

# Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Nowa Era 2016

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

## Odpowiedzi do zadań zamkniętych

| Zadanie | Odpowiedź                                                                 | Pkt |
|---------|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1       | D (62, 5)                                                                 | 1   |
| 2       | C ( $2(\sqrt{2} + 1)$ )                                                   | 1   |
| 3       | C (o 25%)                                                                 | 1   |
| 4       | D (3)                                                                     | 1   |
| 5       | C ( $2^{26}$ )                                                            | 1   |
| 6       | D (jedno rozwiązanie: $x = \frac{2}{3}$ )                                 | 1   |
| 7       | A ( $a \in (-2, 2)$ )                                                     | 1   |
| 8       | C (10)                                                                    | 1   |
| 9       | A (4)                                                                     | 1   |
| 10      | B ( $y = \frac{1}{2}x - 1$ )                                              | 1   |
| 11      | A ( $x = 1$ )                                                             | 1   |
| 12      | A (zwiększyć o 25%)                                                       | 1   |
| 13      | C (-102)                                                                  | 1   |
| 14      | D ( $30^\circ$ )                                                          | 1   |
| 15      | B ( $2\sqrt{2}$ )                                                         | 1   |
| 16      | D ( $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ )                                               | 1   |
| 17      | D ( $8\sqrt{2}$ )                                                         | 1   |
| 18      | B ( $4(\sqrt{5} - 1)$ )                                                   | 1   |
| 19      | A (<DES)                                                                  | 1   |
| 20      | B ( $68^\circ$ )                                                          | 1   |
| 21      | C ( $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ) | 1   |
| 22      | D (Darka)                                                                 | 1   |
| 23      | B (20)                                                                    | 1   |

## Rozwiązania krok po kroku

## Zadanie 1

0-1 pkt

Liczba 60 jest przybliżeniem z niedomiarem liczby  $x$ . Błąd względny tego przybliżenia to 4%. Liczba  $x$  jest równa:

**Odpowiedź: D (62, 5)**

Krok 1. Zapisanie danych z treści zadania.

Błąd względny obliczymy korzystając ze wzoru  $\delta = \frac{|x-p|}{x}$ , gdzie:

$\delta$  - błąd względny

$x$  - dokładna wartość

$p$  - wartość przybliżona

W naszym przypadku:

$$\delta = 4\% = 0,04$$

$$p = 60$$

Krok 2. Zapisanie i rozwiązanie równania.

Podstawiając powyższe dane do wzoru na błąd bezwzględny otrzymamy:

$$\delta = \frac{|x-p|}{x}, \quad 0,04 = \frac{|x-60|}{x}, \quad 0,04x = |x-60|$$

Otrzymaliśmy równanie z wartością bezwzględną. Musimy więc ustalić, czy wartość w nawiasie bezwzględności jest dodatnia, czy też ujemna (od tego zależy jak będzie wyglądać opuszczenie nawiasów bezwzględności). W treści zadania mamy informację, że liczba 60 jest przybliżeniem z niedomiarem, czyli liczba  $x$  jest większa od 60. To oznacza, że wartość  $x - 60$  jest na pewno dodatnia. Możemy więc bez problemu opuścić nawiasy bezwzględności nie zmieniając żadnej wartości. Otrzymamy więc:

$$0,04x = x - 60, \quad -0,96x = -60, \quad x = 62,5$$

## Zadanie 2

0-1 pkt

Dla liczb  $a = 2\sqrt{2}$  i  $b = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$  wyrażenie  $\frac{a}{b^2}$  jest równe:

**Odpowiedź: C ( $2(\sqrt{2} + 1)$ )**

Krok 1. Podstawienie liczb do wyrażenia.

Podstawiając wskazane liczby do naszego wyrażenia otrzymamy:

$$\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2}, \quad \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

Krok 2. Usunięcie niewymierności z mianownika.

Teraz musimy usunąć niewymierność, która pojawiła się w mianowniku. Wymnożenie licznika i mianownika przez  $\sqrt{2}$  nic nam nie da. Aby usunąć niewymierność musimy pomnożyć licznik i mianownik przez  $2 + \sqrt{2}$ , dzięki czemu w mianowniku skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ . Całość będzie wyglądać następująco:

$$\frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot (2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2} + 4}{4 - 2} = \frac{4\sqrt{2} + 4}{2} = 2\sqrt{2} + 2 = 2(\sqrt{2} + 1)$$

## Zadanie 3

0-1 pkt

Cenę towaru podwyższono o 20%. O ile procent należy obniżyć nową cenę towaru, aby po obniżce stanowiła ona 90% ceny przed zmianami?

**Odpowiedź: C (o 25%)**

Jeżeli przyjmiemy, że  $x$  to początkowa cena towaru, to:

1,  $2x$  - cena towaru po podwyżce o 20%

0,  $9x$  - cena towaru jaką chcemy otrzymać

1,  $2x - 0,9x = 0,3x$  - o tyle musimy dokonać obniżki

Z powyższej analizy wyszło nam, że cenę 1,  $2x$  musimy obniżyć o 0,  $3x$ , zatem obniżka ta będzie równa:

$$\frac{0,3x}{1,2x} = \frac{1}{4} = 25\%$$

## Zadanie 4

0-1 pkt

ciąg  $(a_n)$  jest określony wzorem  $a_n = \log(n+1)$  dla  $n \geq 1$ . Liczba  $\frac{3a_3 - a_7}{a_1}$  jest równa:

**Odpowiedź: D (3)**

Krok 1. Wyznaczenie wartości poszczególnych wyrazów ciągu.

Z podanego w treści zadania wyrażenia wynika, że musimy poznać wartość  $a_3$ ,  $a_7$  oraz  $a_1$ . Wyznamy zatem każdą z tych wartości:

$$a_3 = \log(3+1) = \log 4, \quad a_7 = \log(7+1) = \log 8, \quad a_1 = \log(1+1) = \log 2$$

Tu warto sobie przy okazji powiedzieć, że jeżeli logarytm nie ma zapisanej podstawy, to domyślnie ta podstawa jest równa 10. Czyli przykładowo  $\log 4 = \log_{10} 4$ .

Krok 2. Obliczenie wartości liczby.

Możemy teraz podstawić wskazane logarytmy do całego wyrażenia i przystąpić do obliczenia wartości naszej liczby. Trzeba będzie się tutaj wykazać umiejętnościami działań na logarytmach, a całość będzie wyglądać następująco:

$$\frac{3 \cdot \log 4 - \log 8}{\log 2} = \frac{\log 4^3 - \log 8}{\log 2} = \frac{\log 64 - \log 8}{\log 2} = \frac{\log \frac{64}{8}}{\log 2} = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{\log 2^3}{\log 2} = \frac{3 \cdot \log 2}{\log 2} = 3$$

## Zadanie 5

0-1 pkt

Iloraz liczby  $8^{10} - 4^{14}$  przez liczbę  $6\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4}$  jest równy:

**Odpowiedź: C ( $2^{26}$ )**

Iloraz to dzielenie, zatem musimy wykonać następujące działanie:

$$\frac{8^{10} - 4^{14}}{6\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4}} = \frac{(2^3)^{10} - (2^2)^{14}}{6 \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{30} - 2^{28}}{6 \cdot 4^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{30} - 2^{28}}{6 \cdot 2} = \frac{2^{30} - 2^{28}}{12} = \frac{2^{28} \cdot (2^2 - 1)}{12} = \frac{2^{28} \cdot 3}{12} = \frac{2^{28}}{4} = 2^{26}$$

## Zadanie 6

0-1 pkt

Równanie  $\frac{8-2x^2}{x+2} = x+2$  ma dokładnie:

**Odpowiedź: D (jedno rozwiązanie:  $x = \frac{2}{3}$ )**

Krok 1. Zapisanie założeń.

Z racji tego, iż na matematyce nie istnieje dzielenie przez zero, to wartość w mianowniku musi być różna od zera. Z tego też względu:

$$x+2 \neq 0, \quad x \neq -2$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.

Mnożąc obydwie strony tego równania przez  $x+2$  otrzymamy:

$$\frac{8-2x^2}{x+2} = x+2 \quad \Bigg| \cdot (x+2), \quad 8-2x^2 = (x+2) \cdot (x+2), \quad 8-2x^2 = x^2+4x+4, \quad -3x^2-4x+4=0$$

Krok 3. Rozwiązanie powstałego równania kwadratowego.

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe w postaci ogólnej, zatem aby je rozwiązać musimy obliczyć deltę:

Współczynniki:  $a = -3$ ,  $b = -4$ ,  $c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 16 - (-48) = 16 + 48 = 64, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - 8}{2 \cdot (-3)} = \frac{4 - 8}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + 8}{2 \cdot (-3)} = \frac{4 + 8}{-6} = \frac{12}{-6} = -2$$

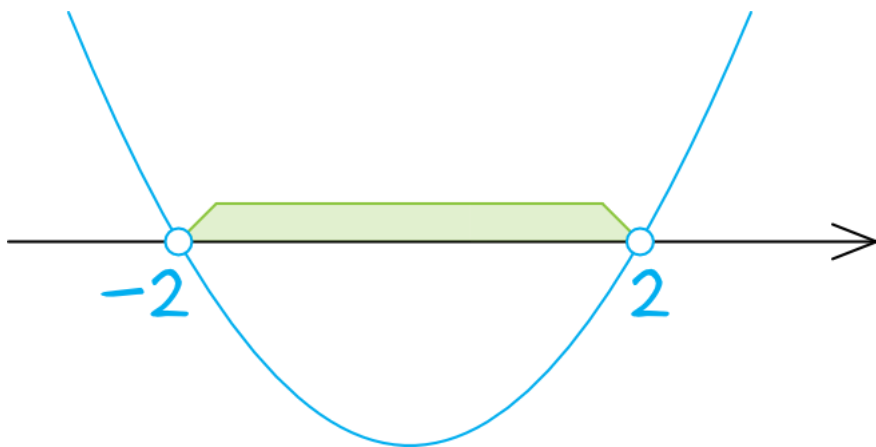
Krok 4. Weryfikacja otrzymanych wyników.

