przed chwilą, tutaj także musimy usunąć niewymierność z mianownika. Różnica jest tylko taka, że tym razem licznik i mianownik musimy pomnożyć przez $\sqrt{3} - 2$, zatem całość będzie wyglądać następująco:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2) \cdot (\sqrt{3}-2)} = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}^2-2^2} = , = \frac{\sqrt{3}-2}{3-4} = \frac{\sqrt{3}-2}{-1} = -\sqrt{3}+2$$

Krok 3. Obliczenie wartości całej liczby.

Korzystając z obliczeń dokonanych w pierwszym i drugim kroku możemy zapisać, że:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2} - \frac{1}{\sqrt{3}+2} = -\sqrt{3}-2 - (-\sqrt{3}+2) = -\sqrt{3}-2 + \sqrt{3}-2 = -4$$

Kwotę 5000zł ulokowano w banku na lokacie oprocentowanej 3% w stosunku rocznym, z odsetkami kapitalizowanymi co rok. Przy każdej kapitalizacji od odsetek pobiera się podatek w wysokości 19%. Kwota lokaty po dwóch latach wyniesie:

Odpowiedź: C $(5000 \cdot (1 + 0,81 \cdot 0,03)^2 \text{zł})$

Krok 1. Obliczenie kwoty lokaty (bez uwzględnienia podatku od odsetek).

W tym zadaniu skorzystamy ze wzoru na kapitalizację odsetek:

$$K_n = K \cdot (1 + p)^n$$

K_n to kwota po naliczeniu odsetek

K to kapitał początkowy

p to oprocentowanie w okresie pojedynczej kapitalizacji

n to liczba kapitalizacji

Problemem w tym zadaniu jest fakt, że ten wzór nie uwzględnia opodatkowania lokat. Spróbujmy zatem na razie pominąć ten aspekt podatku i wróćmy do niego na sam koniec obliczeń. Wypiszmy zatem najpierw to, co podstawimy do naszego wzoru na kapitalizację. Z treści zadania wynika, że:

$$K = 5000$$

$$p = 0,03$$

$$n = 2$$

Dlaczego $p = 0,03$?

Kapitalizacja odbywa się raz w roku, a oprocentowanie lokaty w skali roku wynosi 3%, stąd też właśnie $p = 0,03$: $1 = 0,03$. Tak na marginesie - gdyby kapitalizacja była półroczna, to odsetki kapitalizowane byłyby 2 razy w roku i wtedy oprocentowanie lokaty w okresie pojedynczej kapitalizacji wyniosłoby $p = 0,03 : 2 = 0,015$.

Dlaczego $n = 2$?

Lokata jest na 2 lata, a odsetki naliczane są co rok. W związku z tym w trakcie całej lokaty odsetki będą naliczone 2 razy.

Nie pozostaje nam nic innego jak podstawić poszczególne dane do wzoru, otrzymując:

$$K_2 = 5000 \cdot (1 + 0,03)^2 \text{zł}$$

Krok 2. Obliczenie kwoty lokaty (z uwzględnieniem podatku od odsetek).

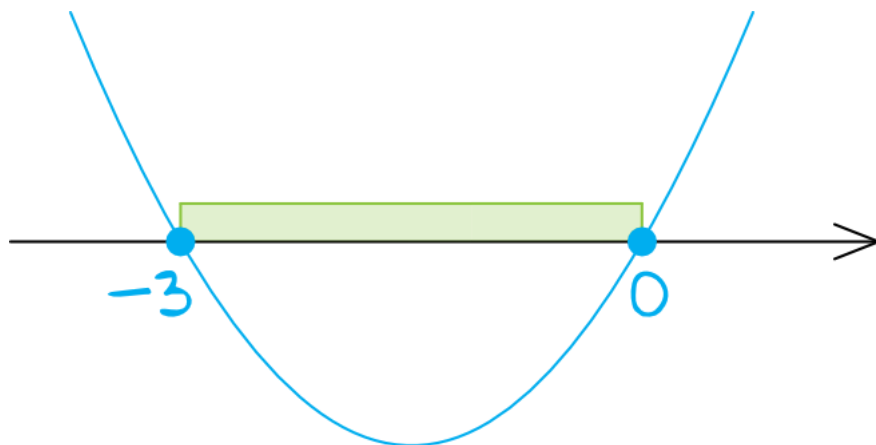
W tym zadaniu musimy jeszcze uwzględnić fakt występowania podatku od odsetek. Zapisany przed chwilą wzór musimy więc udoskonalić. Wiemy, że podatek wynosi 19%, czyli tak obrazowo rzecz ujmując - nasze realne oprocentowanie lokaty będzie przez ten podatek o prawie $\frac{1}{5}$ mniejsze. Po odjęciu tego podatku zostanie nam 81% odsetek, czyli realne oprocentowanie wyniesie $p = 0,81 \cdot 0,03$ i stąd też poprawnym zapisem będzie $5000 \cdot (1 + 0,81 \cdot 0,03)^2 \text{zł}$.

Zwróć też uwagę na to, że zapis podany w drugiej odpowiedzi jest na pewno błędny, bowiem tutaj naliczono podatek od całej kwoty lokaty, a nie jedynie od odsetek.

Zadanie 6

0-1 pkt

Zbiorem rozwiązań nierówności $2x \cdot (x + 3) \leq 0$ jest:



Odpowiedź: D $([-3, 0])$

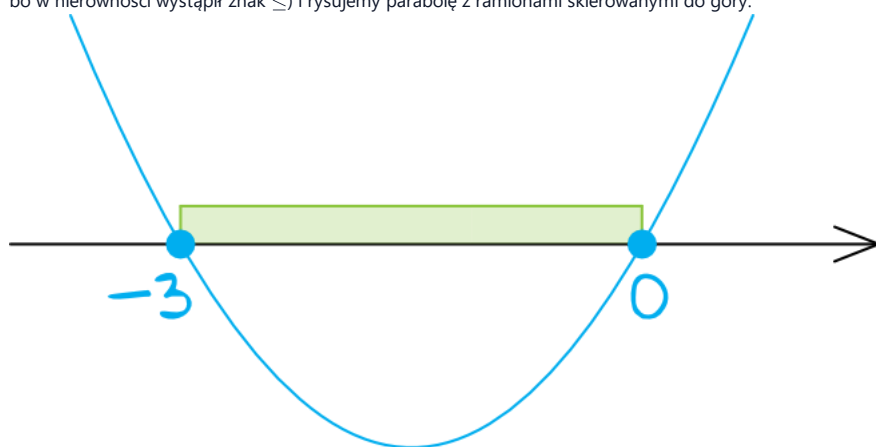
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Mamy klasyczną nierówność kwadratową, zatem rozwiązywanie zaczniemy od wyznaczenia miejsc zerowych. Musimy więc sprawdzić kiedy $2x \cdot (x + 3)$ jest równe 0. Możemy oczywiście pomnożyć $2x$ przez $x + 3$, otrzymując w ten sposób postać ogólną z której potem obliczymy deltę, ale to zadanie da się rozwiązać nieco szybciej, identycznie jak postać iloczynową. Aby wyrażenie $2x \cdot (x + 3)$ było równe 0, to albo $2x$ musi być równe 0, albo $x + 3$ musi być równe 0, zatem:

$$2x = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0, \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -3$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Musimy teraz określić kierunek ułożenia ramion paraboli. Gdybyśmy pomnożyli przez siebie wszystkie wartości po lewej stronie to otrzymalibyśmy wyrażenie $2x^2 + 6x$, czyli współczynnik kierunkowy a jest dodatni. Zaznaczamy więc wyznaczone przed chwilą miejsca zerowe $x = 0$ oraz $x = -3$ (kropki będą zamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $\leq$) i rysujemy parabolę z ramionami skierowanymi do góry.



Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Szukamy wartości mniejszych lub równych zero, czyli interesuje nas to co znalazło się pod osią i na osi. To oznacza, że rozwiązaniem tej nierówności jest przedział

$$x \in [-3, 0]$$

Zadanie 7

0-1 pkt

Układ równań liniowych $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -6x + ay = 3 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy:

Odpowiedź: A ($a = 9$)

Aby dowiedzieć się dla jakiego parametru a układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, musimy doprowadzić do sytuacji w której pierwsze i drugie równanie będą miały identyczną postać. W tym celu musimy np. pierwsze równanie pomnożyć obustronnie przez -3 . Całość będzie wyglądać następująco:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -6x + ay = 3 \end{cases} \quad \Bigg/ \cdot (-3) \quad ,$$

$$\begin{cases} -6x + 9y = 3 \\ -6x + ay = 3 \end{cases} \quad ,$$

Teraz jak porównamy sobie obydwa te równania (zwłaszcza to, co znalazło się przed igrekami) to zauważymy, że układ równań będzie tożsamościowy dla $a = 9$.

Zadanie 8

0-1 pkt

Równanie $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 5x) = 0$ ma:

Odpowiedź: D (cztery rozwiązania, których suma jest równa -5)

Choć nie jest to klasyczne równanie kwadratowe w postaci iloczynowej, to możemy je rozwiązać właśnie tak jak postać iloczynową, czyli przyrównując wartości w nawiasach do zera. Otrzymamy wtedy:

$$x^2 - 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 5x = 0, \quad x^2 = 1 \quad \vee \quad x(x + 5) = 0, \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \quad x + 5 = 0, \quad x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee$$

To oznacza, że nasze równanie ma cztery rozwiązania, a ich suma jest równa:

$$1 + (-1) + 0 + (-5) = -5$$

Zadanie 9

0-1 pkt

Liczba $a = 2,2$ jest przybliżeniem z nadmiarem liczby x . Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy $0,004$, gdy:

Odpowiedź: D ($x = 2,196$)

Krok 1. Zapisanie danych z treści zadania.

Błąd bezwzględny obliczamy korzystając ze wzoru $\Delta x = |x - p|$, gdzie:

Δx - błąd bezwzględny

x - dokładna wartość

p - przybliżona wartość

W naszym przypadku:

$$\Delta x = 0,004$$

$$p = 2,2$$

Krok 2. Obliczenie błędu bezwzględnego.

Korzystając z powyższych informacji błąd bezwzględny obliczymy w następujący sposób:

$$\Delta x = |x - p|, \quad 0,004 = |2,2 - x|$$

Teraz najtrudniejsza część zadania, czyli rozwiązanie równania z wartością bezwzględną. Wartość bezwzględna z $2,2 - x$ będzie równa $0,004$ wtedy, gdy $2,2 - x$ będzie równe $0,004$ lub też gdy będzie równe $-0,004$ (bo przecież $|-0,004|$ także jest równe $0,004$). Możemy więc zapisać, że:

$$2,2 - x = 0,004 \quad \vee \quad 2,2 - x = -0,004, \quad -x = -2,204 \quad \vee \quad -x = -2,196, \quad x = 2,204 \quad \vee \quad x = 2,196$$

Wyszło nam, że błąd bezwzględny będzie równy $0,004$ wtedy, gdy $x = 2,204$ lub też gdy $x = 2,196$. To jednak nie kończy naszego zadania, bowiem w treści zadania mamy jednak podaną jeszcze jedną kluczową informację z której musimy skorzystać. Wiemy, że przybliżenie $2,2$ jest przybliżeniem z nadmiarem (czyli wartość przybliżenia musi być większa niż wartość liczby x). To oznacza, że poszukiwaną przez nas liczbą będzie $x = 2,196$.

Zadanie 10

0-1 pkt

Przyjmijmy, że $\log 3 = a$. Wtedy:

Odpowiedź: D ($\log \frac{100}{27} = 2 - 3a$)

Kiedy logarytm nie ma zapisanej podstawy, to domyślnie podstawa jest równa 10. Możemy więc sobie dla lepszego zobrazowania zapisać, że $\log 3 = a$ to jest dokładnie to samo, co $\log_{10} 3 = a$. Oczywiście podstawy logarytmu równej 10 nie musimy zapisywać, ale chyba dzięki temu łatwiej będzie zrozumieć sposób rozwiązywania zadania. Z tego też względu w dalszych obliczeniach będziemy właśnie dopisywać sobie tę dziesiątkę. Jeżeli jednak czujesz się dość pewnie w logarytmach, to tę dziesiątkę możesz pominąć.

