

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Nowa Era 2018

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	B (0, 25)	1
2	A (3 + 2√2)	1
3	D (x ^{4,5})	1
4	C (2p + 2)	1
5	A ((0, 18k - 556, 02)zł)	1
6	D (10)	1
7	B (dwa rozwiązania rzeczywiste)	1
8	B ((12, -4))	1
9	C (3)	1
10	A (4)	1
11	C (f(x) = 2(x - 1) ² + 2)	1
12	A (a _n = 2n)	1
13	C (4/8)	1
14	B (-1/2)	1
15	D (większa od 60°)	1
16	A (3/4)	1
17	C (54°)	1
18	B (60)	1
19	C (2)	1
20	C (3/2)	1
21	B (2/3)	1
22	D (2)	1
23	D (7/8)	1
24	D (2/5)	1
25	B (4, 9)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Liczba b jest przybliżeniem liczby $a = \frac{25}{4}$. Błąd względny tego przybliżenia jest równy 4%. Wskaż błąd bezwzględny tego przybliżenia.

Odpowiedź: B (0, 25)

Krok 1. Zapisanie danych z treści zadania.

Błąd bezwzględny obliczymy korzystając ze wzoru na błąd względny $\delta = \frac{\Delta x}{x}$, gdzie:

δ - błąd względny

Δx - błąd bezwzględny

x - dokładna wartość

W naszym przypadku:

$$x = a = \frac{25}{4} = 6,25$$

$$\delta = 4\% = 0,04$$

Krok 2. Obliczenie błędu bezwzględnego.

Korzystając z powyższych informacji błąd bezwzględny obliczymy w następujący sposób:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x}, 0,04 = \frac{\Delta x}{6,25}, \Delta x = 0,25$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Liczba odwrotna do $3 - 2\sqrt{2}$ jest równa:

Odpowiedź: A ($3 + 2\sqrt{2}$)

Krok 1. Zapisanie liczby odwrotnej.

Liczbą odwrotną do liczby a jest $\frac{1}{a}$, zatem w naszym przypadku liczbą odwrotną do podanej będzie $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$.

Krok 2. Usunięcie niewymierności z mianownika.

Choć poprawnie już wskazaliśmy liczbę odwrotną, to w tym konkretnym przypadku musimy jeszcze usunąć niewymierność, która pojawiła się w mianowniku.

Aby tego dokonać musimy pomnożyć licznik i mianownik ułamka przez wartość $3 + 2\sqrt{2}$, dzięki czemu w mianowniku skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Całość będzie wyglądać następująco:

$$\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2}) \cdot (3+2\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{2}}{9-8} = \frac{3+2\sqrt{2}}{1} = 3+2\sqrt{2}$$

Zadanie 3

0-1 pkt

Dla każdej dodatniej liczby x wyrażenie $\frac{x \cdot x^{1,5}}{x^{-2}}$ jest równe:

Odpowiedź: D ($x^{4,5}$)

Korzystając z działań na potęgach możemy zapisać, że:

$$\frac{x \cdot x^{1,5}}{x^{-2}} = \frac{x^1 \cdot x^{1,5}}{x^{-2}} = \frac{x^{2,5}}{x^{-2}} = x^{2,5} : x^{-2} = x^{2,5-(-2)} = x^{4,5}$$

Zadanie 4

0-1 pkt

Jeśli $p = \log_3 2$, to liczba $\log_3 36$ jest równa:

Odpowiedź: C ($2p + 2$)

Korzystając z działań na logarytmach całość możemy rozpisać w następujący sposób:

$$\log_3 36 = \log_3 (9 \cdot 4) = \log_3 9 + \log_3 4 = \dots = 2 + \log_3 4 = 2 + \log_3 2^2 = 2 + 2\log_3 2 = 2 + 2p$$

Zadanie 5

0-1 pkt

Tabela przedstawia skalę podatkową obowiązującą w 2015 r.

Podstawa obliczenia podatku w złotych		Podatek wynosi
ponad	do	
	85 528	18% minus kwota zmniejszająca podatek 556 zł 02 gr
85 528		14 839 zł 02 gr + 32% nadwyżki ponad 85 528 zł

Podstawa obliczenia podatku jest równa k , gdzie $k < 85528\text{zł}$. Wskaż wysokość należnego podatku.

Odpowiedź: A $((0, 18k - 556, 02)\text{zł})$

Podatek 18% z kwoty k (gdzie $k < 85528\text{zł}$) to będzie $0, 18k$. Od tego musimy jeszcze odjąć kwotę zmniejszającą $556, 02\text{zł}$ dzięki czemu otrzymamy zapis $0, 18k - 556, 02[\text{zł}]$.

Zadanie 6

0-1 pkt

Wskaż liczbę spełniającą nierówność: $(2 - x)^2 - 9 < (x - 3)(x + 3)$.

Odpowiedź: D (10)

Aby dowiedzieć się jaka liczba spełnia nierówność możemy podstawiać poszczególne odpowiedzi do nierówności albo też możemy po prostu naszą nierówność rozwiązać, korzystając przy okazji ze wzorów skróconego mnożenia:

$$(2 - x)^2 - 9 < (x - 3)(x + 3), \quad 4 - 4x + x^2 - 9 < x^2 - 9, \quad -4x - 5 < -9, \quad -4x < -4, \quad x > 1$$

Pamiętaj o tym, że dzieląc lub mnożąc nierówność przez liczbę ujemną musimy zmienić znak na przeciwny (tak jak przy tym ostatnim przekształceniu).

Z zaprezentowanych odpowiedzi jedyną liczbą większą od 1 jest 10.

Zadanie 7

0-1 pkt

Równanie $3x(x^2 + 1)(x^3 + 8) = 0$ ma dokładnie:

Odpowiedź: B (dwa rozwiązania rzeczywiste)

Chcąc rozwiązać to równanie musimy przyrównać poszczególne wartości do zera, zatem:

$$3x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 1 = 0 \quad \vee \quad x^3 + 8 = 0, \quad x = 0 \quad \vee \quad x^2 = -1 \quad \vee \quad x^3 = -8, \quad x = 0 \quad \vee \quad x^2 = -1 \quad \vee \quad x = -2$$

Z równania $x^2 = -1$ nie otrzymamy żadnych rozwiązań, bo nie istnieje liczba, która podniesiona do kwadratu dałaby ujemny wynik. Z tego też względu nasze równanie ma dwa rozwiązania: $x = 0$ oraz $x = -2$.

Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $(4, 0)$ i $(0, 2)$ oraz punkt:

Odpowiedź: B $((12, -4))$

Krok 1. Wyznaczenie wzoru funkcji.

Często w takich zadaniach wystarczy dobry rysunek szkicowy. W tym konkretnym przypadku niektóre współrzędne są może zbyt blisko siebie (zwłaszcza z pierwszej i drugiej odpowiedzi), ale na pewno dzięki rysunkowi dałoby się na starcie odrzucić część odpowiedzi. Jednak żeby nie kombinować z rysunkiem, to podejźmy do tego zadania nieco bardziej matematycznie.

Aby rozwiązać to zadanie musimy najpierw wyznaczyć wzór funkcji. Jak już poznamy wzór funkcji to podstawimy do niego $x = 12$ oraz $x = -12$ i sprawdzimy kiedy otrzymamy poprawną wartość współrzędnej igrekowej. Sam wzór możemy oczywiście wyznaczyć w tradycyjny sposób (np. budując układ równań), ale tutaj da się poznać ten wzór w nieco sprytniejszy sposób. Widzimy, że funkcja przecina oś igreków dla $y = 2$, bo przechodzi przez punkt $(0; 2)$. W związku z tym wiemy już, że funkcja liniowa $y = ax + b$ ma współczynnik $b = 2$. To oznacza, że funkcja przybiera postać $y = ax + 2$. Brakuje nam jeszcze współczynnika a , który poznamy podstawiając do wyznaczonego przed chwilą równania współrzędne punktu $(4; 0)$:

$$0 = 4a + 2, 4a = -2, a = -\frac{1}{2}$$

To oznacza, że wzorem funkcji jest $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Krok 2. Obliczenie wartości funkcji dla $x = 12$ oraz $x = -12$.

Teraz zgodnie z odpowiedziami musimy sprawdzić wartości tej funkcji dla $x = 12$ oraz $x = -12$:

Gdy $x = 12$ to:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 12 + 2, y = -6 + 2, y = -4$$

Gdy $x = -12$ to:

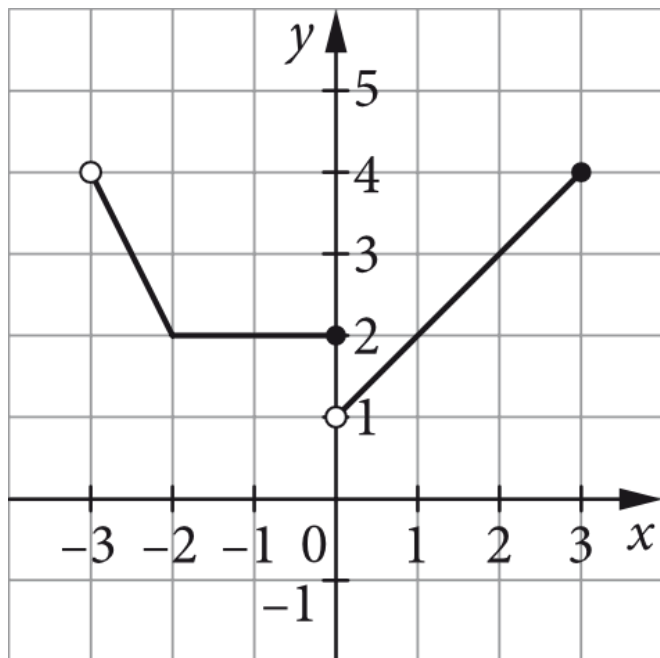
$$y = -\frac{1}{2} \cdot (-12) + 2, y = 6 + 2, y = 8$$

W związku z tym wyszło nam, że ta funkcja przechodzi przez punktu o współrzędnych $(12; -4)$ oraz $(-12; 8)$, zatem prawidłowa jest odpowiedź druga.

Zadanie 9

0-1 pkt

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Funkcja f przyjmuje największą wartość dla x równego:

Odpowiedź: C (3)

Z rysunku możemy odczytać, że największą wartość funkcja przyjmuje dla $x = 3$ i ta wartość jest równa $y = 4$. Przy okazji warto pamiętać, że niezamalowana kropka oznacza, że dany punkt nie należy do wykresu funkcji, a zamalowana oznacza, że punkt do tej funkcji należy.

Zadanie 10

0-1 pkt

Liczba -2 jest jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + c$. Oblicz c .