To jeszcze nie jest koniec zadania. Musimy zweryfikować nasze wyniki. W założeniach zapisaliśmy sobie, że  $x$  nie może być równy  $-2$ , a to oznacza, że rozwiązanie  $x = -2$  musimy wykluczyć. To oznacza, że nasze równanie ma tylko jedno rozwiązanie i jest nim  $\frac{2}{3}$ .

## Zadanie 7

0-1 pkt

Liczba 4 spełnia nierówność  $a^2x - 16 < 0$  z niewiadomą  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy:



**Odpowiedź: A** ( $a \in (-2, 2)$ )

Krok 1. Podstawienie do nierówności wartości  $x = 4$ .

Wiemy, że liczba 4 ma spełniać nierówność, zatem podstawiając  $x = 4$  otrzymamy:

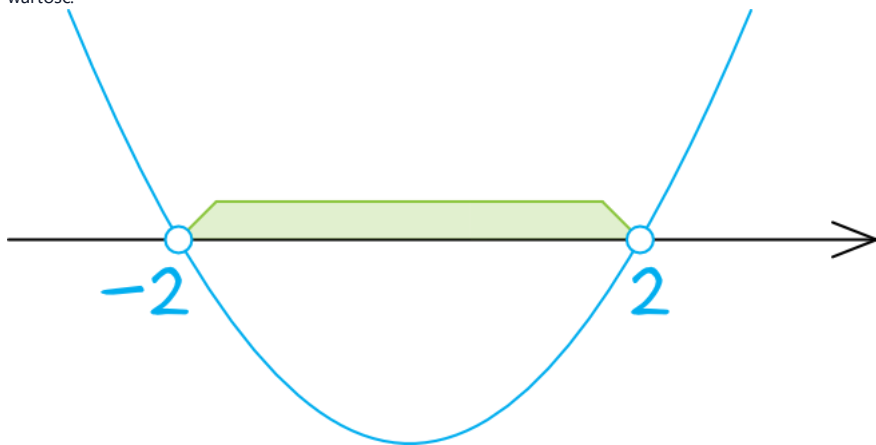
$$a^2 \cdot 4 - 16 < 0, \quad 4a^2 - 16 < 0$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałej nierówności kwadratowej.

Otrzymaliśmy nierówność kwadratową z niewiadomą  $a$ , zatem musimy ją teraz rozwiązać. Rozwiązanie nierówności kwadratowej zaczynamy od wyznaczenia miejsc zerowych, czyli od przyrównania wartości  $4a^2 - 16$  do zera, otrzymując równanie kwadratowe:

$$4a^2 - 16 = 0, \quad 4a^2 = 16, \quad a^2 = 4, \quad a = 2 \quad \vee \quad a = -2$$

Znając miejsca zerowe możemy przystąpić do szkicowania wykresu paraboli, pamiętając że jej ramiona będą skierowane do góry, bo przed  $a^2$  mamy dodatnią wartość:



Interesują nas wartości mniejsze od zera, zatem rozwiązaniem nierówności (a tym samym całego zadania) będzie przedział  $a \in (-2, 2)$ .

## Zadanie 8

0-1 pkt

Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej  $n$  największy wspólny dzielnik liczb  $n$  oraz  $n + 10$ . Największa wartość funkcji  $f$  jest równa:

**Odpowiedź: C (10)**

W tym zadaniu zbyt wiele nie policzymy, musimy tylko przeanalizować całą sytuację. Zobaczmy jak ta funkcja zachowuje się dla kilku przykładowych  $n$ :

Gdy  $n = 4$ , to musimy obliczyć NWD liczb 4 oraz 14. Największym wspólnym dzielnikiem tych liczb będzie 2, zatem tutaj otrzymamy  $NWD = 2$ .

Gdy  $n = 10$ , to musimy obliczyć NWD liczb 10 oraz 20. Największym wspólnym dzielnikiem tych liczb będzie 10, zatem tutaj otrzymamy  $NWD = 10$ .

Gdy  $n = 20$ , to musimy obliczyć NWD liczb 20 oraz 30. Największym wspólnym dzielnikiem tych liczb będzie 10, zatem tutaj otrzymamy  $NWD = 10$ .

Gdy  $n = 30$ , to musimy obliczyć NWD liczb 30 oraz 40. Największym wspólnym dzielnikiem tych liczb będzie 10, zatem tutaj otrzymamy  $NWD = 10$ .

Jakbyśmy do tego zadania nie podchodzili, to nie uda nam się otrzymać NWD większego od 10.

Gdyby jednak to zadanie było zadaniem dowodowym, to jak matematycznie udowodnić, że na pewno nie otrzymamy nigdzie  $NWD = 20$ ? Załóżmy, że nasza pierwsza liczba dzieli się przez 20 (tylko wtedy byłaby szansa, że NWD jest równe 20), czyli że  $n = 20 \cdot k$ , gdzie  $k$  jest dodatnią liczbą całkowitą. W takiej sytuacji druga liczba będzie równa  $20k + 10$ . Jeżeli teraz w drugiej liczbie wyłączymy przed nawias wartość 20, to otrzymamy  $20 \cdot (k + \frac{1}{2})$ . Skoro  $k$  było dodatnią liczbą całkowitą, to przez ułamek  $\frac{1}{2}$  wartość w nawiasie wyszła nam niecałkowita. To oznacza, że jeżeli pierwsza liczba jest podzielna przez 20, to druga (ta większa od 10) nie będzie podzielna przez 20, bo zawsze dzieląc ją przez 20 otrzymamy wynik z "połówką". Np.:

Jeżeli  $n = 20$ , to mamy liczby 20 oraz 30. Dzieląc obydwie liczby przez 20 otrzymamy  $20 : 20 = 1$  oraz  $30 : 20 = 1,5$ .

Jeżeli  $n = 200$ , to mamy liczby 200 oraz 210. Dzieląc obydwie liczby przez 20 otrzymamy  $200 : 20 = 10$  oraz  $210 : 20 = 10,5$ .

## Zadanie 9

0-1 pkt

Funkcja liniowa  $f(x) = -2x + b$  przyjmuje wartości dodatnie dla wszystkich  $x < 2$  i tylko dla takich. Wynika stąd, że współczynnik  $b$  jest równy:

**Odpowiedź: A (4)**

Do zadania można podejść na wiele sposobów, możemy nawet podstawiać poszczególne wartości współczynnika  $b$  i sprawdzać kiedy nierówność  $-2x + b > 0$  da rozwiązanie  $x < 2$  (w nierówności mamy dajemy  $> 0$ , bo mają to być wartości dodatnie). Przykładowo dla  $b = 4$  z pierwszej odpowiedzi otrzymalibyśmy:

$$-2x + 4 > 0, \quad -2x > -4, \quad x < 2$$

Otrzymaliśmy rozwiązanie  $x < 2$ , zatem już wiemy że poszukiwaną wartością było  $b = 4$ .

Można też do tego zadania podejść bardziej analitycznie. Skoro funkcja liniowa przyjmuje wartości dodatnie dla  $x < 2$ , to dla  $x = 2$  musi przyjmować wartość równą 0, zatem:

$$-2 \cdot 2 + b = 0, \quad -4 + b = 0, \quad b = 4$$

## Zadanie 10

0-1 pkt

Prosta o równaniu  $y = \frac{1}{2}x + 1$  przesunięto wzdłuż osi  $Ox$  o cztery jednostki w prawo. Otrzymano prostą o równaniu:

**Odpowiedź: B ( $y = \frac{1}{2}x - 1$ )**

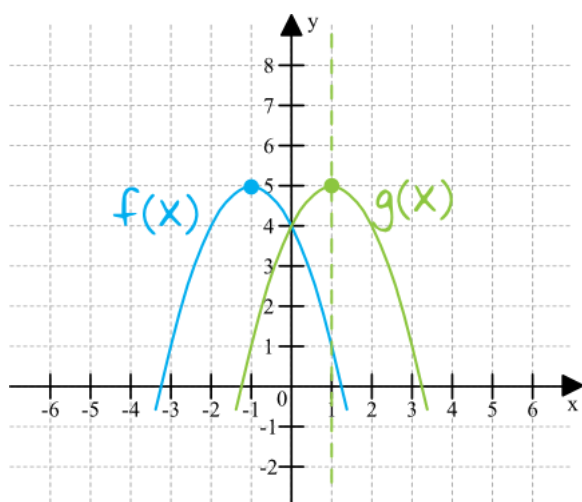
Wzór funkcji przesuniętej o cztery jednostki w prawo stworzymy pomniejszając wartość  $x$  o 4. Nasza prosta będzie więc opisana równaniem:

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x - 4) + 1, \quad y = \frac{1}{2}x - 2 + 1, \quad y = \frac{1}{2}x - 1$$

## Zadanie 11

0-1 pkt

Wykres funkcji kwadratowej  $f(x) = -(x+1)^2 + 5$  przekształcono symetrycznie względem osi  $Oy$  i otrzymano wykres funkcji  $g$ . Wskaż równanie prostej, która jest osią symetrii wykresu funkcji  $g$ .



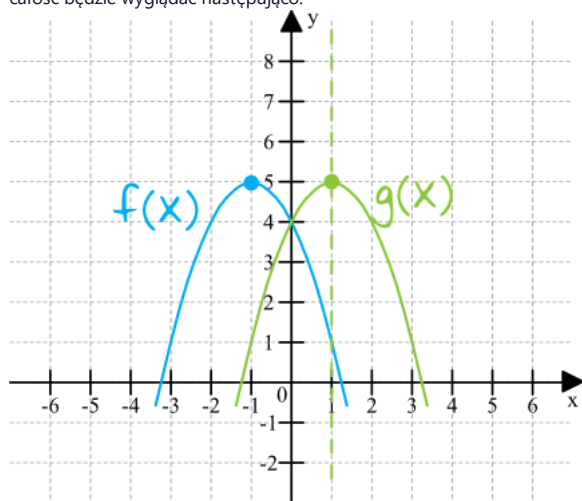
**Odpowiedź:** A ( $x = 1$ )

Krok 1. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka funkcji  $f(x)$ .