Wracając do naszego zadania, to patrząc się na odpowiedzi widzimy, że musimy obliczyć wartość $\log \frac{100}{27}$ (czyli $\log_{10} \frac{100}{27}$). Skorzystamy tutaj ze wzoru na różnicę logarytmów:

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

W naszym przypadku otrzymalibyśmy:

$$\log_{10} \left(\frac{100}{27} \right) = \log_{10} 100 - \log_{10} 27$$

Wartość $\log_{10} 100$ jest równa 2, ponieważ $10^2 = 100$.

Wartość $\log_{10} 27$ musimy rozpisać jako $\log_{10} 3^3$, co zgodnie z działaniami na logarytmach (po przesunięciu wykładnika potęgi na początek zapisu) będzie równe $3\log_{10} 3$. Wiemy, że $\log_{10} 3$ jest równe a , czyli $3\log_{10} 3$ to po prostu $3a$.

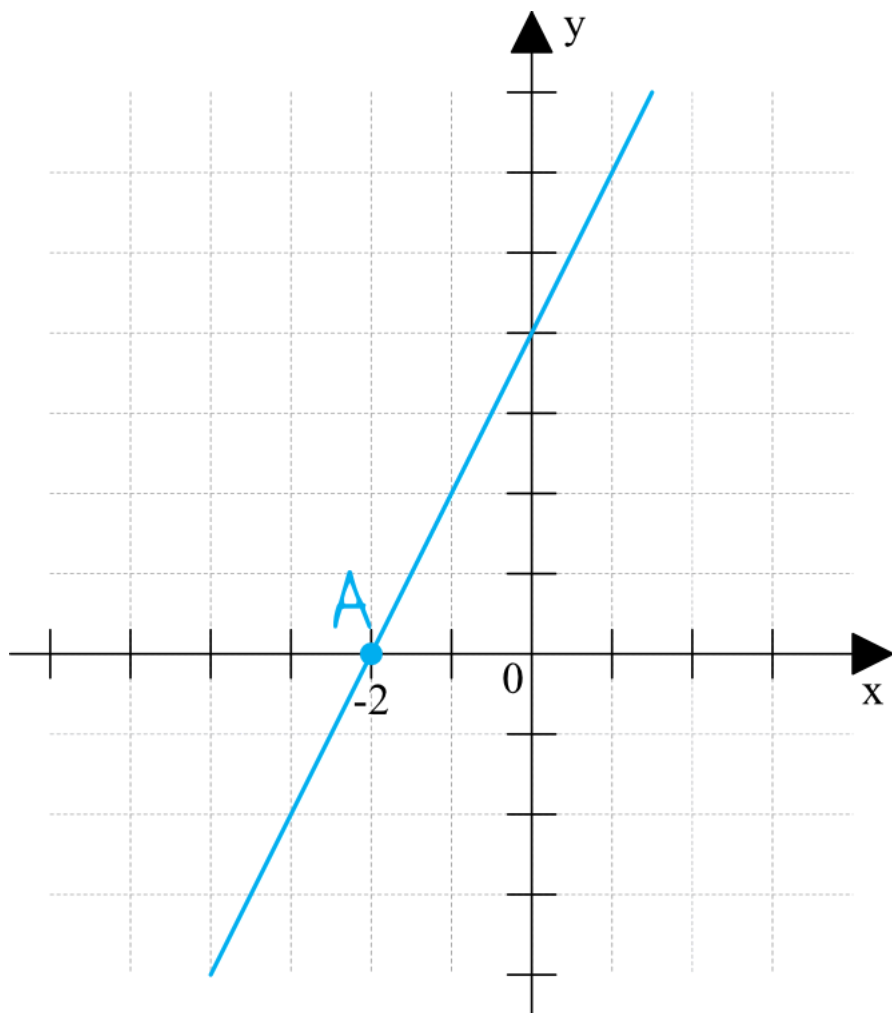
Całość będzie więc wyglądać następująco:

$$\log_{10} 100 - \log_{10} 27 = 2 - \log_{10} 3^3 = 2 - 3\log_{10} 3 = 2 - 3a$$

Zadanie 11

0-1 pkt

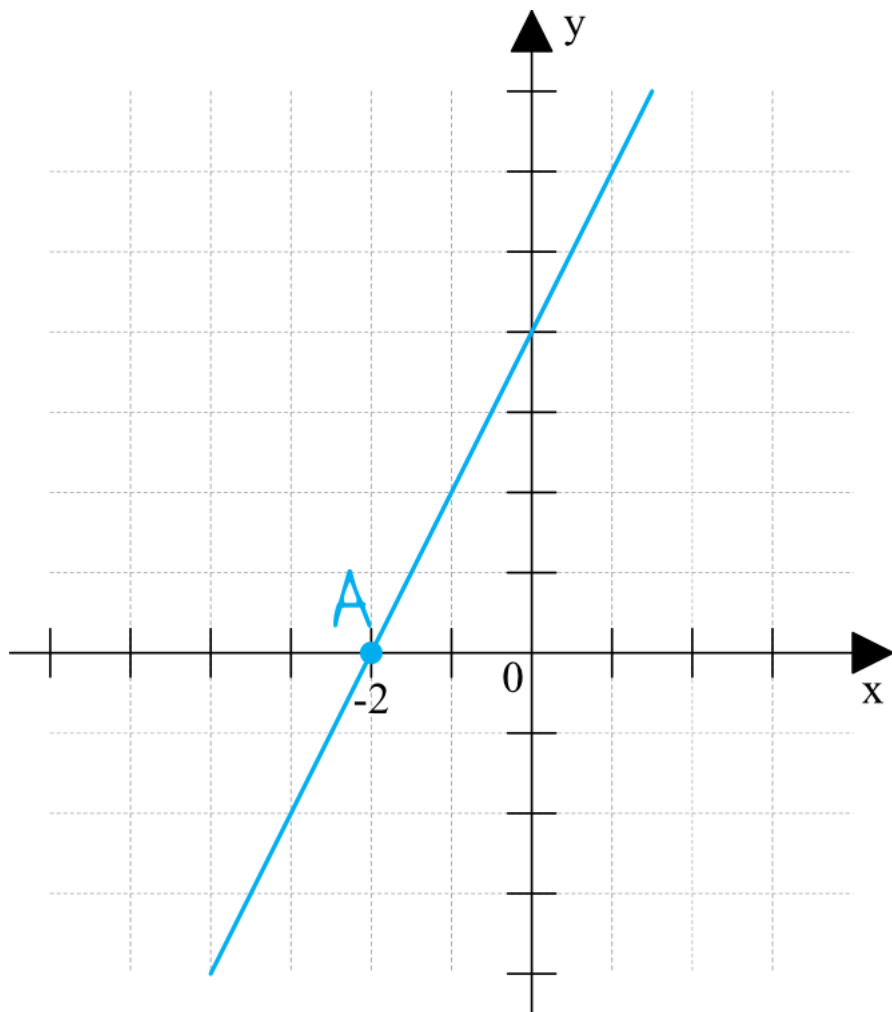
Funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = 2x + b$ osiąga wartości dodatnie tylko wtedy, gdy $x > -2$. Punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią OY to:



Odpowiedź: A $((0, 4))$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Z informacji o tym, że funkcja osiąga wartości dodatnie tylko wtedy, gdy x jest większy od -2 wynika, że nasza funkcja musi wyglądać mniej więcej w ten oto sposób:



To oznacza, że miejscem zerowym (czyli miejscem przecięcia się funkcji z osią x) jest punkt o współrzędnych $A = (-2; 0)$.

Krok 2. Wyznaczenie wartości współczynnika b .

We wzorze naszej funkcji $f(x) = 2x + b$ brakuje nam współczynnika b . Chcemy poznać wartość tego współczynnika, bowiem jedną z jego własności jest właśnie informowanie nas o miejscu przecięcia się funkcji z osią OY . Aby poznać wartość tego współczynnika, musimy do wzoru funkcji podstawić współrzędne znanego nam punktu - w naszym przypadku będą to współrzędne miejsca zerowego. Podstawiając więc współrzędne $A = (-2; 0)$ otrzymamy:

$$0 = 2 \cdot (-2) + b, \quad 0 = -4 + b, \quad b = 4$$

To oznacza, że pełnym wzorem naszej funkcji będzie $f(x) = 2x + 4$.

Krok 3. Wyznaczenie punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią OY .

Z własności współczynnika b wynika, że skoro $b = 4$, to funkcja przecina oś OY dla igreką równego 4, czyli w punkcie o współrzędnych $(0; 4)$.

Do tej samej informacji dojdziemy, gdy do wzoru podstawimy wartość $x = 0$:

$$f(0) = 2 \cdot 0 + 4, \quad f(0) = 0 + 4, \quad f(0) = 4$$

Skoro dla $x = 0$ funkcja przyjmuje wartość równą $y = 4$, to znaczy, że funkcja przechodzi przez punkt o współrzędnych $(0; 4)$ i to jest właśnie miejsce przecięcia się z osią OY .

Zadanie 12

0-1 pkt

W symetrii osiowej względem osi OY obrazem wykresu funkcji liniowej $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 1) + \frac{4}{3}$ jest prosta opisana równaniem:

Odpowiedź: A ($y = \frac{1}{3}x + 1$)

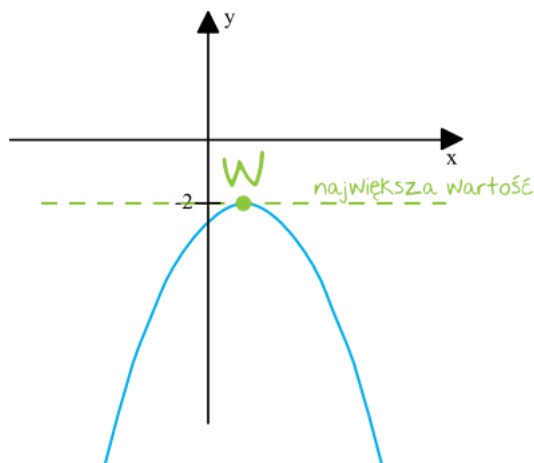
Aby poznać wzór funkcji przekształconej względem osi OY wystarczy we wzorze zmienić znak stojący przed iksem. W tym przypadku dodatkowo będziemy musieli jeszcze uprościć cały zapis, a całość będzie wyglądać następująco:

$$y = -\frac{1}{3}(-x + 1) + \frac{4}{3}, \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}, \quad y = \frac{1}{3}x + 1$$

Zadanie 13

0-1 pkt

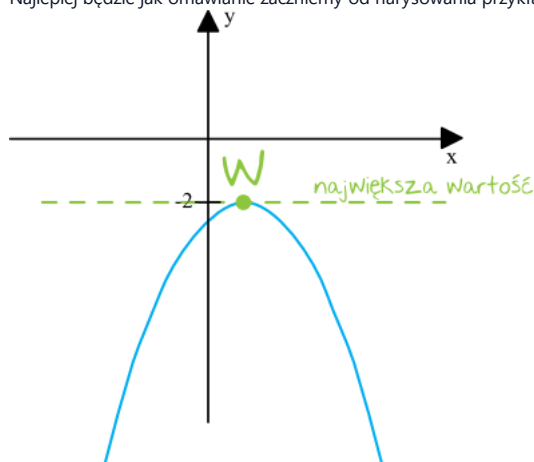
Wskaż wzór funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, -2]$.



Odpowiedź: B ($f(x) = -3(x - 2)^2 - 2$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Najlepiej będzie jak omawianie zaczniemy od narysowania przykładowej paraboli, której zbiór wartości jest taki jak podany w treści zadania:

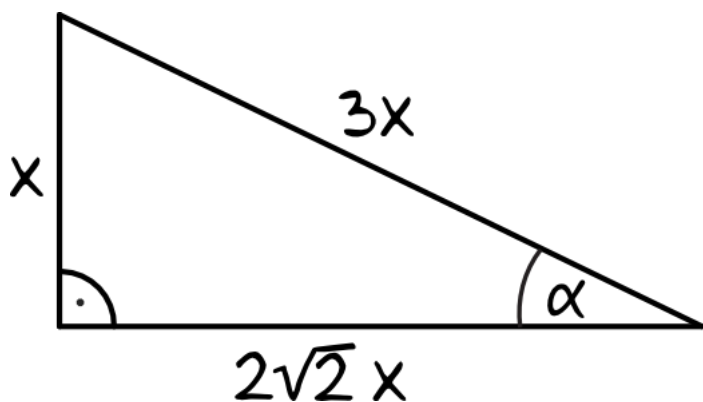


Krok 2. Ustalenie wzoru funkcji kwadratowej.

