

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Nowa Era 2017

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl.
Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D (2)	1
2	B ($2\sqrt{2} - 1$)	1
3	C (49130zł)	1
4	C (o 50%)	1
5	B ($(-6, 5)$)	1
6	D ($\{0, 1, 2\}$)	1
7	A ($g(x) = \frac{4}{x} + 4$)	1
8	D ($2\log_3 2$)	1
9	B ($a + b < 0$)	1
10	B ($a < 0, c > 0$)	1
11	C ($x = 3, y = 96$)	1
12	D ($\frac{1}{4}$)	1
13	A (9)	1
14	D (6)	1
15	C ($\sqrt{2}$)	1
16	B ($ \angle ACB = \angle ADB = \angle AEB $)	1
17	C (54)	1
18	A ($((11, -11))$)	1
19	C ($\sqrt{17}$)	1
20	D (3)	1
21	C (120)	1
22	B (3, 38)	1
23	C ($\frac{7}{13}$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0–1 pkt

Liczba $\frac{6}{\sqrt[3]{27}}$ jest równa:

Odpowiedź: D (2)

$\sqrt[3]{27} = 3$, bo $3^3 = 27$. W związku z tym:

$$\frac{6}{\sqrt[3]{27}} = \frac{6}{3} = 2$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Liczba $\sqrt{(1 - 2\sqrt{2})^2}$ jest równa:

Odpowiedź: B ($2\sqrt{2} - 1$)

Wynikiem pierwiastka parzystego stopnia jest zawsze liczba dodatnia. Z tego też względu np. $\sqrt{25} = 5$, a nie -5 , choć przecież $(-5)^2$ jest także równe 25. To zadanie ma więc ukrytą w sobie bardzo dużą pułapkę, bo wbrew pozorom potęga znajdująca pod pierwiastkiem nie skróci nam się bezpośrednio z pierwiastkiem, dając ostatecznie wynik $1 - 2\sqrt{2}$. Całość zadania należy rozwiązać w następujący sposób:

$$\sqrt{(1 - 2\sqrt{2})^2} = |1 - 2\sqrt{2}|$$

Wartość w nawiasie bezwzględności jest ujemna (jest równa około $-1,8$). W związku z tym opuszczając nawiasy bezwzględności musimy zmienić znak na przeciwny, zatem:

$$|1 - 2\sqrt{2}| = -(1 - 2\sqrt{2}) = -1 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 1$$

Zadanie 3

0-1 pkt

Nowy samochód kosztował 80 tys. zł. Po każdym roku użytkowania jego wartość spadała o 15% w stosunku do wartości z roku poprzedniego. Po trzech latach od zakupu jego wartość była równa:

Odpowiedź: C (49130zł)

Jeżeli wartość samochodu byłaby równa x to po roku wartość auta wyniosłaby $x - 0,15x = 0,85x$. Możemy więc sobie rozpisac to w następujący sposób:

Początkowa wartość samochodu: 80000

Wartość po pierwszym roku $0,85 \cdot 80000$

Wartość po drugim roku $0,85 \cdot 0,85 \cdot 80000$

Wartość po trzecim roku $0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,85 \cdot 80000$

Możemy więc powiedzieć, że po trzech latach od zakupu wartość samochodu jest równa:

$$0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,85 \cdot 80000 = 49130[\text{zł}]$$

Zadanie 4

0-1 pkt

Pan Adam wpłacał na rzecz pewnego stowarzyszenia 2% swoich stałych miesięcznych dochodów. Od ostatniego miesiąca wpłata wzrosła do 3% jego dochodów. O ile procent zwiększyła się kwota wpłacana przez pana Adama?

Odpowiedź: C (o 50%)

Jeżeli Pan Adam zarabia x złotych, to na początku wpłaty na rzecz stowarzyszenia wynosiły 2% z x czyli $0,02x$ złotych.

W momencie kiedy Pan Adam zaczął przeznaczać na stowarzyszenie 3% swoich dochodów, to na stowarzyszenie wpłacał $0,03x$ złotych.

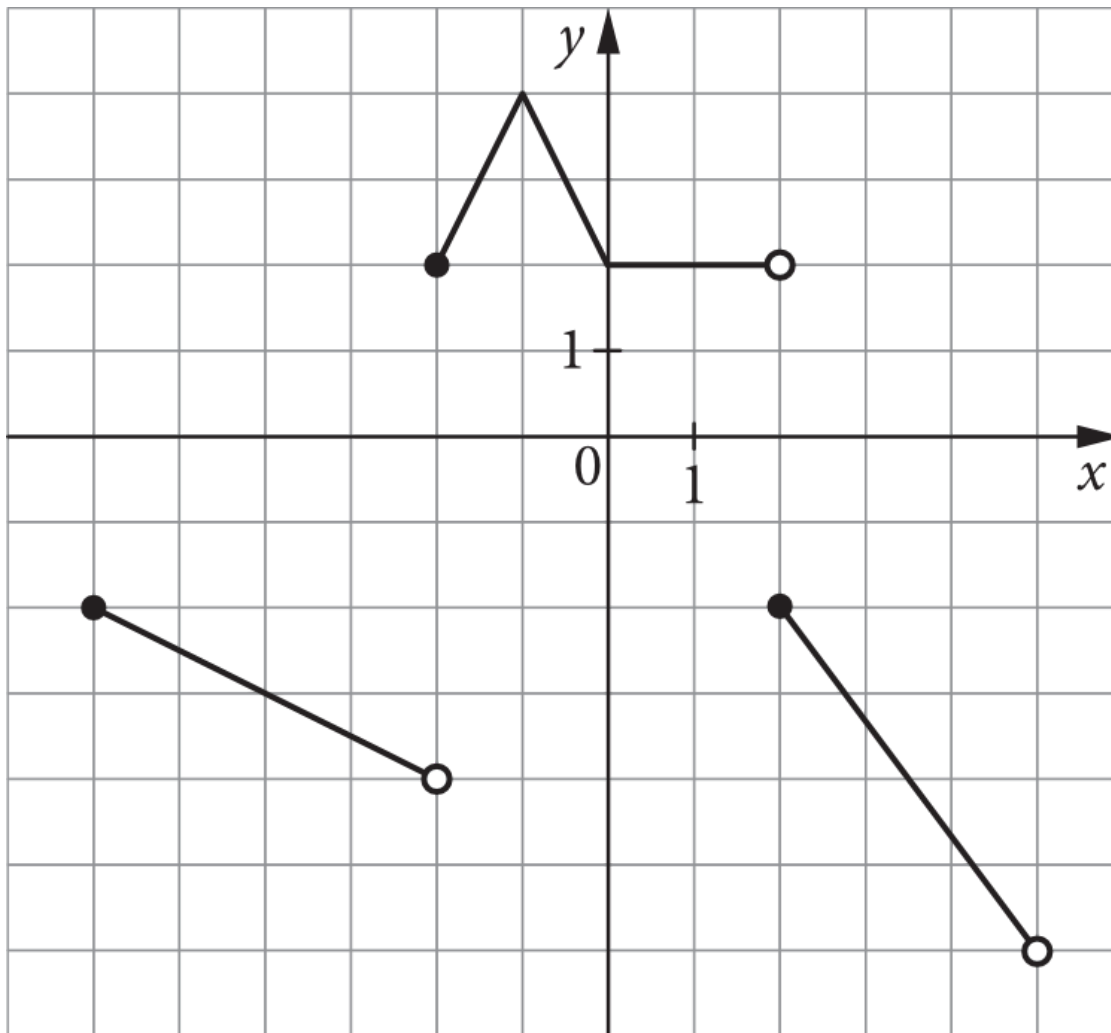
To oznacza, że wysokość wpłat wzrosła o:

$$\frac{0,03x - 0,02x}{0,02x} \cdot 100\% = \frac{0,01x}{0,02x} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$$

Zadanie 5

0-1 pkt

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = h(x)$.



Dziedziną funkcji h jest przedział:

Odpowiedź: B $(-6, 5)$

Dziedzinę funkcji odczytujemy z osi x. Po kratkach możemy odczytać, że funkcja przyjmuje wartości dla argumentów od $x = -6$ aż do $x = 5$, zatem dziedziną funkcji będzie przedział $(-6, 5)$. Warto jeszcze w tym miejscu zwrócić uwagę na nawiasy. Nawias po lewej stronie jest domknięty, bo dla argumentu $x = -6$ mamy zamalowaną kropkę, natomiast nawias po prawej stronie jest otwarty, bo dla argumentu $x = 5$ kropka jest niezamalowana.

Zadanie 6

0-1 pkt

Funkcja f każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 3. Zbiór wartości tej funkcji to:

Odpowiedź: D $\{0, 1, 2\}$

Reszta z dzielenia przez 3 może być równa 0, 1 lub też 2. Przykładowo:

$$6 : 3 = 2 \text{ r. } 0, \quad 7 : 3 = 2 \text{ r. } 1, \quad 8 : 3 = 2 \text{ r. } 2, \quad 9 : 3 = 3 \text{ r. } 0$$

To oznacza, że zbiorem wartości tej funkcji są liczby $\{0, 1, 2\}$.

Zadanie 7

0-1 pkt

Wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$, określonej dla wszystkich liczb rzeczywistych różnych od 0, przesunięto wzdłuż osi Oy o 4 jednostki w górę. Otrzymany wykres można opisać wzorem:

Odpowiedź: A ($g(x) = \frac{4}{x} + 4$)

Przesuwając wykres o 4 jednostki do góry wartość funkcji dla każdego z argumentów jest o 4 większa. Stąd też tworząc wzór funkcji $g(x)$ musimy na samym końcu wzoru dopisać +4, dzięki czemu otrzymamy postać $g(x) = \frac{4}{x} + 4$.

Zadanie 8

0-1 pkt

Funkcja wykładnicza $f(x) = 3^x$ przyjmuje wartość 4 dla:

Odpowiedź: D ($2\log_3 2$)

Krok 1. Zapisanie równania.

Aby dowiedzieć się kiedy jakaś funkcja przyjmie konkretną wartość wystarczy przyrównać wzór funkcji do tej wartości. W naszym przypadku musimy rozwiązać następujące równanie:

$$3^x = 4$$

Krok 2. Przekształcenie równania na postać logarytmu.

Z definicji logarytmów wiemy, że $\log_a b = c$ wtedy, gdy $a^c = b$. Jeżeli więc porównamy sobie zapis $3^x = 4$ do zapisu $a^c = b$, to będziemy mogli przyjąć, że w tym zapisie $a = 3$, $c = x$ oraz $b = 4$. Podstawiając te liczby do postaci logarytmu $\log_a b = c$ wyszłoby nam, że:

$$\log_3 4 = x, \text{ czyli: } x = \log_3 4$$

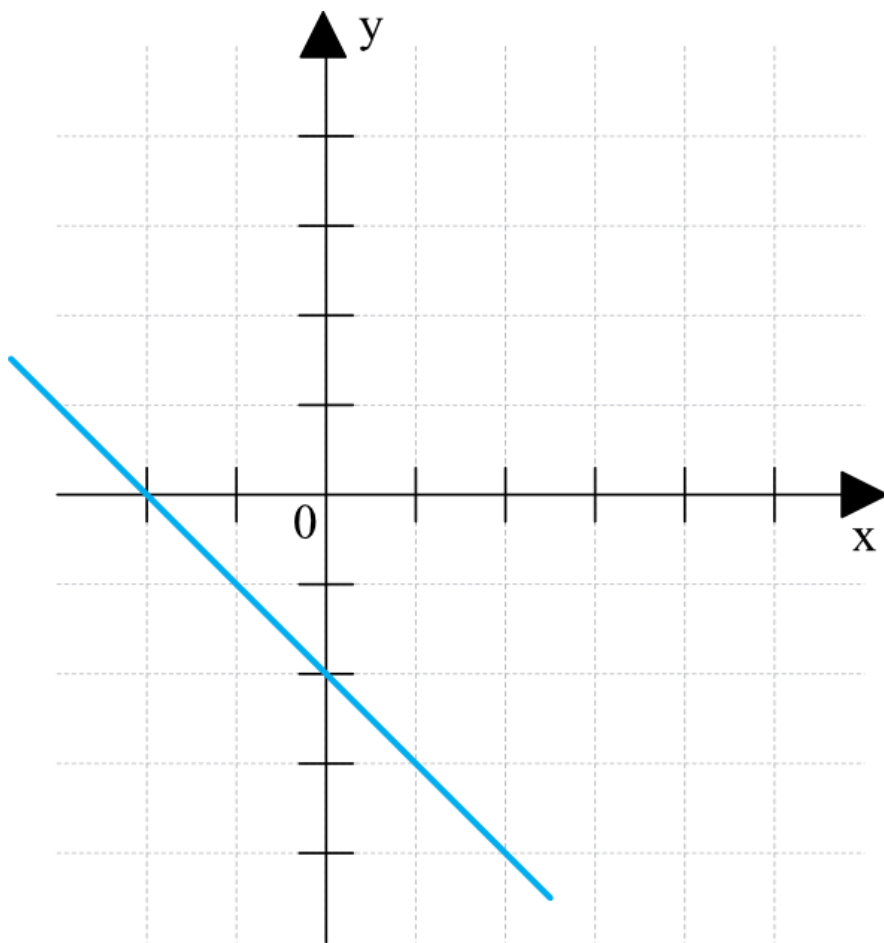
Co prawda nie mamy takiej odpowiedzi jak $\log_3 4$, ale korzystając z działań na logarytmach możemy dopasować się do naszych odpowiedzi w następujący sposób:

$$x = \log_3 4, \quad x = \log_3 2^2, \quad x = 2\log_3 2$$

Zadanie 9

0–1 pkt

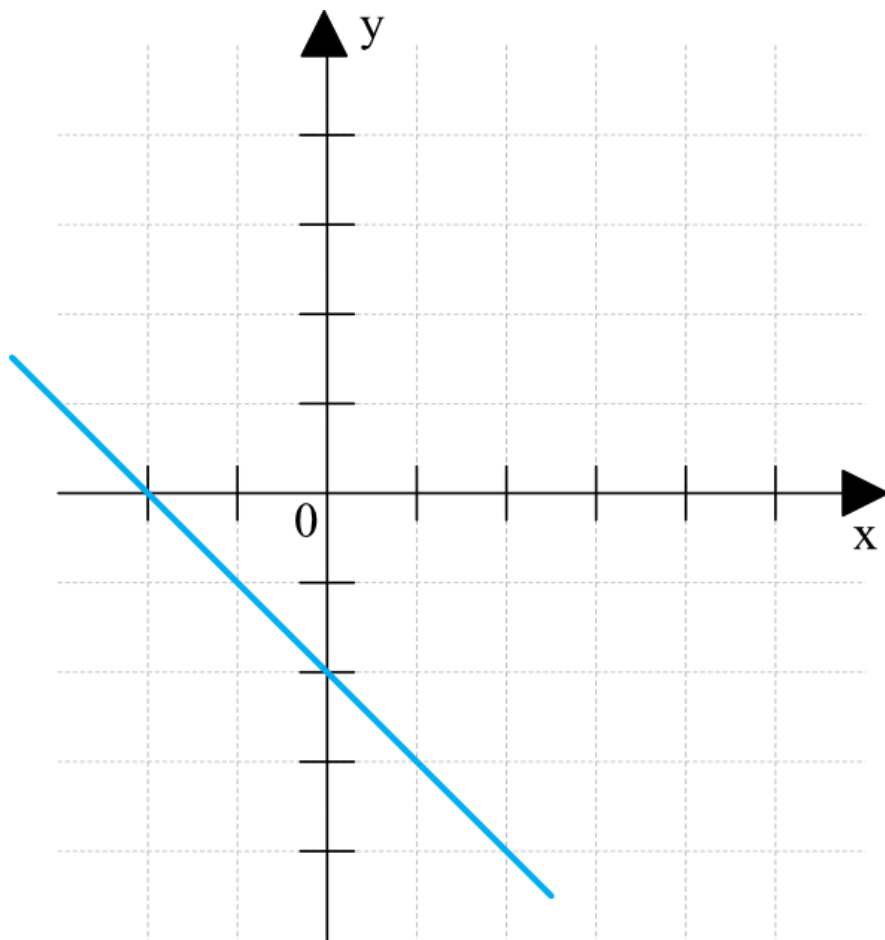
Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest malejąca i ma ujemne miejsce zerowe. Dla takiej funkcji prawdziwa jest nierówność:



Odpowiedź: B ($a + b < 0$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Spróbujmy narysować sobie omawianą sytuację:



Krok 2. Odczytanie wartości współczynników a oraz b

Funkcja jest malejąca, zatem współczynnik a jest liczbą ujemną, czyli $a < 0$.

Współczynnik b mówi nam o miejscu przecięcia się wykresu z osią igreków. Widzimy wyraźnie, że funkcja przecina oś igreków w ujemnej wartości, czyli $b < 0$.

Krok 3. Wybór prawidłowej odpowiedzi.

Wiemy już, że zarówno a jak i b są liczbami ujemnymi. Przeanalizujmy teraz każdą z odpowiedzi:

Odp. A. $a + b > 0$ - to nie może być prawda, bo suma dwóch liczb ujemnych na pewno będzie mniejsza od zera.

Odp. B. $a + b < 0$ - to prawda, bo suma dwóch liczb ujemnych na pewno będzie mniejsza od zera.

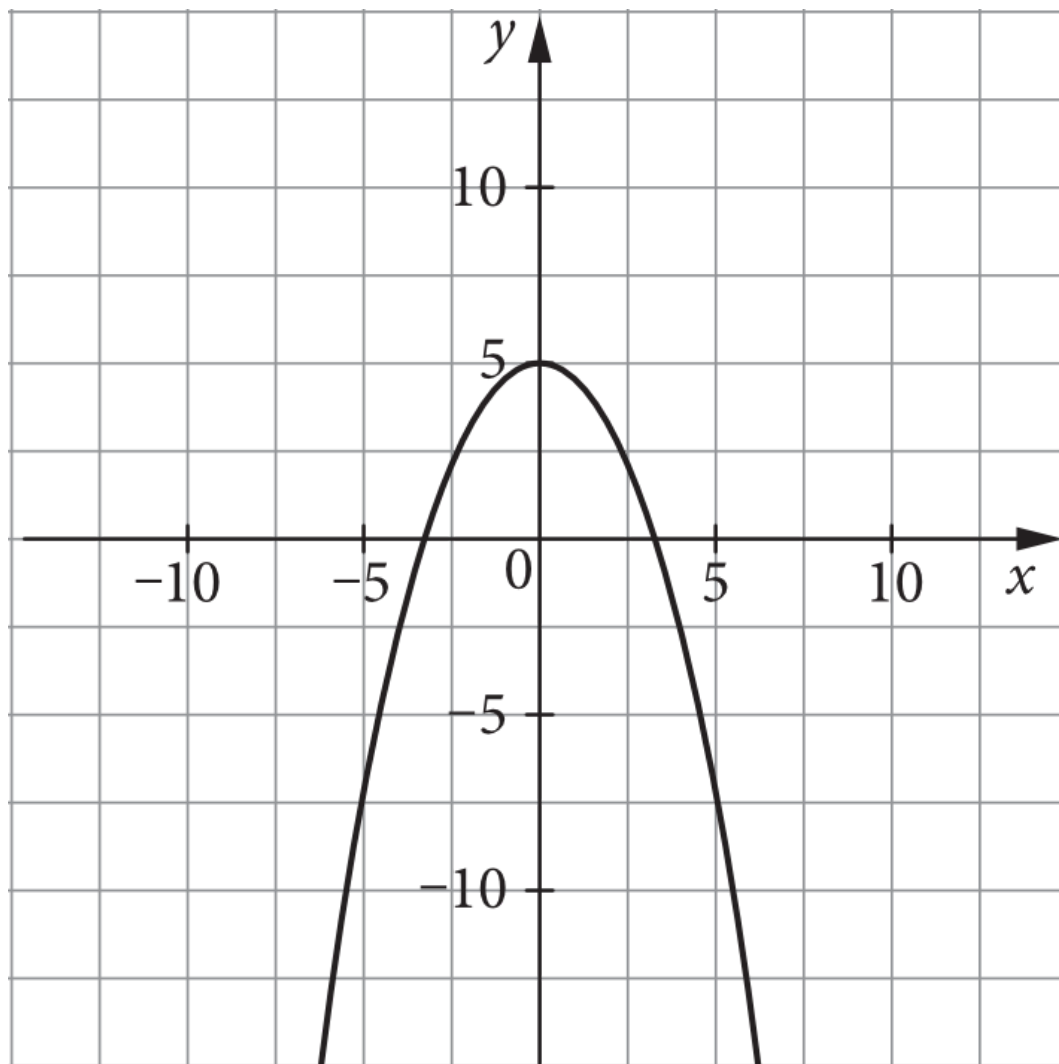
Odp. C. $ab = 0$ - to nie jest prawda, bo iloczyn dwóch liczb ujemnych da wynik dodatni.

Odp. D. $ab < 0$ - to nie jest prawda, bo iloczyn dwóch liczb ujemnych da wynik dodatni.

Zadanie 10

0–1 pkt

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu pewnej funkcji kwadratowej postaci $f(x) = ax^2 + c$.



Jakie znaki mają współczynniki a i c ?

Odpowiedź: B ($a < 0$, $c > 0$)

Krok 1. Ustalenie wartości współczynnika a .

Ramiona paraboli są skierowane do dołu, zatem współczynnik kierunkowy a musi być ujemny. Stąd też wiemy, że $a < 0$.

Krok 2. Ustalenie wartości współczynnika c .

W przypadku funkcji kwadratowych zapisanych w postaci ogólnej, współczynnik c mówi nam o miejscu przecięcia się paraboli z osią igreków. Widzimy, że parabola przecina oś igreków dla $y = 5$, w związku z tym współczynnik $c = 5$. Stąd też $c > 0$.

To oznacza, że prawidłowa jest druga odpowiedź.

Zadanie 11

0-1 pkt

Wskaż liczby, które należy wpisać do tabeli, aby wielkości x i y były odwrotnie proporcjonalne.

x		2	0,5
y	16	24	

Odpowiedź: C ($x = 3$, $y = 96$)

Krok 1. Wyznaczenie brakującej wartości x .

Wartości odwrotnie proporcjonalne charakteryzują się tym, że wraz z np. dwukrotnym wzrostem jednej liczby, spada dwukrotnie wartość drugiej liczby.

Spójrzmy teraz na naszą tabelkę. Widzimy, że $y_1 = 16$ oraz $y_2 = 24$. Możemy więc dostrzec, że wartość igreka wzrosła półtorakrotnie, bo $\frac{y_2}{y_1} = \frac{24}{16} = 1,5$. To oznacza, że x_2 powinno być 1,5 razy mniejsze od x_1 lub też jak kto woli, x_1 powinno być 1,5 razy większe od x_2 . Skoro $x_2 = 2$, to $x_1 = 1,5 \cdot 2 = 3$.

Krok 2. Wyznaczenie brakującej wartości y .

Spójrzmy teraz na wartości x_2 oraz x_3 . Widzimy, że x_3 jest czterokrotnie mniejsze od x_2 , zatem y_3 musi być czterokrotnie większe od y_2 . W związku z tym $y_3 = 4 \cdot 24 = 96$.

Tak na marginesie, to warto zauważyć, że iloczyn liczb w każdej kolumnie daje tę samą wartość:

$$3 \cdot 16 = 48, \quad 2 \cdot 24 = 48, \quad 0,5 \cdot 96 = 48$$

To też może być dla nas wskazówka do rozwiązywania takich zadań lub chociażby weryfikowania poprawności obliczeń.

Zadanie 12

0-1 pkt

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$ dla $n \geq 1$. Iloczyn $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ jest równy:

Odpowiedź: D ($\frac{1}{4}$)

Krok 1. Obliczenie wartości pierwszego, drugiego oraz trzeciego wyrazu.

Podstawiając do wzoru ciągu odpowiednio $n = 1$, $n = 2$ oraz $n = 3$ otrzymamy:

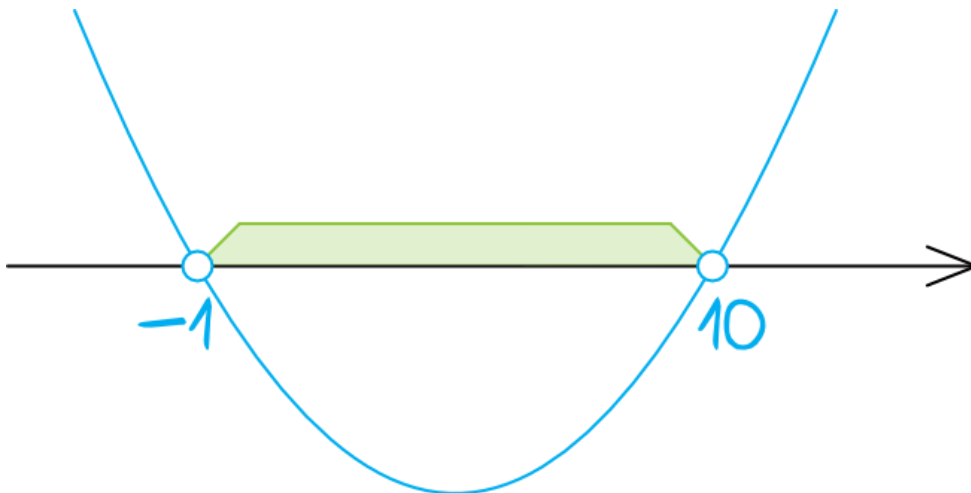
$$a_1 = (-1)^1 \cdot \frac{1}{1+1} = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = (-1)^2 \cdot \frac{2}{2+1} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \quad a_3 = (-1)^3 \cdot \frac{3}{3+1} = -1 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

Krok 2. Obliczenie iloczynu trzech pierwszych wyrazów.

Zgodnie z treścią zadania musimy obliczyć iloczyn trzech pierwszych wyrazów, których wartości przed chwilą wyznaczyliśmy, zatem:

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 4(n+1)(n-10)$ dla $n \geq 1$. Ile wyrazów ujemnych ma ten ciąg?



