

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Nowa Era 2019

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D $(-4 + 2\sqrt{3})$	1
2	C $(\frac{1}{5})$	1
3	B $(5 - 3\sqrt{2})$	1
4	D $(3000 \cdot (1 + \frac{1}{100})^6 \text{ zł})$	1
5	B $(\{-3\})$	1
6	A $(8x^2 - 8y^2)$	1
7	A (nie ma rozwiązania)	1
8	B (0)	1
9	A $(\frac{12}{13})$	1
10	B $(2p - 2 = \log \frac{1}{4})$	1
11	A $(y = -2x + 7)$	1
12	D $(b = -6)$	1
13	C $(y = -2 \cdot (x + 3)^2 + 4)$	1
14	C (8)	1
15	A $((-2, 2))$	1
16	B (-4)	1
17	D (-3)	1
18	C (3)	1
19	D $(y = -\frac{1}{2}x - 2)$	1
20	A $(36\sqrt{2}\text{cm}^2)$	1
21	B (40°)	1
22	B (5)	1
23	C (30)	1
24	D $(\frac{5}{36})$	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Liczba przeciwna do liczby $(1 - \sqrt{3})^2$ jest równa:

Odpowiedź: D $(-4 + 2\sqrt{3})$

Krok 1. Obliczenie wartości liczby.

Zanim wyznaczymy liczbę przeciwną to wykonajmy potęgowanie, które znalazło się w naszej liczbie. Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ możemy zapisać, że:

$$(1 - \sqrt{3})^2 = 1^2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$$

Krok 2. Wyznaczenie liczby przeciwnej.

Liczbę przeciwną tworzymy zmieniając znak naszej liczby, czyli tak naprawdę stawiając minusa z przodu. Ważne jest to, żeby postawić minusa nie tylko przed pierwszą liczbą (czyli przed czwórką), tylko przed całym wyrażeniem. Skoro tak, to liczbą przeciwną będzie:

$$-(4 - 2\sqrt{3}) = -4 + 2\sqrt{3}$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Liczba odwrotna do liczby $\frac{(5^{1,2})^3 \cdot \sqrt{5}^{0,8}}{5^3}$ jest równa:

Odpowiedź: C ($\frac{1}{5}$)

Krok 1. Obliczenie wartości liczby.

Na początek musimy wykonać potęgowanie, tak aby uprościć cały zapis. Stosując działania na potęgach otrzymamy:

$$\frac{(5^{1,2})^3 \cdot \sqrt{5}^{0,8}}{5^3} = \frac{5^{1,2 \cdot 3} \cdot (5^{\frac{1}{2}})^{0,8}}{5^3} = \frac{5^{3,6} \cdot 5^{0,4}}{5^3} = \frac{5^{3,6+0,4}}{5^3} = \frac{5^4}{5^3} = 5$$

Krok 2. Wyznaczenie liczby odwrotnej.

Liczbę 5 możemy zapisać jako $\frac{5}{1}$. Liczba odwrotna powstaje po zamianie miejscami licznika z mianownikiem, zatem liczbą odwrotną do 5 będzie $\frac{1}{5}$ i to jest poszukiwana przez nas odpowiedź.

Zadanie 3

0-1 pkt

Wartość bezwzględna liczby $3\sqrt{2} - 5$ jest równa:

Odpowiedź: B ($5 - 3\sqrt{2}$)

Krok 1. Ustalenie, czy liczba pod nawiasami bezwzględności jest dodatnia czy ujemna.

Naszym zadaniem jest obliczenie wartości $|3\sqrt{2} - 5|$. Aby opuścić nawiasy bezwzględności musimy najpierw ustalić, czy liczba z której wyznaczamy wartość bezwzględną jest dodatnia, czy też ujemna. Jeżeli wartość w nawiasie bezwzględności jest dodatnia, to opuszczając nawias nie zmieniamy znaku np. $|5| = 5$. Jeżeli wartość w nawiasie jest ujemna, to opuszczając nawias wartości bezwzględnej musimy zmienić znak liczby np. $|-5| = 5$ (i na tym właśnie polega cała trudność tego zadania). Sprawdźmy zatem jaką wartość znalazła się w naszych nawiasach.

Przyjmując przybliżenie $\sqrt{2} \approx 1,41$ wyjdzie nam, że:

$$3\sqrt{2} - 5 \approx 3 \cdot 1,41 - 5 \approx 4,23 - 5 \approx -0,77$$

Krok 2. Obliczenie wartości bezwzględnej.

Liczba pod nawiasami bezwzględności wyszła nam ujemna, zatem opuszczając nawiasy musimy zmienić znaki na przeciwne. W związku z tym:

$$|3\sqrt{2} - 5| = -(3\sqrt{2} - 5) = -3\sqrt{2} + 5 = 5 - 3\sqrt{2}$$

Zadanie 4

0-1 pkt

Kwotę 3000zł ulokowano w banku na lokacie oprocentowanej 2% w stosunku rocznym, przy czym odsetki są kapitalizowane co pół roku (nie uwzględniamy podatku od odsetek kapitałowych). Po trzech latach stan tej lokaty wyniesie:

Odpowiedź: D ($3000 \cdot (1 + \frac{1}{100})^6$ zł)

W tym zadaniu skorzystamy ze wzoru na kapitalizację odsetek:

$$K_n = K \cdot (1 + p)^n$$

K_n to kwota po naliczeniu odsetek

K to kapitał początkowy

p to oprocentowanie w okresie pojedynczej kapitalizacji

n to liczba kapitalizacji

Z treści zadania wynika, że:

$$K = 3000$$

$$p = 0,02 : 2 = 0,01 = \frac{1}{100}$$

$$n = 3 \cdot 2 = 6$$

Dlaczego $p = \frac{1}{100}$?

Oprocentowanie lokaty w skali roku wynosi 2%, czyli 0,02. Gdyby lokata była kapitalizowana raz w roku, to wtedy $p = 0,02$. Jednak nasza lokata jest kapitalizowana 2 razy w roku (co pół roku), zatem na każdy okres kapitalizacji przypada nam oprocentowanie rzędu $p = 0,02 : 2 = 0,01 = \frac{1}{100}$.

Dlaczego $n = 6$?

Lokata jest na 3 lata, a odsetki naliczane są co pół roku czyli 2 razy w roku. W związku z tym w trakcie całej lokaty odsetki będą naliczone $3 \cdot 2 = 6$ razy.

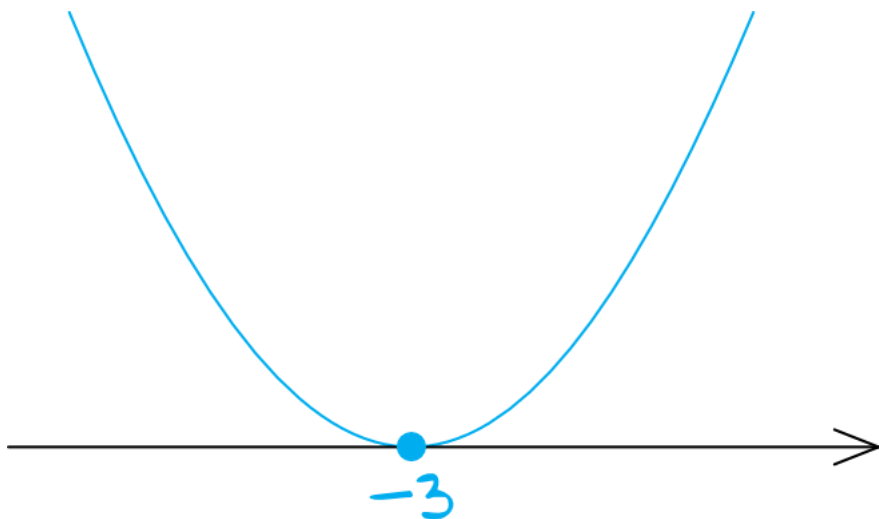
Nie pozostaje nam nic innego jak podstawić poszczególne dane do wzoru, otrzymując:

$$K_6 = k \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)^6$$

Zadanie 5

0-1 pkt

Zbiorem rozwiązań nierówności $(x + 3)^2 \leq 0$ jest:



Odpowiedź: B $\{-3\}$

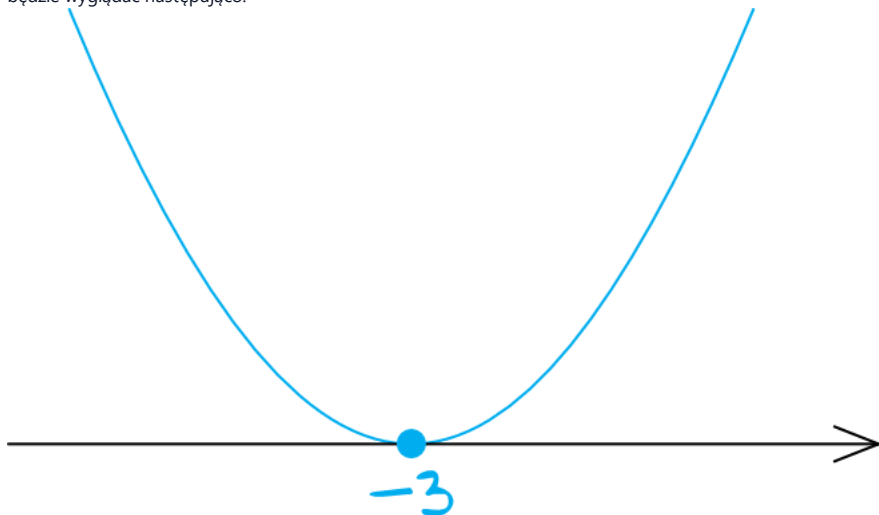
Krok 1. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Aby rozwiązać nierówność musimy najpierw sprawdzić jakie ma miejsca zerowe, czyli musimy sprawdzić dla jakich argumentów $(x + 3)^2 = 0$. Nie musimy wykonywać potęgowań, zastosujemy tutaj własność znaną z funkcji zapisanych w postaci iloczynowej, czyli wartość w nawiasie musimy przyrównać do zera:

$$x + 3 = 0, \quad x = -3$$

Krok 2. Szkicowanie wykresu paraboli.

Zaznaczamy na osi obliczone przed chwilą miejsce zerowe. Ramiona paraboli będą skierowane do góry (bo przed x^2 nie stoi żadna ujemna wartość), zatem całość będzie wyglądać następująco:



Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas wartości mniejsze lub równe zero. Patrząc się na wykres widzimy, że pożądana wartość przyjmowana jest jedynie dla $x = -3$. Dla wszystkich pozostałych argumentów wartości są większe od zera. To oznacza, że zbiorem rozwiązań nierówności jest tylko liczba -3 .