Zastanówmy się teraz (bazując na rysunku), co się musi stać, aby funkcja przyjmowała wartości w przedziale $(-\infty, -2]$. Widzimy wyraźnie, że nasza funkcja musi mieć ramiona skierowane do dołu i to jest pierwsza kluczowa informacja. To z kolei oznacza, że współczynnik a musi być ujemny, zatem z podanych w odpowiedziach funkcjach interesują nas już tylko funkcje B oraz C.

Widzimy też, że funkcja musi przyjmować w wierzchołku wartość równą -2 , czyli $q = -2$. Wszystkie nasze funkcje zapisane są w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$, zatem szukamy funkcji, która na samym końcu ma wartość -2 . Z racji tego, iż ograniczamy się już jedynie do wzoru z odpowiedzi B oraz C, to możemy być już pewni, że interesującą nas funkcją będzie ta z odpowiedzi B, czyli $f(x) = -3(x - 2)^2 - 2$, bo to ona jako jedyna ma ujemną wartość współczynnika a oraz $q = -2$.

W pewnym trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest trzy razy dłuższa od jednej z przyprostokątnych. Wartość cosinusa mniejszego kąta ostrego tego trójkąta jest równa:



Odpowiedź: B ($\frac{2\sqrt{2}}{3}$)

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń i obliczenie długości drugiej przyprostokątnej.

Skoro przeciwprostokątna jest trzy razy dłuższa od przyprostokątnej, to jedna przyprostokątna będzie mieć długość x , a przeciwprostokątna będzie mieć długość $3x$.

Aby za chwilę poprawnie umiejscowić nasz najmniejszy kąt ostry, to obliczmy jeszcze długość drugiej przyprostokątnej (która zresztą zaraz się przyda do wyznaczania wartości cosinusa). W tym celu skorzystamy oczywiście z Twierdzenia Pitagorasa, zatem:

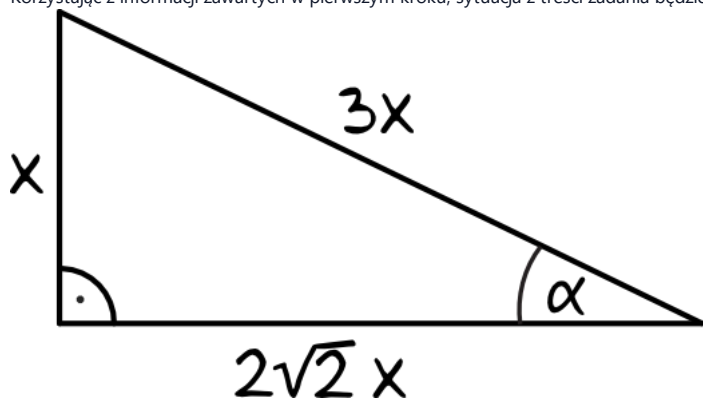
$$x^2 + b^2 = (3x)^2, \quad x^2 + b^2 = 9x^2, \quad b^2 = 8x^2, \quad b = \sqrt{8}x \quad \vee \quad b = -\sqrt{8}x$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $b = \sqrt{8}x$, co możemy jeszcze rozpisać jako

$$b = \sqrt{4 \cdot 2x} = 2\sqrt{2}x$$

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Korzystając z informacji zawartych w pierwszym kroku, sytuacja z treści zadania będzie więc wyglądać następująco:



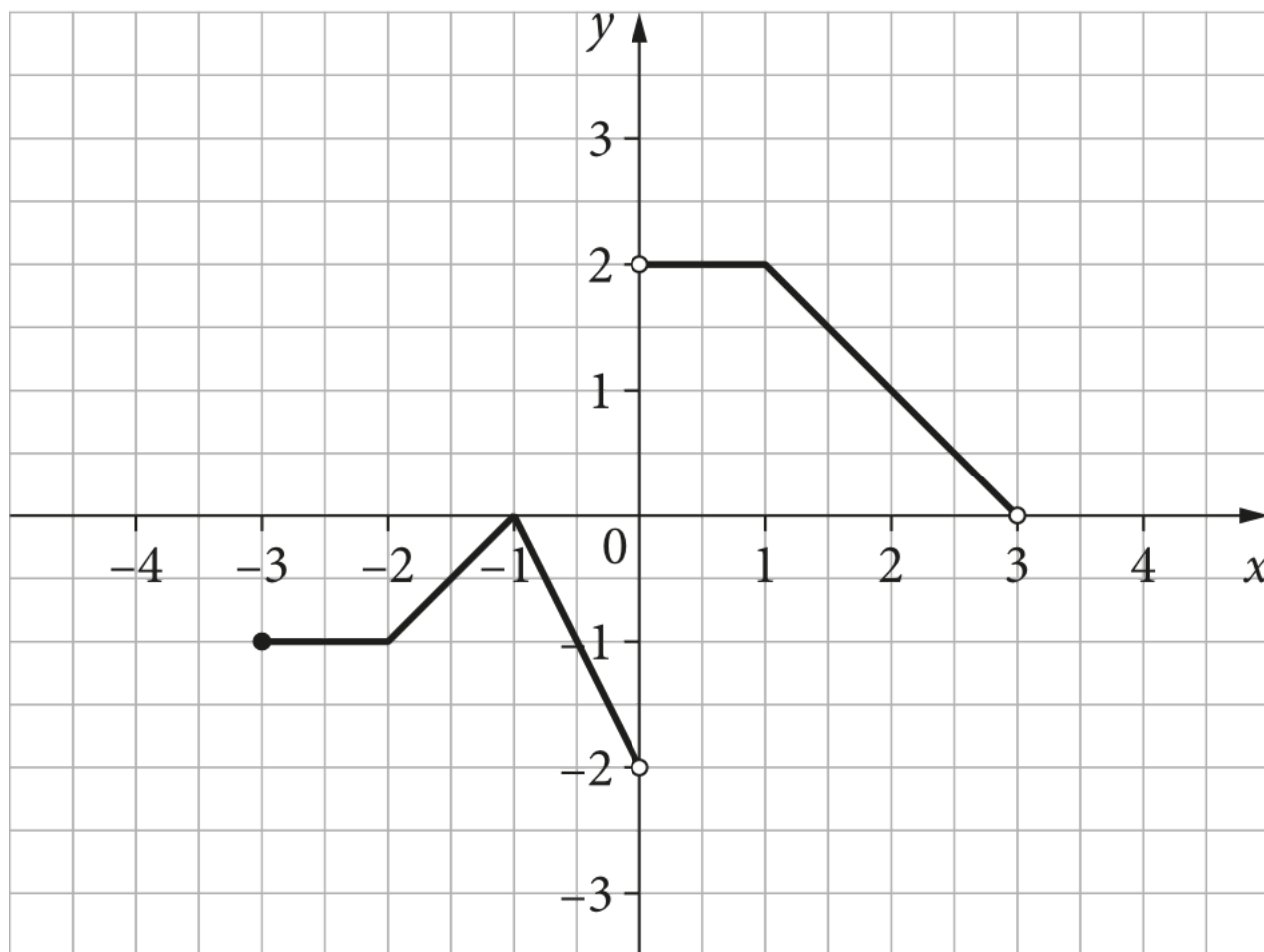
Szukamy wartości cosinusa mniejszego kąta ostrego i zwróć uwagę na to, że ten kąt musi znajdować się przy dłuższej przyprostokątnej.

Krok 3. Obliczenie wartości cosinusa mniejszego kąta ostrego.

Cosinus to stosunek długości przyprostokątnej znajdującej się przy interesującym nas kącie względem przeciwprostokątnej, zatem:

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}x}{3x}, \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Na rysunku dany jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór D .



Wskaż zdanie prawdziwe.

Odpowiedź: C ($D = \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3)$) i funkcja ma jedno miejsce zerowe

Krok 1. Ustalenie dziedziny funkcji.

Dziedzinę funkcji odczytujemy z osi x. Widzimy, że funkcja przyjmuje wartości dla argumentów od $x = -3$ aż do $x = 3$ (choć bez $x = 3$, bo kropka jest niezamalowana). Jednak jest tutaj zaszyta pewna mała pułapka, bowiem ta funkcja nie przyjmuje wartości dla $x = 0$ i my ten fakt przy zapisywaniu dziedziny musimy uwzględnić. Z tego też względu:

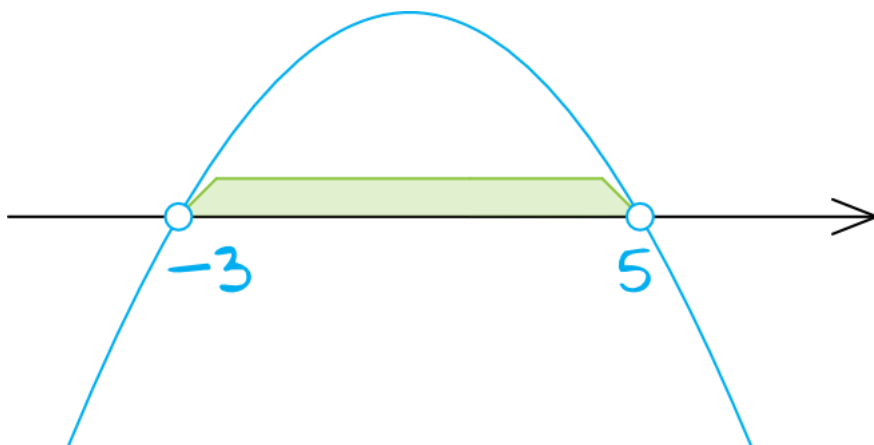
$$D = \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3)$$

Krok 2. Ustalenie liczby miejsc zerowych.

Miejsca zerowe to miejsca przecięcia się wykresu z osią x. Widzimy wyraźnie, że jest jedno takie miejsce dla $x = -1$. Zwróć też uwagę na to, że $x = 3$ nie jest miejscem zerowym, bo kropka jest tutaj niezamalowana.

Łącząc informacje z kroku pierwszego i drugiego widzimy wyraźnie, że prawidłowa jest trzecia odpowiedź.

Ciąg (a_n) dany jest wzorem $a_n = (5 - n) \cdot (n + 3)$ dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$. Liczba dodatnich wyrazów tego ciągu jest równa:



Odpowiedź: B (4)

Krok 1. Ułożenie nierówności kwadratowej.

Chcąc sprawdzić ile jest dodatnich wyrazów naszego ciągu musimy sprawdzić kiedy $(5 - n) \cdot (n + 3)$ jest większe od zera. To oznacza, że musimy rozwiązać następującą nierówność:

$$(5 - n) \cdot (n + 3) > 0$$

Krok 2. Rozwiązanie nierówności kwadratowej.

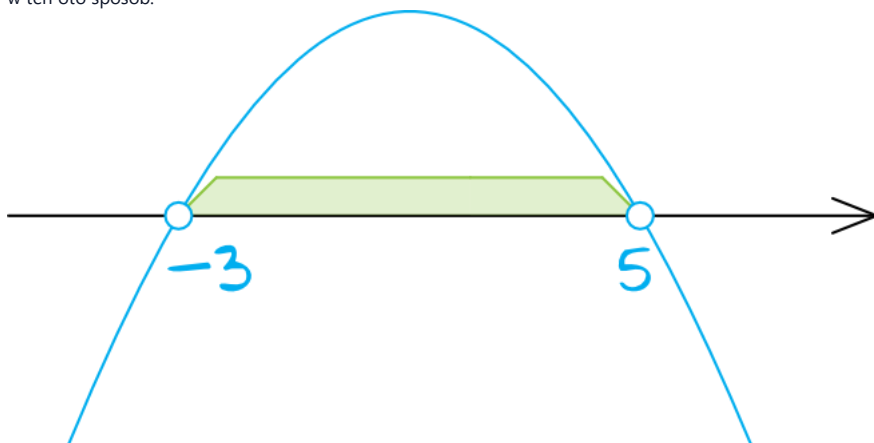
Powstała nam klasyczna nierówność kwadratowa, którą musimy teraz rozwiązać. Pierwszym krokiem ku temu jest tradycyjnie wyznaczenie miejsc zerowych, czyli sprawdzenie kiedy $(5 - n) \cdot (n + 3)$ jest równe 0. Oczywiście możemy wymnożyć przez siebie poszczególne nawiasy, otrzymując w ten sposób postać ogólną z której potem wyliczymy deltę, ale istnieje szybszy sposób na rozwiązanie tego przykładu. Aby $(5 - n) \cdot (n + 3)$ było równe 0, to albo wartość w tym pierwszym nawiasie jest równa 0, albo w tym drugim (dokładnie tak jak w postaci iloczynowej). Z tego też względu:

$$5 - n = 0 \quad \vee \quad n + 3 = 0, \quad n = 5 \quad \vee \quad n = -3$$

Teraz zaznaczamy te dwa miejsca zerowe na naszej osi liczbowej (kropki będą niezamalowane, bo w nierówności mamy znak $>$) i przystępujemy do rysowania paraboli. Musimy jeszcze tylko ustalić, czy ramiona paraboli będą skierowane do góry, czy do dołu. No i tu jest spora pułapka, bo ramiona paraboli będą skierowane do dołu, co najlepiej będzie widać, gdy wymnożymy przez siebie te dwa nawiasy:

$$(5 - n) \cdot (n + 3) = 5n + 15 - n^2 - 3n = -n^2 + 2n + 15$$

Przed n^2 mamy minusa, czyli współczynnik kierunkowy a jest ujemny. Stąd też ramiona paraboli muszą być skierowane do dołu. Nasz wykres będzie więc wyglądał w ten oto sposób:



Z wykresu wynika, że rozwiązaniem naszej nierówności kwadratowej jest przedział $n \in (-3; 5)$.