Odpowiedź: A (9)

Aby dowiedzieć się ile wyrazów ujemnych ma wskazany ciąg musimy rozwiązać następującą nierówność:

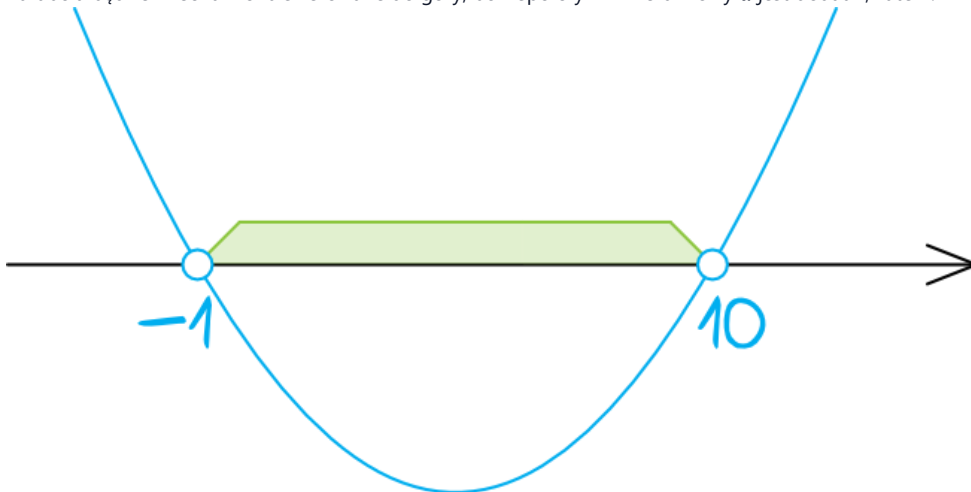
$$4(n+1)(n-10) < 0 \quad / : 4, \quad (n+1)(n-10) < 0$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałej nierówności kwadratowej.

Otrzymaliśmy nierówność kwadratową zapisaną w postaci iloczynowej. Rozwiązanie nierówności rozpoczynamy od wyznaczenia miejsc zerowych, czyli sprawdzenia kiedy $(n+1)(n-10) = 0$. Zgodnie z własnościami postaci iloczynowej możemy zapisać, że:

$$n+1=0 \quad \vee \quad n-10=0, \quad n=-1 \quad \vee \quad n=10$$

Zaznaczamy na osi nasze wyznaczone miejsca zerowe (kropki będą niezamalowane, bo w nierówności mamy znak $<$) i szkicujemy parabolę. Parabola będzie mieć ramiona skierowane do góry, bo współczynnik kierunkowy a jest dodatni, zatem:



Teraz musimy odczytać rozwiązania naszej nierówności. Interesują nas wartości mniejsze od zera, czyli wszystko to, co znalazło się pod osią. Możemy więc zapisać, że rozwiązaniem tej nierówności jest przedział $n \in (-1; 10)$.

Krok 3. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Ze wszystkich dotychczasowych obliczeń wyszło nam, że $4(n+1)(n-10)$ jest mniejsze od zera dla każdego n , które jest większe od -1 i mniejsze od 10 . W przypadku ciągów n musi być dodatnią liczbą naturalną. Musimy więc sprawdzić jakie liczby naturalne mieszczą się w wyznaczonym przez nas przedziale. Takimi liczbami będą: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Pasuje nam 9 liczb, zatem ten ciąg ma 9 wyrazów ujemnych.

Zadanie 14

0-1 pkt

Ciąg (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 2, a ciąg (d, e, f) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 4. Różnica ciągu arytmetycznego $(a + d, b + e, c + f)$ wynosi:

Odpowiedź: D (6)

Krok 1. Rozpisanie wyrazów pierwszego i drugiego ciągu.

Bazując na informacjach z treści zadania możemy zapisać, że:

$$a = x, b = x + 2, c = x + 2 + 2 = x + 4$$

$$d = y, e = y + 4, f = y + 4 + 4 = y + 8$$

Z tego wynika, że w naszym docelowym trzecim ciągu będziemy mieć następującą sytuację:

$$a + d = x + y, b + e = x + 2 + y + 4 = x + y + 6, c + f = x + 4 + y + 8 = x + y + 12$$

Krok 2. Obliczenie różnicy ciągu.

Skoro pierwszy wyraz jest równy $x + y$, a drugi wyraz jest równy $x + y + 6$, to różnica tego ciągu będzie równa:

$$x + y + 6 - (x + y) = x + y + 6 - x - y = 6$$

Zadanie 15

0-1 pkt

Wartość wyrażenia $\frac{\cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ}{\cos 45^\circ}$ jest równa:

Odpowiedź: C ($\sqrt{2}$)

Z tablic trygonometrycznych możemy odczytać, że:

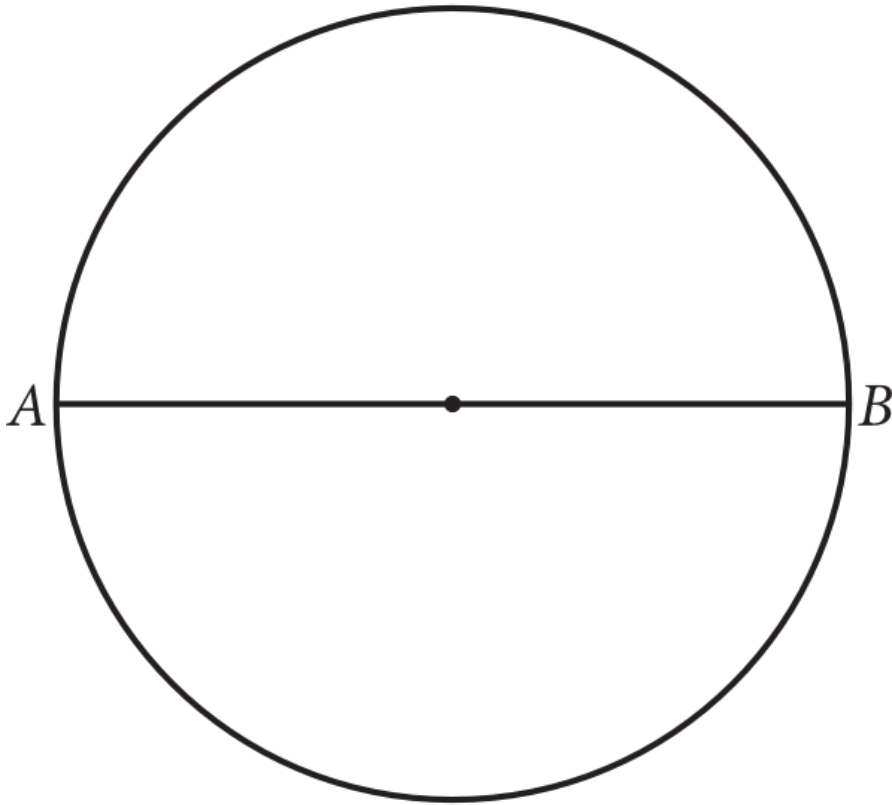
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

W związku z tym wartość naszego wyrażenia będzie równa:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Tak na marginesie, to moglibyśmy zauważyć, że $\cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$, ponieważ $\cos^2 30^\circ = \sin^2 60^\circ$, zatem w liczniku możemy skorzystać z jedynki trygonometrycznej: $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$.

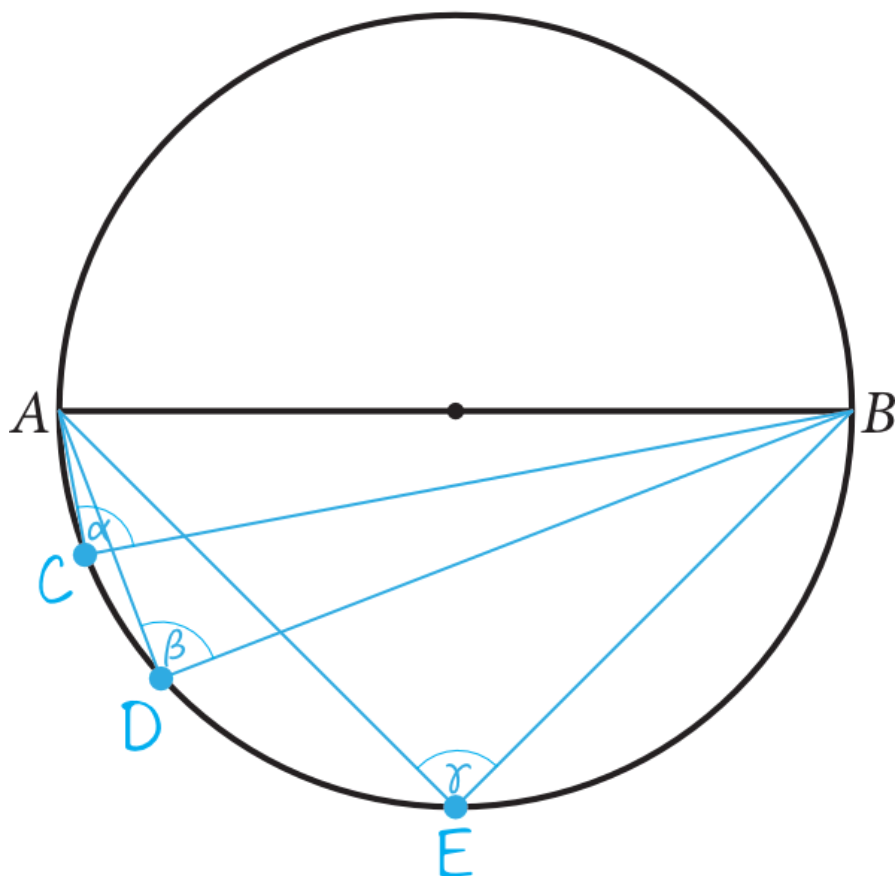
Odcinek AB jest średnicą koła (rysunek obok). Na jednym z łuków AB zaznaczono punkty C , D i E różne od A i B . W ten sposób powstały łuki AC , CD , DE , EB , których długości są w stosunku $1 : 1 : 2 : 4$. Miary kątów ACB , ADB i AEB spełniają zależność:



Odpowiedź: B ($|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle AEB|$)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zaznaczmy punkty C , D i E w taki sposób, aby otrzymać odpowiedni stosunek długości łuków.



Krok 2. Wybór prawidłowej odpowiedzi.

Na rysunku powstały nam trzy trójkąty, które są oparte na średnicy okręgu. Z własności takich trójkątów wynika, że będą to trójkąty prostokątne, a kąty α , β , γ są właśnie kątami prostymi. Możemy więc powiedzieć, że każdy z wymienionych w zadaniu kątów ma jednakową miarę i będzie to 90° .

Zadanie 17

0-1 pkt

Pole rombu o boku długości $6\sqrt{3}$ i kącie rozwartym 150° jest równe:

Odpowiedź: C (54)

Krok 1. Obliczenie wartości $\sin 150^\circ$.

W tablicach trygonometrycznych nie znajdziemy wartości sinusa dla kątów rozwartych. Musimy więc skorzystać z tzw. wzorów redukcyjnych:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ, \quad \sin 150^\circ = \sin 30^\circ$$

To oznacza, że $\sin 150^\circ$ będzie równy tyle samo co $\sin 30^\circ$, czyli $\frac{1}{2}$.

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni rombu.