Funkcję  $f(x)$  mamy zapisaną w postaci kanonicznej  $f(x) = a(x-p)^2 + q$  z której bardzo szybko możemy odczytać współrzędne wierzchołka paraboli  $W = (p; q)$ . Patrząc się na wzór funkcji możemy stwierdzić, że  $p = -1$  oraz  $q = 5$ .

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

To zadanie będzie najprościej rozwiązać tworząc sobie prosty rysunek pomocniczy na którym zaznamy funkcję  $f(x)$  oraz  $g(x)$ . O funkcji  $f(x)$  wiemy już, że ma swój wierzchołek w punkcie  $W = (-1; 5)$ , wiemy też że będzie mieć ramiona skierowane do dołu (bo współczynnik  $a = -1$ , czyli jest mniejszy od zera), zatem całość będzie wyglądać następująco:



Krok 3. Odczytanie rozwiązania.

Ośią symetrii funkcji  $f(x)$  była prosta  $x = -1$  przechodząca przez wierzchołek tej paraboli. Przekształcając tę funkcję względem osi igreków otrzymaliśmy funkcję  $g(x)$ , która swój wierzchołek ma w punkcie  $W = (1; 5)$ , zatem tutaj osią symetrii będzie prosta  $x = 1$ .

Pan Krzysztof pokonuje trasę Warszawa-Kraków w czasie  $t$  ze średnią prędkością  $v$ . Aby skrócić czas podróży o 20%, pan Krzysztof musi średnią prędkość:

**Odpowiedź: A (zwiększyć o 25%)**

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie równań.

Na wstępie możemy od razu odrzucić dwie ostatnie odpowiedzi, bo nawet na logikę nie jest możliwe to, by jadąc z mniejszą prędkością, pokonać szybciej tą samą trasę.

Ze wzoru  $v = \frac{s}{t}$  wynika, że  $s = v \cdot t$ . W obydwu przypadkach pokonana trasa jest niezmienna, zmienne za to będą prędkość  $v$  oraz czas  $t$ . Jeżeli skrócimy czas podróży o 20%, to czas jazdy wyniesie  $0,8t$ . W związku z tym możemy nawet sobie rozpisać, że:

Standardowa podróż:  $s = v \cdot t$

Podróż o 20% krótsza:  $s = v_{\text{nowa}} \cdot 0,8t$

Skoro w jednym i drugim przypadku pokonana trasa jest jednakowa, to możemy zapisać, że:

$$v \cdot t = v_{\text{nowa}} \cdot 0,8t \quad / : t, \quad v = 0,8v_{\text{nowa}} \quad / : 0,8, \quad v_{\text{nowa}} = \frac{v}{0,8}$$

I tu chyba najtrudniejsza część zadania, bowiem jak teraz dowiedzieć się z tego zapisu o ile procent trzeba zwiększyć poszukiwaną prędkość? Kreska ułamkowa jest formą dzielenia, zatem możemy zastąpić  $\frac{v}{0,8}$  dzieleniem  $v : \frac{4}{5}$ . Teraz pamiętając o tym, że dzielenie to jest mnożenie przez odwrotność, możemy zapisać że:

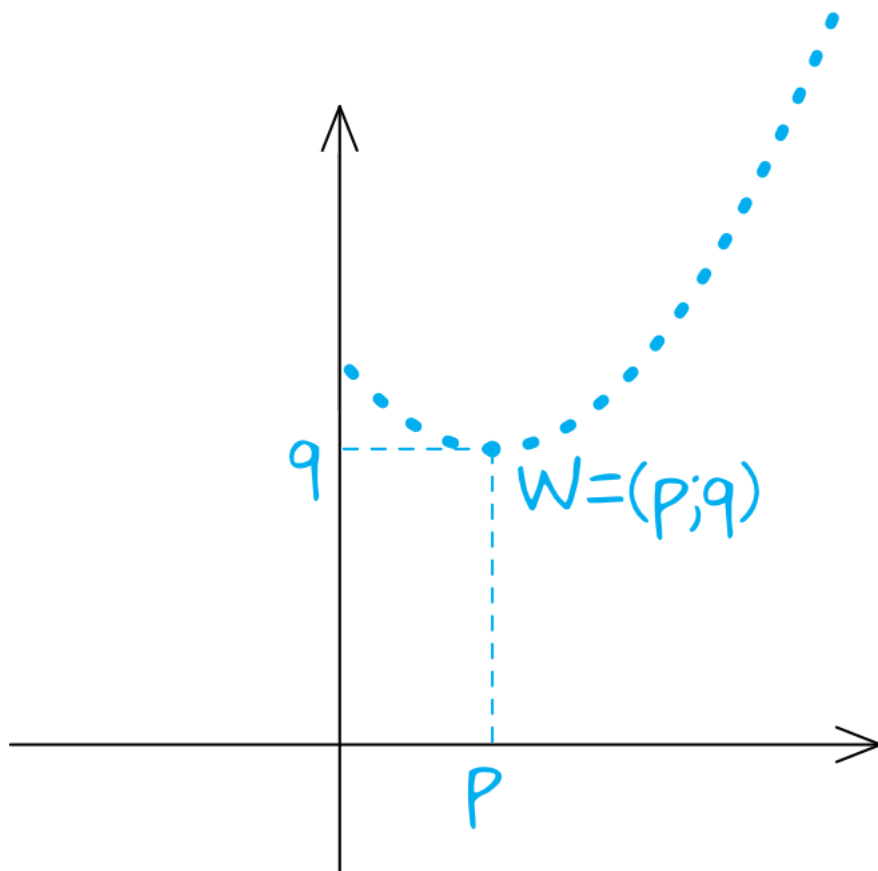
$$v_{\text{nowa}} = v : \frac{4}{5}, \quad v_{\text{nowa}} = v \cdot \frac{5}{4}, \quad v_{\text{nowa}} = 1,25v, \quad v_{\text{nowa}} = 125\%v$$

Skoro nowa prędkość stanowi 125% prędkości starej, to znaczy, że musimy zwiększyć prędkość o 25%.

## Zadanie 13

0-1 pkt

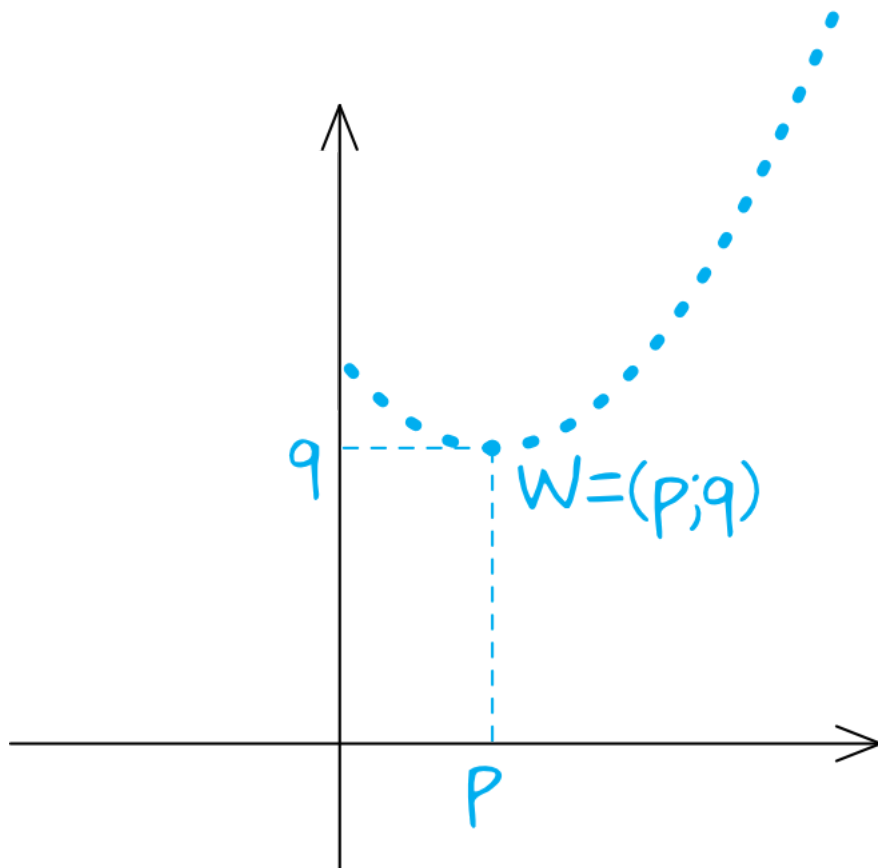
Ciąg  $(a_n)$  jest określony wzorem  $a_n = \frac{3}{4}n^2 - 24n + 90$  dla  $n \geq 1$ . Najmniejszy wyraz ciągu  $(a_n)$  jest równy:



**Odpowiedź: C** (−102)

Krok 1. Potraktowanie ciągu jako funkcji.

Potraktujmy nasz ciąg jak funkcję, która jest określona jedynie dla argumentów będących liczbami naturalnymi. Funkcja swoją najmniejszą lub największą wartość przyjmuje w wierzchołku  $W = (p; q)$ . To oznacza, że tak naprawdę interesować nas będzie poznanie współrzędnych wierzchołka paraboli, ale z zastrzeżeniem, że współrzędna  $p$  musi być liczbą naturalną.



Krok 2. Wyznaczenie współrzędnej  $p$ .  
Współrzedną  $p$  obliczymy ze wzoru:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

Ze wzoru ciągu możemy odczytać, że  $b = -24$  oraz  $a = \frac{3}{4}$ . W związku z tym:

$$p = \frac{-(-24)}{2 \cdot \frac{3}{4}}, p = \frac{24}{\frac{3}{2}}, p = 24 : \frac{3}{2}, p = 24 \cdot \frac{2}{3}, p = 16$$

Współrzedna  $p$  jest liczbą naturalną i to jest bardzo dobra wiadomość, bo za chwilę będziemy mogli podstawić tę liczbę do wzoru naszego ciągu. Gdyby się okazało, że  $p$  jest równe np.  $16\frac{1}{5}$ , to w kolejnym kroku musielibyśmy sprawdzić wartość funkcji dla argumentów  $n = 16$  oraz  $n = 17$ .

Krok 3. Wyznaczenie współrzędnej  $q$ .