Zadanie 6

0-1 pkt

Wyrażenie $(3x - y)^2 - (x - 3y)^2$ jest równe wyrażeniu:

Odpowiedź: A $(8x^2 - 8y^2)$

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ oraz $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ możemy zapisać, że:

$$(3x - y)^2 - (x - 3y)^2 = 9x^2 - 6xy + y^2 - (x^2 - 6xy + 9y^2) = 9x^2 - 6xy + y^2 - x^2 + 6xy - 9y^2 = 8x^2 - 8y^2$$

Zadanie 7

0-1 pkt

Układ równań liniowych $\begin{cases} 2x - 4y = 3 \\ -3x + 6y = -4 \end{cases}$

Odpowiedź: A (nie ma rozwiązania)

Do rozwiązania tego zadania można dojść na wiele sposobów, nawet najpopularniejszą metodą podstawiania. Jednak najprościej będzie dostrzec rozwiązanie mnożąc pierwsze równanie przez $-\frac{3}{2}$. Otrzymamy wtedy następującą sytuację:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 3 \\ -3x + 6y = -4 \end{cases} \quad \Bigg/ \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) ,$$

$$\begin{cases} -3x + 6y = -\frac{9}{2} \\ -3x + 6y = -4 \end{cases} ,$$

W pierwszym równaniu wyszło nam, że $-3x + 6y$ jest równe $-\frac{9}{2}$. W drugim równaniu wyszło, że $-3x + 6y$ jest równe -4 . Te dwa równania mają po lewej stronie to samo wyrażenie (bez potęg), a po prawej mają różne liczby. Taka sytuacja jest niemożliwa do otrzymania, zatem ten układ równań jest sprzeczny, czyli nie ma on rozwiązań.

Zadanie 8

0-1 pkt

Iloczyn wszystkich pierwiastków równania $(2x - 3)(x^2 + 2x) = 0$ jest równy:

Odpowiedź: B (0)

Krok 1. Rozwiązanie równania.

Na początek ustalmy co to są pierwiastki równania. To nic innego jak po prostu rozwiązania tego równania. To ważne, by nie mylić tego pojęcia ze standardowymi pierwiastkami, ani tym bardziej by nie wyliczać później pierwiastków z otrzymanych rozwiązań.

Przejdźmy zatem do rozwiązania równania. Aby wartość tego równania była równa zero, to któryś z nawiasów musi być równy zero. Możemy więc zapisać, że:

$$2x - 3 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x = 0, \quad 2x = 3 \quad \vee \quad x(x + 2) = 0, \quad x = 1\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0, \quad x = 1\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

Oczywiście równanie $x^2 + 2x = 0$ moglibyśmy rozwiązać także metodą liczenia delty (pamiętając o tym, że tutaj współczynnik $c = 0$), jednakże sposób z wyłączeniem x przed nawias był znacznie prostszy.

Krok 2. Obliczenie iloczynu pierwiastków równania.

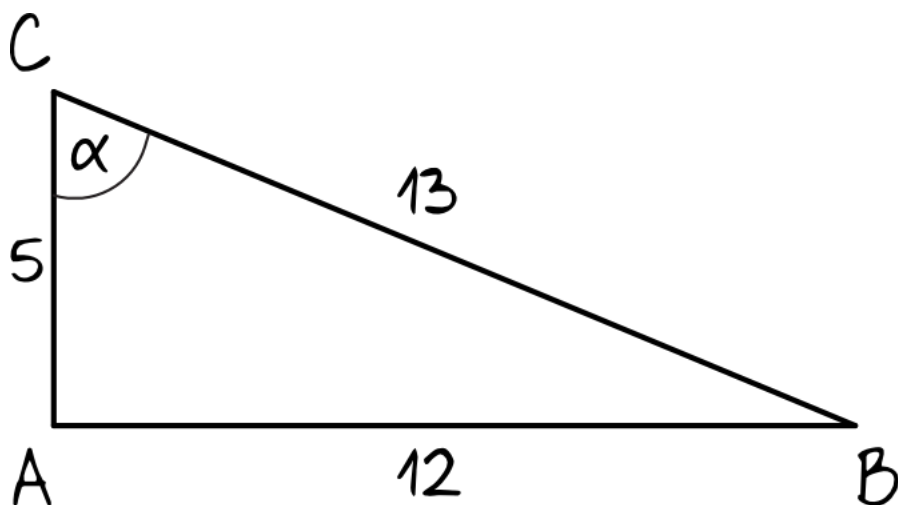
Jak już sobie powiedzieliśmy - pierwiastkami równania są po prostu rozwiązania, które przed chwilą otrzymaliśmy. Zgodnie z treścią zadania musimy podać jeszcze iloczyn tych rozwiązań, zatem:

$$1\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (-2) = 0$$

Zadanie 9

0-1 pkt

W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 5, a przeciwprostokątna ma długość 13. Sinus większego kąta ostrego tego trójkąta jest równy:



Odpowiedź: A ($\frac{12}{13}$)

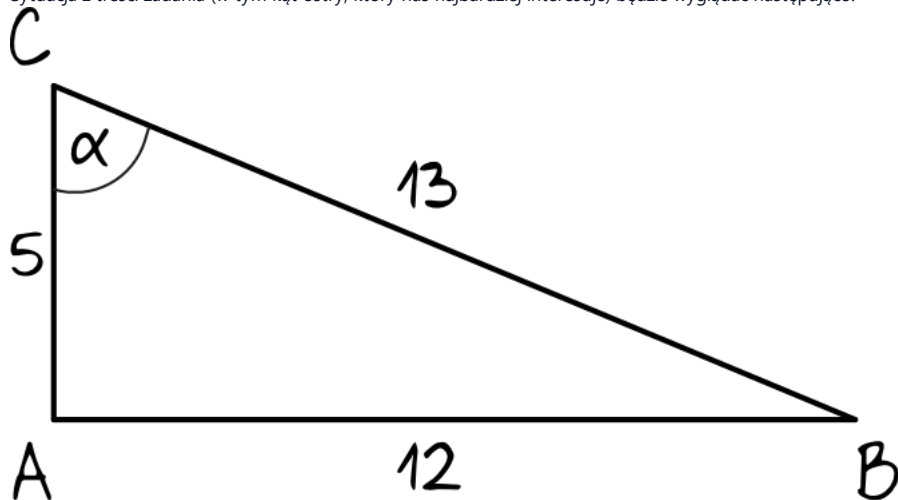
Krok 1. Obliczenie długości boku drugiej przyprostokątnej.

Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć długość drugiej przyprostokątnej tego trójkąta:

$$5^2 + b^2 = 13^2, \quad 25 + b^2 = 169, \quad b^2 = 144, \quad b = 12 \quad \vee \quad b = -12$$

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Sytuacja z treści zadania (w tym kąt ostry, który nas najbardziej interesuje) będzie wyglądać następująco:



Przy okazji warto pamiętać, że w trójkącie prostokątnym zawsze będzie tak, że większy kąt ostry znajduje się przy krótszym boku.

Krok 3. Obliczenie sinusa kąta ostrego.

Sinus to stosunek długości przyprostokątnej naprzeciwko kąta względem długości przeciwprostokątnej, zatem:

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}$$

Zadanie 10

0-1 pkt

Przyjmijmy, że $\log 5 = p$. Wtedy:

Odpowiedź: B ($2p - 2 = \log \frac{1}{4}$)

Musimy do każdej z odpowiedzi podstawić pod p wartość $\log 5$ i sprawdzić, kiedy otrzymamy prawidłowe równanie. Przy okazji warto sobie powiedzieć, że skoro w logarytmie nie mamy podstawy, to domyślnie podstawa jest równa 10, czyli $\log 5$ to tak naprawdę $\log_{10} 5$.

Zanim zaczniemy podstawianie to warto też sobie powiedzieć, że kluczem do rozwiązania tego zadania jest dostrzeżenie tego, że 1 to jest $\log 10$ (lub jak kto woli $\log_{10} 10$). Analogicznie 2 to jest $2\log 10$, co zapisać też możemy jako $\log 10^2 = \log 100$. Zamiana tych liczb na logarytmy umożliwi nam wykonywanie działań na logarytmach. Sprawdźmy zatem poprawność każdej z odpowiedzi i policzmy wartości, które znalazły się po lewej stronie każdego z równań:

Odp. A.

$$p + 1 = \log 5 + \log 10 = \log(5 \cdot 10) = \log 50$$

Nie otrzymaliśmy wartości $\log \frac{1}{2}$, zatem to równanie jest nieprawdziwe.

Odp. B.

$$2p - 2 = 2\log 5 - 2\log 10 = \log 25 - \log 100 = \log \frac{25}{100} = \log \frac{1}{4}$$

Otrzymaliśmy wartość $\log \frac{1}{4}$, czyli tą samą, która znalazła się po prawej stronie równania, zatem to jest poszukiwana przez nas odpowiedź.

Odp. C.

$$p - 1 = \log 5 - \log 10 = \log \frac{5}{10} = \log \frac{1}{2}$$

Nie otrzymaliśmy wartości $\log \frac{1}{20}$, zatem to równanie jest nieprawdziwe.

Odp. D.

$$p^2 - 2 = (\log 5)^2 - 2\log 10 = \log^2 5 - \log 100$$

Tego działania już za bardzo nie uprościmy, a tym bardziej nie osiągniemy wartości $\log \frac{1}{4}$. Tutaj ważne było to, aby nie pomylić $(\log 5)^2$ z $\log 5^2$, bo z tej drugiej formy faktycznie wyszłoby nam że całe wyrażenie jest równe $\log \frac{1}{4}$.

To oznacza, że prawidłowa jest druga odpowiedź.

Zadanie 11

0-1 pkt

Wykres funkcji liniowej $f(x) = -2x + 1$ przesunięto o trzy jednostki w prawo wzdłuż osi OX . Otrzymano wykres funkcji:

Odpowiedź: A ($y = -2x + 7$)

Przesunięcie o trzy jednostki w prawo oznacza, że mamy tak naprawdę funkcję $g(x) = f(x - 3)$. Mówiąc nieco prościej, kiedy do wzoru $-2x + 1$ podstawimy w miejsce x wyrażenie $x - 3$, to poznamy wzór funkcji $g(x)$:

$$g(x) = -2(x - 3) + 1 = -2x + 6 + 1 = -2x + 7$$

Zadanie 12

0-1 pkt

Funkcja liniowa $f(x) = -3x + 2b$ i funkcja liniowa $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ mają to samo miejsce zerowe. Wynika stąd, że:

Odpowiedź: D ($b = -6$)

Skoro te dwie funkcje mają to samo miejsce zerowe, to znaczy, że w tym punkcie się po prostu te dwie funkcje przecinają. Miejsce przecięcia się dwóch prostych wyznaczamy budując układ równań.

Trudność tego zadania polega na tym, że musimy policzyć nie tyle miejsce przecięcia się prostych, co brakujący współczynnik b pierwszej funkcji. Jakbyśmy zbudowali układ równań ze wzorów $y = -3x + 2b$ oraz $y = \frac{1}{2}x + 2$ to mielibyśmy aż trzy niewiadome. Takiego układu równań nie byłibyśmy w stanie rozwiązać. I tu z pomocą przechodzi nam właśnie informacja o tym, że te funkcje przecinają się w miejscu zerowym. To oznacza, że miejscem przecięcia się tych dwóch funkcji będzie punkt $W = (x; 0)$. Możemy zatem od razu podstawić $y = 0$, tworząc następujący układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 = 0 \\ -3x + 2b = 0 \end{cases} \quad \cdot 2 \quad ,$$

$$\begin{cases} x + 4 = 0 \\ -3x + 2b = 0 \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ -3x + 2b = 0 \end{cases} ,$$

Podstawiając teraz pierwsze równanie do drugiego otrzymamy:

$$-3 \cdot (-4) + 2b = 0, \quad 12 + 2b = 0, \quad 2b = -12, \quad b = -6$$

Zadanie 13

0-1 pkt

Oś symetrii wykresu pewnej funkcji kwadratowej jest prosta o równaniu $x = -3$, a wartość największa tej funkcji jest równa 4. Który ze wzorów może opisywać tę funkcję kwadratową?