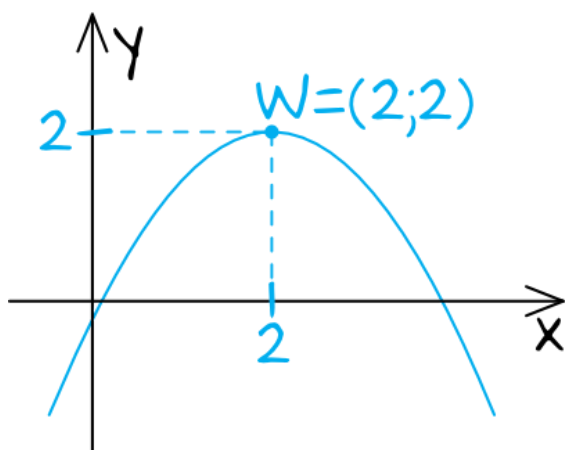
Odpowiedź: A (4)

Jeżeli liczba -2 jest jednym z miejsc zerowych funkcji to znaczy, że podstawiając $x = -2$ musimy otrzymać wartość równą 0 . W związku z tym:

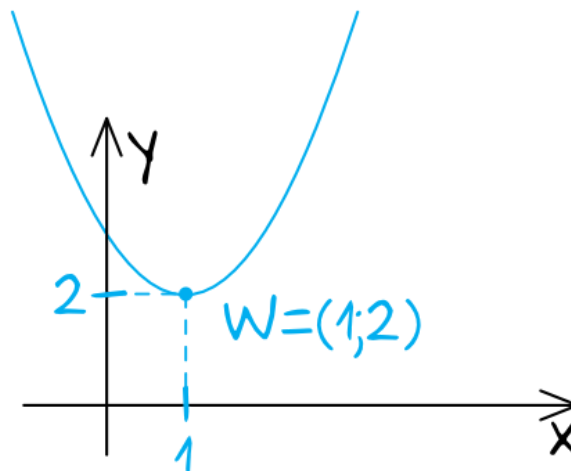
$$-\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + (-2) + c = 0, \quad -\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 + c = 0, \quad -2 - 2 + c = 0, \quad -4 + c = 0, \quad c = 4$$

Wskaż wzór funkcji kwadratowej f , której najmniejsza wartość jest równa 2.

$$f(x) = -(x-2)^2 + 2$$



$$f(x) = 2(x-1)^2 + 2$$



Odpowiedź: C ($f(x) = 2(x-1)^2 + 2$)

Krok 1. Odczytanie kluczowych informacji na temat wierzchołka paraboli.

Wszystkie funkcje zapisane są w postaci kanonicznej $y = a(x-p)^2 + q$, gdzie p oraz q to współrzędne wierzchołka $W = (p; q)$.

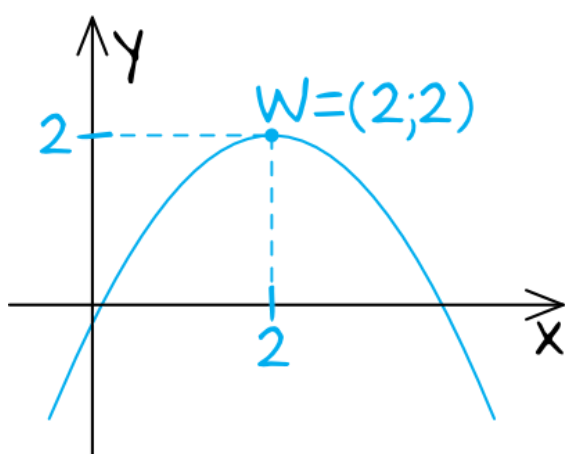
W tym zadaniu musimy pamiętać, że funkcja kwadratowa przyjmuje swoją największą lub najmniejszą wartość właśnie w wierzchołku, zatem interesują nas tylko te wzory funkcji w których $q = 2$. Takie funkcje mamy w pierwszej oraz trzeciej odpowiedzi.

Oczywiście z podanych wzorów moglibyśmy odczytać także współrzędne p wierzchołków paraboli, ale one nie są istotne z punktu widzenia tego zadania.

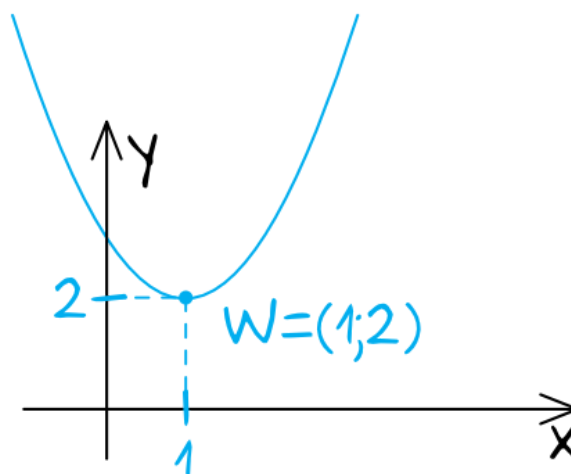
Krok 2. Ustalenie wzoru funkcji.

Do wyboru zostały nam już tylko dwie funkcje. Musimy się teraz zastanowić czym się one między sobą różnią. To co różni funkcję $f(x) = -(x-2)^2 + 2$ od $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$ to przede wszystkim wartość współczynnika a . W pierwszej funkcji mamy ten współczynnik ujemny $a = -1$, natomiast w tej drugiej współczynnik a jest dodatni, bo $a = 2$. To oznacza, że pierwsza z nich będzie miała ramiona paraboli skierowane do dołu, a druga będzie miała ramiona skierowane do góry:

$$f(x) = -(x-2)^2 + 2$$



$$f(x) = 2(x-1)^2 + 2$$



Widzimy więc wyraźnie, że funkcja $f(x) = -(x-2)^2 + 2$ przyjmuje najmniejszą wartość równą $-\infty$, a największa wartość jest tutaj równa 2. W funkcji $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$ najmniejszą wartością jest 2, a największą jest tutaj $+\infty$. Nas interesuje ten drugi przypadek, zatem poszukiwanym wzorem będzie $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$.

Zadanie 12

0-1 pkt

Dane są cztery ciągi określone wzorami ogólnymi dla $n \geq 1$. Który z nich jest ciągiem arytmetycznym?

Odpowiedź: A ($a_n = 2n$)

Już po samym zapisie wzoru powinniśmy dostrzec, że ciągiem arytmetycznym jest ciąg $a_n = 2n$, a różnica tego ciągu jest równa 2 o czym świadczy dwójka znajdująca się przed n .

Gdyby ktoś jednak nie pamiętał o tej własności, to zawsze można obliczyć np. trzy pierwsze wyrazy danego ciągu i sprawdzić, czy różnica między pierwszym i drugim wyrazem jest taka sama jak między wyrazem drugim i trzecim:

Dla ciągu $a_n = 2n$:

$$a_1 = 2 \cdot 1 = 2, \quad a_2 = 2 \cdot 2 = 4, \quad a_3 = 2 \cdot 3 = 6$$

Widzimy wyraźnie, że różnica tego ciągu jest równa 2.

Dla ciągu $a_n = n^2$:

$$a_1 = 1^2 = 1, \quad a_2 = 2^2 = 4, \quad a_3 = 3^2 = 9$$

Tutaj różnica między pierwszym i drugim wyrazem jest równa 3, a między drugim i trzecim jest równa 5. Nie jest to więc ciąg arytmetyczny.

Dla ciągu $a_n = 2^n$:

$$a_1 = 2^1 = 2, \quad a_2 = 2^2 = 4, \quad a_3 = 2^3 = 8$$

Tutaj różnica między pierwszym i drugim wyrazem jest równa 2, a między drugim i trzecim jest równa 4. Nie jest to więc ciąg arytmetyczny.

Dla ciągu $a_n = \frac{2}{n}$:

$$a_1 = \frac{2}{1} = 2, \quad a_2 = \frac{2}{2} = 1, \quad a_3 = \frac{2}{3}$$

Tutaj różnica między pierwszym i drugim wyrazem jest równa -1 , a między drugim i trzecim jest równa $-\frac{1}{3}$. Nie jest to więc ciąg arytmetyczny.

Zadanie 13

0-1 pkt

Czwarty wyraz ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich stanowi 0,64 drugiego wyrazu tego ciągu. Wskaż iloraz tego ciągu.

Odpowiedź: C ($\frac{4}{5}$)

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do zadania.

Oznaczmy sobie drugi wyraz jako x oraz czwarty wyraz jako $0,64x$, czyli:

$$a_2 = x, \quad a_4 = 0,64x$$

Krok 2. Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego.

Jak pomnożymy drugi wyraz ciągu przez q to otrzymamy trzeci wyraz, a jak jeszcze raz pomnożymy to przez q to otrzymamy wartość czwartego wyrazu, czyli zachodzi następująca równość:

$$a_4 = a_2 \cdot q \cdot q, \quad a_4 = a_2 \cdot q^2$$

Podstawiając $a_2 = x$ oraz $a_4 = 0,64x$ otrzymamy:

$$0,64x = x \cdot q^2, \quad q^2 = 0,64, \quad q = 0,8 \quad \vee \quad q = -0,8$$

Skoro wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie to na pewno q nie może być ujemne. Zostaje nam więc jedynie $q = 0,8$, czyli $q = \frac{4}{5}$.

Zadanie 14

0-1 pkt

Wartość $\cos 120^\circ$ jest równa:

Odpowiedź: B ($-\frac{1}{2}$)

W tym zadaniu musimy skorzystać ze wzorów redukcyjnych np. ze wzoru:

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

Za pomocą tego wzoru możemy zapisać, że:

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ$$

Wyszło nam, że $\cos 120^\circ$ ma wartość dokładnie taką samą jak $-\sin 30^\circ$. Wartość $\sin 30^\circ$ możemy odczytać z tablic i jest to $\frac{1}{2}$, zatem dodając do tego znak ujemny otrzymamy informację, że $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 15

0-1 pkt

Dla pewnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość $4\cos \alpha = 1$. Miara kąta α jest:

Odpowiedź: D (większa od 60°)

Krok 1. Przekształcenie równania.