Współrzedną  $q$  moglibyśmy wyznaczyć ze wzoru  $q = \frac{-\Delta}{4a}$ , ale skoro znamy wartość współrzędnej  $p = 16$  to możemy po prostu podstawić do wzoru wartość  $n = 16$  i w ten sposób obliczymy wartość przyjmowaną w tym wierzchołku, czyli wartość współrzędnej  $q$ . Zatem:

$$q = \frac{3}{4} \cdot 16^2 - 24 \cdot 16 + 90, q = \frac{3}{4} \cdot 256 - 384 + 90, q = \frac{3}{4} \cdot 256 - 384 + 90, q = 192 - 384 + 90, q = -102$$

To oznacza, że najmniejszą wartością przyjmowaną przez ten ciąg jest wartość 16-stego wyrazu i jest ona równa  $-102$ .

Dla pewnego kąta ostrego  $\alpha$  trzywyrazowy ciąg  $(2\sin^2\alpha, \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha, 2\cos^2\alpha)$  jest arytmetyczny. Miara kąta  $\alpha$  jest równa:

**Odpowiedź: D ( $30^\circ$ )**

Krok 1. Zapisanie równania wynikającego z własności ciągów arytmetycznych.

Z własności ciągów arytmetycznych wiemy, że dla trzech następujących po sobie wyrazów zachodzi następująca relacja:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Podstawiając dane z treści zadania otrzymamy:

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{2}$$

Krok 2. Obliczenie wartości  $\operatorname{tg}\alpha$ .

Jeżeli teraz w liczniku wyłączymy przed nawias dwójkę i skorzystamy z jedynki trygonometrycznej  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$  to otrzymamy:

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{2}, \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 \cdot 1}{2}, \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{2}, \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha = 1, \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Krok 3. Wyznaczenie miary kąta  $\alpha$ .

Jak spojrzymy na "małą tabelkę trygonometryczną" to takiej wartości jak  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  nie znajdziemy. Wszystko dlatego, że mamy niewymierność w mianowniku, którą musimy usunąć. Moglibyśmy też wybrać z tej sytuacji w taki sposób, że obliczylibyśmy przybliżoną wartość  $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$  i wtedy z dużych tablic odczytalibyśmy, że interesujący nas kąt ma miarę  $30^\circ$ .

Aby usunąć niewymierność z mianownika musimy licznik i mianownik pomnożyć przez  $\sqrt{3}$ , otrzymując:

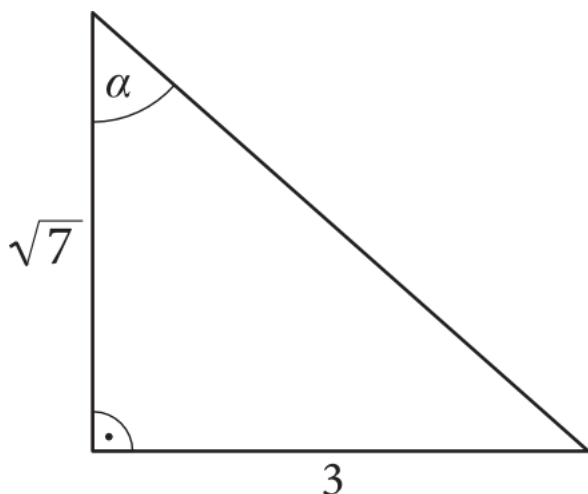
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Teraz z małej tabelki trygonometrycznej możemy odczytać, że  $\alpha = 30^\circ$ .

## Zadanie 15

0-1 pkt

Kąt  $\alpha$  jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym przedstawionym na rysunku.



Liczba  $4^{\sin \alpha}$  jest równa:

**Odpowiedź: B** ( $2\sqrt{2}$ )

Krok 1. Obliczenie długości przeciwprostokątnej.

Do obliczenia sinusa będziemy potrzebowali znać długość przeciwprostokątnej, zatem korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$3^2 + (\sqrt{7})^2 = c^2, \quad 9 + 7 = c^2, \quad c^2 = 16, \quad c = 4 \quad \vee \quad c = -4$$

Długość przeciwprostokątnej nie może być ujemna, zatem zostaje nam  $c = 4$ .

Krok 2. Obliczenie wartości sinusa.

Sinus opisuje nam stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta  $\alpha$  do długości przeciwprostokątnej, czyli:

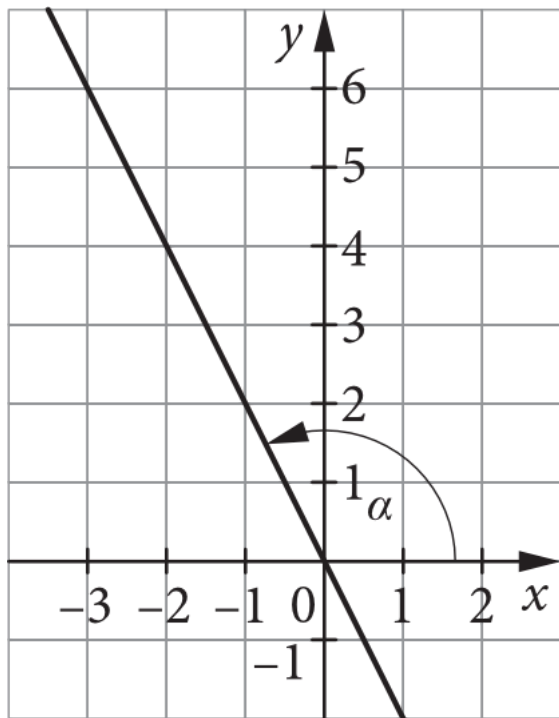
$$\sin \alpha = \frac{3}{4}$$

Krok 3. Obliczenie wartości wskazanej liczby.

Naszym zadaniem jest teraz obliczenie wartości liczby  $4^{\sin \alpha}$ , czyli  $4^{\frac{3}{4}}$ . Korzystając z własności potęg i pierwiastków możemy zapisać, że:

$$4^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{4^3} = \sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{16 \cdot 4} = 2\sqrt[4]{4} = 2\sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt{2}$$

Prosta o równaniu  $y = -2x$  tworzy z osią  $Ox$  kąt rozwarty  $\alpha$  (zobacz rysunek poniżej).



Cosinus kąta  $\alpha$  jest równy:

**Odpowiedź:** D  $(-\frac{\sqrt{5}}{5})$

Krok 1. Wyznaczenie punktu przez które przechodzi lewe ramię kąta.

Z tablic matematycznych możemy odczytać, że jeżeli mamy taką sytuację jak na powyższym rysunku, czyli kiedy jedno ramię kąta pokrywa się z osią x-ową, wierzchołek kąta znajduje się w miejscu przecięcia się osi układu współrzędnych, a drugie ramię przechodzi przez punkt  $M = (x; y)$ , to:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

gdzie  $r$  to odległość od punktu  $M$  do początku układu współrzędnych, którą możemy policzyć ze wzoru  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Wyznamy zatem najpierw współrzędne jakiegoś punktu, który znajduje się na lewym ramieniu naszego kąta. Skoro lewe ramię możemy opisać równaniem  $y = -2x$ , to podstawiając np.  $x = -1$  otrzymamy:

$$y = -2 \cdot (-1), y = 2$$

To oznacza, że nasze ramię przechodzi przez punkt  $M = (-1; 2)$ . Tak na marginesie, to w przypadku takiego zadania zamkniętego moglibyśmy ten punkt odczytać wprost z rysunku.

Krok 2. Obliczenie długości  $r$ .

W naszym przypadku ramię przechodzi przez punkt  $M = (-1; 2)$ , czyli  $x = -1$  oraz  $y = 2$ . Korzystając z podanego powyżej wzoru możemy zapisać, że:

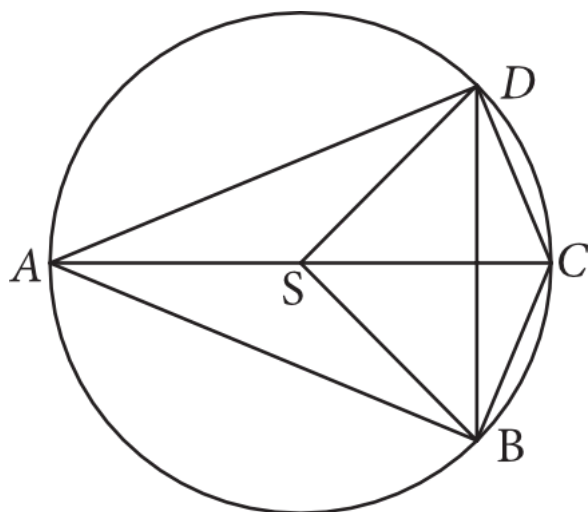
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2}, r = \sqrt{1 + 4}, r = \sqrt{5}$$

Krok 3. Obliczenie wartości cosinusa.

Mamy już wszystkie potrzebne dane, zatem możemy zapisać, że:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{-1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

W okrąg o środku  $S$  wpisano deltoid  $ABCD$  (zobacz rysunek poniżej). Krótsza przekątna deltoidu ma długość 4, a jego najmniejszy kąt wewnętrzny ma miarę  $45^\circ$ .



Pole deltoidu jest równe:

**Odpowiedź:** D  $(8\sqrt{2})$

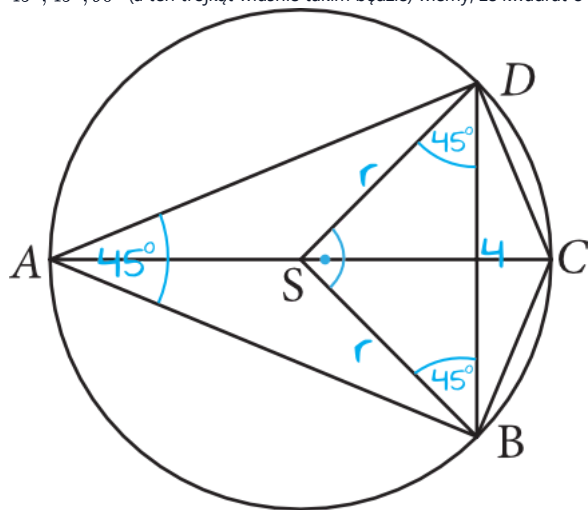
Krok 1. Wyznaczenie miary kąta  $BSD$ .