Odpowiedź: C ($y = -2 \cdot (x + 3)^2 + 4$)

Krok 1. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli.

Oś symetrii zawsze przechodzi przez wierzchołek paraboli. Skoro oś symetrii jest prosta $x = -3$, to znaczy, że współrzędna p wierzchołka paraboli jest równa $p = -3$.

Wiemy też, że największa wartość tej funkcji jest równa 4. Z własności funkcji kwadratowych wynika, że przyjmują one swoje największe lub najmniejsze wartości właśnie w wierzchołku. Z tego też względu wiemy już, że $q = 4$.

Krok 2. Zapisanie wzoru funkcji kwadratowej.

Współrzędne wierzchołka paraboli związane są z zapisaniem funkcji w postaci kanonicznej. Podstawiając do tej postaci wyznaczone współrzędne p oraz q otrzymamy:

$$y = a(x - p)^2 + q, \quad y = a(x - (-3))^2 + 4, \quad y = a(x + 3)^2 + 4$$

Krok 3. Wyznaczenie wartości współczynnika a .

Jeśli spojrzymy się na proponowane odpowiedzi, zauważymy, że pasują nam już tylko dwie możliwości - odpowiedź A oraz C. Musimy teraz ustalić jaki jest współczynnik a i dopiero wtedy, będziemy mogli wybrać prawidłową odpowiedź. Niestety nie jesteśmy w stanie obliczyć konkretnej wartości współczynnika a . Możemy jednak określić, czy jest on dodatni, czy ujemny.

W treści zadania jest informacja, że funkcja posiada swoją największą wartość i jest ona równa 4. To prowadzi nas do wniosku, że parabola musi mieć ramiona skierowane do dołu (gdyby ramiona były skierowane do góry, to największą wartością byłoby zawsze $+\infty$). Skoro tak, to współczynnik a musi być ujemny, zatem pasuje nam jedynie odpowiedź C.

Zadanie 14

0-1 pkt

Do wykresu funkcji wykładniczej $y = a^x$ należy punkt $A = (\frac{1}{3}, 2)$. Wynika stąd, że a jest równe:

Odpowiedź: C (8)

Podstawiając do wzoru funkcji współrzędne naszego punktu otrzymamy następującą sytuację:

$$y = a^x, 2 = a^{\frac{1}{3}}$$

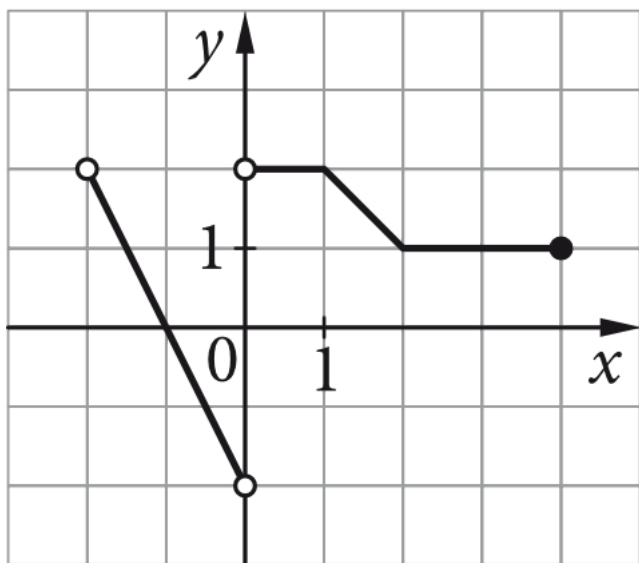
Aby rozwiązać tego typu równanie musimy podnieść lewą i prawą stronę równania do potęgi trzeciej, dzięki czemu po prawej stronie zostanie nam samotna wartość a , którą musimy wyznaczyć:

$$2^3 = (a^{\frac{1}{3}})^3, 2^3 = a^1, a = 8$$

Zadanie 15

0-1 pkt

Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Zbiorem wartości funkcji $f(x)$ jest przedział:

Odpowiedź: A $((-2, 2])$

Zbiór wartości funkcji odczytujemy z osi igreków. Tutaj mamy klasyczną pułapkę związaną z odczytywaniem tych wartości, bowiem patrząc się na kropki mogłoby się wydawać, że zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-2; 2)$. Jednak jak się przypatrzymy tej funkcji nieco bliżej, to zauważymy, że dla argumentów większych od zera aż do jedynki wartość funkcji jest równa 2. To oznacza, że zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-2, 2]$.

Zadanie 16

0-1 pkt

W niemonotonicznym ciągu geometrycznym dane są wyrazy $a_4 = 16$ i $a_6 = 1$. Piąty wyraz tego ciągu jest równy:

Odpowiedź: B (-4)

Krok 1. Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego.

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego możemy zapisać, że:

$$a_6 = a_4 \cdot q^2, 1 = 16 \cdot q^2, q^2 = \frac{1}{16}, q = \frac{1}{4} \quad \vee \quad q = -\frac{1}{4}$$

Krok 2. Wyznaczenie wartości piątego wyrazu ciągu.

Wyszły nam dwa różne ilorazy ciągu geometrycznego, dlatego rozpatrzmy dwie możliwości:

Gdy $q = \frac{1}{4}$:

$$a_5 = a_4 \cdot q, a_5 = 16 \cdot \frac{1}{4}, a_5 = 4$$

Czyli mamy ciąg malejący: $(\dots, 16, 4, 1, \dots)$.

Gdy $q = -\frac{1}{4}$:

$$a_5 = a_4 \cdot q, a_5 = 16 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right), a_5 = -4$$

Czyli mamy ciąg niemonotoniczny: $(\dots, 16, -4, 1, \dots)$.

Z treści zadania wiemy, że nasz ciąg miał być niemonotoniczny (czyli raz miał być rosnący, raz malejący), a taka sytuacja ma miejsce w tym drugim przypadku. Z tego też względu $a_5 = -4$.

Zadanie 17

0-1 pkt

Różnica r ciągu arytmetycznego o wzorze ogólnym $a_n = 5 - 3n$ ($n \geq 1$) wynosi:

Odpowiedź: D (-3)

Różnicę ciągu arytmetycznego możemy odczytać wprost ze wzoru, bowiem jest to liczba znajdująca się przed n . W naszym przypadku przed n znajduje się -3 , stąd też $r = -3$.

Gdybyśmy jednak nie pamiętali o tej własności, to moglibyśmy korzystając ze wzoru ciągu wyznaczyć dwa dowolne wyrazy (np. pierwszy i drugi) i na tej podstawie moglibyśmy wyznaczyć poszukiwaną różnicę ciągu:

$$a_1 = 5 - 3 \cdot 1, a_1 = 5 - 3, a_1 = 2, \text{ oraz } a_2 = 5 - 3 \cdot 2, a_2 = 5 - 6, a_2 = -1$$

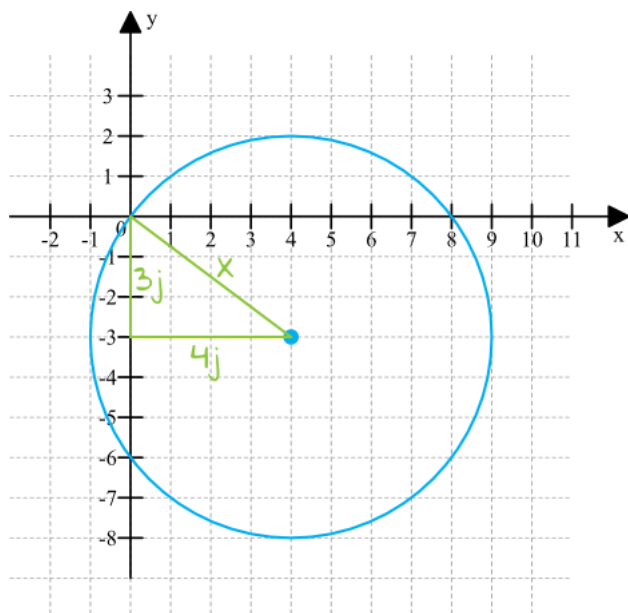
Znając wartość pierwszego i drugiego wyrazu możemy zapisać, że:

$$r = a_2 - a_1, r = -1 - 2, r = -3$$

Zadanie 18

0-1 pkt

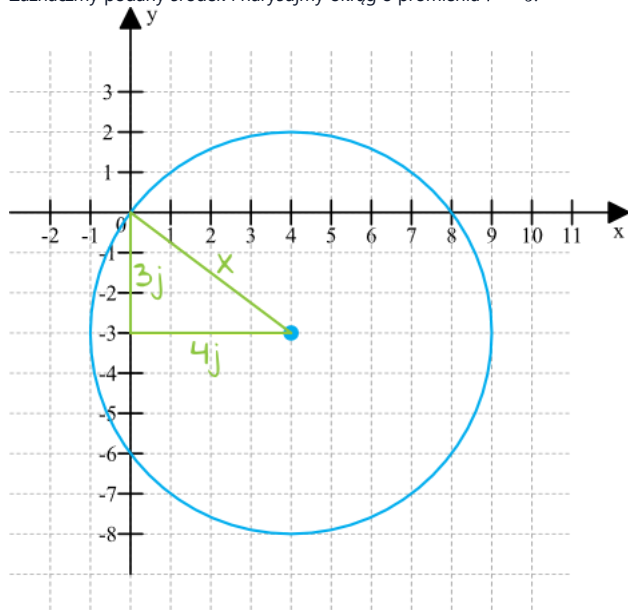
Dany jest okrąg o środku $S = (4, -3)$ i promieniu $r = 5$. Liczba wszystkich punktów wspólnych tego okręgu z osiami układu współrzędnych jest równa:



Odpowiedź: C (3)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zaznaczmy podany środek i narysujmy okrąg o promieniu $r = 5$:



Krok 2. Obliczenie długości odcinka x .

Z rysunku wynika, że nasz okrąg przecina początek układu współrzędnych i dlatego ma on trzy punkty wspólne z osiami układu współrzędnych. Nie mniej jednak dobrze byłoby się upewnić, czy rzeczywiście tak jest, bo rysunek szkicowy może nie być dokładny. Z tego też względu obliczmy długość odcinka x , czyli odległość od początku układu współrzędnych do środka okręgu. Jeżeli ta długość będzie równa długości promienia (czyli będzie równa 5), to nasz okrąg faktycznie będzie przechodził przez początek układu współrzędnych. Długość odcinka x obliczymy korzystając z Twierdzenia Pitagorasa:

$$3^2 + 4^2 = x^2, \quad 9 + 16 = x^2, \quad x^2 = 25, \quad x = 5 \quad \vee \quad x = -5$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, bo długość odcinka musi być dodatnia. Z tego też względu $x = 5$, czyli jest to dokładnie ta sama długość co nasz promień. To nas upewnia, że okrąg przechodzi przez środek układu współrzędnych i tym samym ma on 3 punkty wspólne z tym układem.