W tym zadaniu możemy skorzystać z następującego wzoru na pole rombu:

$$P = a^2 \cdot \sin \alpha$$

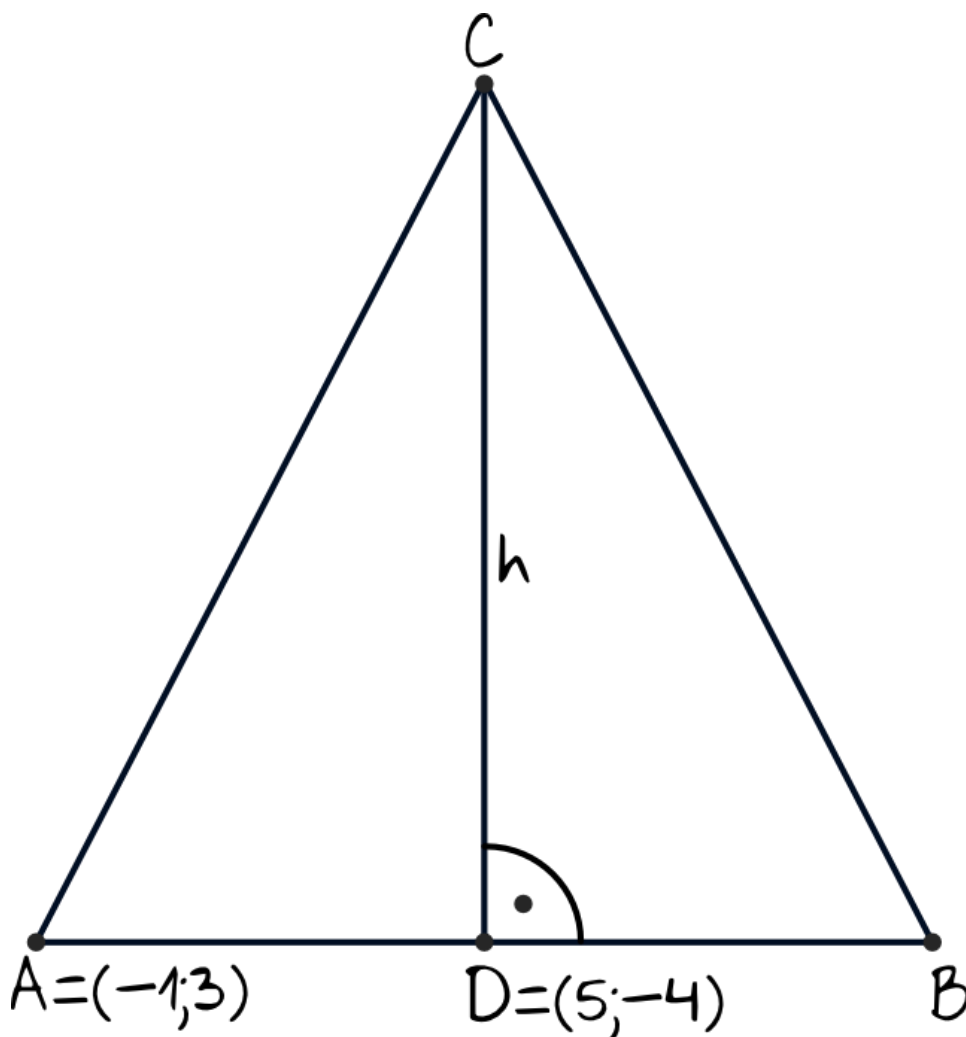
Podstawiając znane dane wyjdzie nam, że:

$$P = (6\sqrt{3})^2 \cdot \sin 30^\circ, \quad P = (6\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{2}, \quad P = 36 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}, \quad P = 108 \cdot \frac{1}{2}, \quad P = 54$$

Zadanie 18

0-1 pkt

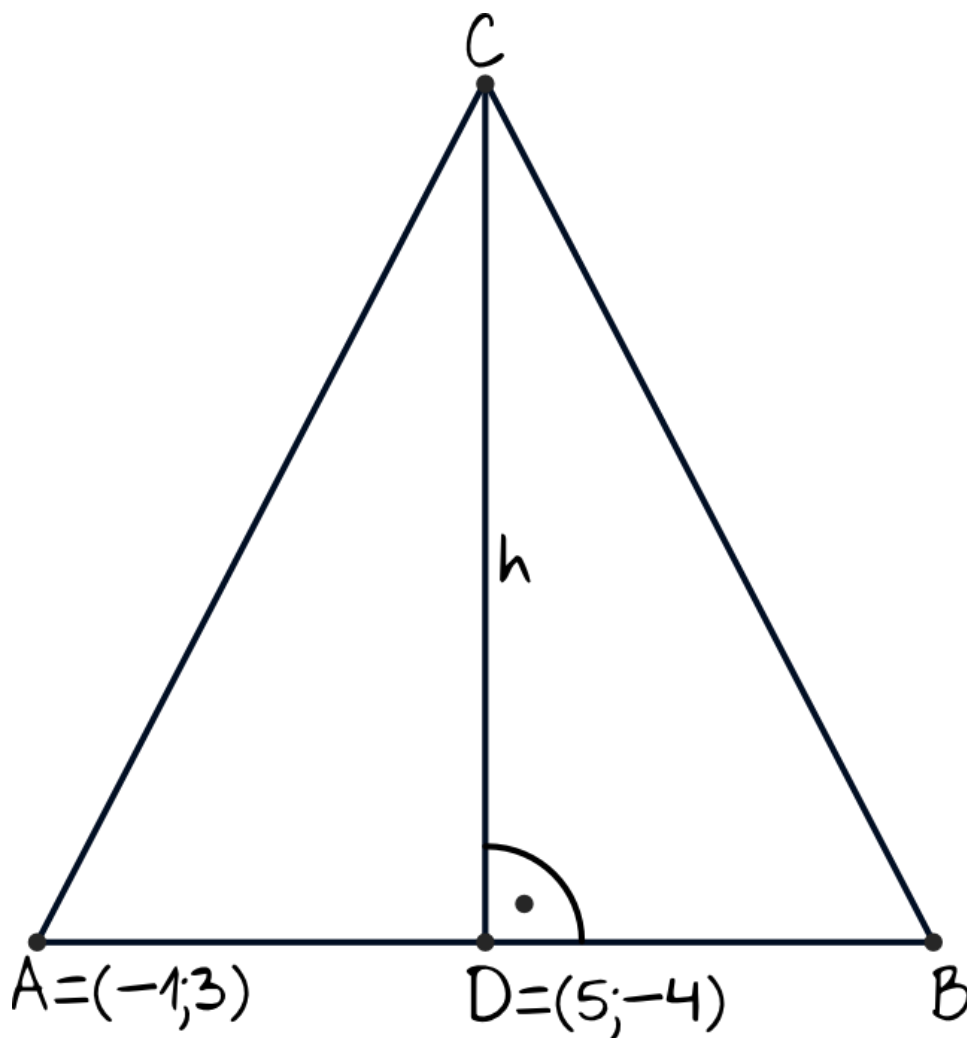
Punkt $A = (-1, 3)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB . Punkt $D = (5, -4)$ jest spodkiem wysokości CD tego trójkąta. Współrzędne wierzchołka B są równe:



Odpowiedź: A $((11, -11))$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Aby mieć pełen obraz tej sytuacji, to warto zrobić sobie nawet prosty rysunek szkicowy.



Jedną z własności trójkąta równoramiennego jest to, że jego wysokość CD dzieli nam podstawę na dwie równe części. Można więc powiedzieć, że punkt D jest środkiem odcinka AB .

Krok 2. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka B .

Środek odcinka AB o współrzędnych $A = (x_A; y_A)$ oraz $B = (x_B; y_B)$ możemy opisać wzorem:

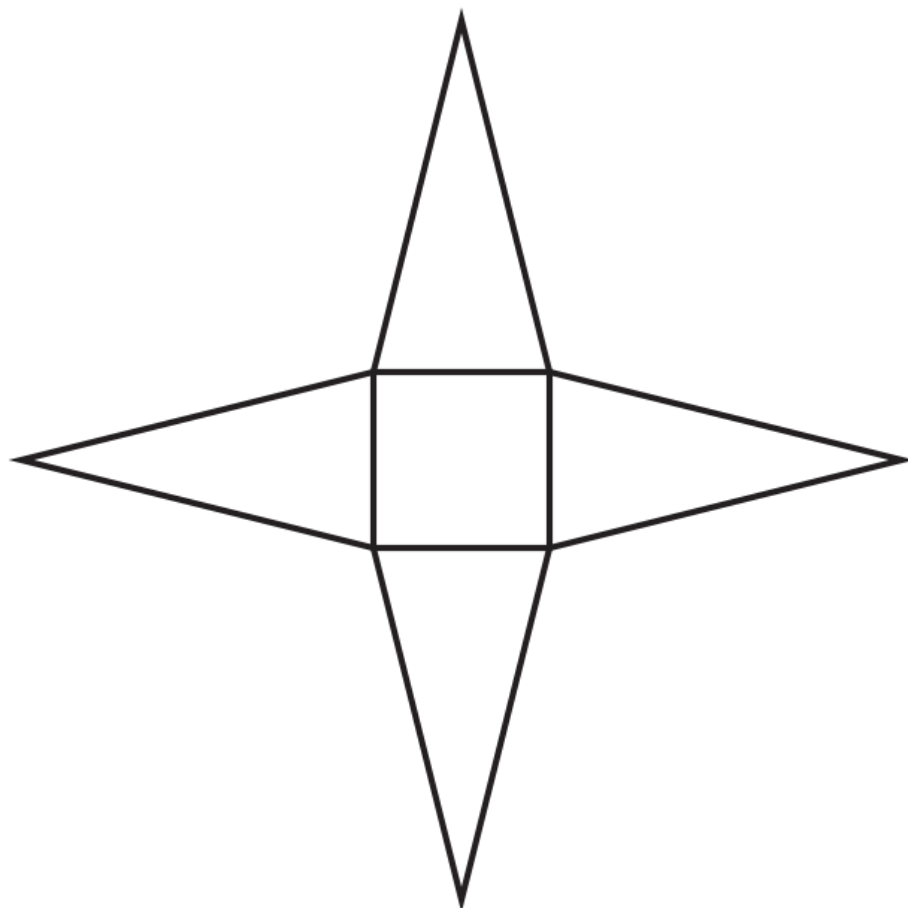
$$D = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Znamy współrzędne punktu A oraz D , zatem jedyną niewiadomą zostają poszukiwane współrzędne punktu B . Dla przejrzystości obliczeń możemy je wyznaczyć oddzielnie:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad 5 = \frac{-1 + x_B}{2}, \quad 10 = -1 + x_B, \quad x_B = 11, \quad , \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad -4 = \frac{3 + y_B}{2}, \quad -8 = 3 + y_B, \quad y_B = -11$$

To oznacza, że $B = (11; -11)$.

Siatka ostrosłupa prawidłowego czworokątnego składa się z kwadratu i czterech trójkątów (rysunek obok). Pole każdej z wymienionych figur jest równe 4. Długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa jest równa:



Odpowiedź: C ($\sqrt{17}$)

Krok 1. Obliczenie długości krawędzi podstawy.

Ostrosłup jest prawidłowy czworokątny, czyli w podstawie bryły znajduje się kwadrat. O tym kwadracie wiemy, że jego pole jest równe 4, zatem bok kwadratu (a tym samym długość krawędzi podstawy) będzie równa:

$$P = a^2, a^2 = 4, a = 2 \quad \vee \quad a = -2$$

Ujemną wartość oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $a = 2$.

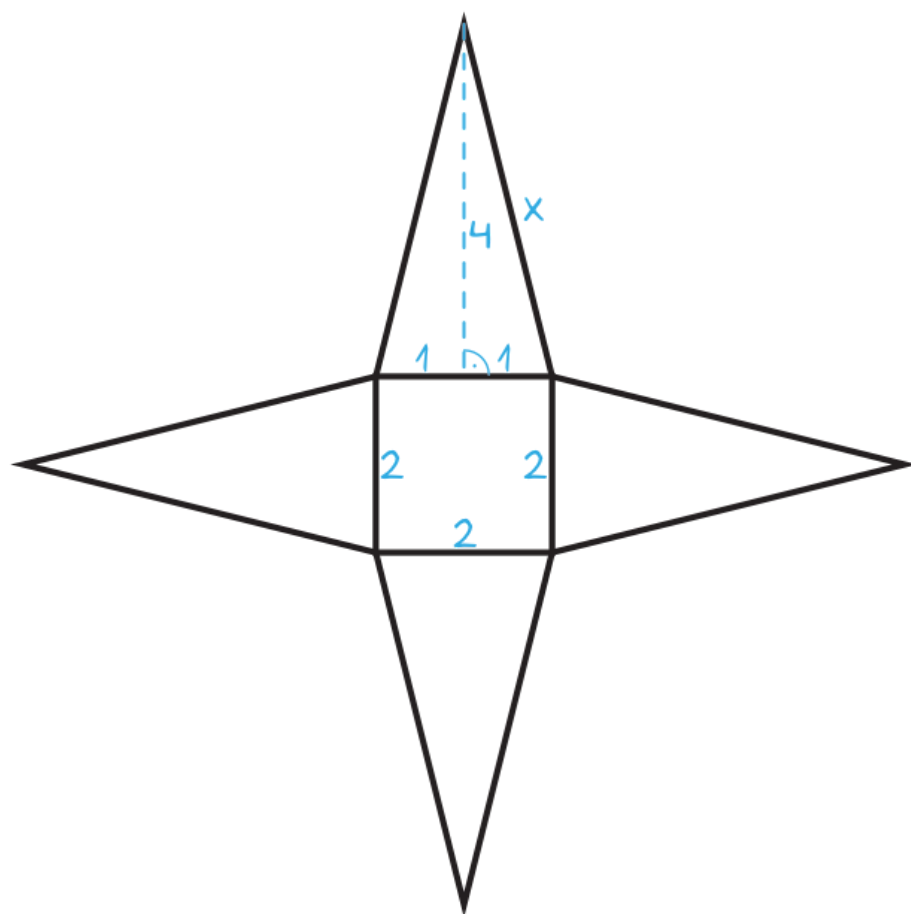
Krok 2. Obliczenie wysokości trójkąta znajdującego się w ścianie bocznej.

Wiemy już, że krawędź podstawy jest równa 2, zatem trójkąty znajdujące się w ścianie bocznej mają także podstawę równą 2. Wiemy też, że pole każdego takiego trójkąta jest równe 4, zatem:

$$P = \frac{1}{2}ah, 4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h, 4 = 1 \cdot h, h = 4$$

Krok 3. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Ostrosłup jest prawidłowy, zatem ściany boczne będą w tym przypadku trójkątami równoramiennymi. Wiedząc, że wysokość w takich trójkątach dzieli podstawę na dwie równe części, to powstała nam następująca sytuacja:



Krok 4. Obliczenie długości krawędzi bocznej.

Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

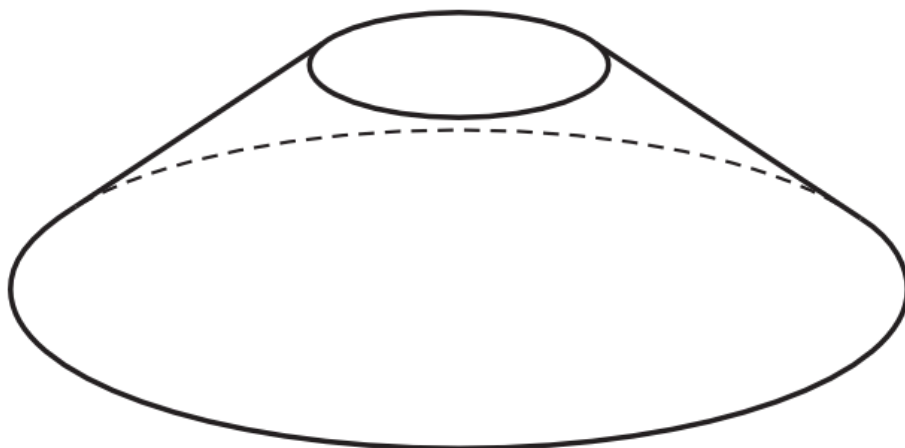
$$1^2 + 4^2 = x^2, \quad 1 + 16 = x^2, \quad x^2 = 17, \quad x = \sqrt{17} \quad \vee \quad x = -\sqrt{17}$$

Ujemną wartość odrzucamy, bo długość krawędzi nie może być ujemna, zatem zostaje nam $x = \sqrt{17}$.

Zadanie 20

0-1 pkt

Objętość stożka ściętego (rysunek obok) dana jest wzorem $V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + rR + R^2)$, gdzie H jest wysokością bryły, a r i R są promieniami jej podstaw. Dane są: $V = 52\pi$, $r = 2$, $R = 6$. Wysokość bryły jest równa:


Odpowiedź: D (3)

Naszym zadaniem jest tak naprawdę podstawienie danych do wskazanego wzoru. Całość będzie wyglądać w następujący sposób:

$$V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + rR + R^2), \quad 52\pi = \frac{1}{3}\pi H \cdot (2^2 + 2 \cdot 6 + 6^2), \quad 52 = \frac{1}{3}H \cdot (4 + 12 + 36), \quad 52 = \frac{1}{3}H \cdot 52, \quad \frac{1}{3}H = 1, \quad H = 3$$

Zadanie 21

0-1 pkt

Czterocyfrowy kod składa się z dwóch cyfr 0 i dwóch różnych cyfr wybranych spośród: 1, 2, 3, 4, 5. Oto dwa przykładowe kody: 0250, 1003. Ile kodów spełnia opisane warunki?

Odpowiedź: C (120)

Rozpatrzmy jak mogą ułożyć nam się dwie cyfry 0 i zobaczmy na ile różnych kombinacji (zgodnie z regułą mnożenia) możemy uzupełnić pozostałe miejsca:

I możliwość - 00 ■ ■

Trzecią cyfrę możemy uzupełnić na 5 sposobów. Czwartą cyfrę możemy uzupełnić na 4 sposoby (bo cyfry mają być różne, więc nie mogą się powtarzać). To daje nam łącznie $5 \cdot 4 = 20$ możliwości.

II możliwość - 0 ■ 0 ■

Drugą cyfrę możemy uzupełnić na 5 sposobów. Czwartą cyfrę możemy uzupełnić na 4 sposoby (z tego samego powodu co powyżej). To daje nam łącznie $5 \cdot 4 = 20$ możliwości.

III możliwość - 0 ■ ■ 0

Drugą cyfrę możemy uzupełnić na 5 sposobów, trzecią na 4 sposoby. To daje nam łącznie $5 \cdot 4 = 20$ możliwości.

IV możliwość - ■ 00 ■

Pierwszą cyfrę możemy uzupełnić na 5 sposobów, czwartą na 4 sposoby. To daje nam łącznie $5 \cdot 4 = 20$ możliwości.

V możliwość - ■ 0 ■ 0

Pierwszą cyfrę możemy uzupełnić na 5 sposobów, trzecią na 4 sposoby. To daje nam łącznie $5 \cdot 4 = 20$ możliwości.

VI możliwość - ■ ■ 00

Pierwszą cyfrę możemy uzupełnić na 5 sposobów, drugą na 4 sposoby. To daje nam łącznie $5 \cdot 4 = 20$ możliwości.

Widzimy więc, że mamy 6 różnych wariantów, a w każdym jest 20 różnych możliwości. To oznacza, że wszystkich kodów spełniających warunki zadania mamy:

$$|A| = 6 \cdot 20 = 120$$

Zadanie 22

0–1 pkt

W tabeli podano oceny z matematyki pewnego ucznia.

Kategoria	Waga oceny	Oceny
Odpowiedź ustna	1	5, 1
Zadanie domowe	2	4
Sprawdzian	2	2
Zadanie klasowe	3	4, 3
Aktywność	1	5

Średnia ważona tego zestawu danych w zaokrągleniu do dwóch miejsc po przecinku jest równa:

Odpowiedź: B (3,38)

Aby obliczyć średnią ważoną musimy w liczniku dodawać do siebie iloczyny wag i ocen, a w mianowniku musimy dać sumę wszystkich wag. Całość będzie wyglądać w następujący sposób:

$$\bar{s} = \frac{1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5}{1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 1}, \bar{s} = \frac{5 + 1 + 8 + 4 + 12 + 9 + 5}{13}, \bar{s} = \frac{44}{13}, \bar{s} \approx 3,38$$

Zadanie 23

0–1 pkt

W urnie było 9 kul, trzy z nich były koloru białego. Do urny dołożono jeszcze cztery kule białe. Po tej zmianie prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe:

Odpowiedź: C ($\frac{7}{13}$)

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

W urnie mieliśmy 9 kul, do tego doszły jeszcze 4 nowe. To oznacza, że wszystkich kul, czyli zdarzeń elementarnych mamy $|\Omega| = 9 + 4 = 13$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Sprzyjającym zdarzeniem jest wylosowanie białej kuli. Takich kul na początku mieliśmy 3, ale doszły jeszcze 4 kolejne, stąd też mamy 7 kul białych, czyli możemy napisać, że $|A| = 7$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{13}$$

Zbiór wartości funkcji $f(x) = (2a + b)x^2 + (a + b - 4)x - 7$ określonej dla wszystkich liczb rzeczywistych x jest jednoelementowy. Wyznacz a i b .

Odpowiedź: $a = -4$ oraz $b = 8$

Krok 1. Analiza podanej funkcji.

Z treści zadania wynika, że zbiór wartości naszej funkcji jest jednoelementowy. To oznacza, że dla każdego argumentu x funkcja przyjmuje jednakową wartość. Takie funkcje nazywamy stałymi, a ich przykładowymi wzorami mogą być np. $y = 3$ albo $y = -5$.

Krok 2. Wyznaczenie wartości a oraz b .

Nasza funkcja jest zapisana w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Skoro nasza funkcja jest stała, to wartość współczynnika a oraz b musi być równa 0. I tu uwaga, bo dane z treści zadania są na tyle niefortunne, że bardzo łatwo jest o pomyłkę. To nie liczba a oraz b ma być równa 0, tylko współczynniki a oraz b muszą być równe 0. Mówiąc wprost - to co znajduje się przed x^2 oraz przed x musi być równe 0. Skoro tak, to powstaną nam dwa równania z których da się zbudować układ równań:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ a + b - 4 = 0 \end{cases}$$

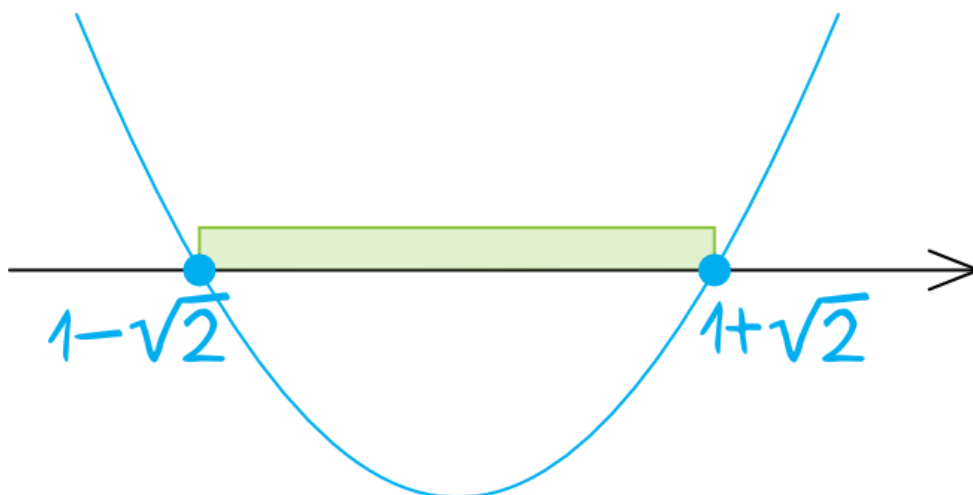
Podstawiając teraz pierwsze równanie do drugiego otrzymamy:

$$a + (-2a) - 4 = 0, \quad a - 2a - 4 = 0, \quad -a - 4 = 0, \quad a = -4$$

Podstawiając teraz $a = -4$ do wybranego równania obliczymy wartość b :

$$b = -2a, \quad b = -2 \cdot (-4), \quad b = 8$$

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = (a+1)(x-2)^2(x+1)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x . Dla jakich wartości a spełniona jest nierówność $f(0) \cdot f(1) \leq 16$?



Odpowiedź: $a \in \langle -1; -\sqrt{2} \rangle$

Krok 1. Obliczenie wartości $f(0)$ oraz $f(1)$.

Na początek obliczmy wartości $f(0)$ oraz $f(1)$, podstawiając odpowiednio do wzoru funkcji $x = 0$ oraz $x = 1$:

$$f(0) = (a+1) \cdot (0-2)^2 \cdot (0+1), \quad f(0) = (a+1) \cdot (-2)^2 \cdot 1, \quad f(0) = (a+1) \cdot 4 \cdot 1, \quad f(0) = 4a+4$$

$$f(1) = (a+1) \cdot (1-2)^2 \cdot (1+1), \quad f(1) = (a+1) \cdot (-1)^2 \cdot 2, \quad f(1) = (a+1) \cdot 1 \cdot 2, \quad f(1) = 2a+2$$

Krok 2. Podstawienie obliczonych wartości $f(0)$ oraz $f(1)$ do nierówności.

Podstawmy teraz to co przed chwilą wyznaczyliśmy do wskazanej nierówności:

$$f(0) \cdot f(1) \leq 16, \quad (4a+4) \cdot (2a+2) \leq 16, \quad 8a^2 + 8a + 8a + 8 \leq 16, \quad 8a^2 + 16a + 8 \leq 16, \quad 8a^2 + 16a - 8 \leq 0 \quad / : 2, \quad a^2 + 2a - 1 \leq 0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałej nierówności kwadratowej.

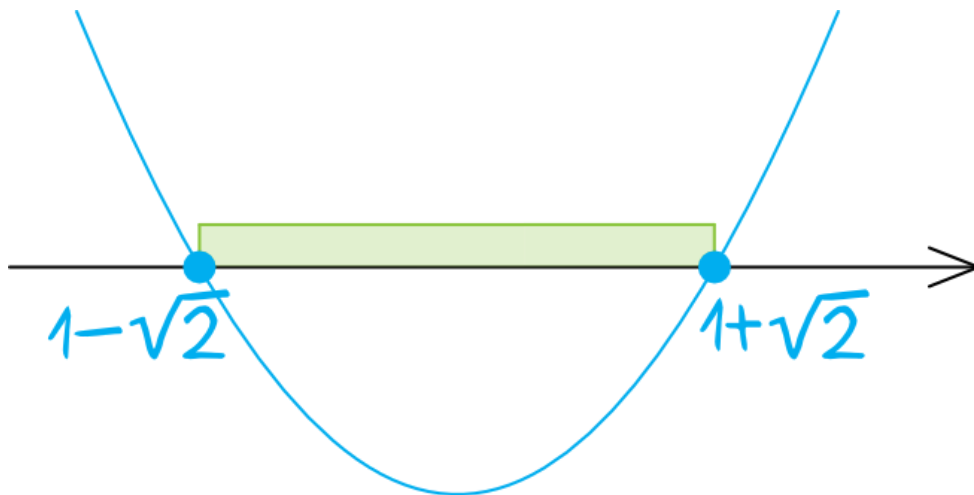
Powstała nam klasyczna nierówność kwadratowa, której rozwiązywanie zaczniemy od wyznaczenia miejsc zerowych.