Spójrzmy na kąty  $BAD$  oraz  $BSD$ . Są to kąty oparte na tym samym łuku. Kąt  $BAD$  jest kątem wpisanym i znamy jego miarę, jest ona równa  $45^\circ$ . Kąt  $BSD$  jest kątem środkowym, zatem zgodnie z własnościami kątów środkowych i wpisanych (opartych na tym samym łuku) jego miara będzie dwa razy większa, czyli:

$$|\angle BSD| = 2 \cdot 45^\circ, \quad |\angle BSD| = 90^\circ$$

Krok 2. Obliczenie długości promienia okręgu.

Spójrzmy na trójkąt  $SBD$ . Udowodniliśmy przed chwilą, że jest to trójkąt prostokątny. Jego przyprostokątne są tak naprawdę długościami promienia okręgu, czyli będzie to trójkąt prostokątny równoramienny. Można nawet powiedzieć, że to jest taka połówka kwadratu. Z własności kwadratów oraz trójkątów o kątach  $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  (a ten trójkąt właśnie takim będzie) wiemy, że kwadrat o boku  $r$  ma przekątną o długości  $r\sqrt{2}$ . My wiemy, że bok  $BD$  ma długość 4, zatem:



$$r\sqrt{2} = 4, \quad r = \frac{4}{\sqrt{2}}, \quad r = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}, \quad r = \frac{4\sqrt{2}}{2}, \quad r = 2\sqrt{2}$$

Wyszło nam więc, że boki  $SB$  oraz  $SD$  mają długość  $2\sqrt{2}$ , czyli promień naszego okręgu ma długość  $r = 2\sqrt{2}$ .

Krok 3. Obliczenie długości dłuższej przekątnej deltoidu.

Dłuższa przekątna deltoidu jest średnicą okręgu. Skoro więc promień ma długość  $r = 2\sqrt{2}$ , to:

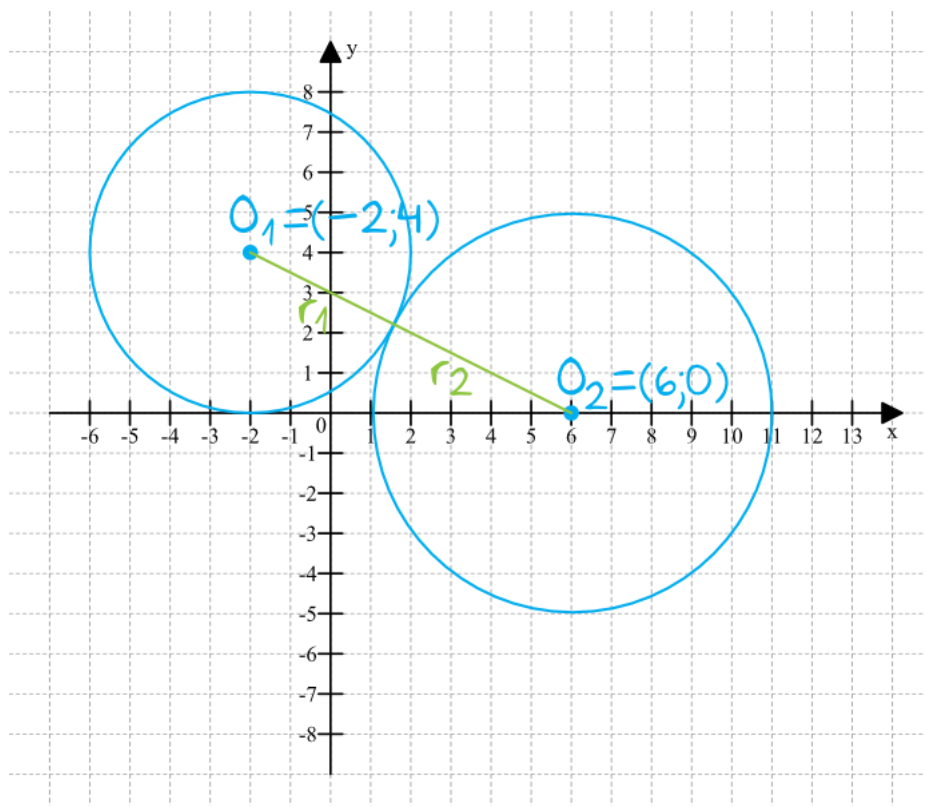
$$|AC| = 2r, \quad |AC| = 2 \cdot 2\sqrt{2}, \quad |AC| = 4\sqrt{2}$$

Krok 4. Obliczenie pola powierzchni deltoidu.

Wiemy już, że przekątne deltoidu mają długości  $4\sqrt{2}$  oraz 4, zatem:

$$P = \frac{1}{2}ef, \quad P = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4, \quad P = 2\sqrt{2} \cdot 4, \quad P = 8\sqrt{2}$$

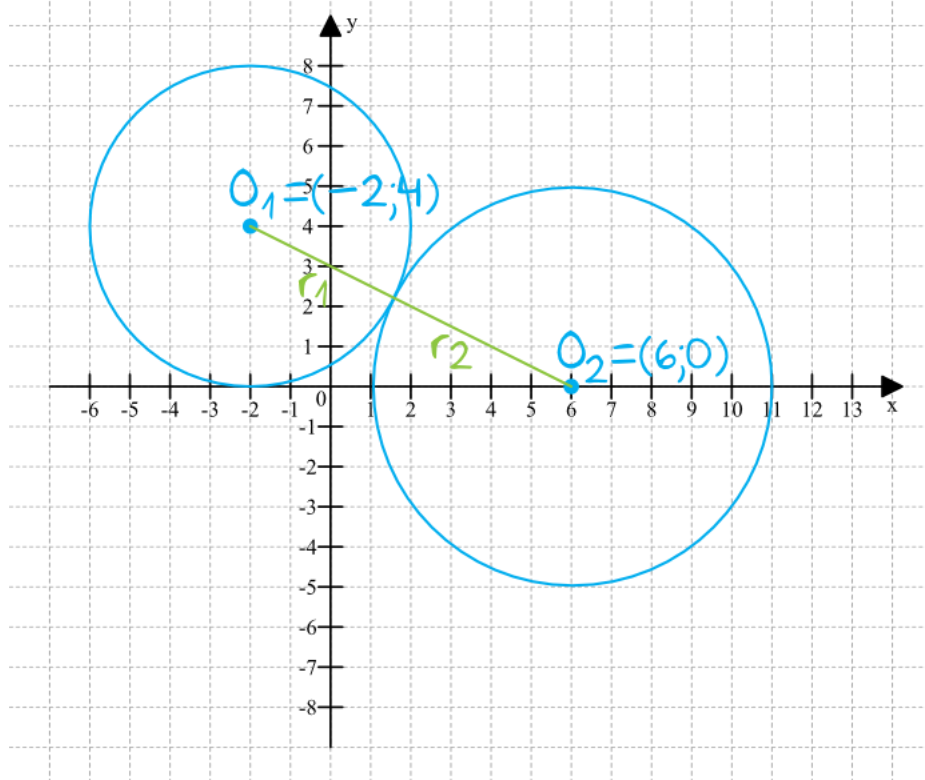
Dwa okręgi: pierwszy o środku  $O_1 = (-2, 4)$  i promieniu  $r_1 = 4$  oraz drugi o środku  $O_2 = (6, 0)$ , są styczne zewnętrznie. Promień drugiego okręgu jest równy:



**Odpowiedź: B** ( $4(\sqrt{5} - 1)$ )

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanosząc na rysunek dane z treści zadania otrzymamy następującą sytuację:



Krok 2. Obliczenie odległości między środkami okręgów.

Obliczmy odległość między środkami okręgów, czyli długość odcinka  $|O_1O_2|$ . Korzystając ze wzoru na długość odcinka w układzie współrzędnych możemy zapisać, że:

$$|O_1O_2| = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (0 - 4)^2}, |O_1O_2| = \sqrt{(6 + 2)^2 + (0 - 4)^2}, |O_1O_2| = \sqrt{8^2 + 4^2}, |O_1O_2| = \sqrt{64 + 16}, |O_1O_2| = \sqrt{80}, |O_1O_2| = \sqrt{16 \cdot 5}, |O_1O_2| = 4\sqrt{5}$$

Krok 3. Obliczenie długości promienia drugiego okręgu.

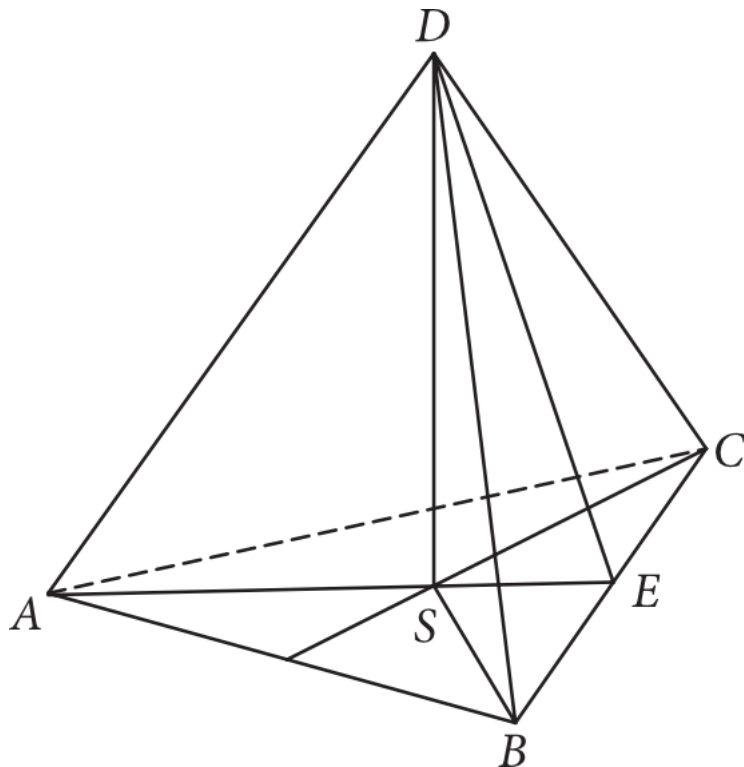
Długość drugiego okręgu jest różnicą między odcinkiem  $|O_1O_2|$  i długością krótszego okręgu, zatem:

$$r_2 = |O_1O_2| - r_1, \quad r_2 = 4\sqrt{5} - 4, \quad r_2 = 4 \cdot (\sqrt{5} - 1)$$

**Zadanie 19**

0-1 pkt

Rysunek przedstawia ostrosłup prawidłowy trójkątny.