Zadanie 19

0-1 pkt

Dana jest prosta o równaniu $-2x - 4y + 3 = 0$. Wskaż równanie prostej, która jest do niej równoległa i przechodzi przez punkt $P = (0, -2)$.

Odpowiedź: D ($y = -\frac{1}{2}x - 2$)

Krok 1. Zapisanie równania prostej w postaci kierunkowej.

Aby zacząć wyznaczenie prostej równoległej, to musimy najpierw zapisać prostą z treści zadania w postaci kierunkowej, czyli postaci typu $y = ax + b$. Musimy więc przenieść wyrazy w taki sposób, by po lewej stronie został igrek, a po prawej by była cała reszta:

$$-2x - 4y + 3 = 0, \quad -4y = 2x - 3 \quad / : (-4), \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

Krok 2. Zapisanie prostej równoległej.

Aby dwie proste były względem siebie równoległe to ich współczynnik kierunkowy a musi być jednakowy. Nasza pierwsza prosta ma współczynnik kierunkowy $a = -\frac{1}{2}$, zatem i prosta równoległa musi mieć współczynnik $a = -\frac{1}{2}$.

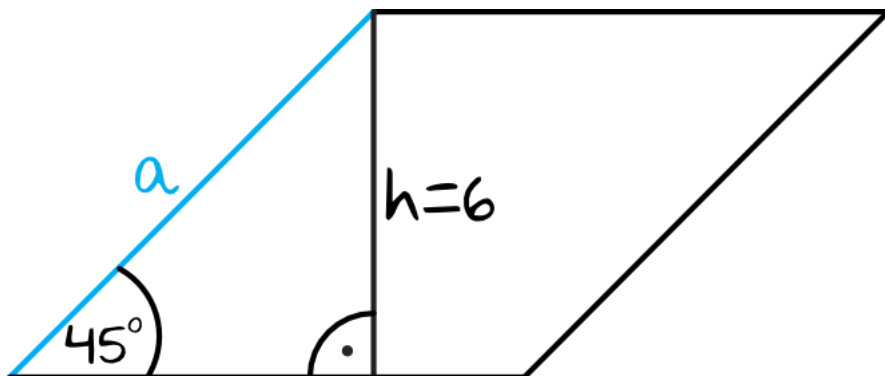
Standardowo w takich zadaniach znając już współczynnik a moglibyśmy zapisać, że prosta wyznacza się równaniem $y = -\frac{1}{2}x + b$ i podstawiając współrzędne punktu P obliczylibyśmy brakujący współczynnik b . Jednak w tym zadaniu współczynnik b możemy poznać bez wykonywania obliczeń, wystarczy odczytać go wprost z treści zadania. Zwróćmy uwagę na to, że punkt $P = (0, -2)$ to miejsce przecięcia się z osią igreków. Współczynnik b informuje nas właśnie o tym gdzie dana prosta przecina się z osią igreków. Możemy więc już zapisać, że w takim razie $b = -2$.

Skoro więc $a = -\frac{1}{2}$ oraz $b = -2$, to prosta równoległa przechodząca przez punkt P wyraża się równaniem $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Zadanie 20

0-1 pkt

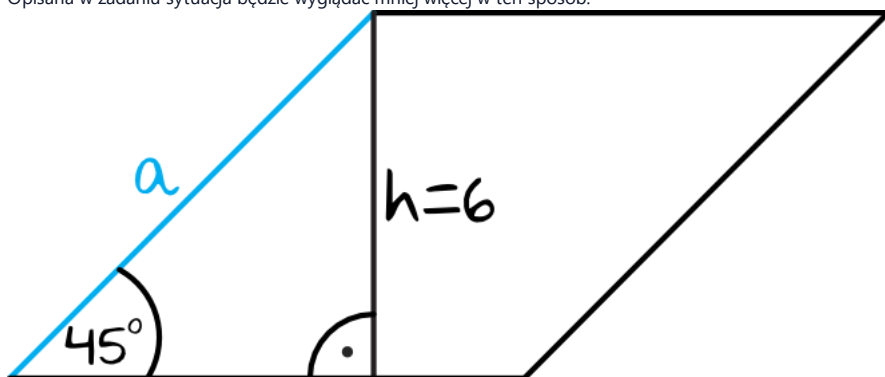
Dany jest romb, w którym kąt ostry ma miarę 45° , a wysokość wynosi 6cm . Ile wynosi pole tego rombu?



Odpowiedź: A ($36\sqrt{2}\text{cm}^2$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Opisana w zadaniu sytuacja będzie wyglądać mniej więcej w ten sposób:



Krok 2. Obliczenie długości boku rombu.

Spójrzmy na zaznaczony na rysunku trójkąt prostokątny. Jest to klasyczny trójkąt o kątach 45° , 45° , 90° . Jedną z własności takich trójkątów jest to, że jeżeli przyprostokątne mają długość a , to przeciwprostokątna ma długość $a\sqrt{2}$. W naszym przypadku przyprostokątna ma długość $h = 6$, zatem przeciwprostokątna (która jest bokiem rombu) będzie miała długość $a = 6\sqrt{2}$.

Krok 3. Obliczenie pola rombu.

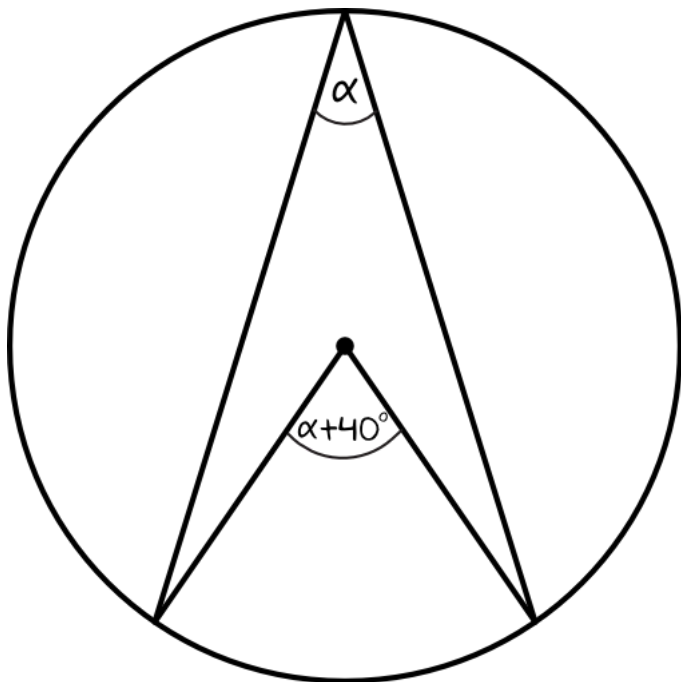
Znając długość boku rombu oraz jego wysokość możemy już bez przeszkód obliczyć pole naszej figury:

$$P = a \cdot h, \quad P = 6\sqrt{2} \cdot 6, \quad P = 36\sqrt{2}[\text{cm}^2]$$

Zadanie 21

0-1 pkt

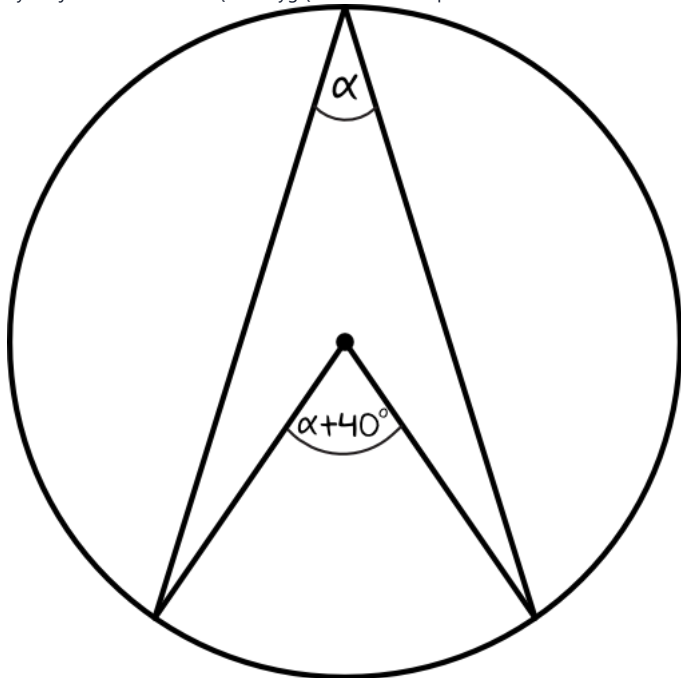
Miara kąta środkowego w okręgu jest o 40° większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku. Ile wynosi miara kąta wpisanego?



Odpowiedź: B (40°)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Sytuacja z treści zadania będzie wyglądać w ten oto sposób:

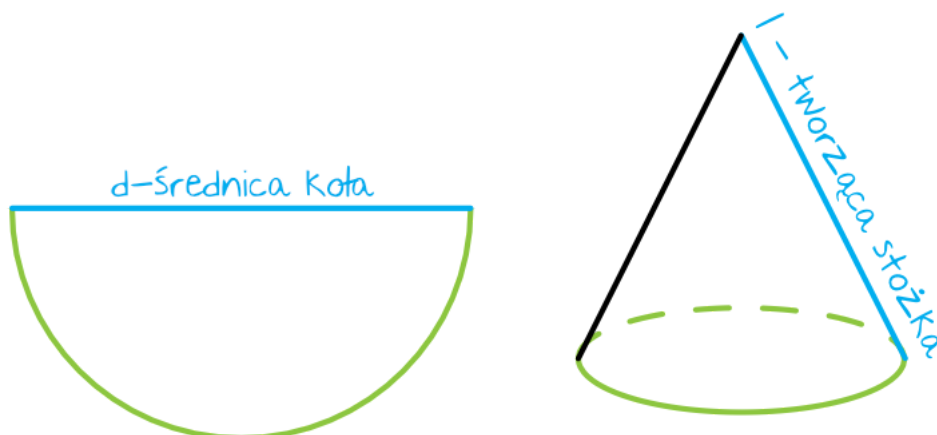


Krok 2. Wyznaczenie miary kąta wpisanego.

Z własności kątów wpisanych i środkowych wiemy, że kąt środkowy ma miarę dwukrotnie większą od kąta wpisanego. To by oznaczało, że dwukrotność kąta wpisanego (czyli 2α) będzie równa mierze kąta środkowego (czyli $\alpha + 40^\circ$). Możemy więc zapisać, że:

$$2\alpha = \alpha + 40^\circ, \quad \alpha = 40^\circ$$

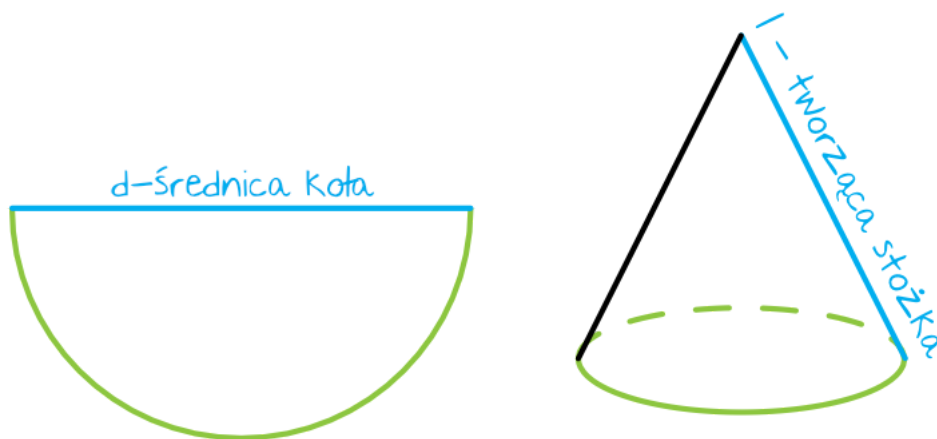
Z połowy koła o promieniu 10 zbudowano powierzchnię boczną stożka. Ile wynosi promień podstawy tego stożka?