Współczynniki: $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 - (-4) = 4 + 4 = 8, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$a_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}, \quad a_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

Teraz musimy naszkicować naszą parabolę, zatem nanosimy wyznaczone przed chwilą miejsca zerowe (kropki muszą być zamalowane, bo w nierówności wystąpił znak $\leq$) i rysujemy parabolę z ramionami skierowanymi do góry, bo współczynnik a jest dodatni:



Z rysunku możemy teraz odczytać, że wartości mniejsze od zera są przyjmowane dla $a \in \langle -1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2} \rangle$.

Zadanie 26

0-2 pkt

Do kwadratu różnicy dwóch dowolnych liczb parzystych dodano różnicę kwadratów tych liczb. Udowodnij, że otrzymana liczba jest podzielna przez 8.

Odpowiedź: Udowodniono rozpisuj

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do zadania.

Przyjmijmy, że a oraz b to liczby parzyste, które są bohaterami naszego zadania. Zazwyczaj liczby parzyste opisujemy jednonianem $2n$, ale tutaj skoro mogą to być dwie różne liczby, to możemy zapisać sobie, że $a = 2n$ oraz $b = 2m$, gdzie n oraz m są liczbami całkowitymi.

Krok 2. Zapisanie i rozwiązanie równania.

Zgodnie z treścią zadania interesuje nas następujące działanie:

$$(a - b)^2 + a^2 - b^2 = , = a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - b^2 = , = 2a^2 - 2ab$$

Podstawiając teraz $a = 2n$ oraz $b = 2m$ otrzymamy:

$$2 \cdot (2n)^2 - 2ab = 2 \cdot 4n^2 - 2 \cdot 2n \cdot 2m = 8n^2 - 8nm = 8n \cdot (n - m)$$

Krok 3. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Powiedzieliśmy sobie, że n oraz m to liczby całkowite. Różnica liczb całkowitych $n - m$ jest liczbą całkowitą. Jeżeli tą całkowitą liczbę pomnożymy jeszcze przez n stojące przed nawiasem, to cały czas będziemy mieć całkowity wynik. W związku z tym, że na początku wyrażenia znalazła się jeszcze ósemka, a cała reszta jest liczbą całkowitą, to mamy dowód, że otrzymana liczba jest podzielna przez 8.

Dany jest trójkąt o bokach długości a , b i c . Uzasadnij, że suma obwodów kół o średnicach a i b jest większa od obwodu koła o średnicy c .

Odpowiedź: Udowodniono korzysta

Krok 1. Zapisanie wzorów na obwód koła.

Standardowo obwód koła obliczamy ze wzoru $Obw = 2\pi r$. W tym zadaniu skorzystamy z jednej z odmian tego wzoru, bo operować będziemy na długościach średnicy, a nie długości promienia. Skoro każdy promień ma długość $2r$, to wzór na obwód koła możemy zapisać jako $Obw = \pi d$ (gdzie d to długość średnicy).

Podstawmy zatem do tego wzoru poszczególne długości średnic. Suma obwodów kół o średnicach a oraz b będzie równa:

$$Obw_{a+b} = \pi a + \pi b = \pi(a + b)$$

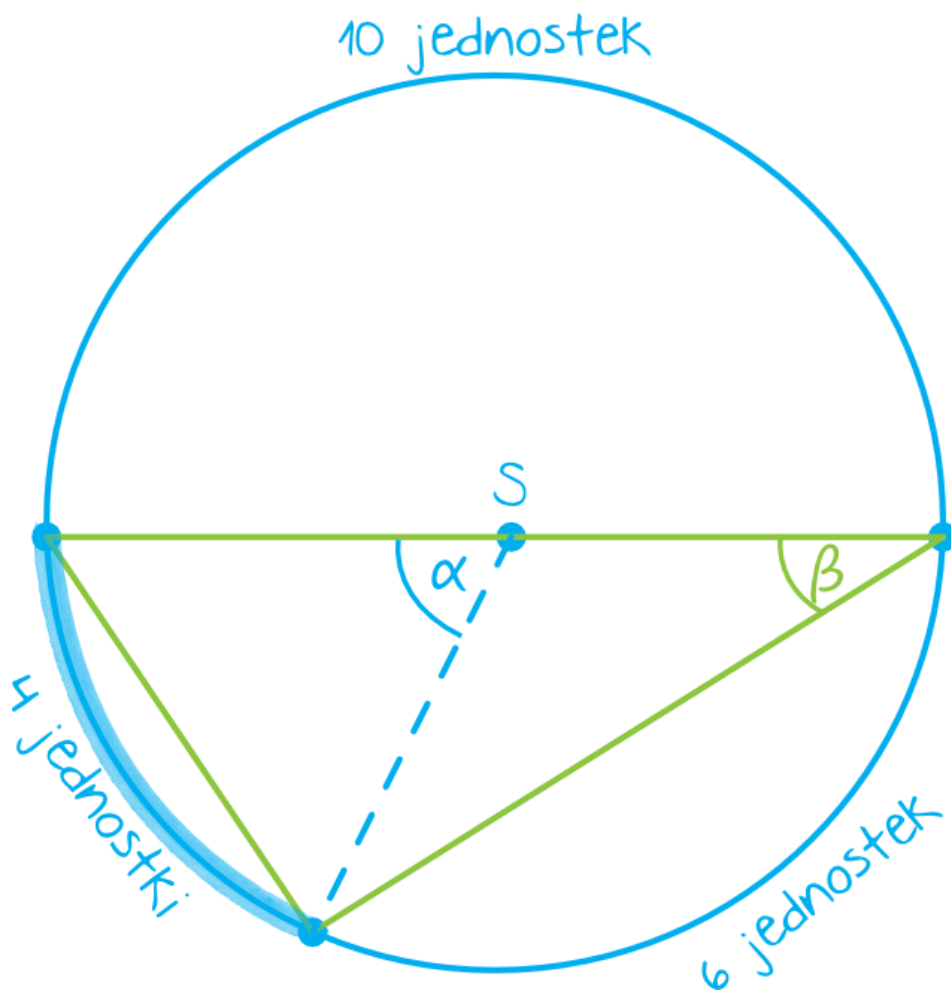
Suma obwodu koła o średnicy c będzie równa:

$$Obw_c = \pi c$$

Krok 2. Zakończenie dowodzenia.

Jedną z własności trójkątów jest to, że suma długości dwóch krótszych boków musi być większa od długości najdłuższego boku (w przeciwnym wypadku nie da się stworzyć trójkąta). Możemy więc powiedzieć, że z własności trójkątów wynika, że $a + b > c$. To właśnie dlatego $\pi(a + b)$ jest większe od πc , co należało udowodnić.

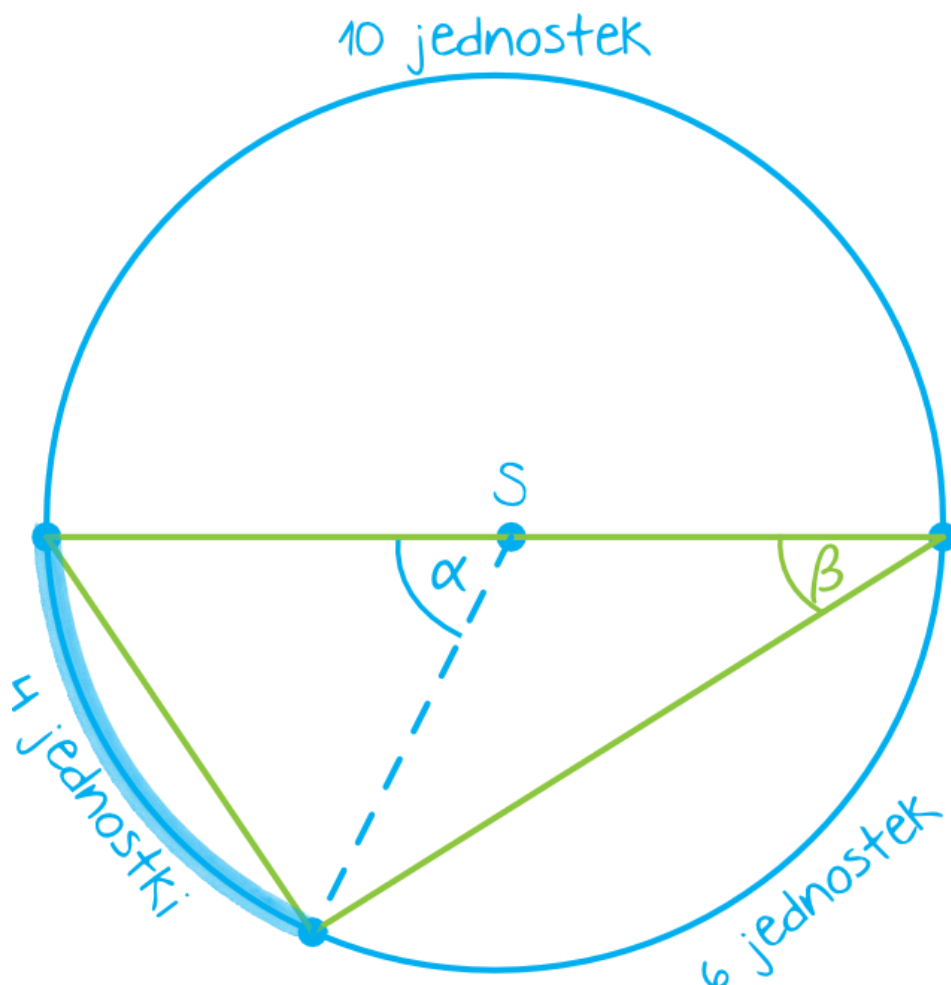
Na trójkącie opisano okrąg. Wierzchołki trójkąta podzieliły ten okrąg na łuki, których długości pozostają w stosunku 10 : 6 : 4. Odczytaj z tablic i zapisz przybliżoną wartość cosinusa najmniejszego kąta tego trójkąta.



Odpowiedź: $\cos 36^\circ \approx 0,809$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Aby dobrze zrozumieć istotę tego zadania to narysujmy sobie taki prowizoryczny okrąg z zaznaczonym trójkątem:



Najmniejszym kątem w tym trójkącie jest zaznaczony na zielono kąt β . Tutaj kluczem do rozwiązania zadania jest dostrzeżenie, że ten kąt opiera się na tym samym łuku co kąt środkowy α , którego miarę jesteśmy w stanie obliczyć.

Krok 2. Obliczenie miary kąta środkowego α .

Z powyższego rysunku wynika, że cały łuk ma długość $10 + 6 + 4 = 20$ jednostek. Najmniejszy kąt środkowy jest oparty na 4 jednostkach z 20, zatem jego miara będzie równa $\frac{4}{20}$ kąta pełnego, czyli:

$$\alpha = \frac{4}{20} \cdot 360^\circ = 72^\circ$$

Krok 3. Obliczenie miary kąta wpisanego β .

Z własności kątów środkowych i wpisanych, które są oparte na tym samym łuku wiemy, że miara kąta wpisanego będzie dwukrotnie mniejsza od miary kąta środkowego, zatem:

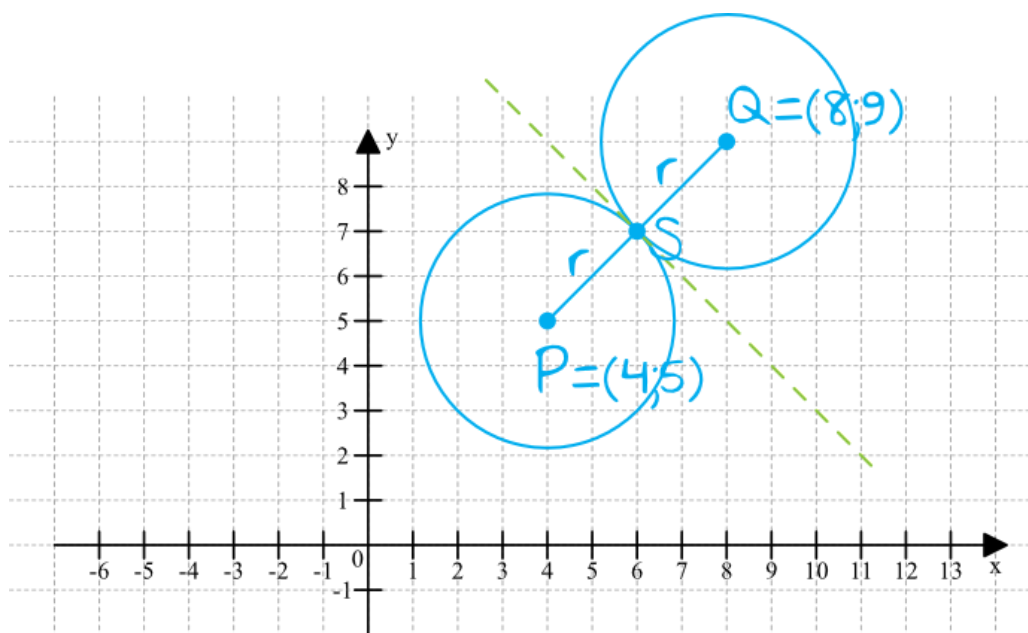
$$\beta = 72^\circ : 2, \beta = 36^\circ$$

Krok 4. Podanie przybliżonej wartości cosinusa kąta β .