Przekształcając równanie z treści zadania otrzymamy:

$$4\cos \alpha = 1, \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

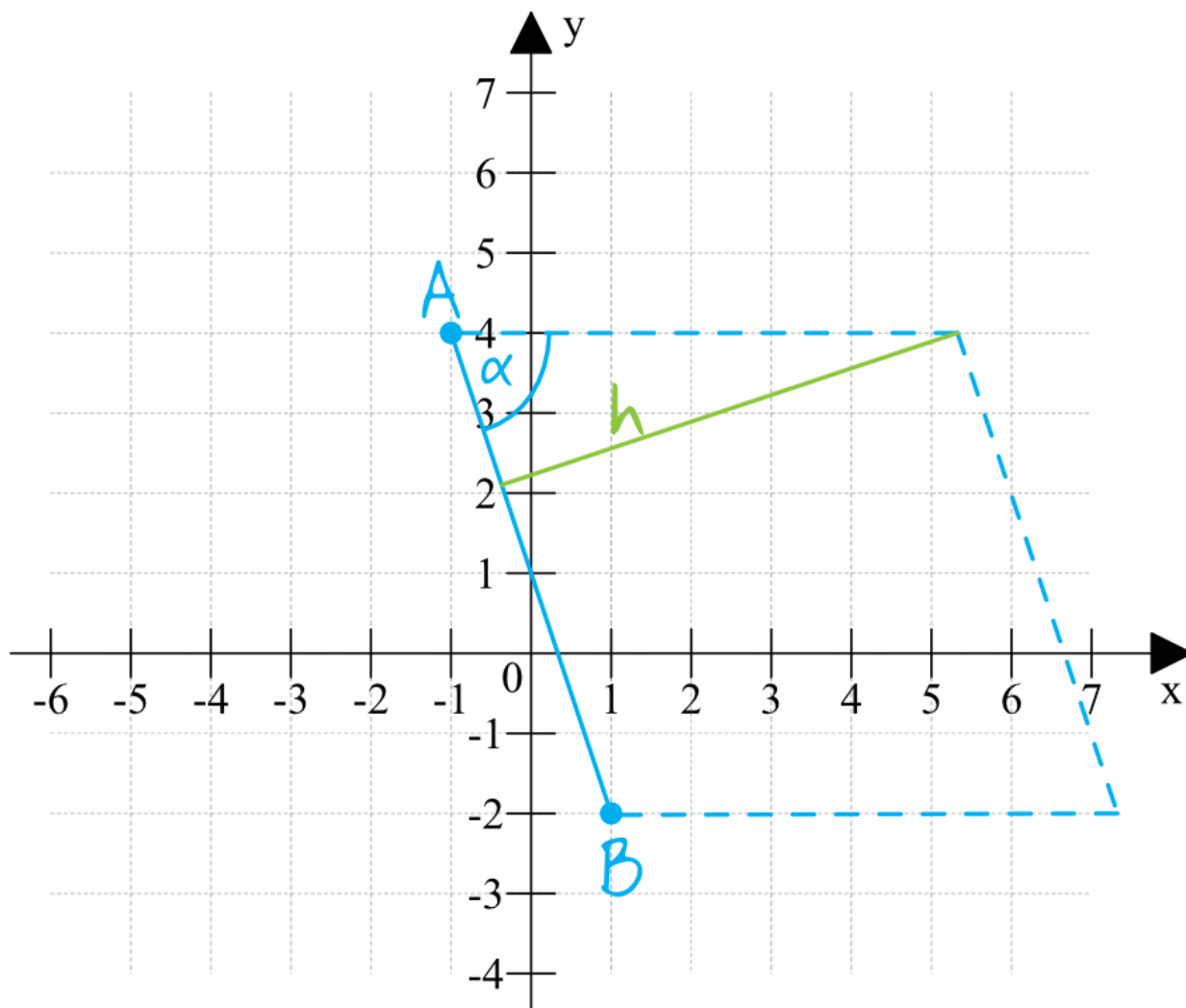
Krok 2. Odczytanie miary kąta z tablic trygonometrycznych.

Z tablic trygonometrycznych możemy odczytać, że cosinus przyjmuje wartość 0,25 dla kąta o mierze około 76° , bowiem $\cos 76^\circ \approx 0,2493$. To oznacza, że miara kąta α jest większa od 60° .

Zadanie 16

0-1 pkt

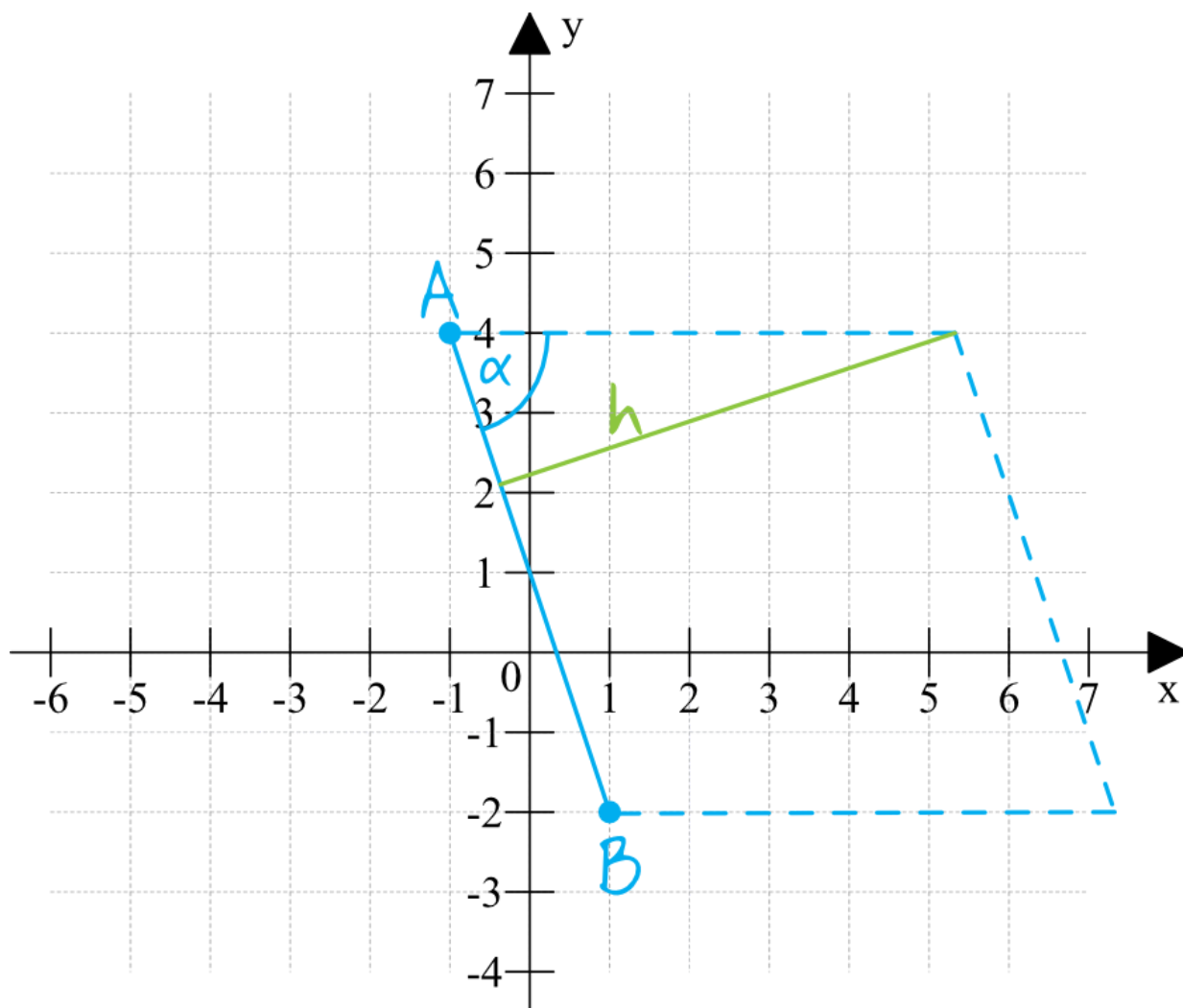
Punkty $A = (-1, 4)$ i $B = (1, -2)$ są sąsiednimi wierzchołkami rombu $ABCD$ o polu równym 30. Sinus kąta ostrego tego rombu jest równy:



Odpowiedź: A ($\frac{3}{4}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Narysujmy sobie układ współrzędnych, zaznaczmy znane nam punkty oraz poszukiwany kąt ostry:



Z rysunku jasno wynika, że do obliczenia sinusa kąta α będziemy potrzebować znać wysokość rombu oraz długość jego boku.

Krok 2. Obliczenie długości boku rombu.

Znając współrzędne obydwu punktów możemy obliczyć długość odcinka AB (czyli długość boku rombu):

$$|AB| = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-2 - 4)^2}, |AB| = \sqrt{2^2 + (-6)^2}, |AB| = \sqrt{4 + 36}, |AB| = \sqrt{40}, |AB| = \sqrt{4 \cdot 10}, |AB| = 2\sqrt{10}$$

Możemy więc powiedzieć, że romb ma bok o długości $a = 2\sqrt{10}$.

Krok 3. Obliczenie wysokości rombu.

Pole rombu możemy obliczyć ze wzoru $P = ah$. Skoro $P = 30$ oraz $a = 2\sqrt{10}$, to:

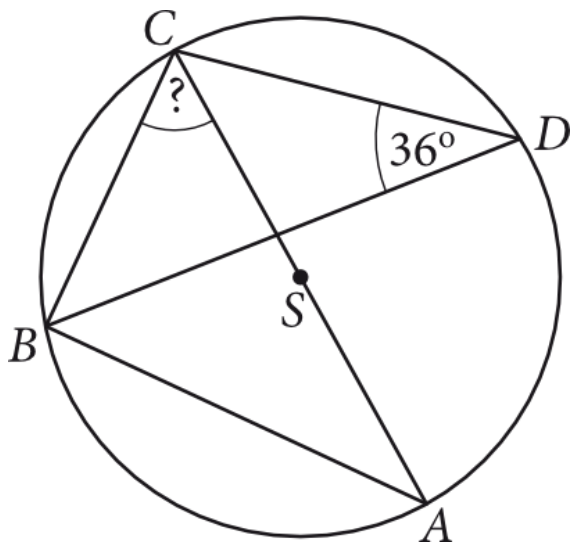
$$30 = 2\sqrt{10} \cdot h, h = \frac{30}{2\sqrt{10}}, h = \frac{15}{\sqrt{10}}, h = \frac{15 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}, h = \frac{15\sqrt{10}}{10}, h = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

Krok 4. Obliczenie wartości sinusa kąta α .

Znając długość boku rombu oraz jego wysokość możemy teraz zapisać, że:

$$\sin \alpha = \frac{h}{a}, \sin \alpha = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{2}}{2\sqrt{10}}, \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{2} : 2\sqrt{10}, \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{10}}, \sin \alpha = \frac{3}{4}$$

Punkty A, B, C, D są położone na okręgu o środku S tak, jak przedstawiono na rysunku. Odcinek AC jest średnicą tego okręgu. Wskaż miarę kąta BCA .



Odpowiedź: C (54°)

Krok 1. Dostrzeżenie trójkąta prostokątnego.

Jeżeli odcinek AC jest średnicą okręgu, to z własności trójkątów wpisanych w okrąg możemy wywnioskować, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym.

Krok 2. Wyznaczenie miary kąta BAC .

Kąt BAC jest kątem wpisanym, który jest oparty na tym samym łuku co znany nam kąt BDC . Skoro tak, to z własności takich trójkątów wynika, że będą miały one równą miarę, stąd też:

$$|\angle BAC| = |\angle BDC| = 36^\circ$$

Krok 3. Obliczenie miary kąta BCA .