Krok 3. Interpretacja otrzymanego wyniku.

To jednak nie jest koniec zadania. Z własności ciągów wiemy, że n musi być liczbą naturalną, bo nie ma czegoś takiego jak np. "półtorazowy wyraz". To oznacza, że z przedziału $n \in (-3; 5)$ musimy jeszcze wyodrębnić liczby naturalne. W tym przedziale znajdują się cztery takie liczby: 1, 2, 3, 4 (piątka jest poza przedziałem, bo nawias nie jest domknięty), co matematycznie możemy zapisać jako $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. To oznacza, że tylko cztery wyrazy tego ciągu są liczbami dodatnimi - pierwszy, drugi, trzeci oraz czwarty.

Zadanie 17

0-1 pkt

Liczby: 1, $a + 1$, 9 w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny tylko wtedy, gdy:

Odpowiedź: D ($a = 2$ lub $a = -4$)

Krok 1. Zapisanie równania z wykorzystaniem własności ciągów geometrycznych

Z własności ciągów geometrycznych wynika, że dla trzech kolejnych wyrazów ciągu zachodzi następujące równanie:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

Podstawiając do tego wzoru nasze trzy wyrazy z treści zadania otrzymamy:

$$(a + 1)^2 = 1 \cdot 9$$

Teraz korzystając po lewej stronie ze wzoru skróconego mnożenia $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ możemy zapisać, że:

$$a^2 + 2a + 1 = 9, \quad a^2 + 2a - 8 = 0$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które teraz musimy rozwiązać. Równanie jest zapisane w postaci ogólnej, zatem z pomocą przyjdzie nam delta:

Współczynniki: $a = 1$, $b = 2$, $c = -8$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 - (-32) = 4 + 32 = 36, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$$

$$a_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 6}{2 \cdot 1} = \frac{-8}{2} = -4, \quad a_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 6}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Krok 3. Interpretacja otrzymanego rozwiązania.

Wyszło nam, że ciąg jest geometryczny, gdy $a = -4$ oraz gdy $a = 2$. Sprawdźmy zatem jak będą wyglądać nasze ciągi:

Gdy $a = -4$, to mamy ciąg 1, -3, 9, czyli powstał nam ciąg geometryczny niemonotoniczny.

Gdy $a = 2$, to mamy ciąg 1, 3, 9, czyli powstał nam ciąg geometryczny rosnący.

Obydwa przypadki są poprawne, zatem prawidłowa będzie ostatnia odpowiedź.

Zadanie 18

0-1 pkt

Okrąg o środku $S = (1, -2)$ przechodzi przez punkt $P = (-1, 2)$. Średnica tego okręgu ma długość:

Odpowiedź: A ($4\sqrt{5}$)

Krok 1. Obliczenie długości promienia okręgu.

Odległość od środka okręgu do jego krawędzi jest długością promienia. Można więc powiedzieć, że jak poznamy długość odcinka SP to będziemy znać promień tego okręgu. Tu z pomocą przyjdzie nam wzór na długość odcinka w układzie współrzędnych:

$$|SP| = \sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2}$$

Podstawiając współrzędne punktu $S = (1, -2)$ oraz $P = (-1, 2)$ otrzymamy:

$$|SP| = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - (-2))^2}, \quad |SP| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2}, \quad |SP| = \sqrt{4 + 16}, \quad |SP| = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

Krok 2. Obliczenie długości średnicy okręgu.

To jednak jeszcze nie jest koniec zadania, bo nas pytają nie o długość promienia, tylko o długość średnicy. Wiemy, że średnica jest dwa razy dłuższa od promienia, zatem:

$$d = 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

Prosta $y = -3x + 4$ jest prostopadła do prostej o równaniu:

Odpowiedź: A ($x - 3y + 3 = 0$)

Krok 1. Ustalenie współczynnika a prostej prostopadłej.

Aby dwie proste były względem siebie prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych a musi być równy -1 . Nasza pierwsza prosta ma współczynnik $a = -3$, zatem druga prosta musi mieć ten współczynnik równy $\frac{1}{3}$, bo $-3 \cdot \frac{1}{3} = -1$.

Krok 2. Przekształcenie wzorów funkcji do postaci kierunkowej.

Aby móc wybrać właściwą prostą, to wszystkie warianty w odpowiedziach A-D musimy zamienić na postać kierunkową, czyli postać $y = ax + b$. Krótko mówiąc, musimy doprowadzić do sytuacji w której po lewej stronie jest y , a po prawej jest cała reszta:

Odp. A.

$$x - 3y + 3 = 0, \quad 3y = x + 3, \quad y = \frac{1}{3}x + 1$$

I tak prawdę w tym miejscu moglibyśmy zakończyć to zadanie, bo otrzymaliśmy prostą, która ma $a = \frac{1}{3}$, zatem to jest na pewno prawidłowa odpowiedź do naszego zadania. Dla treningu możemy jeszcze przekształcić pozostałe odpowiedzi.

Odp. B.

$$-3x + y = 0, \quad y = 3x$$

Tutaj współczynnik $a = 3$, zatem ta prosta nas nie interesuje.

Odp. C.

$$3x + y = 0, \quad y = -3x$$

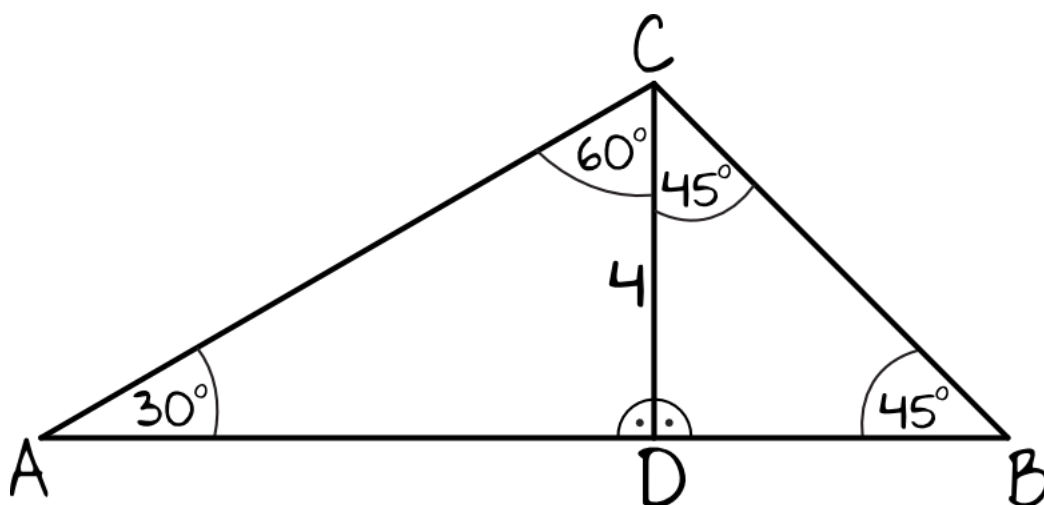
Tutaj współczynnik $a = -3$, zatem ta prosta nas nie interesuje.

Odp. D.

$$x + 3y = 0, \quad 3y = -x, \quad y = -\frac{1}{3}x$$

Tutaj współczynnik $a = -\frac{1}{3}$, zatem ta prosta nas nie interesuje.

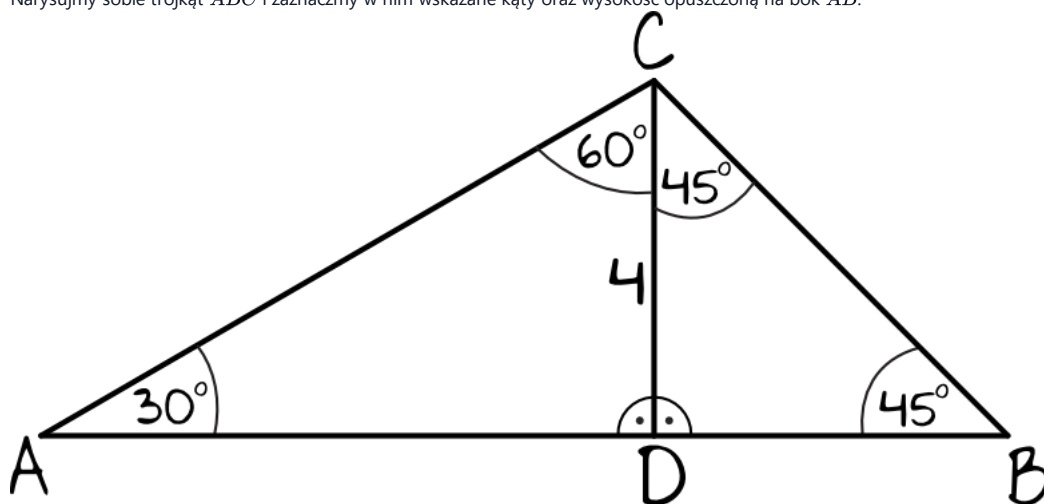
W trójkącie ABC kąty o wierzchołkach A i B mają - odpowiednio - miary 30° i 45° , a wysokość opuszczona na bok AB ma długość 4. Długość boku AB tego trójkąta wynosi:



Odpowiedź: C ($4(\sqrt{3} + 1)$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Narysujmy sobie trójkąt ABC i zaznaczmy w nim wskazane kąty oraz wysokość opuszczoną na bok AB :



Powinniśmy w tym momencie dostrzec, że powstały nam bardzo charakterystyczne trójkąty o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ oraz $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ i to właśnie korzystając z własności tych trójkątów obliczymy interesujące nas długości.

Krok 2. Obliczenie długości odcinka AD .

Spójrzmy na nasz rysunek i na trójkąt ADC . Jest to trójkąt o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Boczna przyprostokątna ma długość 4 i jest położona przy kącie o mierze 60° . Z własności takich trójkątów wynika, że ta dolna przyprostokątna będzie $\sqrt{3}$ razy większa, czyli $|AD| = 4\sqrt{3}$.

Krok 3. Obliczenie długości odcinka DB .

Teraz spójrzmy na trójkąt DBC . Jest to trójkąt o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Z własności takich trójkątów wynika, że obydwie przyprostokątne mają jednakową miarę, a to oznacza, że $|DB| = 4$.

Krok 4. Obliczenie długości odcinka AB .

Odcinek AB jest sumą długości AD oraz DB , zatem:

$$|AB| = 4\sqrt{3} + 4$$

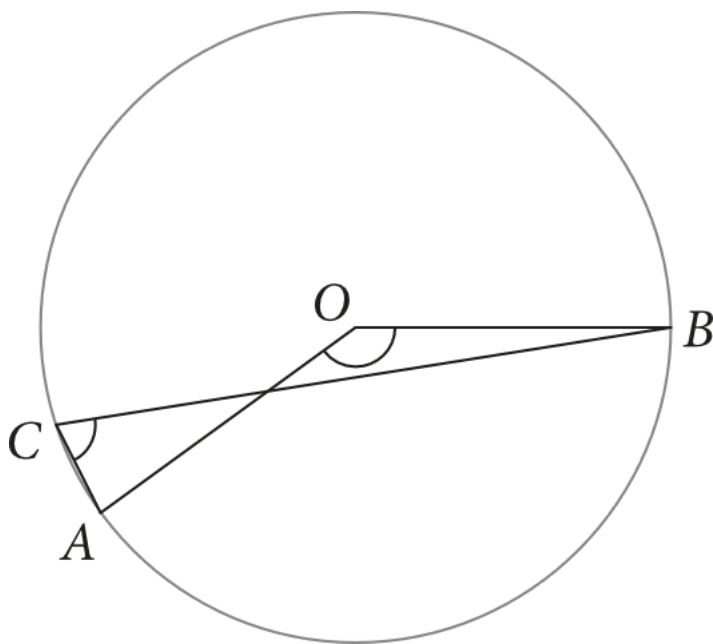
Takiej odpowiedzi nie mamy wśród proponowanych, ale widzimy po odpowiedziach, że musimy jeszcze wyłączyć czwórkę przed nawias, otrzymując:

$$|AB| = 4 \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

Zadanie 21

0-1 pkt

Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku O (jak na rysunku), przy czym krótszy z łuków AB stanowi $\frac{2}{5}$ okręgu.