Zgodnie z treścią zadania musimy jeszcze podać przybliżoną wartość cosinusa naszego kąta β . Z tablic możemy odczytać, że:

$$\cos 36^\circ \approx 0,8090 \approx 0,81$$

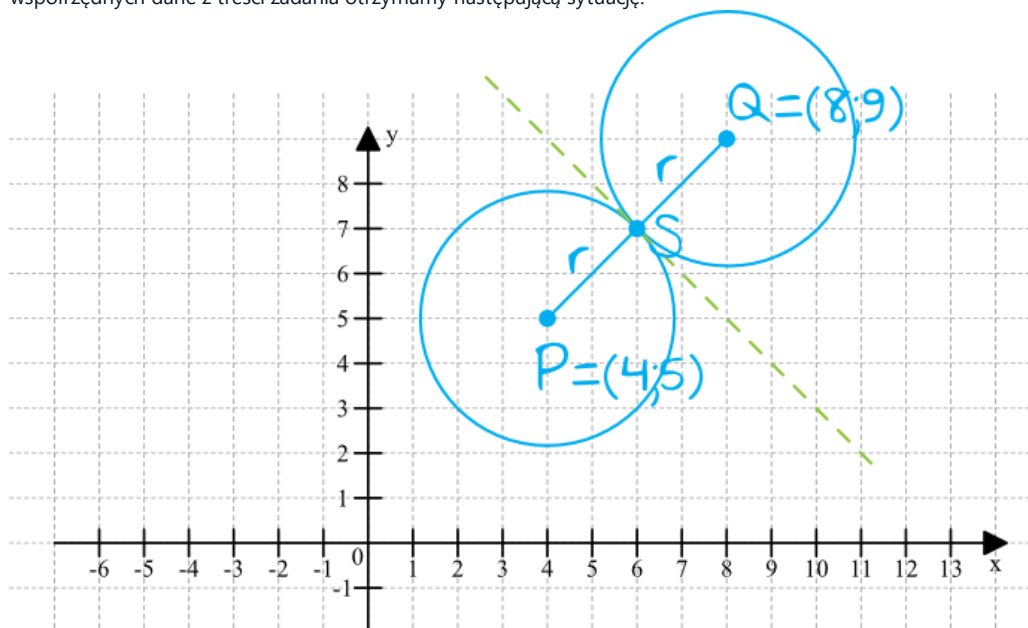
Dwa przystające okręgi: jeden o środku $P = (4, 5)$, drugi o środku $Q = (8, 9)$, są styczne zewnętrznie. Zapisz równanie osi symetrii figury złożonej z tych okręgów, nieprzechodzącej przez ich środki.



Odpowiedź: $y = -x + 13$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Skoro okręgi są przystające to znaczy, że mamy tak naprawdę dwa identyczne okręgi (o tej samej długości promienia). Zaznaczając w układzie współrzędnych dane z treści zadania otrzymamy następującą sytuację:



Krok 2. Wyznaczenie środka odcinka PQ .

Skoro okręgi są przystające to punkt styczności S jest środkiem odcinka PQ , bo $PS = r$ oraz $SQ = r$. Za chwilę współrzędne tego punktu przydadzą nam się do dalszych obliczeń, zatem już teraz możemy sobie wyznaczyć jego współrzędne, korzystając ze wzoru dostępnego w tablicach matematycznych:

$$S = \left(\frac{x_P + x_Q}{2}; \frac{y_P + y_Q}{2} \right), S = \left(\frac{4 + 8}{2}; \frac{5 + 9}{2} \right), S = \left(\frac{12}{2}; \frac{14}{2} \right), S = (6; 7)$$

Krok 3. Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej PQ .

Za chwilę będziemy poszukiwać równania prostej prostopadłej do prostej PQ , zatem przyda nam się znajomość współczynnika kierunkowego

prostej PQ . Oczywiście możemy wyznaczyć sobie całe równanie prostej PQ (np. metodą układu równań), ale nam tak naprawdę potrzebny będzie tylko ten współczynnik kierunkowy, który obliczymy ze wzoru:

$$a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}, \quad a = \frac{9 - 5}{8 - 4}, \quad a = \frac{4}{4}, \quad a = 1$$

Krok 4. Wyznaczenie równania osi symetrii.

Oś symetrii zapiszemy w postaci kierunkowej $y = ax + b$. Ustalmy najpierw jaki jest współczynnik kierunkowy a tej prostej. Jest to prosta prostopadła do prostej PQ , a aby dwie proste były względem siebie prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych musi być równy -1 . Skoro więc prosta PQ ma $a = 1$, to oś symetrii musi mieć ten współczynnik równy -1 , bo $-1 \cdot 1 = -1$. Wiemy już zatem, że oś symetrii będzie wyrażać się równaniem $y = -1x + b$, czyli $y = -x + b$. Do ustalenia pozostał nam jeszcze współczynnik b , a jego wartość poznamy podstawiając współrzędne punktu $S = (6; 7)$, przez który ta oś przechodzi:

$$y = -x + b, \quad 7 = -6 + b, \quad b = 13$$

To oznacza, że oś symetrii możemy opisać równaniem $y = -x + 13$.

W pojemniku znajdują się koperty ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi od 100 do 999, przy czym każda koperta ma inny numer. Z pojemnika losowo wybieramy jedną kopertę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania koperty oznaczonej liczbą parzystą, w której co najmniej jedna cyfra jest czwórką. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{9}{50}$

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Nasze losowanie polega na tym, że losujemy jedną z kilkuset dostępnych kopert. Musimy więc teraz dobrze ustalić ile jest tych wszystkich kopert (czyli ile tak naprawdę jest liczb trzycyfrowych), bo wbrew pozorom nie będzie ich $999 - 100 = 899$. To bardzo często popełniany błąd w tego typu zadaniach. Tak jak liczb np. od 1 do 10 nie jest $10 - 1 = 9$, tylko 10, tak naszych kopert będziemy mieć 900. Możemy więc zapisać, że $|\Omega| = 900$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Zdarzeniami sprzyjającymi (czyli takimi, które spełniają warunki naszego zadania) będą wszystkie te liczby które są parzyste i które mają przynajmniej jedną czwórkę. Obliczenie ile jest takich liczb może sprawiać problemy, bo nie jest to takie proste do wyznaczenia. Rozpiszmy więc sobie wszystko bardzo dokładnie:

I sposób - analizując poszczególne możliwości.

Zacznijmy od rozpisania sytuacji w których jest tylko jedna czwórka w całym zapisie:

1. Cwórka może wystąpić w rzędzie setek $\blacksquare \blacksquare \blacksquare$. Wtedy w rzędzie dziesiątek możemy mieć jedną z dziewięciu pozostałych cyfr (0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, czyli bez czwórki), a w rzędzie jedności możemy mieć jedną z czterech cyfr (2, 6, 8, 0, bo liczba musi być parzysta). To oznacza, że tutaj zgodnie z regułą mnożenia będziemy mieć $1 \cdot 9 \cdot 4 = 36$ zdarzeń sprzyjających.
2. Cwórka może wystąpić w rzędzie dziesiątek $\blacksquare 4 \blacksquare$. W takiej sytuacji w rzędzie setek możemy mieć jedną z ośmiu cyfr (pasuje każda cyfra, oprócz 4 oraz 0, bo nie ma takich liczb jak 042). W rzędzie jedności możemy mieć jedną z czterech cyfr (2, 6, 8, 0). Zgodnie z regułą mnożenia mamy więc $8 \cdot 1 \cdot 4 = 32$ zdarzenia sprzyjające.
3. Cwórka może wystąpić w rzędzie jedności $\blacksquare \blacksquare 4$. Tutaj w rzędzie setek możemy mieć jedną z ośmiu cyfr (pasuje każda cyfra oprócz 4 oraz 0). W rzędzie dziesiątek możemy mieć jedną z dziewięciu cyfr (każda oprócz 4). W związku z tym mamy tutaj $8 \cdot 9 \cdot 1 = 72$ zdarzenia sprzyjające.

Teraz policzmy ile jest zdarzeń w których mamy dwie czwórki w całym zapisie:

1. Cwórka może wystąpić jednocześnie w rzędzie setek i dziesiątek $44 \blacksquare$. Tutaj cyfrą jedności może być jedna z czterech cyfr (0, 2, 6, 8). Mamy zatem 4 zdarzenia sprzyjające.
2. Cwórka może wystąpić jednocześnie w rzędzie setek i jedności $\blacksquare 44$. Tutaj cyfrą dziesiątek może być jedna z dziewięciu cyfr (wszystkie oprócz 4). Mamy zatem 9 zdarzeń sprzyjających.
3. Cwórka może wystąpić jednocześnie w rzędzie dziesiątek i jedności $\blacksquare 44$. Tutaj cyfrą setek może być jedna z ośmiu cyfr (bez 0 oraz bez 4). Mamy zatem 8 zdarzeń sprzyjających.

No i jest jeszcze jedna możliwość, czyli wszystkie cyfry naszej liczby są równe 4, dzięki czemu powstanie liczba 444. Mamy więc jeszcze jedną dodatkową możliwość.

W związku z tym wszystkich zdarzeń sprzyjających będziemy mieć:

$$|A| = 36 + 32 + 72 + 4 + 9 + 8 + 1 = 162$$

II sposób - nieco sprytniejszy, opierający się na tym ile zdarzeń nie jest sprzyjających.

Jak widać powyżej, obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających było dość trudne i bardzo łatwo jest tutaj o pomyłkę. Okazuje się, że znacznie szybciej dałoby się policzyć ile zdarzeń NIE jest sprzyjających.

1. Na pewno zdarzeniami niesprzyjającymi są wszystkie liczby nieparzyste, które stanowią połowę wszystkich zdarzeń elementarnych. Takich zdarzeń będzie więc 450.
2. Liczby nieparzyste odkładamy już na bok i ich nie analizujemy. Wśród pozostałych zdarzeń (czyli wśród liczb parzystych) zdarzeniami niesprzyjającymi będą teraz te liczby w których nie użyto cyfry 4. W takich liczbach w rzędzie setek możemy mieć więc 8 różnych cyfr (wszystkie cyfry oprócz 4 oraz 0). W rzędzie dziesiątek możemy mieć jedną z dziewięciu cyfr (wszystkie oprócz 4). W rzędzie jedności będziemy mieć jedną z czterech cyfr (0, 2, 6, 8). To oznacza, że parzystych liczb w których nie ma czwórki będzie łącznie $8 \cdot 9 \cdot 4 = 288$.

W związku z tym wszystkich zdarzeń niesprzyjających mamy $450 + 288 = 738$. Skoro zdarzeń elementarnych mamy 900, a zdarzeń niesprzyjających jest 738, to zdarzeń sprzyjających będziemy mieć:

$$|A| = 900 - 738 = 162$$

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{162}{900} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$$

Drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 1, a dwudziesty wyraz tego ciągu jest równy 13. Oblicz sumę tych wszystkich wyrazów ciągu, które są mniejsze od 33.

Odpowiedź: $\{S_{49}\} = 800\frac{1}{3}$

Krok 1. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu i różnicy ciągu.

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego możemy zapisać, że:

$$a_2 = a_1 + r, \quad a_{20} = a_1 + 19r$$

Wiemy, że wartość $a_2 = 1$ oraz że $a_{20} = 13$. Układając więc z tych wszystkich informacji układ równań będziemy w stanie obliczyć wartość a_1 oraz r :

$$\begin{cases} a_1 + r = 1 \\ a_1 + 19r = 13 \end{cases}$$

Ten układ równań możemy rozwiązać na dowolnie wybrany sposób, ale najprościej będzie po prostu odjąć te dwa równania stronami, otrzymując:

$$-18r = -12, \quad r = \frac{2}{3}$$

Znając wartość różnicy ciągu możemy już bez przeszkód obliczyć wartość a_1 podstawiając $r = \frac{2}{3}$ do jednego z równań (np. pierwszego):

$$a_1 + r = 1, \quad a_1 + \frac{2}{3} = 1, \quad a_1 = \frac{1}{3}$$

Krok 2. Zapisanie wzoru ogólnego ciągu arytmetycznego.

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i znając wartość $a_1 = \frac{1}{3}$ oraz $r = \frac{2}{3}$ możemy zapisać, że wzorem ogólnym naszego ciągu arytmetycznego jest:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \quad a_n = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{2}{3}, \quad a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n - \frac{2}{3}, \quad a_n = \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}$$

Krok 3. Wyznaczenie liczby wyrazów, które są mniejsze od 33.

Chcąc się dowiedzieć ile wyrazów jest mniejszych od 33 musimy rozwiązać prostą nierówność:

$$\frac{2}{3}n - \frac{1}{3} < 33 \quad \Bigg/ \cdot 3, \quad 2n - 1 < 99, \quad 2n < 100, \quad n < 50$$

Otrzymany wynik oznacza, że dopóki n jest mniejsze od 50, to wartość ciągu jest mniejsza od 33. To oznacza, że będziemy mieć 49 wyrazów mniejszych od 33 (będą to wyrazy od pierwszego do czterdziestego dziewiątego).

Krok 4. Obliczenie sumy 49 wyrazów ciągu arytmetycznego.