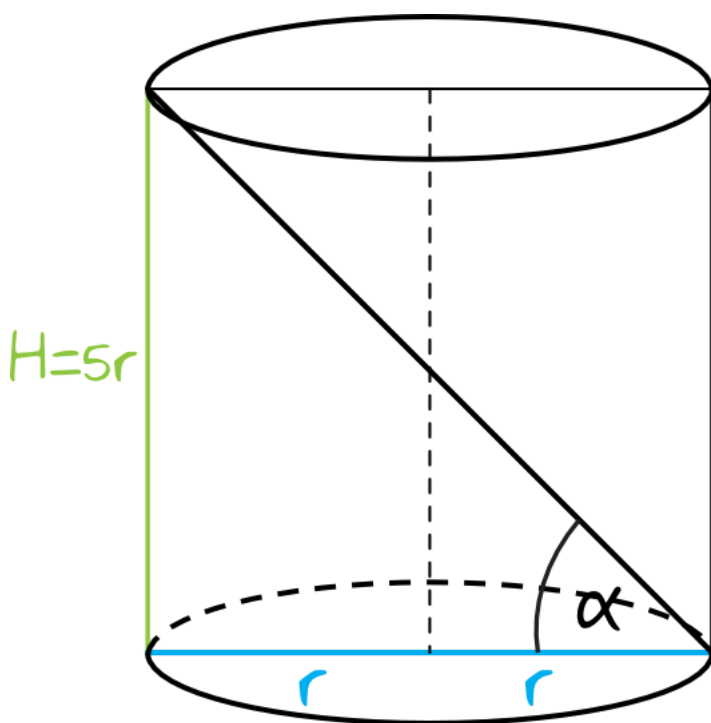


Kąt między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy ostrosłupa to:

**Odpowiedź: A ( $\sphericalangle DES$ )**

Kątem między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy jest kąt  $DES$ . Kąt ten tworzy wysokość ściany bocznej oraz wysokość trójkąta znajdującego się w podstawie (a w tym przypadku będzie to  $\frac{1}{3}$  takiej wysokości).

Pole powierzchni bocznej walca jest 5 razy większe od sumy pól jego podstaw. Miara kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tego walca do podstawy jest w przybliżeniu równa:



**Odpowiedź: B (68°)**

Pole powierzchni bocznej walca wyliczymy ze wzoru:

$$P_b = 2\pi r H$$

Pole podstawy wyliczymy ze wzoru:

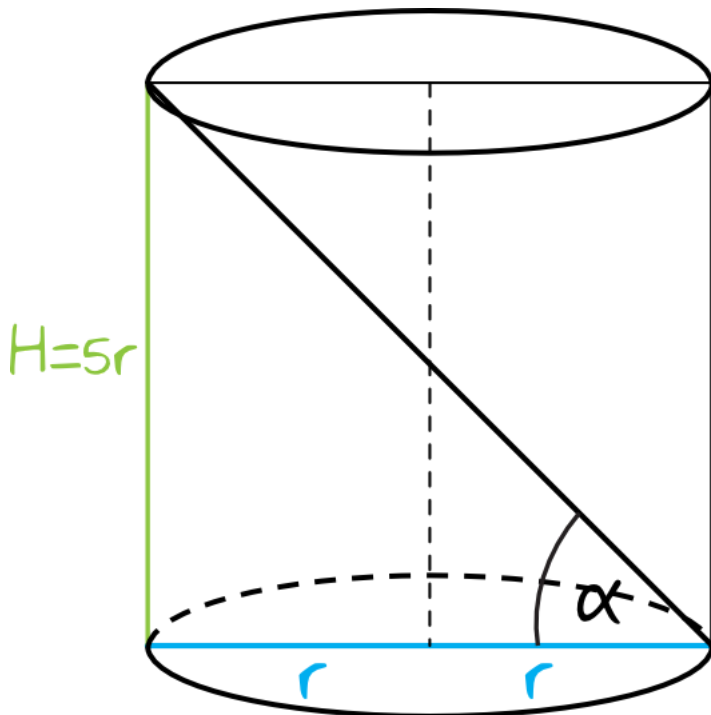
$$P_p = \pi r^2$$

Skoro w walcu mamy dwie podstawy (dolną i górną), a pole powierzchni bocznej jest 5 razy większe od sumy powierzchni tych podstaw to otrzymamy równanie:

$$P_b = 5 \cdot 2 \cdot P_p, 2\pi r H = 10 \cdot \pi r^2 \quad / : \pi r, 2H = 10r, H = 5r$$

Krok 2. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanieśmy na rysunek informację, którą przed chwilą otrzymaliśmy i zaznaczmy przy okazji poszukiwany kąt:



Krok 3. Obliczenie miary kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do podstawy.

Tangens odpowiada stosunkowi długości dwóch przyprostokątnych. Jedna przyprostokątna ma długość  $5r$ , druga ma długość  $2r$ , zatem zgodnie z rysunkiem możemy zapisać, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5r}{2r}, \operatorname{tg} \alpha = 2,5$$

Z tablic możemy odczytać, że tangens przyjmuje wartość około 2,4751 dla kąta o mierze  $68^\circ$  oraz wartość około 2,6051 dla kąta o mierze  $69^\circ$ . Znacznie bliżej jest do tej pierwszej wartości, zatem możemy powiedzieć, że nasz poszukiwany kąt ma w przybliżeniu  $68^\circ$ .

#### Zadanie 21

0-1 pkt

Laura ma pięć płyt z muzyką taneczną i trzy z muzyką poważną. Na ile sposobów Laura może tak ustawić poszczególne płyty na półce, aby wszystkie płyty tego samego gatunku znalazły się obok siebie? Wskaż poprawny sposób obliczeń.

**Odpowiedź: C** ( $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ )

Rozpatrzmy dwa warianty:

I wariant - najpierw układamy płyty z muzyką taneczną, potem z muzyką poważną.

W tym wariantcie najpierw stawiamy pierwszą płytę taneczną (mamy tutaj pięć możliwości, bo jest pięć takich płyt), potem stawiamy drugą płytę taneczną (mamy tym razem cztery możliwości, bo odpada nam płyta która znalazła się na pierwszym miejscu) itd. Jak skończą nam się płyty taneczne to stawiamy płytę z muzyką poważną (mamy tutaj trzy możliwości), potem drugą poważną (mamy już wtedy dwie możliwości) i na koniec ostatnią (mamy już wtedy tylko jedną możliwość).

Zgodnie z regułą mnożenia liczba sposobów w jaki możemy ułożyć płyty wyniesie:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

II wariant - najpierw układamy płyty z muzyką poważną, a potem z muzyką taneczną.

I tutaj analogicznie jak przed chwilą, tylko w zmienionej kolejności będziemy mieć zgodnie z regułą mnożenia:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Widzimy wyraźnie, że liczba sposobów ułożenia płyt w obydwu wariantach jest sobie równa (tak naprawdę w jednym i drugim mnożeniu mamy tylko pozamieniane czynniki). My możemy ułożyć płyty na pierwszy lub drugi sposób, więc tych sposobów będzie po prostu 2 razy więcej niż w pierwszym czy drugim wariantcie. Z tego też względu wszystkich możliwości będziemy mieć:

$$2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

W tabeli podano oceny z matematyki czterech uczniów pewnej klasy.

| uczeń  | oceny         |
|--------|---------------|
| Ada    | 4, 4, 4, 5, 5 |
| Basia  | 3, 3, 3, 4, 4 |
| Czarek | 1, 1, 2, 2, 2 |
| Darek  | 1, 1, 5, 5, 5 |

Oceny którego ucznia wykazują największe odchylenie standardowe?

**Odpowiedź: D (Darka)**

Odchylenie standardowe możemy obliczyć korzystając np. ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{a})^2}$$

Musieliśmy więc obliczyć średnią arytmetyczną dla każdego ucznia (to jest to właśnie  $\bar{a}$  znajdujące się we wzorze), a następnie musieliśmy podstawiać do tego wzoru poszczególne oceny. Jest to dość sporo liczenia, ale tak przykładowo dla Ady obliczenia wyglądałyby następująco:

$$\bar{a} = \frac{4 + 4 + 4 + 5 + 5}{5}, \bar{a} = \frac{22}{5}, \bar{a} = 4,4$$

Odchylenie standardowe wyniosłoby więc:

$$\sigma = \sqrt{\frac{4^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2}{5} - (4,4)^2}, \sigma = \sqrt{\frac{16 + 16 + 16 + 25 + 25}{5} - 19,36}, \sigma = \sqrt{\frac{98}{5} - 19,36}, \sigma = \sqrt{\frac{98}{5} - 19,36}, \sigma = \sqrt{19,6 - 19,36}, \sigma =$$

Jednak do tego zadania powinniśmy podejść nieco inaczej. To zadanie tak prawdę mówiąc bardziej sprawdza to, czy rozumiemy czym jest odchylenie standardowe. Powinniśmy zauważyć, że odchylenie standardowe jest tym większe im bardziej poszczególne liczby odstają od średniej. Oceny Ady, Basi i Czarka są niemalże jednolite. Oceny Darka są już bardziej "rozstrzelone", bo Darek ma same skrajne oceny. To sprawia, że każda z ocen będzie mocno odstawać od średniej arytmetycznej i tym samym odchylenie standardowe będzie tutaj bardzo wysokie. To właśnie dlatego bez żadnego liczenia możemy powiedzieć, że odchylenie standardowe ocen Darka będzie zdecydowanie największe.

W urnie jest o 10 kul białych więcej niż czarnych. Z urny losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe  $\frac{3}{4}$ . Ile wszystkich kul jest w urnie?

**Odpowiedź: B (20)**

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do zadania.