Odpowiedź: B (5)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

To zadanie w dużej mierze na wyobraźnię. Kluczem do rozwiązania tego zadania jest dostrzeżenie, że promień koła będzie tak zwaną tworzącą naszego stożka. Ta połówka koła złoży się na stożek mniej więcej tak, jak składamy czapczki z papieru.



Możemy więc już zapisać, że $l = 10$.

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni połowy koła (czyli pola powierzchni bocznej).

Wzór na pole koła to $P = \pi \cdot r^2$. Nas interesuje połowa koła o promieniu $r = 10$ i wiemy, że ta połowa koła będzie jednocześnie polem powierzchni bocznej naszego stożka. W związku z tym:

$$P_b = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2, P_b = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 10^2, P_b = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 100, P_b = 50\pi$$

Krok 3. Obliczenie długości promienia podstawy stożka.

Obliczając pole połowy koła wiemy już, że pole powierzchni bocznej stożka jest równe 50π . Wiemy też z rysunku, że $l = 10$. Korzystając teraz ze wzoru na pole powierzchni bocznej $P_b = \pi r l$ wyznaczmy poszukiwaną długość promienia podstawy stożka:

$$P_b = 50\pi, \pi r l = 50\pi, r l = 50, r \cdot 10 = 50, r = 5$$

Zadanie 23

0-1 pkt

Jeśli graniastosłup ma 12 ścian, to liczba jego krawędzi jest równa:

Odpowiedź: C (30)

Krok 1. Wyznaczenie figury znajdującej się w podstawie graniastosłupa.

Graniastosłup mający n -kąt w podstawie ma $n + 2$ ścian. Skoro nasza bryła ma 12 ścian, to:

$$n + 2 = 12, n = 10$$

To oznacza, że w podstawie znajduje się dziesięciokąt.

Krok 2. Obliczenie liczby krawędzi graniastosłupa.

Graniastosłup mający n -kąt w podstawie ma $3n$ krawędzi. W podstawie naszej bryły znajduje się dziesięciokąt, zatem liczba krawędzi będzie równa:

$$3n = 3 \cdot 10 = 30$$

Zadanie 24

0-1 pkt

W dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 8 wynosi:

Odpowiedź: D ($\frac{5}{36}$)

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Rzucając kostką mamy możliwość otrzymania jednego z sześciu wyników. Takich rzutów wykonujemy dwa. To oznacza, że zgodnie z regułą mnożenia liczba zdarzeń elementarnych będzie równa:

$$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Interesują nas takie pary wyników, których suma daje łącznie 8 oczek. Wypiszmy zatem wszystkie takie możliwości:

$$(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2)$$

Widzimy, że warunki zadania spełnia pięć par, zatem możemy napisać, że $|A| = 5$.

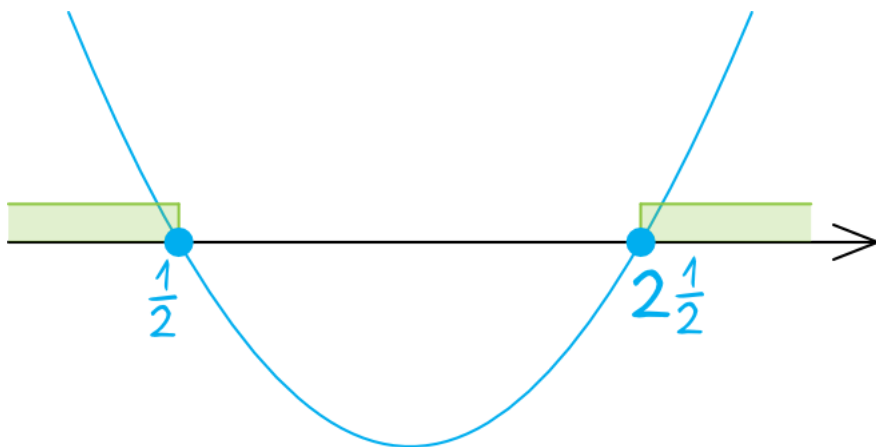
Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$$

Zadanie 25

0-2 pkt

Rozwiąż nierówność $(2x - 3)^2 - 4 \geq 0$.**Odpowiedź:** $x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2\frac{1}{2}; +\infty)$

Krok 1. Doprowadzenie nierówności do postaci ogólnej.

Zanim zaczniemy liczyć deltę, to musimy doprowadzić tę nierówność do postaci ogólnej, zatem:

$$4x^2 - 12x + 9 - 4 \geq 0, \quad 4x^2 - 12x + 5 \geq 0$$

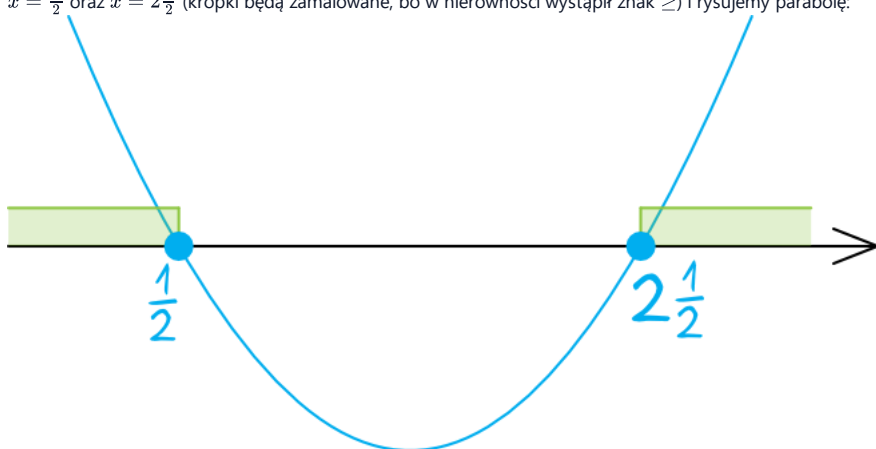
Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Współczynniki: $a = 4$, $b = -12$, $c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) - 8}{2 \cdot 4} = \frac{12 - 8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) + 8}{2 \cdot 4} = \frac{12 + 8}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Z racji tego, iż współczynnik kierunkowy a jest dodatni, to parabola będzie mieć ramiona skierowane do góry. Zaznaczamy więc na osi wyznaczone miejsca zerowe $x = \frac{1}{2}$ oraz $x = 2\frac{1}{2}$ (kropki będą zamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $\geq$) i rysujemy parabolę:

Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas wyniki większe lub równe zero, zatem interesuje nas to co znalazło się nad osią (wraz z zamalowanymi kropkami). To oznacza, że rozwiązaniem tej nierówności jest suma przedziałów:

$$x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2\frac{1}{2}; +\infty)$$

Zadanie 26

0-2 pkt

Dla kąta ostrego α dany jest $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}$.

Odpowiedź: $\frac{3}{2}$

Krok 1. Obliczenie wartości sinusa.

Z jedynki trygonometrycznej wiemy, że $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Z treści zadania wynika, że $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, w związku z tym:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1, \sin^2 \alpha + \frac{4}{9} = 1, \sin^2 \alpha = \frac{5}{9}, \sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} \quad \vee \quad \sin \alpha = -\sqrt{\frac{5}{9}}$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy, bo kąt α jest ostry, a dla kątów ostrych sinus przyjmuje wartości dodatnie, zatem zostaje nam $\sqrt{\frac{5}{9}}$. Możemy jeszcze ten zapis uprościć do postaci $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Krok 2. Obliczenie wartości tangensa.

Wiedząc, że $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ i znając wartość sinusa oraz cosinusa możemy bez obliczyć, że:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}, \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3}, \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{2}, \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Krok 3. Obliczenie wartości wyrażenia.

Znając wartość tangensa możemy już bez problemu obliczyć wartość wyrażenia z treści zadania:

$$\sqrt{\tan^2 \alpha + 1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Zadanie 27

0-2 pkt

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych mniejszych od 30 losujemy dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A , w którym obie wylosowane liczby będą podzielne przez 3.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{3}{38}$

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Na początek musimy ustalić ile jest liczb dwucyfrowych mniejszych od 30, czyli tak naprawdę ile jest liczb od 10 do 29 włącznie. Takich liczb jest dokładnie 20. Będziemy losować dwie liczby (bez zwracania), zatem wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych zgodnie z regułą mnożenia będziemy mieć:

$$|\Omega| = 20 \cdot 19 = 380$$

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Interesują nas takie pary wyników, w których obie wylosowane liczby są podzielne przez 3. Aby liczba była podzielna przez 3, to suma jej cyfr musi być liczbą podzielna przez 3. W naszym zestawie będą to liczby:

$$12, 15, 18, 21, 24, 27$$

Widzimy, że jest to 6 różnych liczb. Zgodnie z regułą mnożenia, skoro losowanie jest bez zwracania, to takich par w których jedna i druga liczba są podzielne przez 3, uda nam się utworzyć:

$$|A| = 6 \cdot 5 = 30$$

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{30}{380} = \frac{3}{38}$$

Zadanie 28

0-2 pkt

W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geq 1$, dane są wyrazy $a_2 = -2$ i $a_5 = 7$. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu, od wyrazu piątego do wyrazu dwudziestego.

Odpowiedź: $S = 472$

Krok 1. Obliczenie różnicy ciągu.

Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego wiemy, że:

$$a_5 = a_2 + 3r$$

Znając wartości a_2 oraz a_5 możemy obliczyć różnicę ciągu, zatem:

$$7 = -2 + 3r, \quad 9 = 3r, \quad r = 3$$

Krok 2. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu.

Nie mamy wzoru na obliczenie sumy wyrazów od piątego do dwudziestego. Powinniśmy jednak zauważyć, że to czego szukamy da się obliczyć nieco sprytniej. Wystarczy policzyć ile to jest S_{20} i odjąć od tego S_4 . Do jednego i drugiego wzoru przyda nam się poznanie wartości a_1 , zatem policzmy ją teraz. Skorzystamy ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i informacji o tym, że przykładowo $a_2 = -2$ oraz $r = 3$. Otrzymamy zatem:

$$a_2 = a_1 + r, \quad a_1 = a_2 - r, \quad a_1 = -2 - 3, \quad a_1 = -5$$

Krok 3. Obliczenie sumy czterech pierwszych wyrazów tego ciągu.

Zgodnie z przyjętą strategią musimy obliczyć wartość S_4 , zatem podstawiając $a_1 = -5$ oraz $n = 4$ do wzoru na sumę n początkowych wyrazów otrzymamy:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n, \quad S_4 = \frac{2 \cdot (-5) + (4-1) \cdot 3}{2} \cdot 4, \quad S_4 = \frac{-10 + 3 \cdot 3}{2} \cdot 4, \quad S_4 = \frac{-10 + 9}{2} \cdot 4, \quad S_4 = -\frac{1}{2} \cdot 4, \quad S_4 = -2$$

Krok 4. Obliczenie sumy dwudziestu pierwszych wyrazów tego ciągu.