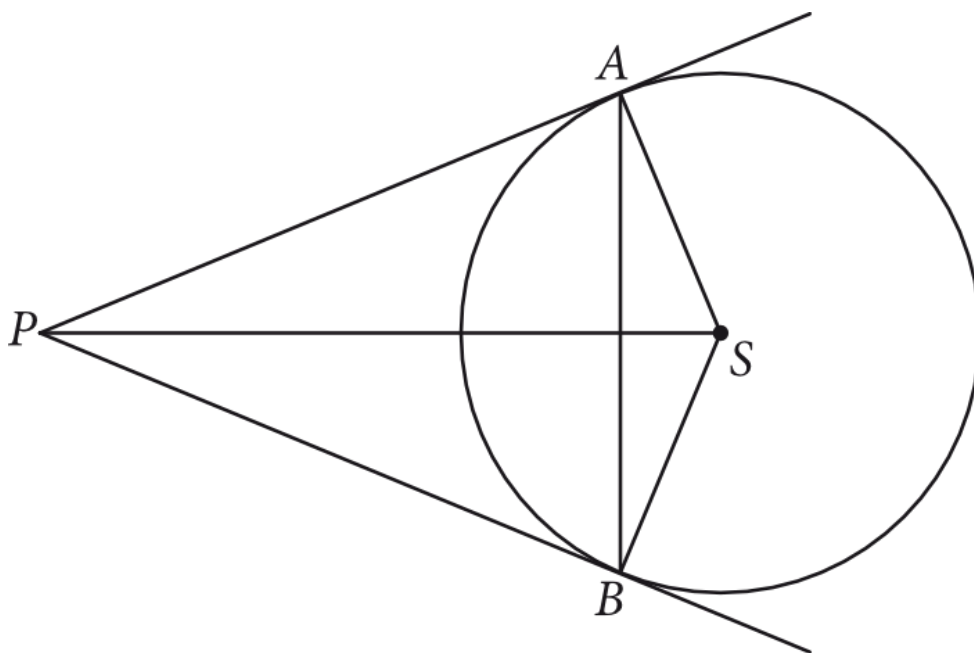
Spójrzmy na trójkąt ABC . Znamy już dwie miary kątów w tym trójkącie, czyli $|\angle CBA| = 90^\circ$ oraz $|\angle BAC| = 36^\circ$. W związku z tym miara kąta BCA będzie równa:

$$|\angle BCA| = 180^\circ - 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

Zadanie 18

0-1 pkt

Z punktu P poprowadzono dwie styczne do okręgu w punktach A i B (zobacz rysunek). Promień okręgu ma długość 5, a odległość punktu P od środka S tego okręgu jest równa 13. Ile wynosi pole deltoidu $PBSA$?



Odpowiedź: B (60)

Krok 1. Obliczenie długości odcinka PA .

Styczna do okręgu tworzy z promieniem zawsze kąt prosty, a to oznacza, że trójkąt PSA jest prostokątny. Znamy dwie długości w tym trójkącie, a mianowicie $|AS| = 5$ oraz $|PS| = 13$. Możemy więc wyznaczyć długość odcinka PA za pomocą Twierdzenia Pitagorasa:

$$5^2 + |PA|^2 = 13^2, \quad 25 + |PA|^2 = 169, \quad |PA|^2 = 144, \quad |PA| = 12 \quad \vee \quad |PA| = -12$$

Ujemną długość oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $|PA| = 12$.

Krok 2. Obliczenie pola trójkąta PSA .

Trójkąt PSA jest połową naszego deltoidu. Jeżeli więc poznamy pole tego trójkąta, to za chwilę bez problemu obliczymy pole deltoidu. Znamy długości dwóch przyprostokątnych w tym trójkącie, zatem znamy miary podstawy i wysokości, czyli:

$$P_{PSA} = \frac{1}{2}ah, \quad P_{PSA} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12, \quad P_{PSA} = 30$$

Krok 3. Obliczenie pola deltoidu $PBSA$.

Pole deltoidu będzie dwukrotnie większe od wyznaczonego przed chwilą pola trójkąta PSA , zatem:

$$P = 2 \cdot P_{PSA}, \quad P = 2 \cdot 30, \quad P = 60$$

Zadanie 19

0-1 pkt

Jeśli prosta o równaniu $x + \frac{1}{2}y + a = 0$ przechodzi przez punkt $P = (-1, -2)$, to a jest równe:

Odpowiedź: C (2)

Wartość a wyznaczymy podstawiając współrzędne punktu P do równania prostej. Podstawiając zatem $x = -1$ oraz $y = -2$ otrzymamy:

$$-1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) + a = 0, \quad -1 + (-1) + a = 0, \quad -1 - 1 + a = 0, \quad -2 + a = 0, \quad a = 2$$

Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej o równaniu $2x + 3y - 5 = 0$ jest równy:

Odpowiedź: C ($\frac{3}{2}$)

Krok 1. Zapisanie równania w postaci kierunkowej.

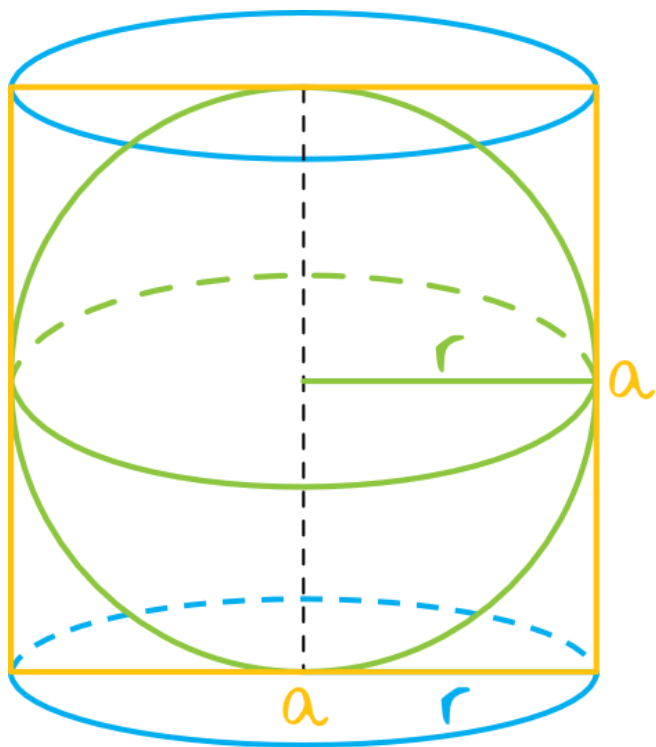
Aby móc wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej, to najpierw musimy naszą pierwszą prostą zapisać w postaci kierunkowej, a nie ogólnej, jak to ma miejsce w treści zadania. Aby otrzymać postać kierunkową $y = ax + b$ wystarczy doprowadzić do sytuacji w której po lewej stronie równania mamy samego igreka, a po prawej mamy całą resztą wyrazów, zatem:

$$2x + 3y - 5 = 0, \quad 3y = -2x + 5, \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

Krok 2. Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej.

Aby dwie proste były względem siebie prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych musi być równy -1 . Nasza pierwsza prosta ma współczynnik $a = -\frac{2}{3}$, zatem prosta do niej prostopadła musi mieć $a = \frac{3}{2}$, bo $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$.

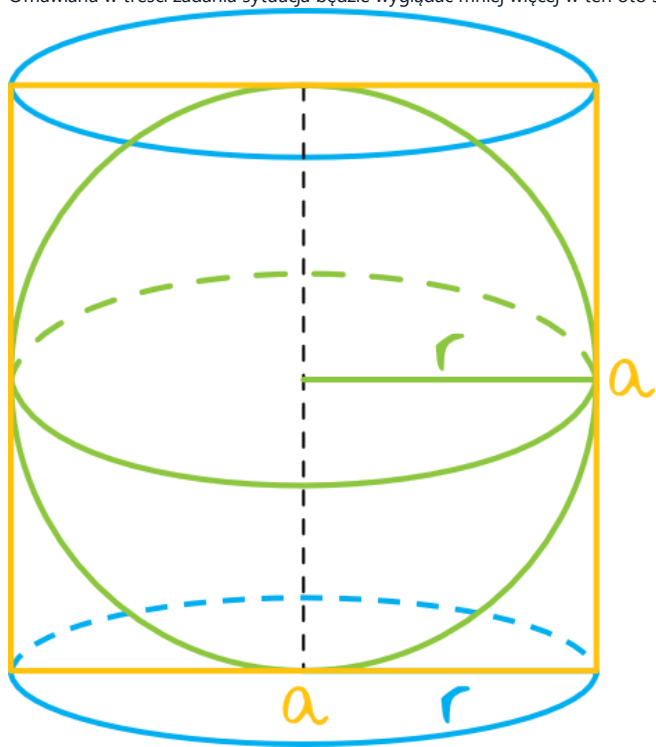
W walec o przekroju będącym kwadratem wpisano kulę. Jaki jest stosunek pola powierzchni kuli do pola powierzchni całkowitej walca?



Odpowiedź: B ($\frac{2}{3}$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Omawiana w treści zadania sytuacja będzie wyglądać mniej więcej w ten oto sposób:



Krok 2. Obliczenie pól powierzchni kuli i walca.

Pola powierzchni kuli i walca obliczymy z następujących wzorów:

$$P_k = 4\pi r^2, P_w = 2\pi r(r + h)$$

Z rysunku wynika, że $r = \frac{1}{2}a$ oraz że $h = a$. Podstawiając zatem te dane do powyższych wzorów otrzymamy:

$$P_k = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2, P_k = 4\pi \cdot \frac{1}{4}a^2, P_k = a^2\pi, \text{ oraz }, P_w = 2\pi \cdot \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{1}{2}a + a\right), P_w = 2\pi \cdot \frac{1}{4}a^2 + 2\pi \frac{1}{2}a^2, P_w = \frac{1}{2}a^2\pi + a^2\pi, P_w = \frac{3}{2}a^2\pi$$

Krok 3. Obliczenie stosunku pól powierzchni kuli i walca.

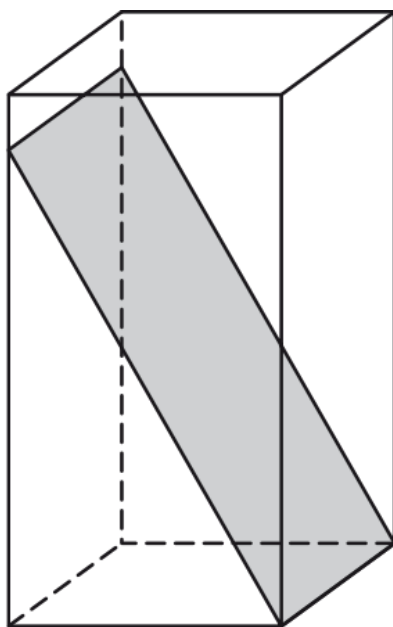
Naszym zadaniem jest obliczyć stosunek pola powierzchni kuli do pola powierzchni całkowitej walca, zatem:

$$\frac{P_k}{P_w} = \frac{a^2\pi}{\frac{3}{2}a^2\pi}, \frac{P_k}{P_w} = \frac{1}{\frac{3}{2}}, \frac{P_k}{P_w} = 1 : \frac{3}{2}, \frac{P_k}{P_w} = 1 \cdot \frac{2}{3}, \frac{P_k}{P_w} = \frac{2}{3}$$

Zadanie 22

0-1 pkt

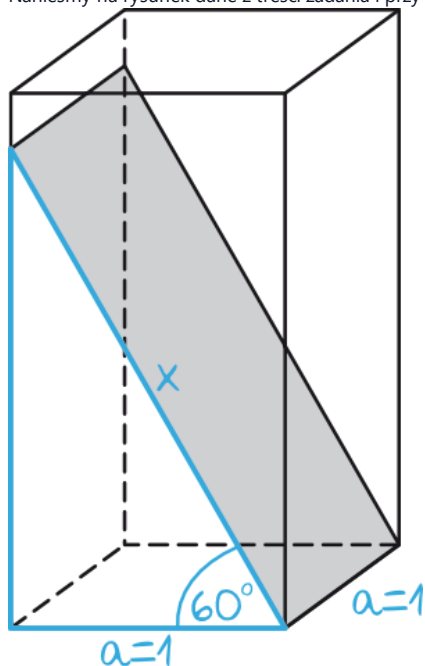
Krawędź podstawy graniastopu prawidłowego czworokątnego jest równa 1. Graniastop przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt 60° (zobacz rysunek). Oblicz pole otrzymanego przekroju.