Z treści zadania wynika, że:

$x$  - liczba kul czarnych

$x + 10$  - liczba kul białych

To z kolei oznacza, że wszystkich kul będziemy mieć:

$$x + x + 10 = 2x + 10$$

Krok 2. Wyznaczenie liczby czarnych kul.

Wiemy, że prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli jest równe  $\frac{3}{4}$ . Jeżeli więc potraktujemy wylosowanie białej kuli jako zdarzenie sprzyjające  $|A| = x + 10$ , a liczbę wszystkich kul jako liczbę zdarzeń elementarnych  $|\Omega| = 2x + 10$ , to powstanie nam równanie:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad \frac{3}{4} = \frac{x + 10}{2x + 10}$$

Mnożąc na krzyż otrzymamy:

$$3 \cdot (2x + 10) = 4 \cdot (x + 10), \quad 6x + 30 = 4x + 40, \quad 2x = 10, \quad x = 5$$

To oznacza, że mamy 5 kul czarnych.

Krok 3. Obliczenie ilości wszystkich kul.

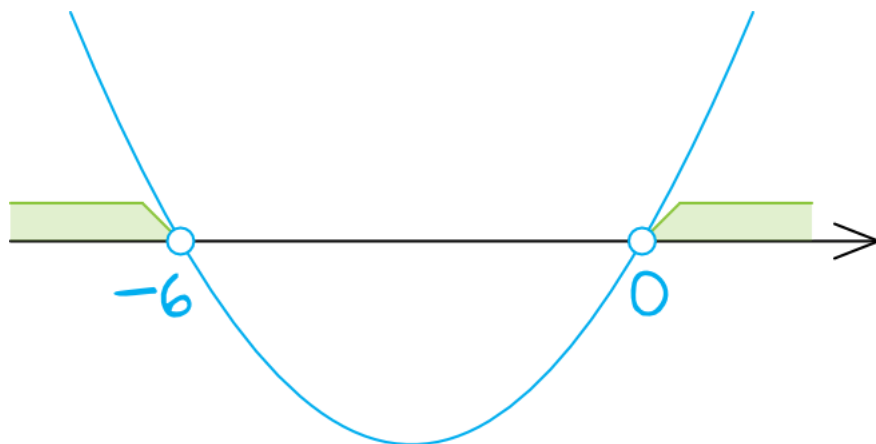
Skoro kul białych jest 10 więcej, to białych kul będziemy mieć  $5 + 10 = 15$ . Naszym zadaniem jest powiedzenie ile jest wszystkich kul w urnie, a tych będzie łącznie:

$$5 + 15 = 20$$

Ewentualnie skoro  $x = 5$ , a wszystkich kul jest  $2x + 10$ , to:

$$2 \cdot 5 + 10 = 10 + 10 = 20$$

Wyznacz zbiór wszystkich argumentów  $x$ , dla których funkcja kwadratowa  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$  przyjmuje większe wartości niż funkcja liniowa  $g(x) = -x + 2$ .



**Odpowiedź:**  $x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

Krok 1. Zapisanie nierówności kwadratowej.

Skoro funkcja  $f(x)$  ma przyjmować większe wartości niż funkcja  $g(x)$ , to musi zająć następująca nierówność:

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 > -x + 2, \quad \frac{1}{2}x^2 + 3x > 0 \quad / \cdot 2, \quad x^2 + 6x > 0$$

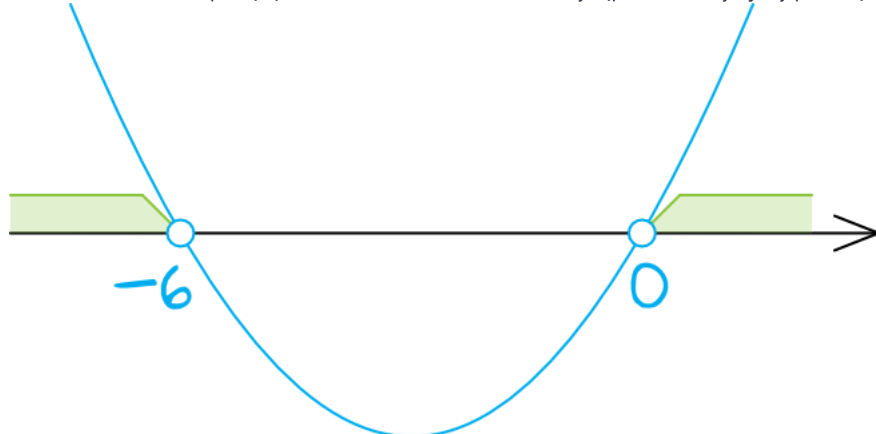
Krok 2. Obliczenie miejsc zerowych wielomianu.

Powstała nam klasyczna nierówność kwadratowa, której rozwiązywanie zaczniemy od wyznaczenia miejsc zerowych. Musimy więc sprawdzić kiedy  $x^2 + 6x$  jest równe 0, zatem:

$$x^2 + 6x = 0, \quad x \cdot (x + 6) = 0, \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -6$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Z racji tego, iż współczynnik kierunkowy  $a$  jest dodatni, to parabola będzie mieć ramiona skierowane do góry. Zaznaczamy więc na osi wyznaczone miejsca zerowe  $x = 0$  oraz  $x = -6$  (kropki będą niezamalowane, bo w nierówności wystąpił znak  $>$ ) i rysujemy parabolę:



Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

Interesują nas wyniki większe od zera, zatem interesuje nas to co znalazło się nad osią. To oznacza, że rozwiązaniem tej nierówności jest suma przedziałów:

$$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$$

## Zadanie 25

0-2 pkt

Dla jakich wartości  $m$  równanie  $x(3x - 6)(x^3 + 27)(x + m) = 0$  z niewiadomą  $x$  ma trzy różne rozwiązania?

**Odpowiedź:**  $m \in \{-2, 0, 3\}$

Krok 1. Wyznaczenie rozwiązań równania.

Korzystając z własności postaci iloczynowej możemy przyrównać poszczególne wyrażenia do zera, otrzymując:

$$x = 0 \quad \vee \quad 3x - 6 = 0 \quad \vee \quad x^3 + 27 = 0 \quad \vee \quad x + m = 0, \quad x = 0 \quad \vee \quad 3x = 6 \quad \vee \quad x^3 = -27 \quad \vee \quad x = -m, \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -3$$

Krok 2. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Chcemy, by nasze równanie miało trzy różne rozwiązania. Widzimy, że otrzymaliśmy już trzy konkretne wartości  $x = 0, x = 2, x = -3$ , a to oznacza, że całe równanie będzie miało trzy rozwiązania tylko wtedy, gdy równanie  $x = -m$  "zdubluje się" z otrzymanym już wynikiem. Możemy więc zapisać, że równanie ma trzy rozwiązania, gdy (uwaga na znak!):

$$m = 0 \quad \vee \quad m = -2 \quad \vee \quad m = 3$$

Możemy nawet zapisać, że  $m \in \{-2, 0, 3\}$ .

## Zadanie 26

0-2 pkt

Ustalono, że w pewnym jeziorze populacja zagrożonego gatunku ryb maleje każdego roku o 30%, a na początku badań wynosiła 50 tys. sztuk. Podaj wzór funkcji wyrażającej liczebność tej populacji po upływie  $t$  lat i oblicz, ile ryb zagrożonego gatunku było w jeziorze po trzech latach od chwili rozpoczęcia badań.

**Odpowiedź:**  $(p_t) = 50000 \cdot (0,7)^t$

Krok 1. Zapisanie wzoru funkcji.

Przeanalizujmy sobie całą sytuację:

Po upływie roku populacja wyniesie:  $p_1 = 50000 \cdot 0,7$

Po upływie dwóch lat populacja wyniesie:  $p_2 = 50000 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 50000 \cdot (0,7)^2$

Po upływie trzech lat populacja wyniesie:  $p_3 = 50000 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 50000 \cdot (0,7)^3$

I tutaj możemy dostrzec już pewną prawidłowość, dzięki której będziemy w stanie zapisać, że po upływie  $t$  lat populacja wyniesie:  $p_t = 50000 \cdot (0,7)^t$

Krok 2. Obliczenie ilości ryb po trzech latach.

Korzystając z uzyskanego wzoru lub z fragmentu naszej analizy możemy zapisać, że po upływie trzech lat liczba ryb wyniesie:

$$p_3 = 50000 \cdot (0,7)^3, \quad p_3 = 50000 \cdot 0,343, \quad p_3 = 17150$$

## Zadanie 27

0-2 pkt

Udowodnij, że różnica kwadratów dowolnej liczby pierwszej  $p > 2$  i liczby o dwa od niej mniejszej jest podzielna przez 8.

**Odpowiedź:** Udowodniono rozpisuj

Krok 1. Zapisanie wyrażenia na podstawie treści zadania.

Jeżeli przyjmiemy, że  $p$  jest dowolną liczbą pierwszą, to liczbą o dwa od niej mniejszą będzie liczba  $p - 2$ . W związku z tym skoro interesuje nas różnica kwadratów tych dwóch liczb, to musimy sprawdzić wartość wyrażenia:

$$p^2 - (p - 2)^2$$

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia możemy powyższe wyrażenie rozpisać jako:

$$p^2 - (p^2 - 4p + 4) = p^2 - p^2 + 4p - 4 = 4p - 4 = 4 \cdot (p - 1)$$

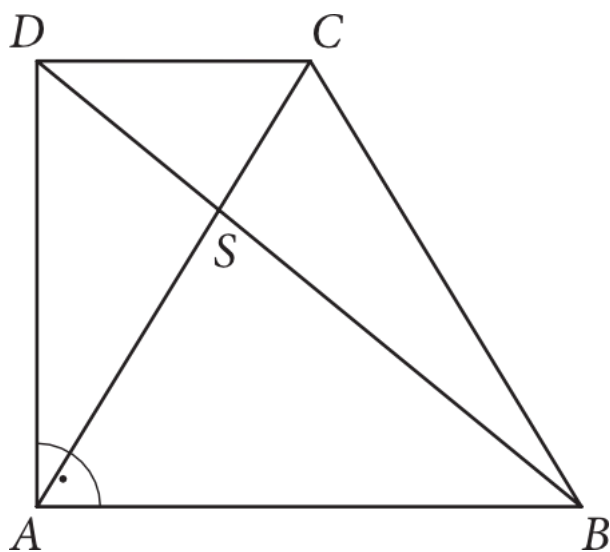
Krok 2. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Skoro liczba  $p$  jest tak zwaną liczbą pierwszą i  $p > 2$  (bo tak wynika z treści zadania), to na pewno jest to liczba nieparzysta (bo wszystkie liczby pierwsze oprócz dwójki są nieparzyste). Skoro tak, to liczba  $p - 1$  (która znalazła się w nawiasie naszego przekształconego wyrażenia) będzie liczbą parzystą. Na matematyce liczby parzyste zapisujemy jako  $2n$ , gdzie  $n$  jest liczbą nieparzystą. Nasze wyrażenie moglibyśmy więc zapisać jako:

$$4 \cdot 2n = 8n$$

Otrzymany w ten sposób wynik dowodzi, że ta liczba musi być podzielna przez 8.