Suma miar kątów AOB i ACB jest równa:

Odpowiedź: D (216°)

Krok 1. Obliczenie miary kąta AOB .

Kąt AOB jest kątem środkowym, opartym na łuku o długości $\frac{2}{5}$ obwodu okręgu. To oznacza, że miara tego kąta będzie stanowić $\frac{2}{5}$ miary kąta pełnego, zatem:

$$|\angle AOB| = \frac{2}{5} \cdot 360^\circ, \quad |\angle AOB| = 144^\circ$$

Krok 2. Obliczenie miary kąta ACB .

Choć może nie widać tego na pierwszy rzut oka (zwłaszcza że odcinek AC trochę zlewa się z krawędzią okręgu), to kąt ACB jest kątem wpisanym opartym dokładnie na tym samym łuku AB co nasz kąt środkowy AOB . Z własności kątów środkowych i wpisanych wiemy, że w takiej sytuacji miara naszego kąta wpisanego musi być dwa razy mniejsza od kąta środkowego, zatem:

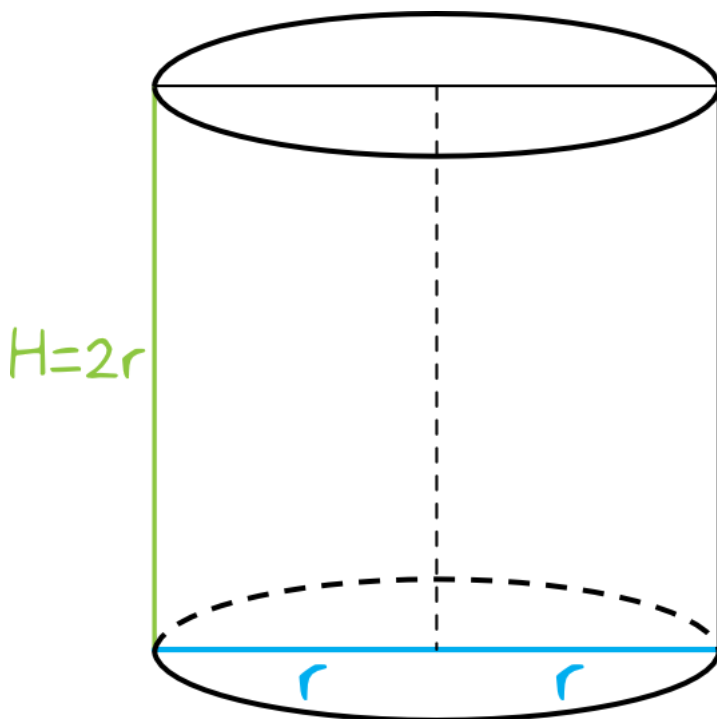
$$|\angle ACB| = 144^\circ : 2, \quad |\angle ACB| = 72^\circ$$

Krok 3. Obliczenie sumy miar kątów AOB oraz ACB .

Pytają się nas o to jaka jest suma tych dwóch analizowanych przed chwilą kątów, zatem odpowiedzią do tego zadania będzie:

$$144^\circ + 72^\circ = 216^\circ$$

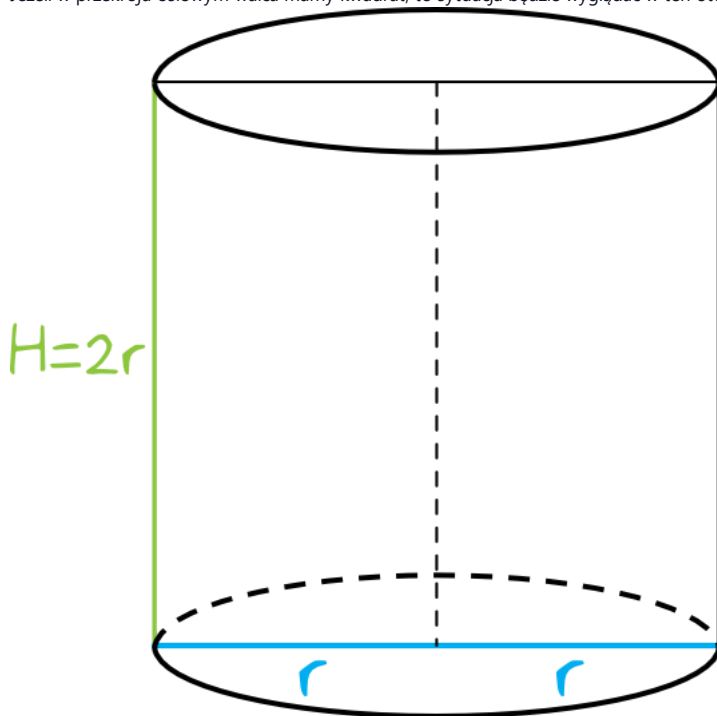
Przekrój osiowy walca jest kwadratem. Jeśli pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe P_c , a pole jego powierzchni bocznej jest równe P_b , to:



Odpowiedź: C ($P_c = \frac{3}{2} \cdot P_b$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Jeżeli w przekroju osiowym walca mamy kwadrat, to sytuacja będzie wyglądać w ten oto sposób:



Z rysunku wynika, że wysokość H będzie równa długości $2r$ i to będzie dla nas za chwilę klucz do rozwiązania tego zadania.

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni bocznej.

Pole powierzchni bocznej obliczymy ze wzoru:

$$P_b = 2\pi r H$$

Podstawiając pod H wartość $2r$ otrzymamy:

$$P_b = 2\pi r \cdot 2r, \quad P_b = 4\pi r^2$$

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni całkowitej.

Na pole powierzchni całkowitej składa się pole dwóch podstaw oraz pole powierzchni bocznej:

$$P_c = 2P_p + P_b$$

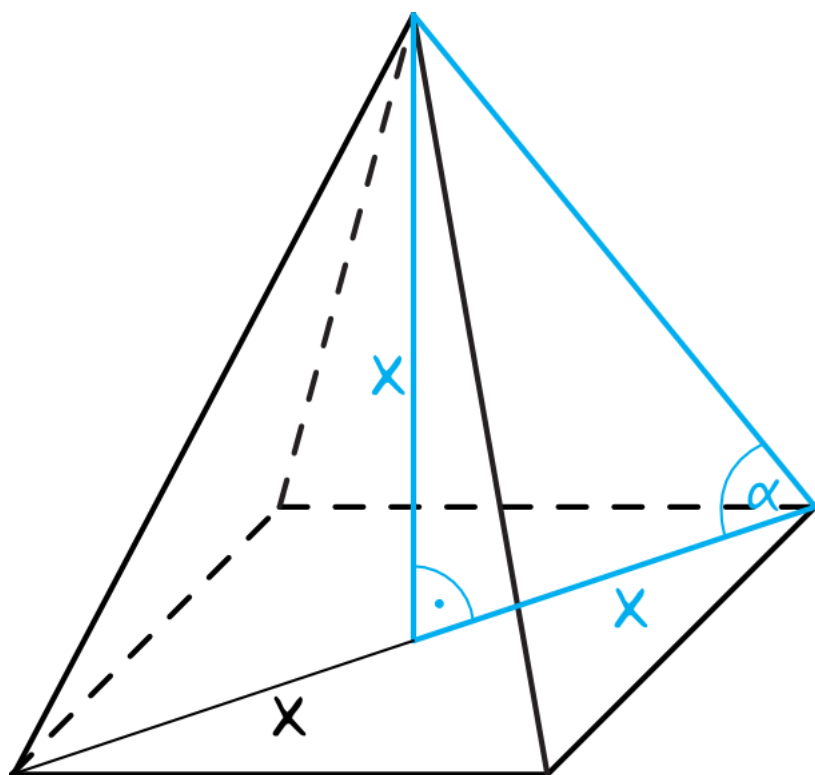
W podstawie (zarówno dolnej jak i górnej) znajduje się koło o promieniu r , zatem korzystając ze wzoru na pole koła możemy zapisać, że $P_p = \pi r^2$. Podstawiając tę wartość oraz wyznaczoną przed chwilą powierzchnię boczną otrzymamy:

$$P_c = 2 \cdot \pi r^2 + 4\pi r^2, \quad P_c = 6\pi r^2$$

Takiego konkretnego wyniku w proponowanych odpowiedziach nie mamy, ale skoro $P_b = 4\pi r^2$, to możemy zapisać, że:

$$P_c = \frac{3}{2} \cdot 4\pi r^2, \quad P_c = \frac{3}{2} \cdot P_b$$

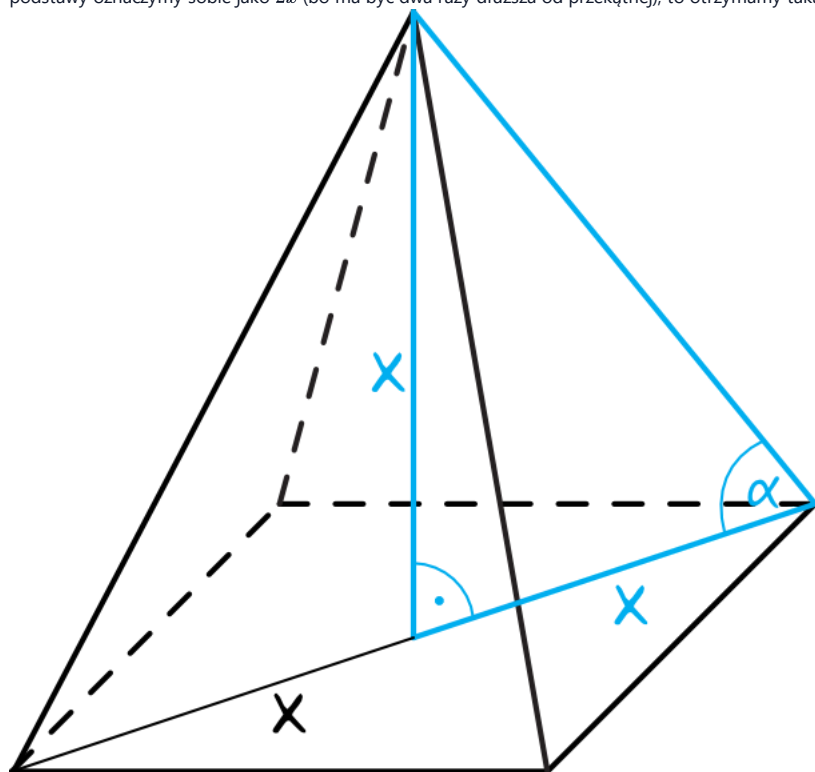
Przekątna podstawy ostrosłupa czworokątnego prawidłowego jest dwa razy dłuższa od jego wysokości. Kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy w tym ostrosłupie ma miarę:



Odpowiedź: B (45°)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Ostrosłup jest czworokątny prawidłowy, zatem w podstawie na pewno znajduje się kwadrat. Jeżeli wysokość ostrosłupa oznaczmy sobie jako x , a przekątną podstawy oznaczmy sobie jako $2x$ (bo ma być dwa razy dłuższa od przekątnej), to otrzymamy taką oto sytuację:



Widzimy wyraźnie, że połowa długości przekątnej podstawy, wysokość bryły oraz krawędź boczna tworzą trójkąt prostokątny z którego będziemy teraz obliczać interesujący nas kąt.

Krok 2. Obliczenie miary kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

Powinniśmy dostrzec, że przyprostokątne naszego trójkąta prostokątnego mają jednakową długość. To z kolei prowadzi nas do wniosku, że ten trójkąt jest

równoramienny, czyli że jest to klasyczny trójkąt o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$, bo tylko taki trójkąt jest jednocześnie prostokątny i równoramienny. Stąd też bez żadnych dodatkowych obliczeń możemy być pewni, że kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy 45° .