Odpowiedź: D (2)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanieśmy na rysunek dane z treści zadania i przy okazji zaznaczmy kluczowy trójkąt prostokątny:



Krok 2. Obliczenie długości drugiego boku prostokąta.

Drugi bok prostokąta jest przeciwprostokątną naszego zaznaczonego powyżej trójkąta prostokątnego. Korzystając z funkcji trygonometrycznych możemy zapisać, że:

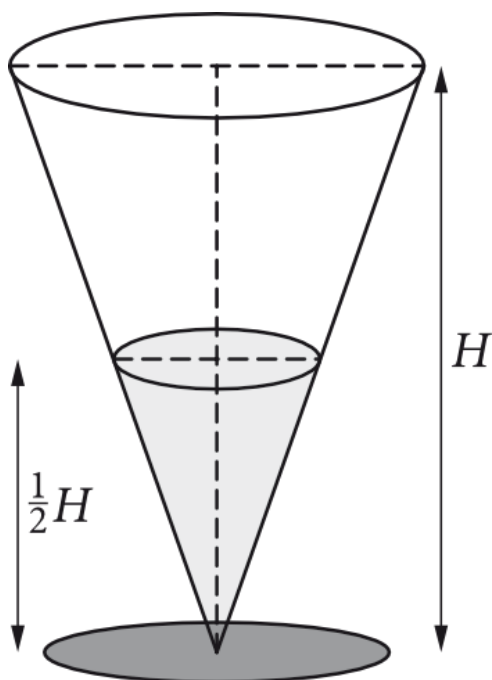
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{x}, \quad x = 2$$

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni otrzymanego przekroju.

Nasz przekrój jest prostokątem o wymiarach 1×2 , zatem:

$$P = 1 \cdot 2, \quad P = 2$$

Do wazonu w kształcie odwróconego stożka nalano tyle wody, aby sięgnęła do połowy jego wysokości (patrz rysunek). Jaka część objętości wazonu nie została napełniona?



Odpowiedź: D ($\frac{7}{8}$)

Krok 1. Obliczenie skali podobieństwa.

Obliczmy skalę podobieństwa tych dwóch stożków. Jeżeli duży stożek (czyli cały wazon) potraktujemy jako bryłę podstawową, a mały stożek (czyli napełnioną wodę) jako bryłę podobną, to widzimy wyraźnie, że skala podobieństwa tych brył będzie równa $k = \frac{1}{2}$, bo wysokość małego stożka jest dwukrotnie mniejsza od stożka dużego. Możemy nawet zapisać, że:

$$k = \frac{\frac{1}{2}H}{H}, \quad k = \frac{1}{2}$$

Krok 2. Obliczenie stosunku objętości dwóch stożków.

Z własności brył podobnych wynika, że jeżeli jakaś bryła jest narysowana w skali podobieństwa równej k , to jej objętość będzie k^3 razy większa. W naszym przypadku $k = \frac{1}{2}$, zatem jeżeli założymy sobie, że duży stożek ma objętość równą V_d , to bryła podobna (czyli mały stożek) ma tę objętość równą:

$$V_m = V_d \cdot k^3, \quad V_m = V_d \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad V_m = \frac{1}{8} V_d$$

Krok 3. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Wyszło nam, że objętość małego stożka stanowi $\frac{1}{8}$ objętości dużego stożka. To oznacza, że woda zapełniła zaledwie $\frac{1}{8}$ wazonu. Nas pytają się o to jaka część objętości wazonu nie jest napełniona, a będzie to oczywiście $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Zadanie 24

0-1 pkt

W pojemniku znajdują się kule białe, czarne i czerwone. Kul białych jest cztery razy więcej niż kul czarnych, a prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej jest równe $\frac{1}{2}$. Losujemy jedną kulę. Ile wynosi prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

Odpowiedź: D ($\frac{2}{5}$)

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Przyjmijmy sobie, że x to liczba kul czarnych. Z treści zadania wynika, że kul białych będziemy mieć cztery razy więcej, zatem będziemy ich mieć $4x$. Łącznie kul czarnych i białych mamy zatem $x + 4x = 5x$.

Z treści zadania wynika, że wylosowanie kuli czerwonej jest równe $\frac{1}{2}$, a to prowadzi nas do wniosku, że kul czerwonych musi być tyle samo ile jest łącznie kul białych i czarnych. Możemy więc zapisać, że kul czerwonych mamy $5x$.

To oznacza, że łącznie wszystkich kul (czyli tym samym zdarzeń elementarnych) będziemy mieć:

$$|\Omega| = x + 4x + 5x = 10x$$

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Sprzyjającym zdarzeniem jest wylosowanie kuli białej. Białych kul mamy $4x$, stąd też możemy napisać, że $|A| = 4x$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

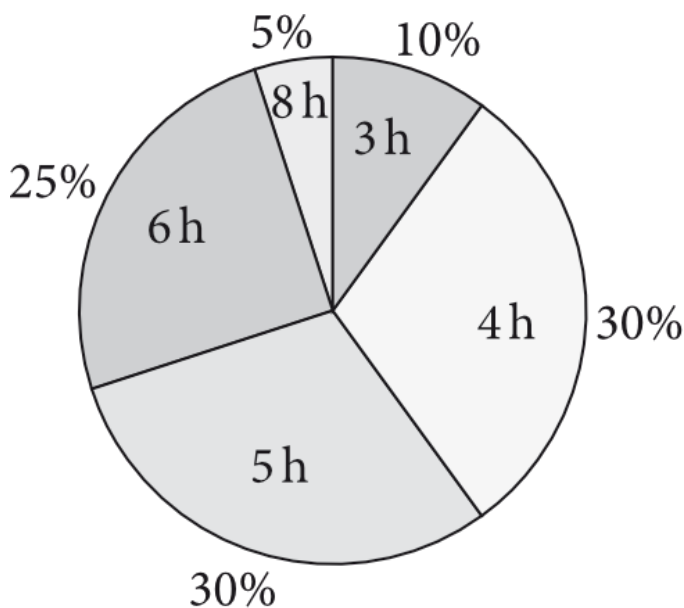
Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4x}{10x} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Zadanie 25

0-1 pkt

Na dwa tygodnie przed egzaminem maturalnym uczniom klas trzecich pewnego liceum zadano pytanie: „Ile godzin dziennie poświęcasz nauce?”. Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie kołowym.



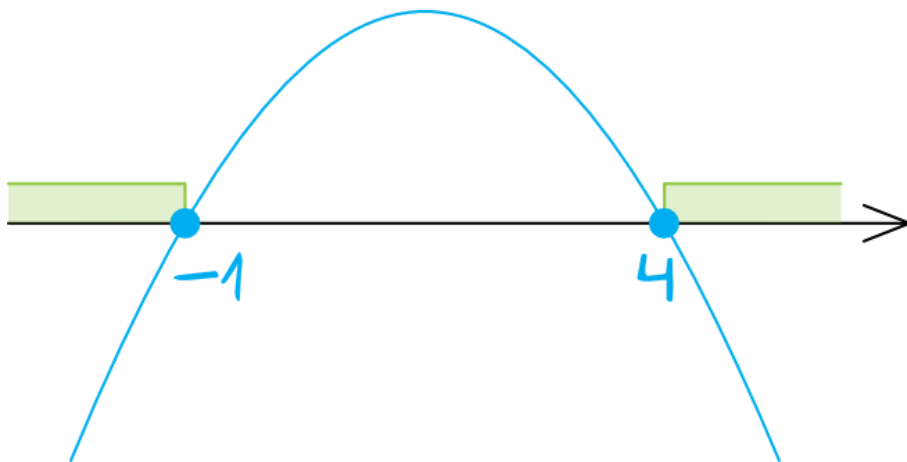
Wskaż średnią liczbę godzin przeznaczonych przez uczniów tej szkoły na naukę.

Odpowiedź: B (4,9)

Korzystając z informacji zawartych na diagramie możemy zapisać, że średnia liczba godzin będzie równa:

$$0,1 \cdot 3h + 0,3 \cdot 4h + 0,3 \cdot 5h + 0,25 \cdot 6h + 0,05 \cdot 8h = , = 0,3h + 1,2h + 1,5h + 0,4h = 4,9h$$

Rozwiąż nierówność: $x(x-4) \leq (2x+1)(x-4)$.



Odpowiedź: $x \in (-\infty; -1] \cup [4; \infty)$

Krok 1. Zapisanie nierówności w postaci ogólnej (lub iloczynowej).

Aby przystąpić do rozwiązywania nierówności musimy przenieść wszystkie wyrazy na lewą stronę, tak aby po prawej stronie było tylko 0. W związku z tym:

$$x(x-4) \leq (2x+1)(x-4), \quad x(x-4) - (2x+1)(x-4) \leq 0$$

Tutaj się na chwilę zatrzymamy. Mamy tak naprawdę teraz dwie możliwości. Pierwszą z nich jest osiągnięcie postaci ogólnej, a więc mnożąc przez siebie te wszystkie nawiasy otrzymamy:

$$x(x-4) - (2x+1)(x-4) \leq 0, \quad x^2 - 4x - (2x^2 - 8x + x - 4) \leq 0, \quad x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - x + 4 \leq 0, \quad -x^2 + 3x + 4 \leq 0$$

Jednak tutaj da się postąpić nieco sprytniej i możemy tę nierówność zapisać w postaci iloczynowej, dzięki czemu później szybciej wyznaczymy miejsca zerowe (uwaga na znaki!):

$$x(x-4) - (2x+1)(x-4) \leq 0, \quad (x-2x-1)(x-4) \leq 0, \quad (-x-1)(x-4) \leq 0$$

Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Jeżeli mamy postać ogólną to miejsca zerowe obliczymy z użyciem klasycznej delty:

Współczynniki: $a = -1$, $b = 3$, $c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 9 - (-16) = 9 + 16 = 25, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

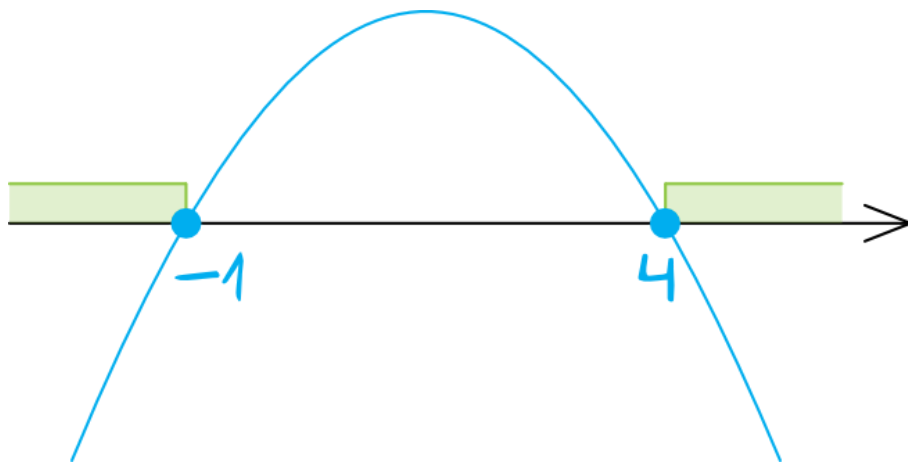
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8}{-2} = 4, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

Jeżeli mieliśmy postać iloczynową, to wartość każdego z nawiasów musimy teraz przyrównać do zera:

$$-x-1=0 \quad \vee \quad x-4=0, \quad x=-1 \quad \vee \quad x=4$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Współczynnik a jest ujemny, bo $a = -1$, więc parabola będzie mieć ramiona skierowane do dołu. Zaznaczamy więc obliczone przed chwilą miejsca zerowe (kropki zamalowane, bo w nierówności mamy znak $\leq$) i nasza parabola będzie wyglądać w ten sposób:



Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas miejsca w których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od zera. To oznacza, że rozwiązaniem tej nierówności jest przedział $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Zadanie 27

0-2 pkt

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{4n+5}{2n+1}$ dla $n \geq 1$. Sprawdź, czy istnieje wyraz tego ciągu równy $2\frac{1}{2}$.