Analogicznie jak w poprzednim kroku, tym razem obliczymy S_{20} , zatem:

$$S_{20} = \frac{2 \cdot (-5) + (20-1) \cdot 3}{2} \cdot 20, \quad S_{20} = \frac{-10 + 19 \cdot 3}{2} \cdot 20, \quad S_{20} = \frac{-10 + 19 \cdot 3}{2} \cdot 20, \quad S_{20} = \frac{-10 + 57}{2} \cdot 20, \quad S_{20} = \frac{47}{2} \cdot 20, \quad S_{20} = \frac{47}{2} \cdot 20, \quad S_{20} = 470$$

Krok 5. Obliczenie sumy wyrazów od piątego do dwudziestego.

Na sam koniec musimy już tylko od S_{20} odjąć wartość S_4 i otrzymamy to czego szukamy:

$$S_{5-20} = S_{20} - S_4, \quad S_{5-20} = 470 - (-2), \quad S_{5-20} = 472$$

Zadanie 29

0-2 pkt

Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej ujemnej prawdziwa jest nierówność $9x + \frac{1}{x} \leq -6$.

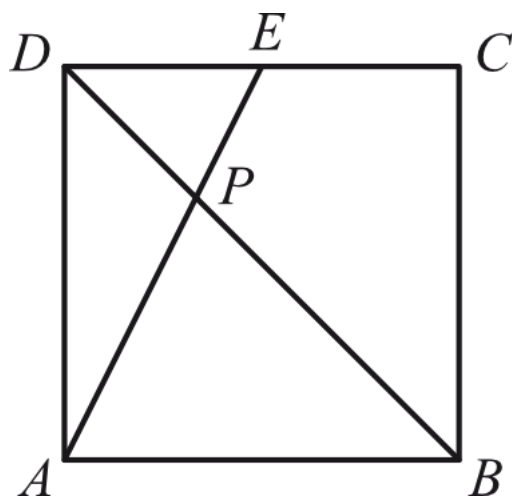
Odpowiedź: Udowodniono korzystając

Skoro x ma być liczbą ujemną, to możemy pomnożyć obydwie strony tej nierówności przez x , pamiętając jednak o tym, żeby zmienić w takiej sytuacji znak na przeciwny. To w zasadzie jest kluczowa pułapka w tym zadaniu. Na sam koniec otrzymane wyrażenie będziemy musieli "zwinąć" korzystając ze wzorów skróconego mnożenia. Całość będzie wyglądać następująco:

$$9x + \frac{1}{x} \leq -6 \quad \Bigg| \cdot x, \quad 9x^2 + 1 \geq -6x, \quad 9x^2 + 6x + 1 \geq 0, \quad (3x + 1)^2 \geq 0$$

Z racji tego, iż każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu daje wynik większy lub równy 0, to dowód możemy uznać za zakończony.

W kwadracie $ABCD$, w którym punkt E jest środkiem boku CD , poprowadzono przekątną BD i odcinek AE , które przecięły się w punkcie P . Uzasadnij, że suma pól trójkątów ABP i DEP stanowi $\frac{5}{12}$ pola kwadratu $ABCD$.



Odpowiedź: Udowodniono korzysta

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń i dostrzeżenie podobieństwa trójkątów.

Wprowadźmy do zadania następujące oznaczenia:

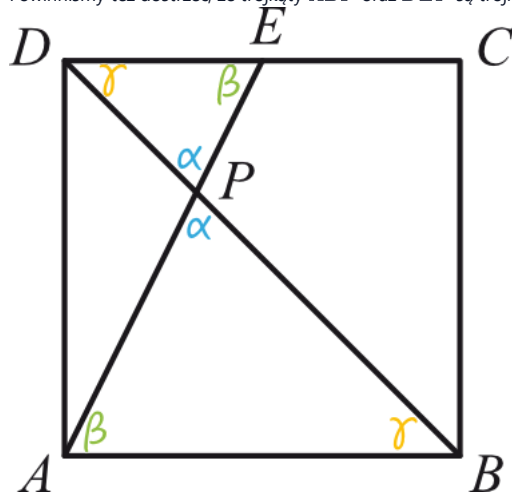
a - bok kwadratu

h_1 - wysokość trójkąta ABP

h_2 - wysokość trójkąta DEP

Co więcej, możemy zauważyć, że $h_1 + h_2 = a$.

Powinniśmy też dostrzec, że trójkąty ABP oraz DEP są trójkątami podobnymi zgodnie z cechą kąt-kąt-kąt (bardzo podobna sytuacja ma miejsce w trapezach).



Krok 2. Obliczenie skali podobieństwa trójkątów.

Jesteśmy w stanie obliczyć skalę podobieństwa tych trójkątów, bowiem podstawa trójkąta ABP ma długość a , natomiast podstawa trójkąta DEP ma długość $\frac{1}{2}a$. Jeżeli więc potraktujemy mniejszy trójkąt DEP jako podstawowy, a większy ABP jako podobny, to skala podobieństwa będzie równa $k = 2$.

Oczywiście moglibyśmy też potraktować duży trójkąt jako podstawowy, a mały jako podobny - wtedy skala podobieństwa byłaby równa $k = \frac{1}{2}$. Dla końcowych wyników nie będzie to miało znaczenia, tylko konsekwentnie musimy się trzymać tego jaki trójkąt jest podstawowy, a jaki podobny.

Krok 3. Zapisanie pól trójkątów i zakończenie dowodzenia.

Skoro skala podobieństwa jest równa $k = 2$, to h_1 jest dwukrotnie większe od h_2 . Wiemy też, że $h_1 + h_2 = a$, czyli moglibyśmy zapisać, że:

$$h_1 = \frac{2}{3}a, \quad h_2 = \frac{1}{3}a$$

Dodatkowo wiemy, że duży trójkąt ma podstawę równą a , natomiast mały ma podstawę równą $\frac{1}{2}a$. Możemy więc zapisać, że:

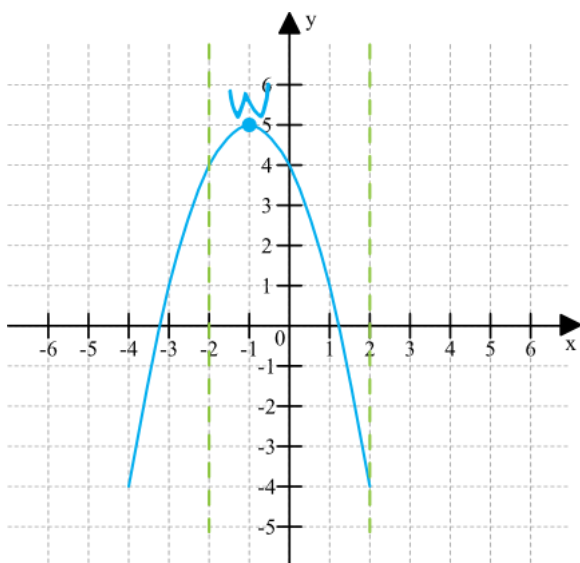
$$P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1, \quad P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3}a, \quad P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3}a, \quad P_{ABP} = \frac{2}{6}a^2, \quad P_{ABP} = \frac{1}{3}a^2, \quad \text{oraz}, \quad P_{DEP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot h_2, \quad P_{DEP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}a, \quad P_{DEP} =$$

To oznacza, że:

$$P_{ABP} + P_{DEP} = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{12}a^2, \quad P_{ABP} + P_{DEP} = \frac{4}{12}a^2 + \frac{1}{12}a^2, \quad P_{ABP} + P_{DEP} = \frac{5}{12}a^2$$

Skoro pole kwadratu jest równe a^2 to nasze dowodzenie można uznać za zakończone, bowiem suma pól tych dwóch trójkątów faktycznie jest równa $\frac{5}{12}$ pola kwadratu.

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, jeżeli wierzchołek paraboli, która jest jej wykresem, znajduje się w punkcie $W = (-1, 5)$, a ta funkcja w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$ osiąga najmniejszą wartość równą -4 .



Odpowiedź: $f(x) = -x^2 - 2x + 4$

Krok 1. Zapisanie wzoru w postaci kanonicznej.

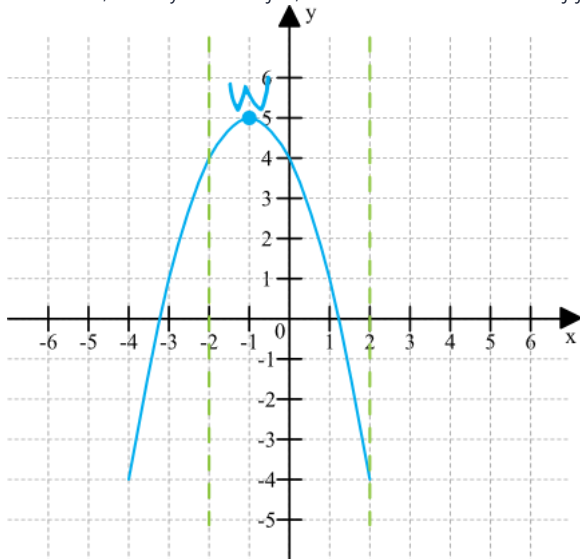
Współrzędne wierzchołka paraboli związane są z postacią kanoniczną funkcji kwadratowej, czyli postacią $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie p oraz q to współrzędne wierzchołka paraboli. Skoro więc $W = (-1, 5)$, to możemy zapisać, że:

$$f(x) = a(x - (-1))^2 + 5, \quad f(x) = a(x + 1)^2 + 5$$

Do pełnego wzoru brakuje nam jeszcze wartości współczynnika a i właśnie teraz spróbujemy ją wyznaczyć.

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Na podstawie informacji o tym, że w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$ funkcja osiąga najmniejszą wartość równą -4 musimy wyciągnąć bardzo ważny, choć nieoczywisty wniosek. Wnioskiem do którego powinniśmy dojść jest to, że parabola tej funkcji ma ramiona skierowane do dołu. Skąd to wiemy? W przedziale $\langle -2, 2 \rangle$ mieści się nasz wierzchołek, bo przecież $p = -1$. Gdyby więc ta funkcja miała ramiona skierowane do góry, to ta najmniejsza wartość na pewno byłaby przyjmowana właśnie w wierzchołku, a wiemy że tak nie jest, bo w wierzchołku wartość funkcji jest równa 5. Sytuacja z treści zadania wygląda więc następująco:



Ale to nie koniec ważnych wniosków. Wartość funkcji w danym przedziale jest najmniejsza (lub największa) na krańcach przedziału lub w wierzchołku. Wierzchołek z tych rozważań już odrzuciliśmy, bo tutaj funkcja przyjmuje największą wartość. To oznacza, że funkcja przyjmuje wartość równą -4 dla jednego z dwóch argumentów: albo dla $x = -2$, albo dla $x = 2$. Właśnie z rysunku powinniśmy odczytać i wywnioskować, że ta wartość będzie przyjmowana dla argumentu $x = 2$, bo jest to miejsce bardziej oddalone od wierzchołka. To z kolei prowadzi nas do kluczowej informacji, dzięki której będziemy mogli policzyć brakujący współczynnik a - nasza funkcja przechodzi przez punkt o współrzędnych $A = (2; -4)$.