Zadanie 24

0-1 pkt

Średnia arytmetyczna zestawu sześciu danych: 2, 3, 4, 5, 6, x jest równa 4. Mediana tego zestawu wynosi:

Odpowiedź: B (4)

Krok 1. Obliczenie wartości x .

Korzystając z informacji o tym, że średnia arytmetyczna naszych sześciu liczb jest równa 4 możemy zapisać, że:

$$\frac{2+3+4+5+6+x}{6} = 4, \quad \frac{20+x}{6} = 4, \quad 20+x = 24, \quad x = 4$$

Krok 2. Obliczenie mediany.

Aby przystąpić do liczenia mediany musimy uporządkować nasze liczby w porządku niemalejącym (czyli od najmniejszej do największej):

$$2, 3, 4, 4, 5, 6$$

Mamy parzystą ilość liczb, zatem mediana będzie równa średniej arytmetycznej środkowych wyrazów. U nas środkowymi wyrazami są 4 oraz 4, zatem:

$$m = \frac{4+4}{2}, \quad m = \frac{8}{2}, \quad m = 4$$

Zadanie 25

0-1 pkt

W pewnej klasie liczba dziewcząt jest trzy razy większa od liczby chłopców. Z tej klasy wybieramy losowo jedną osobę. Prawdopodobieństwo wylosowania chłopca jest równe:

Odpowiedź: B ($\frac{1}{4}$)

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Bazując na informacjach z treści zadania możemy zapisać, że:

x - liczba chłopców

$3x$ - liczba dziewczyn

To z kolei oznacza, że wszystkich dzieci w tej klasie mamy $x + 3x = 4x$, czyli $|\Omega| = 4x$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

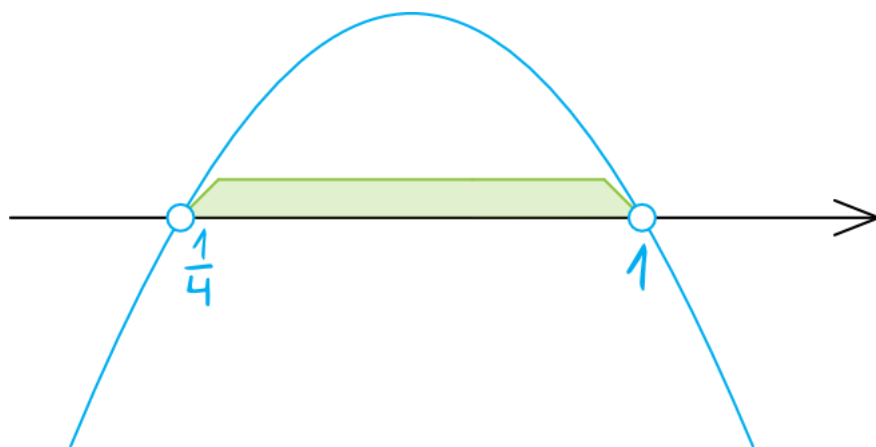
Sprzyjającym zdarzeniem jest wylosowanie chłopca. Wiemy, że mamy x chłopców, zatem możemy napisać, że $|A| = x$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

Wyznacz zbiór wszystkich argumentów x , dla których wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = -4x^2 + x + 5$ są większe od wartości funkcji g określonej wzorem $g(x) = -4x + 6$.



Odpowiedź: $x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$

Krok 1. Ułożenie nierówności kwadratowej.

Chcemy się dowiedzieć kiedy wartości funkcji $f(x)$ są większe od wartości funkcji $g(x)$, czyli chcemy sprawdzić kiedy:

$$f(x) > g(x), \quad -4x^2 + x + 5 > -4x + 6$$

Przenosząc teraz wyrazy na lewą stronę otrzymamy następującą sytuację:

$$-4x^2 + 5x - 1 > 0$$

Powstała nam więc klasyczna nierówność kwadratowa, którą teraz musimy rozwiązać.

Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Rozwiązanie nierówności zaczniemy od wyznaczenia miejsc zerowych. Musimy więc sprawdzić kiedy $-4x^2 + 5x - 1$ jest równe 0. Z pomocą przyjdzie nam tutaj oczywiście niezawodna delta:

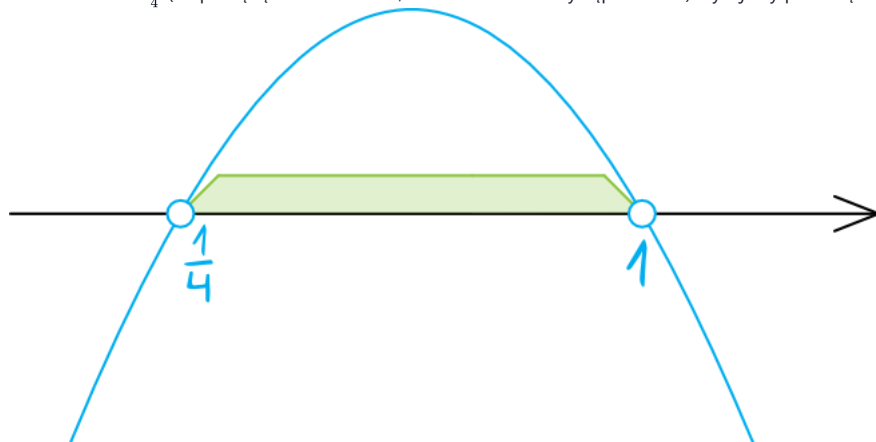
Współczynniki: $a = -4$, $b = 5$, $c = -1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1) = 25 - 16 = 9, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 3}{2 \cdot (-4)} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 3}{2 \cdot (-4)} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Współczynnik kierunkowy a jest ujemny, a to oznacza, że parabola będzie mieć ramiona skierowane do dołu. Zaznaczamy więc na osi wyznaczone miejsca zerowe $x = 1$ oraz $x = \frac{1}{4}$ (punkty będą niezamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $>$) i rysujemy parabolę:

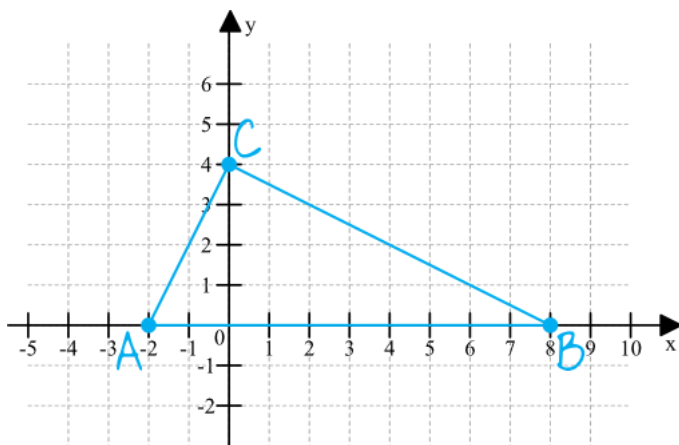


Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas wyniki większe od zera, zatem patrzymy się na to co znalazło się nad osią. Ze szkicu paraboli wynika, że w takiej sytuacji rozwiązaniem tej nierówności jest przedział:

$$x \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$$

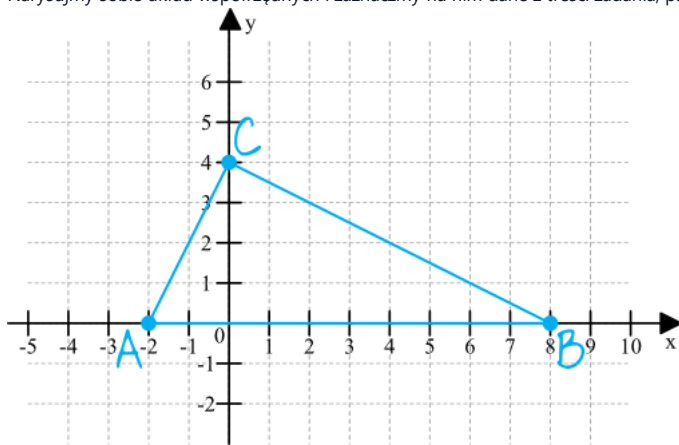
W trójkącie prostokątnym ABC dane są wierzchołki $A = (-2, 0)$ i $B = (8, 0)$. Punkt C jest wierzchołkiem kąta prostego tego trójkąta i leży na osi OY . Oblicz współrzędne wierzchołka C .



Odpowiedź: $C = (0; 4)$ lub $C =$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Narysujmy sobie układ współrzędnych i zaznaczmy na nim dane z treści zadania, pamiętając o tym, by punkt C znajdował się na osi OY :



I tu bardzo ważna obserwacja, która będzie kluczowa dla całego zadania - współrzędna xowa punktu C jest równa 0. Możemy sobie nawet zapisać, że $C = (0; y_C)$.

Krok 2. Obliczenie długości boków trójkąta ABC .

Obliczmy teraz długość każdego z boków naszego trójkąta ABC . Najprościej przyjdzie nam wyliczenie długości boku AB , bo tu od razu po rysunku szkiecowym widzimy, że obydwa te punkty są na osi x, więc nawet po krótkach jesteśmy w stanie stwierdzić, że $|AB| = 10$.

Teraz przystąpmy do liczenia trudniejszych boków, zaczynając od AC . Wiemy, że $A = (-2, 0)$ oraz $C = (0; y_C)$, zatem korzystając ze wzoru na długość odcinka możemy zapisać, że:

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}, |AC| = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (y_C - 0)^2}, |AC| = \sqrt{2^2 + y_C^2}, |AC| = \sqrt{4 + y_C^2}$$

Analogicznie obliczymy długość odcinka BC , wiedząc że $B = (8, 0)$ oraz $C = (0; y_C)$:

$$|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}, |BC| = \sqrt{(0 - 8)^2 + (y_C - 0)^2}, |BC| = \sqrt{(-8)^2 + y_C^2}, |BC| = \sqrt{64 + y_C^2}$$

Krok 3. Obliczenie współrzędnej y_C .

Mając rozpisanie wszystkie długości boków możemy teraz skorzystać z Twierdzenia Pitagorasa:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2, (\sqrt{4 + y_C^2})^2 + (\sqrt{64 + y_C^2})^2 = 10^2, 4 + y_C^2 + 64 + y_C^2 = 100, 2y_C^2 + 68 = 100, 2y_C^2 = 32, y_C^2 = 16, y_C = 4 \vee y_C =$$

Krok 4. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Otrzyaliśmy dwa możliwe rozwiązania i obydwa są prawidłowe. To oznacza, że istnieją dwie możliwości zapisania współrzędnych punktu C i będą to $C = (0; 4)$

lub $C = (0; -4)$. Można więc powiedzieć, że ten nasz trójkąt może wyglądać tak jak na rysunku szkicowym lub też może być odbiciem lustrzanym względem osi ix ów.

Zadanie 28

0-2 pkt

Doświadczenie losowe polega na jednoczesnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry i dwiema symetrycznymi monetami. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania na kostce liczby oczek podzielnej przez 3, a na monetach - co najmniej jednego orła.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{4}$

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Rzucając kostką możemy otrzymać jeden z sześciu wyników (od 1 do 6). Rzucając pojedynczą monetą możemy uzyskać jeden z dwóch wyników - orła lub reszkę. Skoro doświadczenie polega na rzucie kostką i dwiema monetami, to korzystając z reguły mnożenia możemy zapisać, że wszystkich zdarzeń elementarnych będziemy mieć:

$$|\Omega| = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$$

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Sprzyjającym zdarzeniem jest wylosowanie na kostce liczby podzielnej przez 3, a na monetach przynajmniej jednego orła. Rozpatrzmy więc to sobie po kolei. Jeżeli chcemy, aby na kostce wypadła liczba podzielna przez 3, to musi nam выпаść 3 lub 6. Mamy więc dwie możliwości.

Jeżeli chcemy, aby na monetach wypadł przynajmniej jeden orzeł, to interesują nas trzy warianty: (OR) , (RO) lub (OO) . Mamy więc takie trzy możliwości.

Korzystając więc z reguły mnożenia wyjdzie nam, że zdarzeń sprzyjających będziemy mieć:

$$|A| = 2 \cdot 3 = 6$$

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Zadanie 29

0-2 pkt

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi nierówność $x^2 + y^2 + 11 > 2x + 6y$.