Odpowiedź: Taki wyraz nie istnieje

Aby sprawdzić, czy w danym ciągu istnieje wyraz równy $2\frac{1}{2}$ wystarczy rozwiązać następujące równanie:

$$\frac{4n+5}{2n+1} = 2\frac{1}{2} \quad / \cdot (2n+1), \quad 4n+5 = 2\frac{1}{2} \cdot (2n+1), \quad 4n+5 = 5n+2\frac{1}{2}, \quad -n = -2\frac{1}{2}, \quad n = 2\frac{1}{2}$$

Otrzymany wynik nie jest liczbą naturalną, a to sprawia, że liczba $2\frac{1}{2}$ nie może być jednym z wyrazów tego ciągu.

Zadanie 28

0-2 pkt

Udowodnij, że nierówność $(x^2 - 3)^2 + x^4 \geq 4\frac{1}{2}$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej.

Odpowiedź: Udowodniono upraszcz

Krok 1. Przeniesienie wyrazów na lewą stronę.

Naszym zadaniem będzie przeniesienie wszystkich wyrazów na lewą stronę oraz umiejętne skorzystanie z wzorów skróconego mnożenia. Całość będzie wyglądać następująco:

$$(x^2 - 3)^2 + x^4 \geq 4\frac{1}{2}, \quad (x^2 - 3)^2 + x^4 - 4\frac{1}{2} \geq 0, \quad x^4 - 6x^2 + 9 + x^4 - 4\frac{1}{2} \geq 0, \quad 2x^4 - 6x^2 + 4\frac{1}{2} \geq 0 \quad / \cdot 2, \quad 4x^4 - 12x^2 + 9 \geq 0, \quad (2x^2 - 3)^2 \geq 0$$

Krok 2. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Z racji tego iż każda liczba podniesiona do kwadratu daje wynik nieujemny, to wartość $(2x^2 - 3)^2$ jest na pewno większa od zera lub równa zero, zatem faktycznie ta nierówność będzie spełniona dla każdej liczby rzeczywistej.

Dla pewnej liczby rzeczywistej x liczby: $1 - x$, $2 - 3x$, $10 + 2x$ są trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$. Wyznacz x oraz oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Odpowiedź: $S_{10} = 155$

Krok 1. Obliczenie wartości x .

Z własności ciągów arytmetycznych wynika, że dla trzech kolejno następujących po sobie wyrazów zachodzi następująca relacja:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Podstawiając do tego wzoru wartości podane w treści zadania otrzymamy:

$$2 - 3x = \frac{(1 - x) + (10 + 2x)}{2}, \quad 2 - 3x = \frac{11 + x}{2}, \quad 4 - 6x = 11 + x, \quad -7x = 7, \quad x = -1$$

Krok 2. Obliczenie wartości pierwszego, drugiego i trzeciego wyrazu.

Skoro $x = -1$, to podstawiając tę wartość do wyrażeń podanych w treści zadania otrzymamy:

$$a_1 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2, \quad a_2 = 2 - 3 \cdot (-1) = 2 - (-3) = 5, \quad a_3 = 10 + 2 \cdot (-1) = 10 - 2 = 8$$

Krok 3. Obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego.

Znając wartość pierwszego i drugiego wyrazu ciągu bez problemu obliczymy różnicę ciągu:

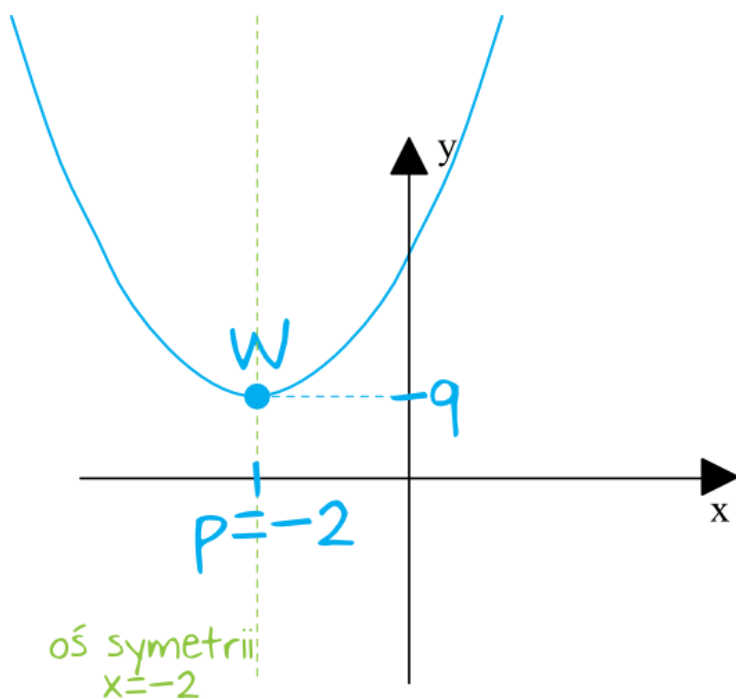
$$r = a_2 - a_1, \quad r = 5 - 2, \quad r = 3$$

Krok 4. Obliczenie sumy dziesięciu pierwszych wyrazów.

Znamy wartość $a_1 = 2$, wiemy też że $r = 3$, zatem możemy obliczyć sumę dziesięciu pierwszych wyrazów:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n, \quad S_{10} = \frac{2 \cdot 2 + (10-1) \cdot 3}{2} \cdot 10, \quad S_{10} = \frac{4 + 9 \cdot 3}{2} \cdot 10, \quad S_{10} = \frac{4 + 27}{2} \cdot 10, \quad S_{10} = \frac{31}{2} \cdot 10, \quad S_{10} = 15,5 \cdot 10, \quad S_{10} = 155$$

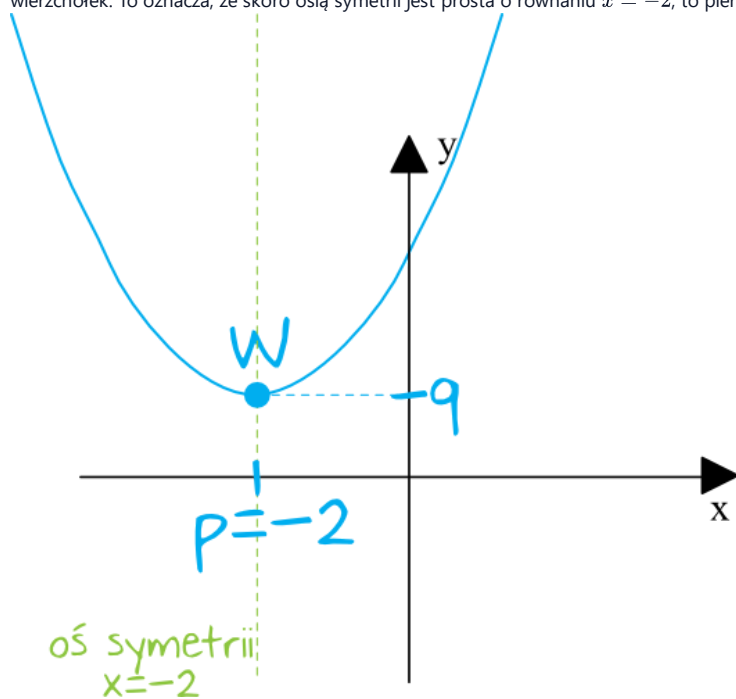
Oś symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + 3$, gdzie $a \neq 0$, jest prosta o równaniu $x = -2$. Wierzchołek paraboli leży na prostej o równaniu $y = -x + 2$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej lub kanonicznej.



Odpowiedź: $y = -\frac{1}{4}(x+2)$

Krok 1. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli.

Na początek wyznaczmy współrzędne wierzchołka paraboli $W = (p; q)$. Jedną z własności paraboli jest to, że jej oś symetrii przechodzi zawsze przez wierzchołek. To oznacza, że skoro osią symetrii jest prosta o równaniu $x = -2$, to pierwszą współrzędną wierzchołka będzie $p = -2$.



Wiemy też, że wierzchołek leży na prostej o równaniu $y = -x + 2$. Skoro tak, to obliczmy wartość dla $x = -2$, czyli wartość przyjmowaną w wierzchołku:

$$y = -(-2) + 2, y = 2 + 2, y = 4$$

To oznacza, że współrzędne wierzchołka to $W = (-2; 4)$.

Krok 2. Wyznaczenie wzoru w postaci kanonicznej.

Skoro znamy współrzędne wierzchołka paraboli to możemy skorzystać z postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$. Podstawiając zatem $p = -2$ oraz $q = 4$ otrzymamy:

$$y = a(x - (-2))^2 + 4, y = a(x + 2)^2 + 4$$

Do pełnego wzoru brakuje nam jeszcze tylko poznania współczynnika a . Aby poznać pełny wzór tej funkcji musimy podstawić do powyższej postaci współrzędne jakiegoś punktu (innego niż wierzchołek) przez który ta parabola przechodzi.

Tu z pomocą przyjdzie nam ciekawa informacja, która jest zaszyta w postaci ogólnej, która pojawiła się w treści zadania. Wiemy, że funkcja ta w postaci ogólnej przybiera postać $f(x) = ax^2 + bx + 3$. Niezależnie od tego jakie są wartości współczynników a oraz b , to podstawiając $x = 0$ otrzymamy informację, że:

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 3, f(0) = 0 + 0 + 3, f(0) = 3$$

To oznacza, że parabola na pewno przechodzi przez punkt A , o współrzędnych $A = (0; 3)$. Podstawiając teraz te współrzędne do postaci $y = a(x + 2)^2 + 4$ wyznaczymy brakujący współczynnik a :

$$3 = a \cdot (0 + 2)^2 + 4, 3 = a \cdot 2^2 + 4, 3 = a \cdot 4 + 4, 4a = -1, a = -\frac{1}{4}$$

Możemy więc już zapisać, że wzór funkcji w postaci kanonicznej to $y = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 4$.