Krok 3. Wyznaczenie wartości współczynnika a .

Wiemy już, że wzór funkcji w postaci kanonicznej przybiera postać $f(x) = a(x + 1)^2 + 5$. Podstawiając do tego wzoru współrzędne punktu $A = (2; -4)$ obliczymy brakujący współczynnik a :

$$f(x) = a(x+1)^2 + 5, \quad -4 = a \cdot (2+1)^2 + 5, \quad -4 = a \cdot 3^2 + 5, \quad -4 = 9a + 5, \quad 9a = -9, \quad a = -1$$

To oznacza, że nasza funkcja w postaci kanonicznej wygląda następująco: $f(x) = -1(x+1)^2 + 5$, czyli po prostu $f(x) = -(x+1)^2 + 5$

Krok 4. Przekształcenie wzoru funkcji do postaci ogólnej.

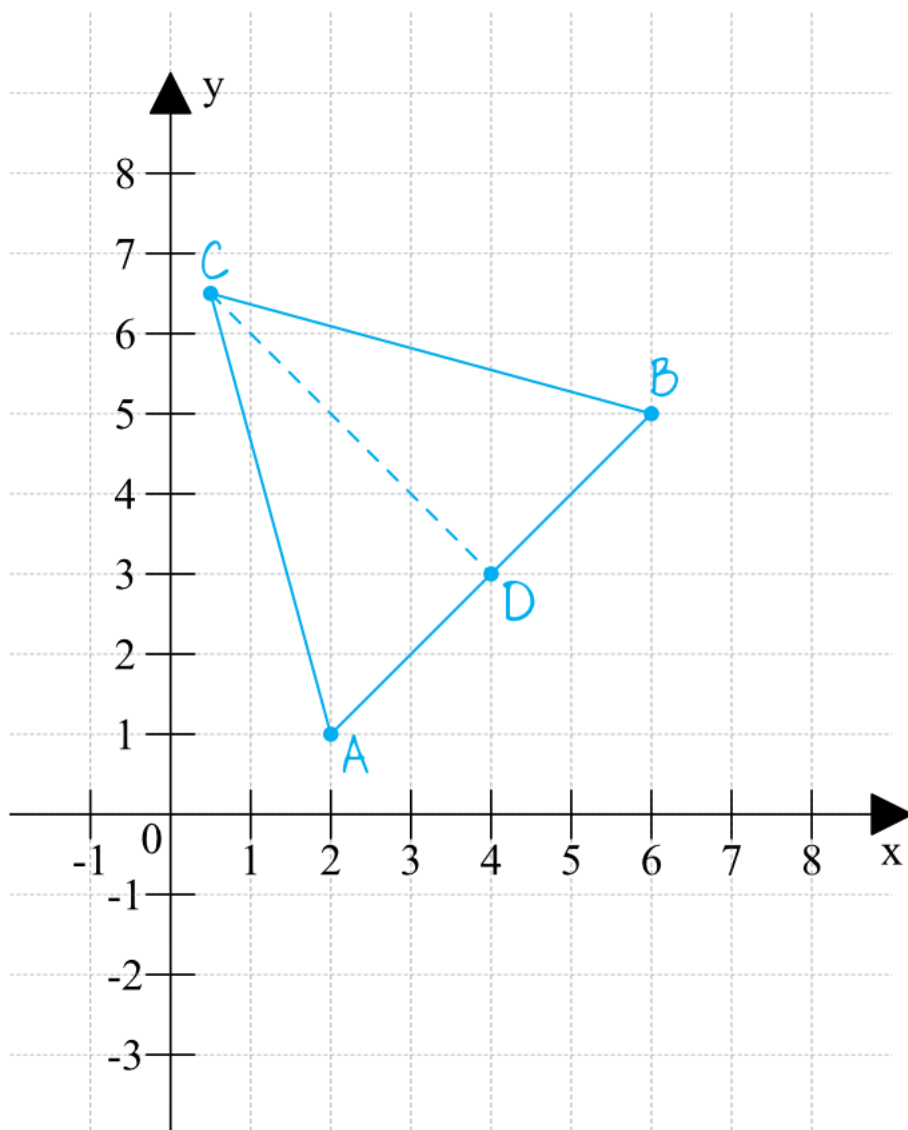
Na sam koniec musimy przekształcić wzór z postaci kierunkowej do postaci ogólnej, a osiągniemy to wykonując potęgowanie, które znalazło się we wzorze:

$$f(x) = -(x+1)^2 + 5, \quad f(x) = -(x^2 + 2x + 1) + 5, \quad f(x) = -x^2 - 2x - 1 + 5, \quad f(x) = -x^2 - 2x + 4$$

Zadanie 32

0-5 pkt

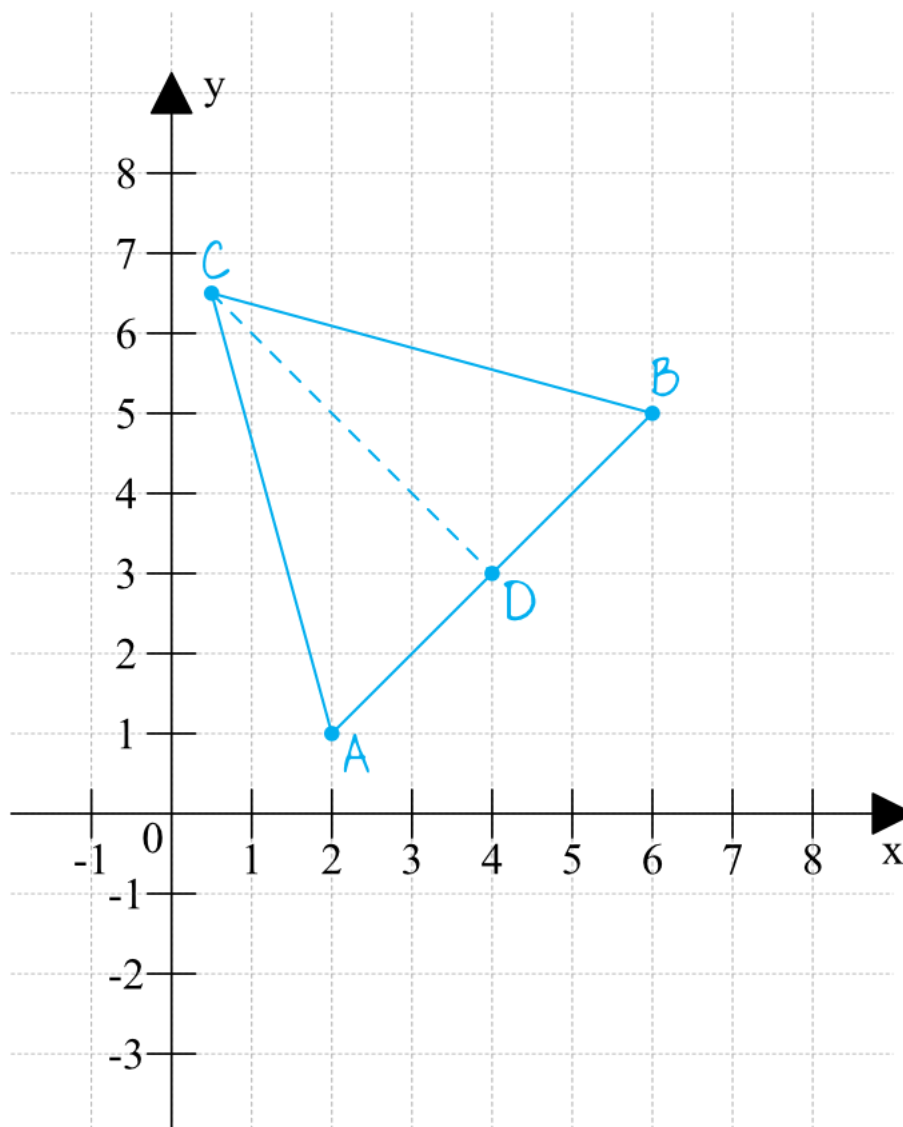
W trójkącie równoramiennym ABC dane są wierzchołki podstawy $A = (2, 1)$ i $B = (6, 5)$ oraz wysokość $|CD| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$. Oblicz współrzędne wierzchołka C , jeżeli wiadomo, że obie te współrzędne są dodatnie.



Odpowiedź: $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Cała sytuacja w układzie współrzędnych będzie wyglądać następująco:



Krok 2. Wyznaczenie współrzędnych punktu D .

Skoro trójkąt jest równoramienny, to wysokość opuszczona na podstawę dzieli ją na dwie równe części. To oznacza, że punkt D jest środkiem odcinka AB . My znamy współrzędne punktów A oraz B , zatem korzystając ze wzoru na środek odcinka możemy zapisać, że:

$$D = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right), D = \left(\frac{2 + 6}{2}; \frac{1 + 5}{2} \right), D = \left(\frac{8}{2}; \frac{6}{2} \right), D = (4; 3)$$

Krok 3. Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB .

Potrzebujemy poznać wartość współczynnika kierunkowego prostej AB , bowiem przyda nam się on do wyznaczenia prostej prostopadłej CD . Znając współrzędne punktów A oraz B możemy wyznaczyć nawet cały wzór prostej AB (korzystając z długiego wzoru z tablic lub z metody układu równań). Mimo wszystko nam wystarczy poznanie jedynie współczynnika kierunkowego prostej AB , a osiągniemy to za pomocą prostego sprytnego wzoru:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, a = \frac{5 - 1}{6 - 2}, a = \frac{4}{4}, a = 1$$

Krok 4. Wyznaczenie równania prostej CD .

Prosta CD jest prostopadła do prostej AB . Wiemy, że aby dwie proste były względem siebie prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych musi być równy -1 . Skoro prosta AB ma ten współczynnik równy $a = 1$, to prosta CD będzie mieć współczynnik $a = -1$, bowiem $-1 \cdot 1 = -1$. Skoro tak, to już wiemy, że prosta CD będzie wyrażać się wzorem $y = -1x + b$, czyli $y = -x + b$. Musimy jeszcze tylko wyznaczyć wartość współczynnika b , a zrobimy to podstawiając do tej postaci współrzędne punktu $D = (4; 3)$:

$$y = -x + b, 3 = -4 + b, b = 7$$

Współczynnik b wyszedł równy 7, a to oznacza, że prosta CD wyraża się wzorem $y = -x + 7$.

Krok 5. Wyznaczenie współrzędnych punktu C .