Odpowiedź: Udowodniono korzysta

Na początek spróbujmy przenieść wszystkie wyrazy na lewą stronę, otrzymując:

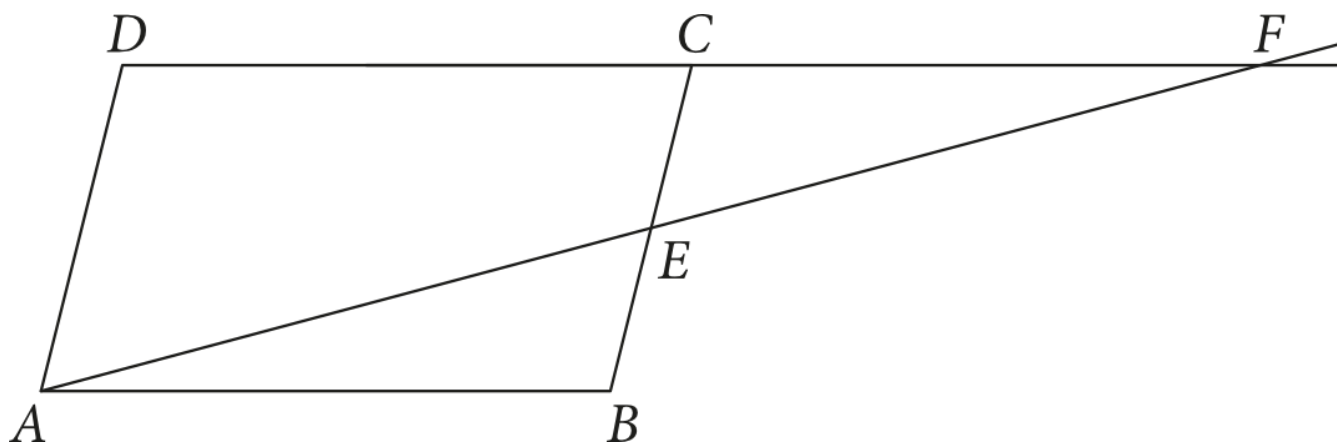
$$x^2 + y^2 + 11 - 2x - 6y > 0, \quad x^2 - 2x + y^2 - 6y + 11 > 0$$

Teraz najtrudniejsza część zadania, która nie ma co ukrywać - wymaga od nas sprawnego wykorzystywania wzorów skróconego mnożenia. Musimy zwinąć odpowiednie wyrazy w taki sposób, by otrzymać kwadrat sumy, czyli postać $(a + b)^2$ lub kwadrat różnicy, czyli postać $(a - b)^2$. Trudność tego zadania jest tym większa, że takiego "zwinienia" będziemy musieli dokonać dwukrotnie, a jakby tego było mało, to dodatkowo będziemy musieli rozbić liczbę 11 na sumę $9 + 1 + 1$. Całość będzie wyglądać następująco:

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y + 11 > 0, \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + 1 > 0, \quad (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) + 1 > 0, \quad (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 1 > 0$$

Wiemy, że jakakolwiek liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu daje wynik większy lub równy 0, stąd też na pewno $(x - 1)^2$ jest większe lub równe 0 oraz $(y - 3)^2$ jest także większe lub równe 0. Dodatkowe $+1$ sprawia, że wyrażenie po lewej stronie na pewno jest większe od zera i to należało właśnie udowodnić.

W równoległoboku $ABCD$ punkt E jest środkiem boku BC . Przez punkty A i E poprowadzono prostą przecinającą prostą DC w punkcie F (jak na rysunku). Uzasadnij, że pole równoległoboku $ABCD$ jest równe polu trójkąta AFD .



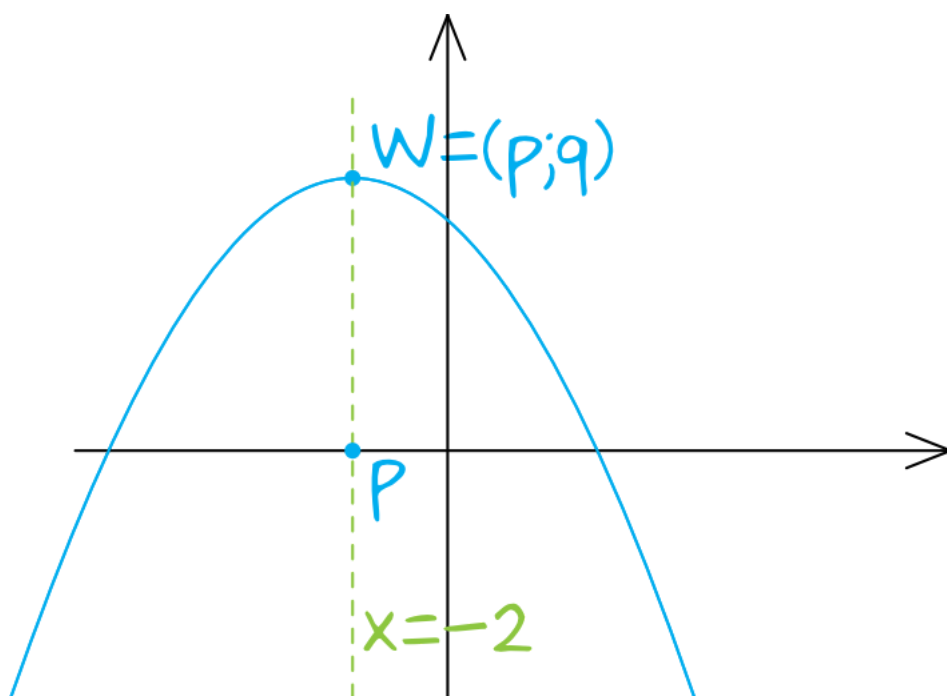
Odpowiedź: Udowodniono korzysta

Krok 1. Dostrzeżenie przystawiania trójkątów.

Powinniśmy dostrzec, że trójkąty ABE oraz EFC są przystające. Skąd to wiemy? Na pewno kąty AEB oraz CEF są jednakowej miary (bo są to kąty wierzchołkowe). Kąty EBA oraz ECF także są jednakowej miary, bo są to kąty naprzemianległe. Dodatkowo wiemy, że punkt E jest środkiem odcinka BC , czyli odcinek BE ma taką samą długość co CE .

Z tej powyższej analizy wynika, że w trójkątach ABE oraz EFC mamy dwie pary jednakowych kątów i jedną parę boków o jednakowej długości. Zgodnie więc z cechą kąt-bok-kąt jesteśmy w stanie stwierdzić, że te trójkąty są nie tylko podobne, ale wręcz przystające (czyli są to tak naprawdę jednakowe trójkąty). To z kolei oznacza, że trójkąt EFC ma jednakowe pole powierzchni co trójkąt ABE , stąd też właśnie duży trójkąt AFD ma jednakowe pole powierzchni, co równoległobok $ABCD$.

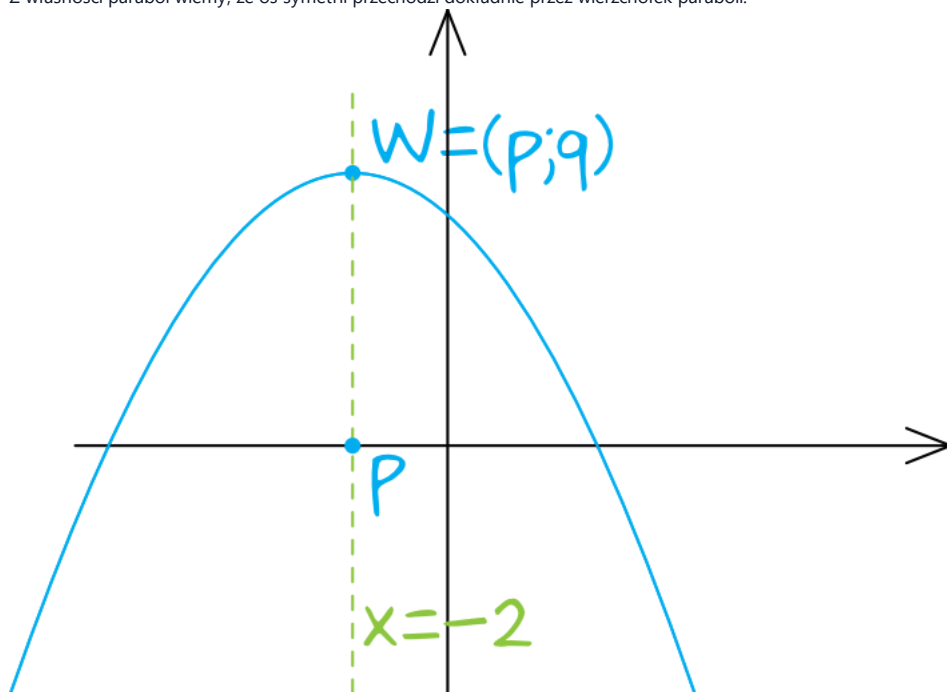
Prosta o równaniu $x = -2$ jest osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 - 8x + c$. Punkt $P = (2, 2)$ należy do wykresu tej funkcji. Wyznacz współczynniki a i c .



Odpowiedź: $a = -2$ oraz $c = 26$

Krok 1. Wyznaczenie współrzędnej p wierzchołka paraboli.

Z własności parabol wiemy, że oś symetrii przechodzi dokładnie przez wierzchołek paraboli.



To z kolei oznacza, że skoro prosta o równaniu $x = -2$ jest osią symetrii, to współrzędna p wierzchołka naszej paraboli będzie równa $p = -2$.

Krok 2. Obliczenie wartości współczynnika a .

Skorzystamy ze wzoru na współrzędną p wierzchołka paraboli, czyli ze wzoru $p = \frac{-b}{2a}$. Ze wzoru funkcji $f(x) = ax^2 - 8x + c$ możemy odczytać, że $b = 8$, zatem:

$$p = \frac{-b}{2a}, \quad -2 = \frac{-(-8)}{2a}, \quad -2 = \frac{8}{2a}, \quad -4a = 8, \quad a = -2$$

To oznacza, że nasza funkcja przyjmie postać $f(x) = -2x^2 - 8x + c$. Do pełnego wzoru brakuje nam jeszcze wartości współczynnika c .

Krok 3. Obliczenie wartości współczynnika c .

Do poznania wartości współczynnika c posłuży nam informacja o tym, że punkt $P = (2, 2)$ należy do wykresu tej funkcji. Podstawiając współrzędne tego punktu do wyznaczonej już w poprzednim kroku postaci wzoru ze współczynnikiem a otrzymamy:

$$f(x) = -2x^2 - 8x + c, \quad 2 = -2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + c, \quad 2 = -2 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + c, \quad 2 = -8 - 16 + c, \quad 2 = -24 + c, \quad c = 26$$

W treści zadania prosili nas o wyznaczenie współczynnika a oraz c , zatem możemy zapisać, że $a = -2$ oraz $c = 26$.

Zadanie 32

0-4 pkt

W ciągu ośmiu dni rowerzysta pokonał trasę 236 km . Poczynając od drugiego dnia, przejeżdżał codziennie o 3 km mniej niż w dniu poprzednim. Ile kilometrów przejechał pierwszego dnia, a ile - ósmego? Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: Pierwszego dnia: \4

Krok 1. Dostrzeżenie ciągu arytmetycznego.

Idea tego zadania polega na tym, by dostrzec iż mamy tutaj styczność z ciągiem arytmetycznym. Zapiszmy kluczowe parametry tego ciągu, które wynikają z treści zadania.

Skoro każdego dnia pokonywana trasa jest o 3 km krótsza, to na pewno $r = -3$. Wiemy też, że podróż trwała 8 dni, zatem $n = 8$. I na koniec możemy jeszcze zapisać, że suma tych wszystkich pokonanych tras przez 8 dni była równa 236 km , czyli że $S_8 = 236$.

Krok 2. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu ciągu arytmetycznego.

Aby obliczyć wartość pierwszego wyrazu, czyli a_1 , skorzystamy ze wzoru na sumę n -tych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Podstawiając do tego wzoru wypisane przed chwilą dane otrzymamy:

$$S_8 = \frac{2a_1 + (8-1) \cdot (-3)}{2} \cdot 8, \quad 236 = \frac{2a_1 + 7 \cdot (-3)}{2} \cdot 8, \quad 236 = \frac{2a_1 - 21}{2} \cdot 8, \quad 236 = (2a_1 - 21) \cdot 4, \quad 2a_1 - 21 = 59, \quad 2a_1 = 80, \quad a_1 = 40$$

To oznacza, że pierwszego dnia rowerzysta pokonał trasę 40 km .