Na ściankach symetrycznej dwunastościennej kostki do gry zapisano liczby $1, 2, 3, \dots, 12$ (jak na rysunku). Rzucamy tą kostką trzy razy i zapisujemy wyrzucone liczby w kolejności otrzymywania, tworząc ciąg trójwyrazowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że utworzymy w ten sposób ciąg geometryczny o ilorazie całkowitym. Uwaga. Ciąg stały jest ciągiem geometrycznym.



Odpowiedź: $P(A) = \frac{1}{108}$

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Rzucamy trzykrotnie dwunastościenną kostką. W każdym rzucie możemy otrzymać jeden z dwunastu wyników, zatem wszystkich zdarzeń elementarnych zgodnie z regułą mnożenia będziemy mieć:

$$|\Omega| = 12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$$

Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Zdarzeniem sprzyjającym jest sytuacja w której wylosowane liczby utworzą ciąg geometryczny, czyli przykładowo takimi zdarzeniami mogą być 2, 4, 8 lub też 1, 3, 9. Musimy wypisać wszystkie możliwe warianty. Warto tutaj zwrócić uwagę, że iloraz q w takich ciągach musi być liczbą naturalną. Jakbyśmy mieli q w postaci liczby niecałkowitej (np. w postaci ułamka typu $\frac{1}{2}$) to w ciągu będą pojawiać nam się liczby niecałkowite, a takich na kości nie mamy. Najprościej będzie wypisać wszystkie warianty w następujący sposób:

Gdy $q = 1$:

$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), \dots, (12, 12, 12)$

Mamy więc tutaj 12 takich zdarzeń.

Gdy $q = 2$:

$(1, 2, 4), (2, 4, 8), (3, 6, 12)$

Mamy więc tutaj 3 takie zdarzenia.

Gdy $q = 3$:

$(1, 3, 9)$

Mamy więc tutaj 1 takie zdarzenie.

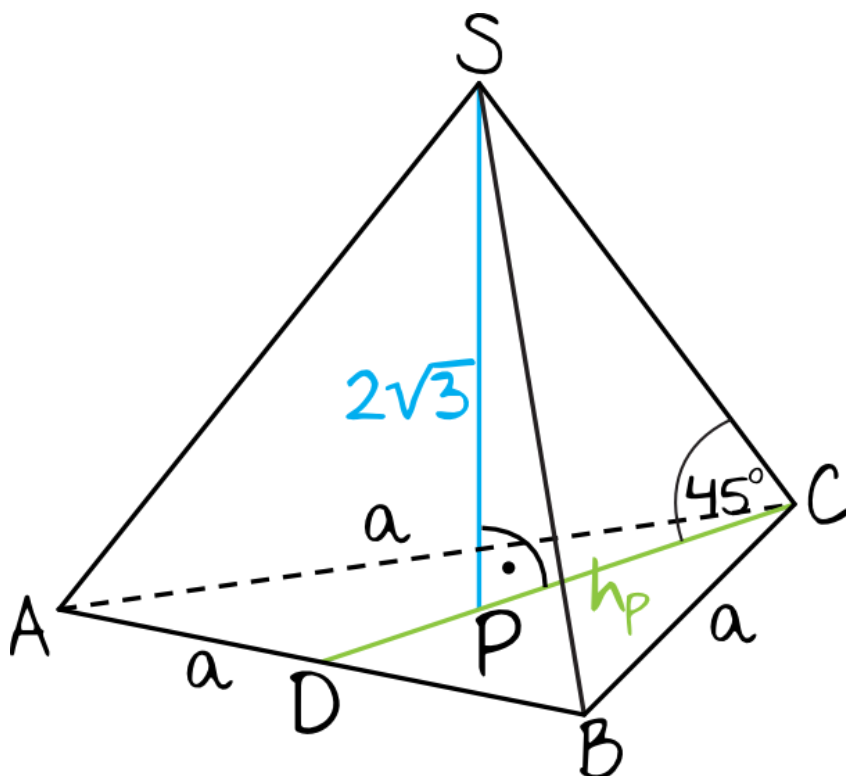
Łącznie zdarzeń sprzyjających mamy zatem:

$$|A| = 12 + 3 + 1 = 16$$

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{1728} = \frac{1}{108}$$

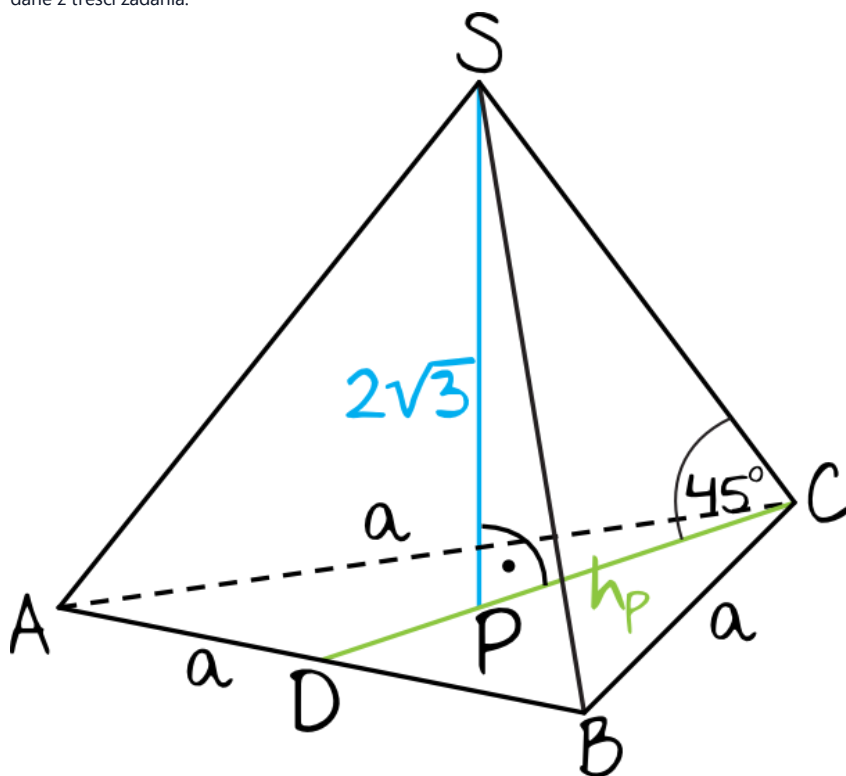
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o wysokości $2\sqrt{3}$ krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 45° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Odpowiedź: $V = 18$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Wiemy, że ostrosłup jest prawidłowy trójkątny, czyli w podstawie będzie miał trójkąt równoboczny. Zróbmy więc prosty rysunek szkicowy i nanieśmy na niego dane z treści zadania:



Krok 2. Wyznaczenie długości odcinka PC .

Patrząc się na nasz szkicowy rysunek powinniśmy dostrzec, że trójkąt prostokątny PCS jest jednocześnie trójkątem równoramiennym. Wynika to wprost z własności trójkątów prostokątnych - kiedy jeden kąt ostry ma miarę 45° , to i drugi kąt ostry w tym trójkącie ma taką miarę. Z tego też względu długości przyprostokątnych w tym trójkącie są jednakowe, a skoro wysokość SP ma miarę $2\sqrt{3}$, to i odcinek PC będzie miał miarę $|PC| = 2\sqrt{3}$.

Krok 3. Obliczenie długości wysokości trójkąta znajdującego się w podstawie.

Odcinek PC stanowi $\frac{2}{3}$ długości wysokości trójkąta równobocznego, który znalazł się w podstawie. W związku z tym:

$$\frac{2}{3}h_p = 2\sqrt{3} \quad \Bigg/ \cdot 3, \quad 2h_p = 6\sqrt{3}, \quad h_p = 3\sqrt{3}$$

Krok 4. Obliczenie długości krawędzi podstawy.

Znając wysokość trójkąta równobocznego możemy bez problemu obliczyć długość boku trójkąta. Dokonamy tego korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego:

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad 3\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Bigg/ \cdot 2, \quad 6\sqrt{3} = a\sqrt{3}, \quad a = 6$$

Krok 5. Obliczenie objętości ostrosłupa.

Wiedząc, że bok trójkąta równobocznego ma długość $a = 6$ możemy przejść do obliczenia pola podstawy:

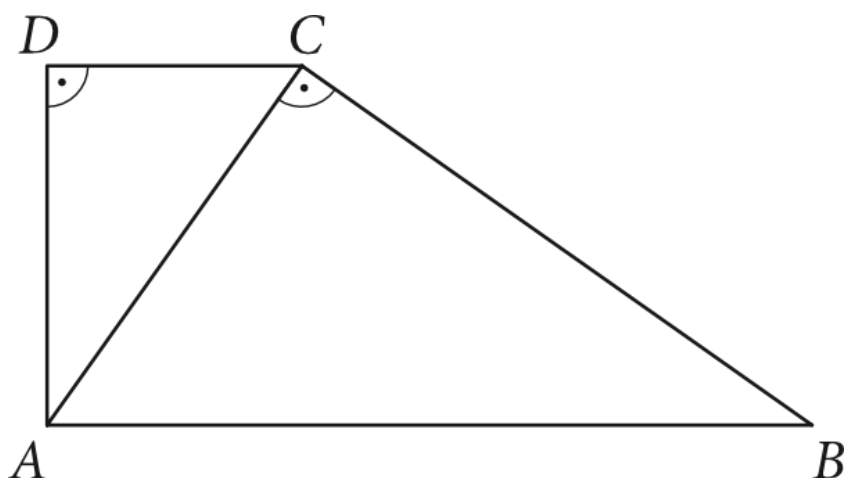
$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad P_p = \frac{6^2\sqrt{3}}{4}, \quad P_p = \frac{36\sqrt{3}}{4}, \quad P_p = 9\sqrt{3}$$

Krok 6. Obliczenie objętości ostrosłupa.

Znamy pole podstawy, znamy też wysokość ostrosłupa, zatem:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H, \quad V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}, \quad V = 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}, \quad V = 6 \cdot 3, \quad V = 18$$

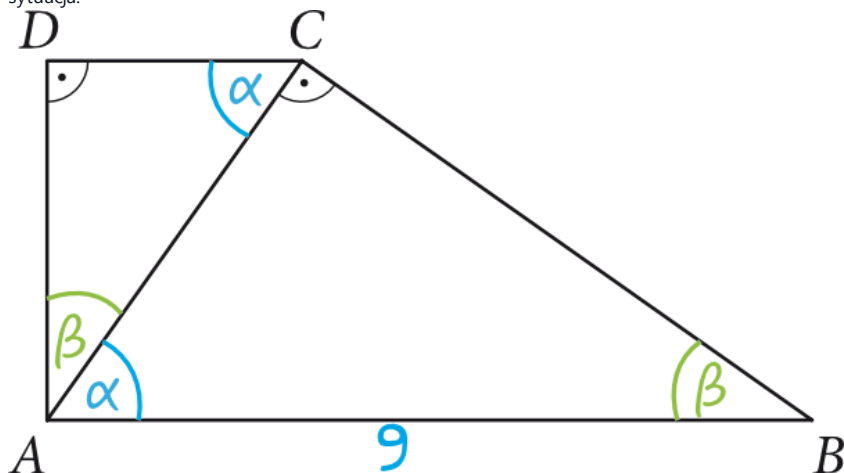
W trapezie prostokątnym $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątna AC jest prostopadła do ramienia BC , dłuższa podstawa AB ma długość 9, a sinus kąta CAD jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz pole tego trapezu.