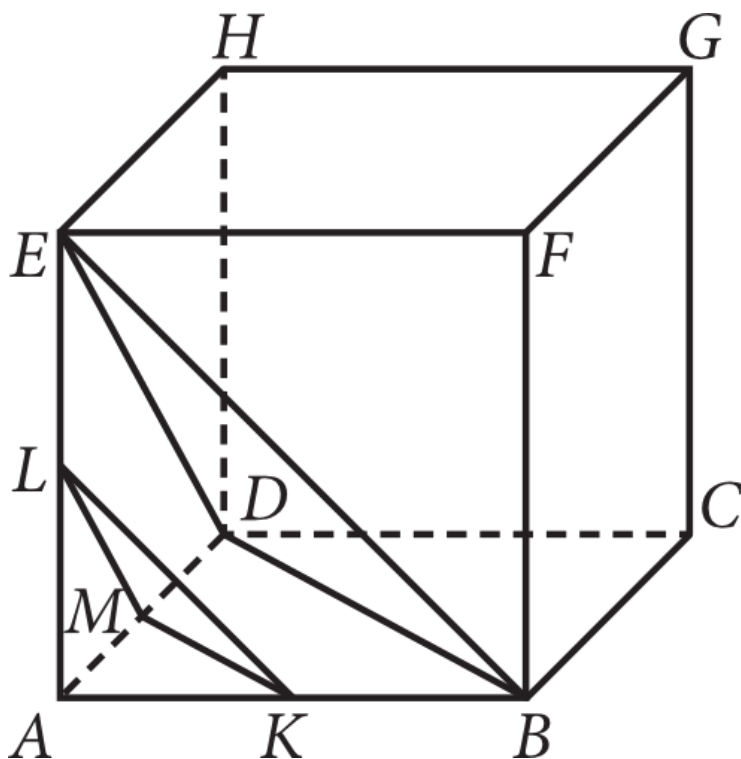
Do obliczenia poszukiwanej sumy skorzystamy ze wzoru:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Znamy wszystkie potrzebne wartości, zatem podstawiając $a_1 = \frac{1}{3}$, $r = \frac{2}{3}$ oraz $n = 49$ otrzymamy:

$$S_{49} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + (49-1) \cdot \frac{2}{3}}{2} \cdot 49, \quad S_{49} = \frac{\frac{2}{3} + 48 \cdot \frac{2}{3}}{2} \cdot 49, \quad S_{49} = \frac{\frac{2}{3} + 32}{2} \cdot 49, \quad S_{49} = \frac{32\frac{2}{3}}{2} \cdot 49, \quad S_{49} = 16\frac{1}{3} \cdot 49, \quad S_{49} = 800\frac{1}{3}$$

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 10 (rysunek niżej). Przez środki krawędzi AB , AD i AE poprowadzono płaszczyznę p , a przez wierzchołki B , D i E – płaszczyznę q (rys.). Oblicz różnicę wysokości powstałych ostrosłupów o wspólnym wierzchołku A .



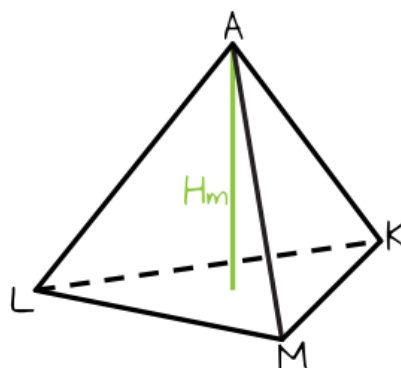
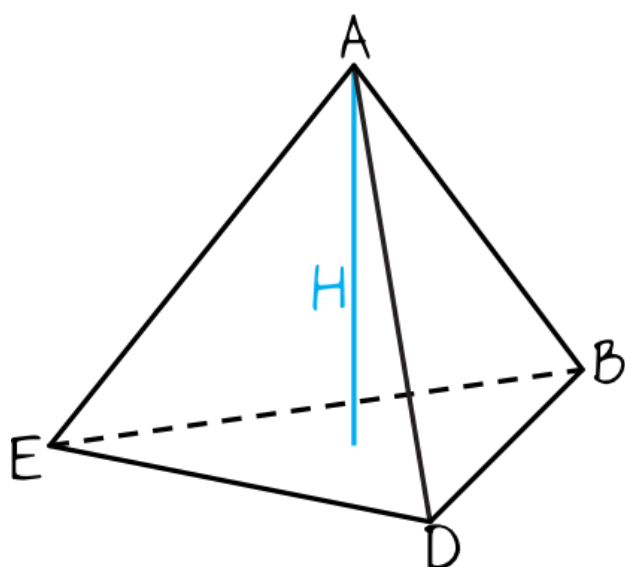
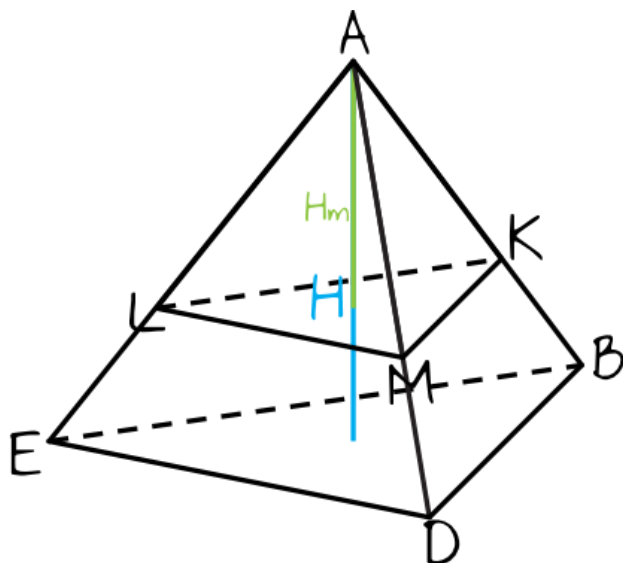
Odpowiedź: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Uwaga: To zadanie jest bardzo nieprecyzyjne. Można odnieść wrażenie, że pytają się nas w zadaniu o to jaka jest różnica między odcinkiem AE oraz AL , bo są to jak najbardziej wysokości powstałych ostrosłupów, które padają na podstawy AKM oraz ABD . Zarówno jeden jak i drugi ostrosłup ma wierzchołek w punkcie A , więc wszystko jest zgodne z treścią zadania. Jak tak byśmy podeszli do zadania, to wysokości ostrosłupów są bardzo proste do policzenia, bowiem $|AE| = 10$, a skoro L jest środkiem odcinka AE to $|AL| = 5$. Różnica wysokości wyniosłaby więc 5.

Nieprecyzyjność tego zadania wynika z tego, że intencją autora było to, że wierzchołek A uznano za "górny wierzchołek", czyli że te dwa ostrosłupy powinny być obrócone w taki sposób, że w podstawie pierwszego znajduje się trójkąt MKL , a w podstawie drugiego znajduje się trójkąt BDE . Wtedy wysokość poprowadzona z wierzchołka A padałaby na te dwie płaszczyzny.

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Jedną z głównych trudności w tym zadaniu jest prawidłowe odszukanie poszukiwanych ostrosłupów (o czym wspominałem powyżej). Narysujmy więc sobie te dwa ostrosłupy oddzielnie i zróbmy to od razu tak, jak zazwyczaj rysujemy ostrosłupy (czyli podstawy MKL oraz BDE na dole, a wierzchołek A na górze).

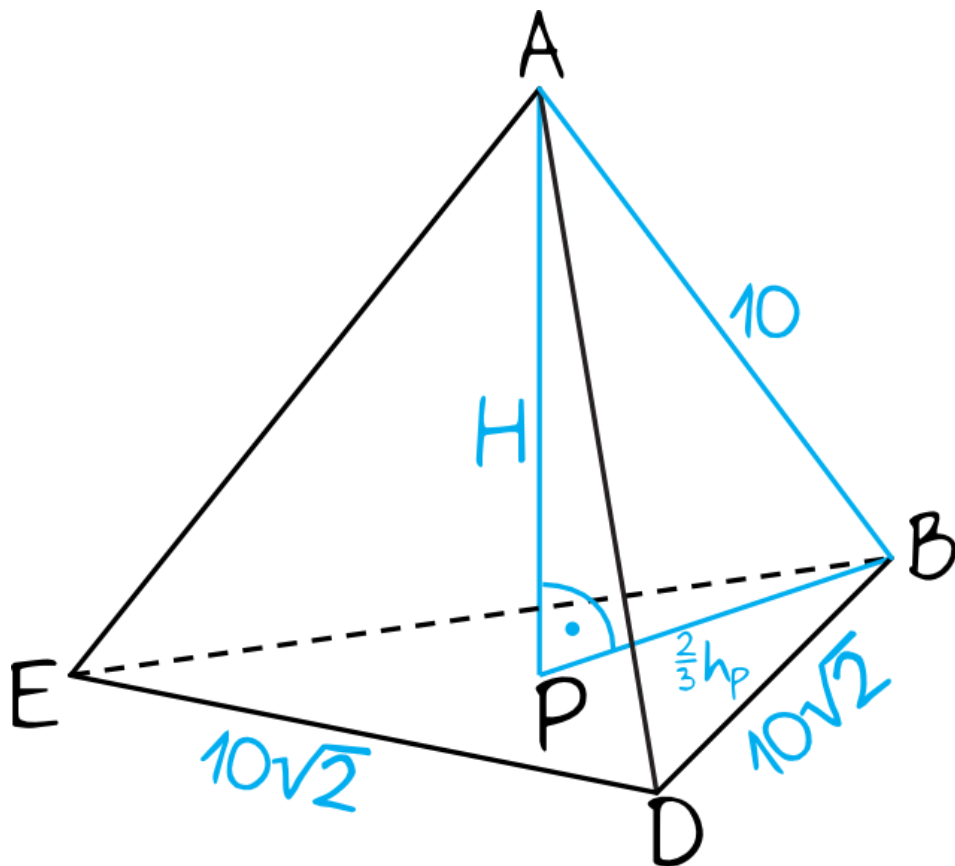


Krok 2. Obliczenie długości boków BD , BE oraz DE .

Jak spojrzymy się na rysunek z treści zadania to możemy zauważyć, że boki BD , BE oraz DE są przekątnymi kwadratów, które znalazły się w podstawie lub ścianie bocznej sześcianu. Z własności kwadratów wiemy, że przekątne kwadratów o boku a mają długość $a\sqrt{2}$. Skoro więc krawędź kwadratu ma długość 10, to wszystkie te trzy boki będą miały długość $10\sqrt{2}$.

Krok 3. Obliczenie wysokości dużego ostrosłupa.

Zacznijmy od policzenia wysokości dużego ostrosłupa. Tutaj też możemy sporządzić prosty rysunek, zaznaczając przy okazji trójkąt prostokątny z którego obliczymy poszukiwaną wysokość:



Widzimy wyraźnie, że dolna przyprostokątna naszego trójkąta prostokątnego ma długość $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego, który znalazł się w podstawie. Wysokość takich trójkątów obliczamy ze wzoru $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, zatem:

$$BP = \frac{2}{3}h_p, BP = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, BP = \frac{2}{3} \cdot \frac{10\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}, BP = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

Teraz znając dwie długości boków w trójkącie prostokątnym BPA możemy bez problemu obliczyć poszukiwaną wysokość z Twierdzenia Pitagorasa:

$$\left(\frac{10\sqrt{6}}{3}\right)^2 + H^2 = 10^2, \frac{100 \cdot 6}{9} + H^2 = 100, \frac{600}{9} + H^2 = \frac{900}{9}, H^2 = \frac{300}{9}, H^2 = \frac{100}{3}, H = \sqrt{\frac{100}{3}} \vee H = -\sqrt{\frac{100}{3}}$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, bo wysokość nie może być ujemna, zatem zostaje nam $H = \sqrt{\frac{100}{3}}$, co możemy jeszcze uprościć do następującej postaci:

$$H = \sqrt{\frac{100}{3}}, H = \frac{10}{\sqrt{3}}, H = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}, H = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Krok 4. Dostrzeżenie podobieństwa ostrosłupów.

Jeżeli spojrzymy na nasze ostrosłupy, które narysowaliśmy sobie w pierwszym kroku, to powinniśmy dostrzec, że są one ostrosłupami podobnymi, bo każdy wymiar drugiego ostrosłupa jest dwukrotnie mniejszy od wymiaru pierwszego ostrosłupa. Jeżeli więc potraktujemy pierwszy ostrosłup jako bryłę podstawową, a drugi jako bryłę podobną, bo możemy zapisać, że skala podobieństwa będzie równa $k = \frac{1}{2}$.

Krok 5. Obliczenie wysokości małego ostrosłupa.

Skoro skala podobieństwa tych ostrosłupów jest równa $k = \frac{1}{2}$, to także wysokość małego ostrosłupa będzie dwukrotnie mniejsza od wysokości ostrosłupa dużego. W związku z tym:

$$H_m = \frac{1}{2}H, H_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3}, H_m = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Krok 6. Obliczenie różnicy między wysokością dużego i małego ostrosłupa.

Zgodnie z treścią zadania musimy jeszcze obliczyć różnicę wysokości dwóch ostrosłupów, zatem:

$$H - H_m = \frac{10\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$