Krok 3. Obliczenie wartości ósmego wyrazu ciągu arytmetycznego.

Musimy jeszcze obliczyć długość pokonanej trasy ósmego dnia. W tym celu pomoże nam wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

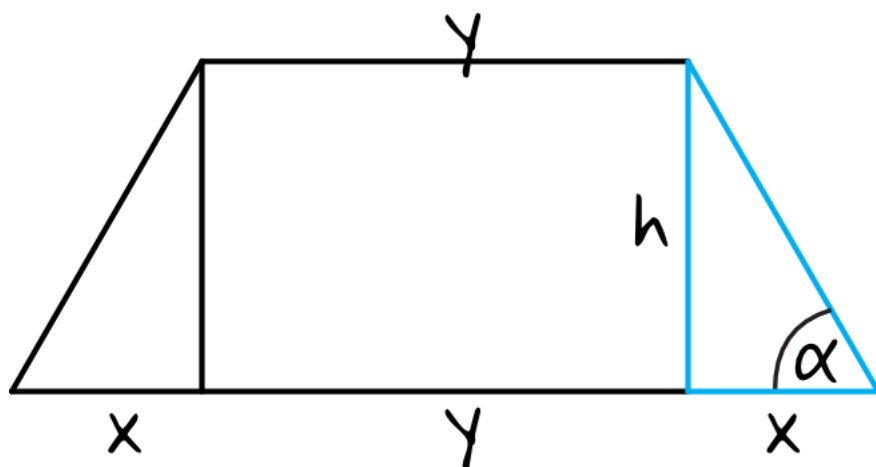
$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Podstawiając $a_1 = 40$, $r = -3$ oraz $n = 8$ (bo szukamy wartości ósmego wyrazu) otrzymamy:

$$a_8 = a_1 + (8-1)r, \quad a_8 = a_1 + 7r, \quad a_8 = 40 + 7 \cdot (-3), \quad a_8 = 40 - 21, \quad a_8 = 19$$

To oznacza, że ósmego dnia rowerzysta pokonał trasę 19 km .

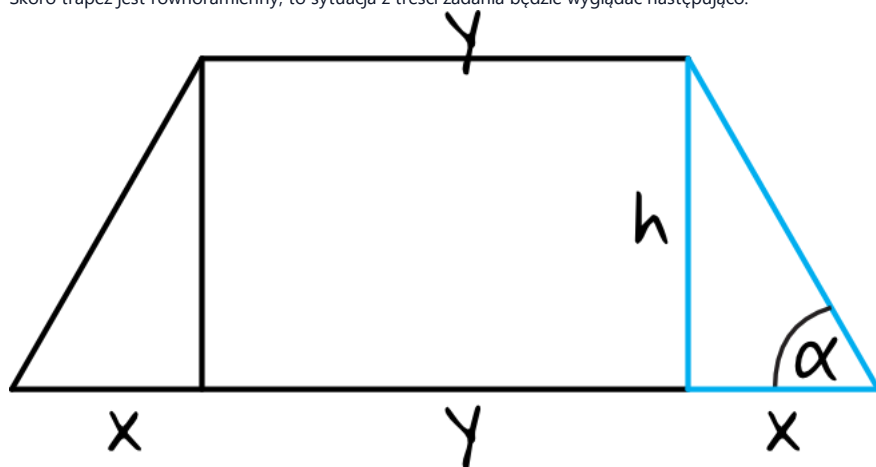
W trapezie równoramiennym suma długości podstaw wynosi 20. Pole tego trapezu jest równe 80, a tangens jego kąta ostrego wynosi $\frac{4}{3}$. Oblicz długości podstaw trapezu.



Odpowiedź: $a = 16$ oraz $b = 4$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Skoro trapez jest równoramienny, to sytuacja z treści zadania będzie wyglądać następująco:



Zwróć uwagę na to, że powstał nam trójkąt prostokątny, który tworzą kawałek dolnej podstawy, wysokość figury oraz ramię trapezu. To właśnie z tego trójkąta będziemy za chwilę korzystać obliczając interesujące nas długości boków.

Krok 2. Obliczenie wysokości trapezu.

Zanim skorzystamy z utworzonego trójkąta prostokątnego, to możemy obliczyć wysokość naszej figury. Korzystając ze wzoru na pole trapezu możemy zapisać, że:

$$P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h, 80 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot h, 80 = 10 \cdot h, h = 8$$

Krok 3. Obliczenie długości odcinka x .

Spójrzmy teraz na nasz rysunek pomocniczy, a konkretniej na ten nasz kluczowy trójkąt prostokątny. Wiemy już, że boczna przyprostokątna ma długość $h = 8$. Wiemy też, że $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, a skoro tangens odpowiada za stosunek długości przyprostokątnych, to błyskawicznie wyliczymy długość odcinka oznaczonego jako x :

$$\tan \alpha = \frac{h}{x}, \frac{4}{3} = \frac{8}{x}$$

Mnożąc na krzyż otrzymamy:

$$4 \cdot x = 3 \cdot 8, 4x = 24, x = 6$$

Krok 4. Obliczenie długości podstaw trapezu.

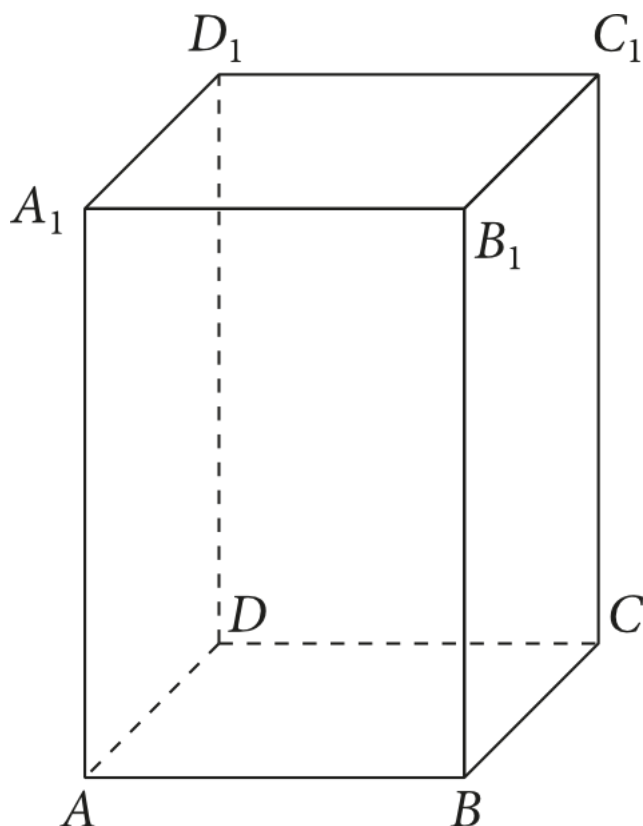
Dolną podstawę opisaliśmy sobie jako $a = 2x + y$, natomiast górną jako $b = y$. Skoro już wiemy, że $x = 6$, to tym samym w całym zapisie pojawi nam się już tylko jedna niewiadoma, bowiem dolną podstawę możemy już zapisać jako $a = 2 \cdot 6 + y = 12 + y$.

Wiemy, że suma podstaw musi być równa 20, zatem powstaje nam do rozwiązania proste równanie:

$$12 + y + y = 20, 12 + 2y = 20, 2y = 8, y = 4$$

To oznacza, że dolna podstawa ma długość $a = 12 + 4 = 16$, a górna podstawa ma długość $b = 4$.

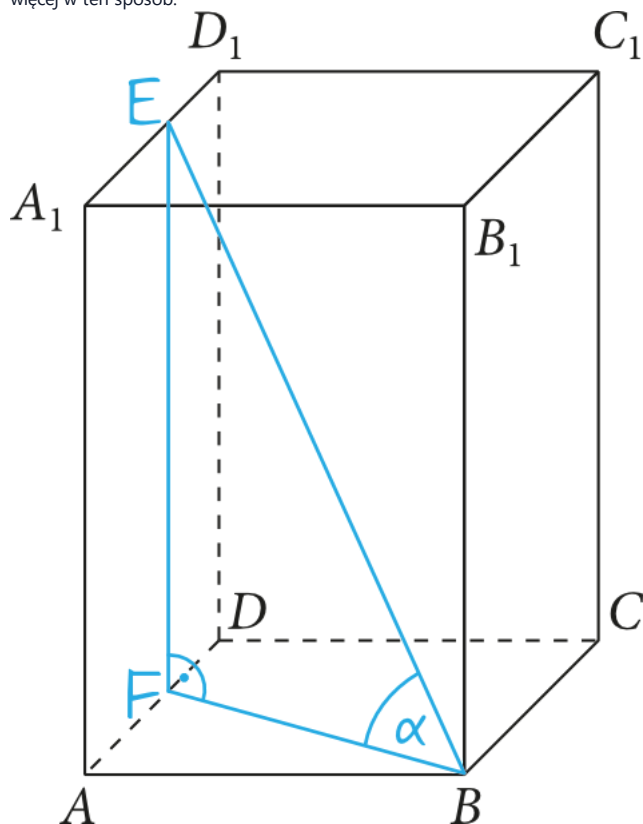
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o podstawach $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ (jak na rysunku) krawędź boczna jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy. Z wierzchołka B poprowadzono odcinek BE , którego koniec E jest środkiem krawędzi A_1D_1 . Długość BE jest równa $4\sqrt{41}$. Oblicz objętość graniastosłupa i wyznacz sinus kąta nachylenia odcinka BE do płaszczyzny podstawy graniastosłupa.



Odpowiedź: $V = 1536$ oraz $\sin \alpha$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Jeżeli wysokość graniastosłupa jest 3 razy większa od krawędzi podstawy, to całość po zaznaczeniu wszystkich informacji z treści zadania będzie wyglądać mniej więcej w ten sposób:



Krok 2. Obliczenie długości odcinka FB .

Spójrzmy na trójkąt prostokątny ABF , który znalazł się w podstawie naszej bryły. Dolna przyprostokątna tego trójkąta ma długość a , boczna przyprostokątna ma długość $\frac{1}{2}a$, zatem korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = |FB|^2, \quad a^2 + \frac{1}{4}a^2 = |FB|^2, \quad |FB|^2 = \frac{5}{4}a^2, \quad |FB| = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} \quad \vee \quad |FB| = -\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

Ujemny wynik odrzucamy, bo długość odcinka BF jest na pewno dodatnia, zatem zostaje nam $|FB| = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Teoretycznie moglibyśmy uprościć jeszcze ten zapis (otrzymując ostateczną postać $|FB| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$), ale nie ma takiej potrzeby, bo za chwilę będziemy i tak podnosić tę wartość do kwadratu.

Krok 3. Obliczenie długości krawędzi podstawy.

Spójrzmy teraz na trójkąt prostokątny FBE . Wyliczyliśmy przed chwilą, że $|FB| = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. Wiemy, że $|FE| = 3a$. Dodatkowo znamy też miarę przeciwprostokątnej, bowiem $|BE| = 4\sqrt{41}$. Korzystając więc z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$\left(\sqrt{\frac{5}{4}a^2}\right)^2 + (3a)^2 = (4\sqrt{41})^2, \quad \frac{5}{4}a^2 + 9a^2 = 16 \cdot 41, \quad \frac{41}{4}a^2 = 656, \quad 41a^2 = 2624, \quad a^2 = 64, \quad a = 8 \quad \vee \quad a = -8$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $a = 8$.

Krok 4. Obliczenie objętości graniastosłupa.

Wiemy już, że w podstawie graniastosłupa jest kwadrat o boku $a = 8$. Wiemy też, że wysokość jest równa $3a$, zatem $H = 3 \cdot 8 = 24$. Możemy więc bez przeszkód obliczyć objętość naszego graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot H, \quad V = 8 \cdot 8 \cdot 24, \quad V = 1536$$

Krok 5. Obliczenie sinusa kąta α .

Na koniec musimy jeszcze poprawnie obliczyć wartość sinusa naszego kąta α . W tym celu spoglądamy na trójkąt prostokątny FBE . Sinus to długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta (czyli u nas FE , która jest wysokością graniastosłupa) względem przeciwprostokątnej (czyli u nas BE). Możemy zatem zapisać, że:

$$\sin \alpha = \frac{|FE|}{|BE|}, \quad \sin \alpha = \frac{24}{4\sqrt{41}}, \quad \sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{41}}, \quad \sin \alpha = \frac{6 \cdot \sqrt{41}}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{41}}, \quad \sin \alpha = \frac{6\sqrt{41}}{41}$$