Z treści zadania wiemy, że $|CD| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, zatem korzystając ze wzoru na długość odcinka możemy zapisać, że:

$$|CD| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}, \quad \frac{7\sqrt{2}}{2} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} \quad \Bigg/ \cdot 2, \quad \frac{49}{2} = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$$

Wiemy, że prosta $y = -x + 7$ przechodzi przez nasz punkt C . To oznacza, że współrzędne punktu C moglibyśmy zapisać jako $C = (x; y)$, czyli $C = (x; -x + 7)$. Teraz podstawiając do powyższego wzoru współrzędne $C = (x; -x + 7)$ oraz $D = (4; 3)$ otrzymamy:

$$\frac{49}{2} = (4 - x)^2 + (3 - (-x + 7))^2, \quad \frac{49}{2} = (4 - x)^2 + (3 - (-x + 7))^2, \quad \frac{49}{2} = (4 - x)^2 + (3 + x - 7)^2, \quad \frac{49}{2} = (4 - x)^2 + (x - 4)^2$$

I tu się na chwilę zatrzymamy. Moglibyśmy dostrzec, że prawą stronę równania da się zapisać jako $2 \cdot (x - 4)^2$, przez co otrzymalibyśmy:

$$2 \cdot (x - 4)^2 = \frac{49}{2}, \quad (x - 4)^2 = \frac{49}{4}$$

W takiej sytuacji moglibyśmy sprytnie zapisać, że:

$$x - 4 = \frac{7}{2} \quad \vee \quad x - 4 = -\frac{7}{2}, \quad x = 7\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$

Jednak nie ma co się oszukiwać, z takiego sposobu rozwiązywania rzadko kiedy korzystamy na matematyce, wiele osób nawet go nie kojarzy, no i łatwo tu też o pomyłkę kiedy brakuje nam wprawy. Z tego też względu mając postać $\frac{49}{2} = (4 - x)^2 + (x - 4)^2$ możemy po prostu wykonać pojawiające się potęgowanie, a rozwiązanie równania obliczymy z użyciem standardowej delty:

$$\frac{49}{2} = (4 - x)^2 + (x - 4)^2, \quad \frac{49}{2} = 16 - 8x + x^2 + x^2 - 8x + 16, \quad \frac{49}{2} = 2x^2 - 16x + 32, \quad 2x^2 - 16x + 7\frac{1}{2} = 0 \quad \Bigg/ \cdot 2, \quad 4x^2 - 32x + 15 = 0$$

Współczynniki: $a = 4$, $b = -32$, $c = 15$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-32)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 1024 - 240 = 784, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{784} = 28$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-32) - 28}{2 \cdot 4} = \frac{32 - 28}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-32) + 28}{2 \cdot 4} = \frac{32 + 28}{8} = \frac{60}{8} = 7\frac{1}{2}$$

Po dość długich obliczeniach wyszło nam że współrzędna xowa punktu C jest równa $x = \frac{1}{2}$ lub też $x = 7\frac{1}{2}$. Sprawdźmy zatem jakie współrzędne igrekowe otrzymamy dla każdego z tych argumentów:

Gdy $x = \frac{1}{2}$, to:

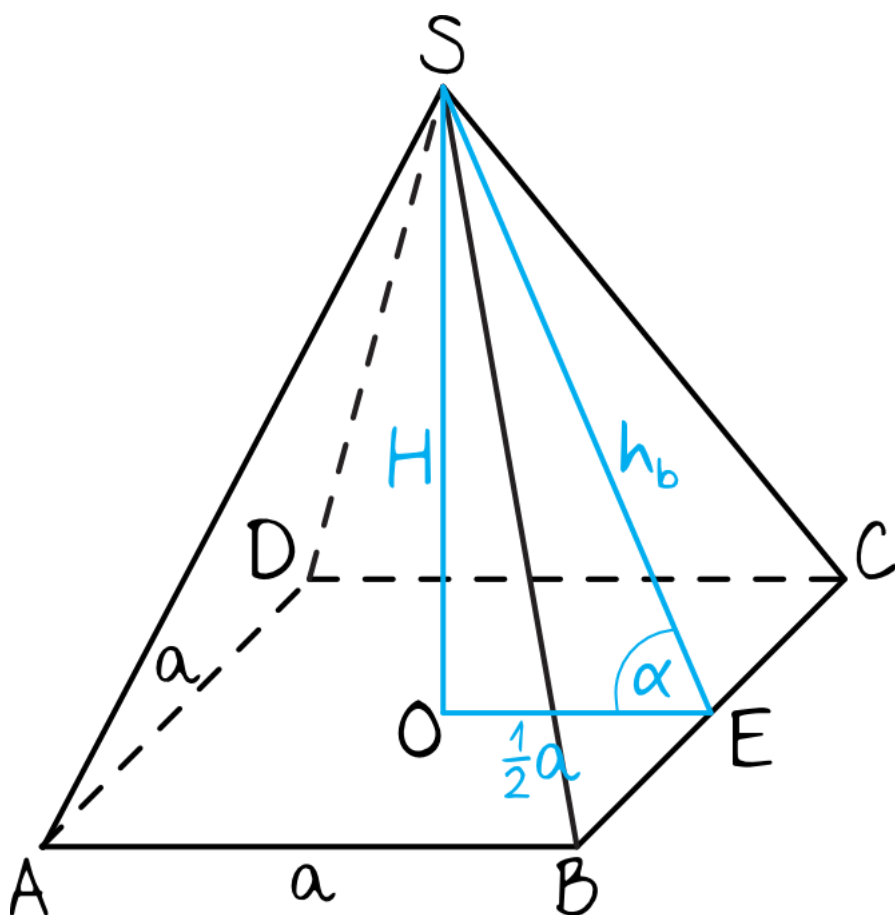
$$y = -x + 7, \quad y = -\frac{1}{2} + 7, \quad y = 6\frac{1}{2}$$

Gdy $x = 7\frac{1}{2}$, to:

$$y = -x + 7, \quad y = -7\frac{1}{2} + 7, \quad y = -\frac{1}{2}$$

Z treści zadania wynika, że obydwie współrzędne punktu C muszą być dodatnie, zatem ten drugi wariant musimy odrzucić, bo tam wyszło nam $y = -\frac{1}{2}$. To oznacza, że mamy tylko jedną prawidłową odpowiedź do tego zadania i będzie to $C = (\frac{1}{2}; 6\frac{1}{2})$.

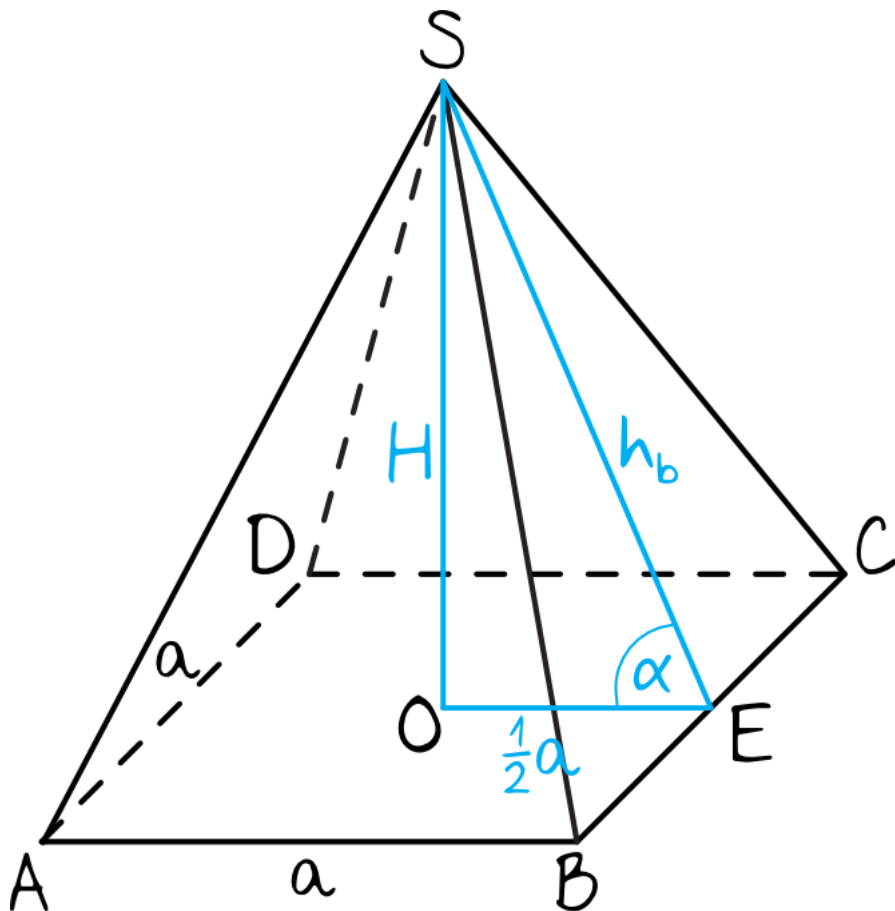
W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym pole jednej ściany bocznej wynosi 12, a cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Odpowiedź: $V = 21\sqrt{3}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Narysujmy wskazany ostrosłup, nanosząc na niego dane z treści zadania (w szczególności kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy). Warto tutaj od razu pamiętać, że skoro ostrosłup jest prawidłowy czworokątny, to w podstawie będziemy mieć kwadrat.



Krok 2. Zapisanie zależności między wysokością ściany bocznej i krawędzią podstawy.

Spójrzmy na trójkąt prostokątny OES . Dolna przyprostokątna ma długość $\frac{1}{2}a$, natomiast przeciwprostokątna to wysokość ściany bocznej. Stosunek długości tych dwóch boków opisuje nam właśnie cosinus kąta α , który jest równy $\frac{1}{3}$. Możemy więc zapisać, że:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{h_b}, \quad \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{2}a}{h_b} \quad \Bigg/ \cdot h_b, \quad \frac{1}{3}h_b = \frac{1}{2}a \quad \Bigg/ \cdot 3, \quad h_b = \frac{3}{2}a$$

Krok 3. Wyznaczenie długości krawędzi podstawy.

W ścianie bocznej mamy trójkąt o podstawie a oraz wysokości h_b , która już ustaliliśmy jest równa $\frac{3}{2}a$. Skoro pole tego trójkąta jest równe 12, to:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b, \quad 12 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{3}{2}a, \quad 12 = \frac{3}{4}a^2 \quad \Bigg/ \cdot \frac{4}{3}, \quad a^2 = 16, \quad a = 4 \quad \vee \quad a = -4$$

Długość boku nie może być ujemna, zatem zostaje nam $a = 4$.

Krok 4. Wyznaczenie długości wysokości ściany bocznej.

Wiemy już, że $h_b = \frac{3}{2}a$. Skoro więc $a = 4$, to:

$$h_b = \frac{3}{2} \cdot 4, \quad h_b = 6$$

Krok 5. Obliczenie wysokości ostrosłupa.

Spójrzmy ponownie na trójkąt OES . Odcinek AB ma długość $\frac{1}{2}a$, czyli $|AB| = 2$. Wiemy też, że przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość równą 6. W związku z tym korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy wyznaczyć brakującą wysokość całego ostrosłupa:

$$2^2 + H^2 = 6^2, \quad 4 + H^2 = 36, \quad H^2 = 32, \quad H = \sqrt{32} \quad \vee \quad H = -\sqrt{32}$$

Ujemną wartość oczywiście odrzucamy, bo wysokość musi być dodatnia. To oznacza, że $H = \sqrt{32}$, co po wyłączeniu czynnika przed znak pierwiastka możemy jeszcze zapisać jako $H = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$.

Krok 6. Obliczenie objętości ostrosłupa.

Mając długość krawędzi podstawy $a = 4$ oraz wysokość bryły $H = 4\sqrt{2}$ możemy bez przeszkód obliczyć objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H, V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H, V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{2}, V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4\sqrt{2}, V = 21\frac{1}{3}\sqrt{2}$$