Odpowiedź: $P = 18\sqrt{2}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

W trapezie podstawy są względem siebie równoległe. Korzystając zatem z własności kątów naprzemianległych możemy stwierdzić, że jeżeli kąt CAB oznaczmy jako α , to także kąt ACD będzie miał miarę równą α . Możemy więc powiedzieć, że w trójkątach ABC oraz ACD dwie znane nam miary kątów są jednakowe (kąt prosty oraz α), zatem i trzecia miara tego kąta musi być jednakowa (możemy ją oznaczyć jako β). To oznacza, że powstanie nam taka oto sytuacja:



Krok 2. Obliczenie długości przekątnej AC .

Z treści zadania wynika, że sinus kąta CAD (czyli naszego kąta β) jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Nie za bardzo wykorzystamy tę informację w trójkącie ACD (bo nie znamy choćby jednej długości boku tego trójkąta), ale możemy tę informację wykorzystać w trójkącie ABC , wszak tutaj też jest kąt β . Znamy długość przeciwprostokątnej tego trójkąta $a = 9$, zatem:

$$\sin \beta = \frac{|AC|}{|AB|}, \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|AC|}{9}, \quad |AC| = 3\sqrt{3}$$

Krok 3. Obliczenie długości boku CD .

Wracamy do naszego trójkąta ACD . Znamy już długość przeciwprostokątnej tego trójkąta, bowiem $|AC| = 3\sqrt{3}$. Korzystając zatem z początkowej informacji o tym, że sinus kąta CAD jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$ możemy zapisać, że:

$$\sin \beta = \frac{|CD|}{|AC|}, \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|CD|}{3\sqrt{3}}, \quad |CD| = \frac{\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}}{3}, \quad |CD| = \frac{9}{3}, \quad |CD| = 3$$

To oznacza, że górna podstawa ma długość $b = 3$.

Krok 4. Obliczenie wysokości AD (czyli wysokości trapezu).

Ponownie spoglądamy na mały trójkąt prostokątny ACD . Znamy dwie długości w tym trójkącie, zatem i trzecią (będącą wysokością trapezu) bez problemu możemy policzyć, korzystając oczywiście z Twierdzenia Pitagorasa:

$$3^2 + h^2 = (3\sqrt{3})^2, 9 + h^2 = 9 \cdot 3, 9 + h^2 = 27, h^2 = 18, h = \sqrt{18} \vee h = -\sqrt{18}$$

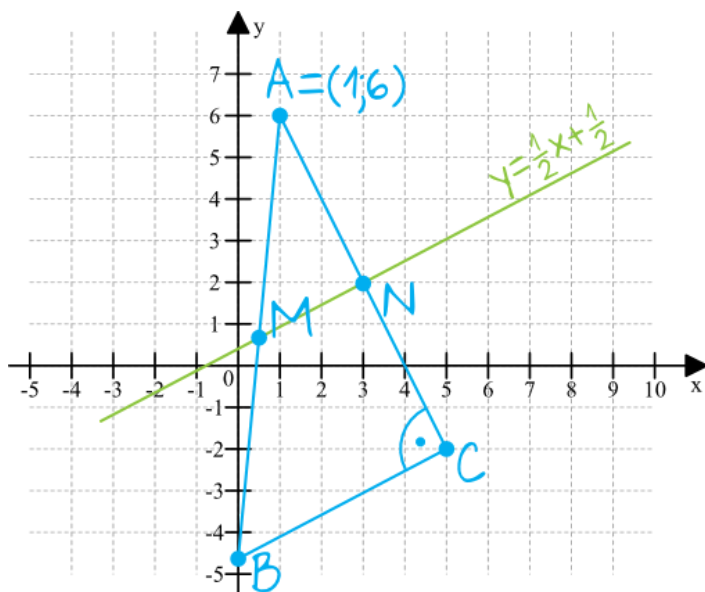
Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, bo długość nie może być ujemna, zatem zostaje nam $h = \sqrt{18}$, co możemy jeszcze rozisać jako $h = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$.

Krok 5. Obliczenie pola trapezu.

Mamy już komplet informacji, znamy długości dwóch podstaw $a = 9$ oraz $b = 3$, znamy też wysokość trapezu $h = 3\sqrt{2}$, zatem:

$$P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h, P = \frac{1}{2} \cdot (9 + 3) \cdot 3\sqrt{2}, P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3\sqrt{2}, P = 6 \cdot 3\sqrt{2}, P = 18\sqrt{2}$$

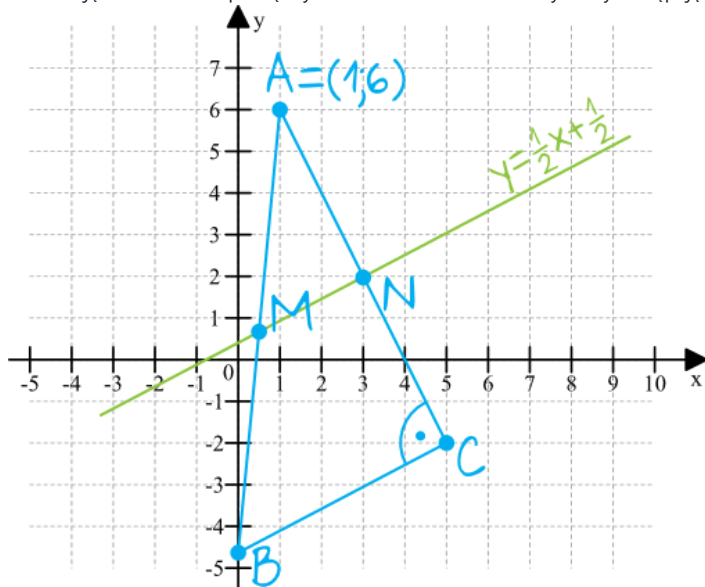
W trójkącie ABC wierzchołek A ma współrzędne $(1, 6)$, wierzchołek B leży na osi Oy , a $|\angle ACB| = 90^\circ$. Prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ jest równoległa do boku BC i przecina każdy z boków AB i AC w połowie. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.



Odpowiedź: $B = (0; -4)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zaznaczając w układzie współrzędnych dane z treści zadania otrzymamy następującą sytuację:



Warto zwrócić uwagę na to, że kąt ANM będzie także miał miarę 90° , bo proste BC oraz MN są względem siebie równoległe, zatem miary kątów ACB oraz ANM są sobie równe.

Krok 2. Wyznaczenie równania prostej AN (oraz AC).

Prosta AN (lub AC) to prosta prostopadła do prostej $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Aby dwie proste były względem siebie prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych musi być równy -1 . Skoro nasza pierwsza prosta ma współczynnik $a = \frac{1}{2}$, to prosta AN będzie mieć ten współczynnik $a = -2$, bo $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$. To oznacza, że prosta AN wyrażać się będzie równaniem $y = -2x + b$. Do poznania pełnego wzoru musimy jeszcze wyznaczyć współczynnik b .

Współczynnik b wyznaczmy podstawiając do zapisanego przed chwilą równania wartości współrzędnych jakiegoś punktu, który przez tę prostą przechodzi. W naszym przypadku znamy współrzędne punktu $A = (1, 6)$, zatem podstawiając $x = 1$ oraz $y = 6$ do postaci $y = -2x + b$ otrzymamy:

$$6 = -2 \cdot 1 + b, 6 = -2 + b, b = 8$$

To oznacza, że równanie prostej AN przyjmuje postać $y = -2x + 8$.

Krok 3. Wyznaczenie współrzędnych punktu N .

Punkt N jest miejscem przecięcia się prostych MN oraz AN . Znamy równania jednej i drugiej prostej, zatem tworząc z nich układ równań będziemy mogli wyznaczyć współrzędne punktu N :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = -2x + 8 \end{cases},$$

Korzystając z metody podstawiania otrzymamy:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -2x + 8, \quad 2\frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2}, \quad x = 3$$

Znamy już wartość współrzędnej x osi, musimy jeszcze poznać wartość współrzędnej y osi, a dokonamy tego podstawiając $x = 3$ do wybranego równania (np. drugiego):

$$y = -2x + 8, \quad y = -2 \cdot 3 + 8, \quad y = -6 + 8, \quad y = 2$$

To oznacza, że $N = (3; 2)$.

Krok 4. Wyznaczenie współrzędnych punktu C .

Punkt N jest środkiem odcinka AC . Znamy współrzędne punktu $A = (1, 6)$, znamy też już współrzędne punktu $N = (3; 2)$, zatem możemy ze wzoru na środek odcinka wyznaczyć współrzędne punktu C . Dla przejrzystości obliczeń najlepiej jest oddzielnie policzyć współrzędną x i oddzielnie współrzędną y :

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad 3 = \frac{1 + x_C}{2}, \quad 6 = 1 + x_C, \quad x_C = 5, \quad y_N = \frac{y_A + y_C}{2}, \quad 2 = \frac{6 + y_C}{2}, \quad 4 = 6 + y_C, \quad y_C = -2$$

Wyszło nam zatem, że $C = (5; -2)$.

Krok 5. Wyznaczenie równania prostej BC .

Prosta BC jest równoległa do prostej MN , zatem te dwie proste będą mieć jednakowy współczynnik a . Skoro więc prosta MN ma współczynnik $a = \frac{1}{2}$, to i prosta BC będzie mieć $a = \frac{1}{2}$. To z kolei oznacza, że prosta BC będzie wyrażać się równaniem $y = \frac{1}{2}x + b$. Musimy jeszcze poznać wartość współczynnika b , a dokonamy tego podstawiając do tego równania współrzędne punktu C .

$$-2 = \frac{1}{2} \cdot 5 + b, \quad -2 = 2\frac{1}{2} + b, \quad b = -4\frac{1}{2}$$

To oznacza, że równaniem prostej BC będzie $y = \frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$.

Krok 6. Wyznaczenie współrzędnych punktu B .

O punkcie B wiemy tyle, że leży on na osi OX , czyli na pewno współrzędna x tego punktu jest równa $x = 0$. Możemy więc do równania prostej BC , czyli $y = \frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$ podstawić $x = 0$ i otrzymamy współrzędną y naszego punktu. Tak prawdę mówiąc, to współrzędną y punktu B możemy wprost odczytać ze wzoru funkcji - wystarczy spojrzeć na współczynnik b tej prostej, bo to on pokazuje nam jaką jest współrzędna y naszego punktu B . Skoro współczynnik $b = -4\frac{1}{2}$, to współrzędna $y = -4\frac{1}{2}$. To oznacza, że $B = (0; -4\frac{1}{2})$.