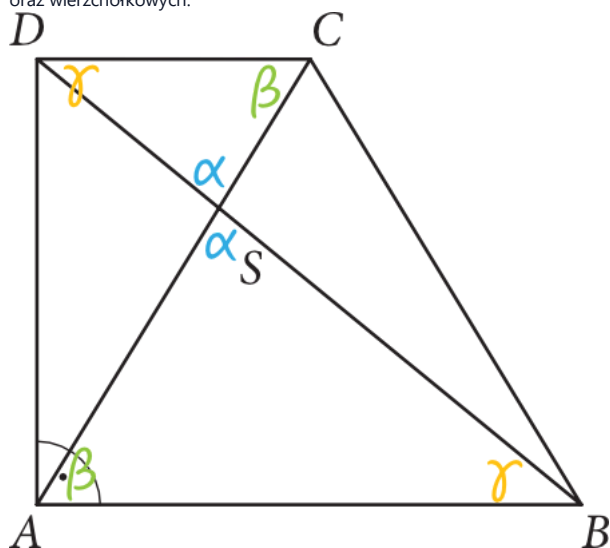
W trapezie prostokątnym  $ABCD$ , w którym  $AB \parallel CD$  i  $|AB| = 2|CD|$ , poprowadzono przekątne  $AC$  i  $BD$ , przecinające się w punkcie  $S$ . Udowodnij, że odległość punktu  $S$  od ramienia  $AD$ , prostopadłego do podstaw, jest trzy razy mniejsza niż długość podstawy  $AB$ .



**Odpowiedź: Udowodniono korzysta**

Krok 1. Dostrzeżenie podobieństwa trójkątów.

Spójrzmy na trójkąty  $ABS$  oraz  $CDS$ . Są to trójkąty podobne i wiemy to na podstawie cechy kąt-kąt-kąt, co wynika wprost z własności kątów naprzemianległych oraz wierzchołkowych.



Krok 2. Obliczenie skali podobieństwa.

Jeżeli przyjmiemy, że trójkąt  $CDS$  jest trójkątem podstawowym, a trójkąt  $ABS$  trójkątem podobnym, to skala podobieństwa wyniesie:

$$k = \frac{|AB|}{|CD|}$$

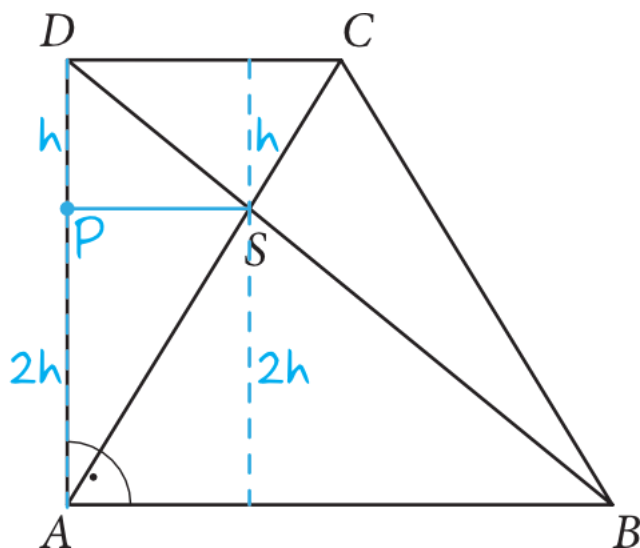
Z treści zadania wynika, że  $|AB| = 2|CD|$ , zatem:

$$k = \frac{2|CD|}{|CD|}, k = 2$$

Uwaga: Gdybyśmy przyjęli, że trójkąt  $ABS$  jest podstawowy, a trójkąt  $CDS$  jest podobny, to skala podobieństwa będzie równa  $k = \frac{1}{2}$  i jest to jak najbardziej poprawny tok rozwiązywania zadania. Różnica jest tylko taka, że w dalszych krokach trzeba konsekwentnie odnosić się do wybranej przez siebie figury podobnej.

Krok 3. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zaznaczmy na rysunku poszukiwaną odległość punktu  $S$  od ramienia  $AD$  i zobaczmy co nam w tym momencie powstanie:



Tutaj kluczową obserwacją jest to, co wynika ze skali podobieństwa  $k = 2$ . Jeżeli wysokość trójkąta  $CDS$  ma długość  $h$ , to wysokość trójkąta  $ABS$  będzie dwukrotnie dłuższa, czyli wyniesie  $2h$ . To z kolei prowadzi nas do wniosku, że odcinek  $AD$  ma miarę równą  $h + 2h = 3h$ .

Krok 4. Dostrzeżenie podobieństwa trójkątów.

Spójrzmy teraz na trójkąty  $ABD$  oraz  $PSD$ . Te trójkąty są także podobne (wynika to z cechy kąt-kąt-kąt, bowiem odcinek  $PS$  jest równoległy do odcinka  $AB$ ). Jeżeli więc odcinek  $PD$  jest trzykrotnie krótszy od odcinka  $AD$ , to odcinek  $PS$  będzie także trzykrotnie krótszy od odcinka  $AB$ .

Możemy to nawet zapisać matematycznie w formie proporcji. Jeżeli przyjmiemy, że trójkąt  $ABD$  jest trójkątem podstawowym, a trójkąt  $PSD$  jest trójkątem podobnym, to skala podobieństwa wyniesie:

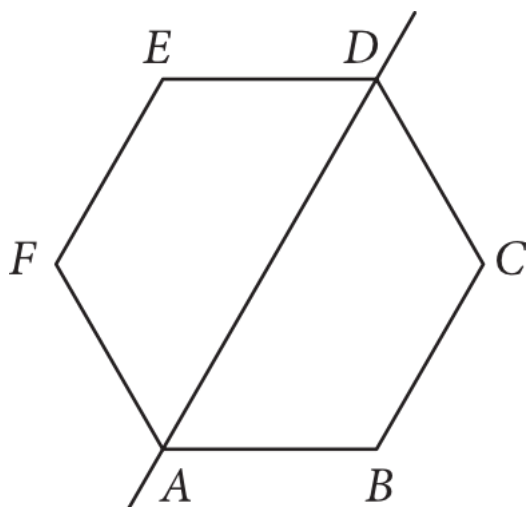
$$k = \frac{|PD|}{|AD|}, \quad k = \frac{h}{3h}, \quad k = \frac{1}{3}$$

Z tego też względu każdy odcinek trójkąta podobnego  $PSD$  jest trzykrotnie krótszy od odpowiadającemu mu odcinkowi trójkąta podstawowego  $ABD$ , zatem  $|PS| = \frac{1}{3}|AB|$ , co należało udowodnić.

## Zadanie 29

0-2 pkt

Punkty  $A = (-2\sqrt{3}, 0)$ ,  $B = (0, 0)$ ,  $C = (\sqrt{3}, 3)$  są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego  $ABCDEF$ . Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną  $AD$  tego sześciokąta.



**Odpowiedź:**  $y = \sqrt{3}x + 6$

Krok 1. Wyznaczenie współczynnika kierunkowego  $a$  prostej  $BC$ .

Kluczem do rozwiązania tego zadania jest dostrzeżenie, że proste  $BC$  oraz  $AD$  są względem siebie równoległe. Jeżeli więc wyznaczmy współczynnik kierunkowy  $a$  prostej  $BC$  (a nie jest to trudne, bo znamy współrzędne punktów  $B$  oraz  $C$ ), to będziemy bardzo blisko odnalezienia równania prostej przechodzącej przez przekątną  $AD$ .

Oczywiście możemy wyznaczyć całe równanie prostej  $BC$  (np. z metody układu równań), ale nam wystarczy poznanie współczynnika  $a$  tej prostej, a dokonamy tego za pomocą prostego wzoru:

$$a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}, a = \frac{3 - 0}{\sqrt{3} - 0}, a = \frac{3}{\sqrt{3}}, a = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}, a = \frac{3\sqrt{3}}{3}, a = \sqrt{3}$$

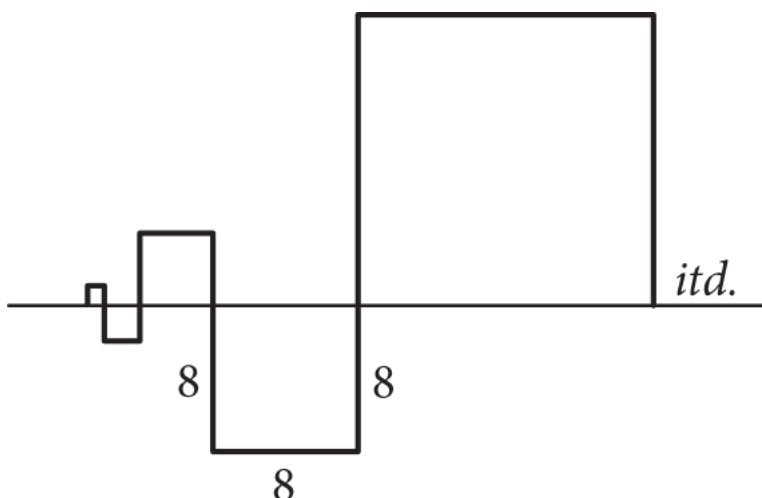
Krok 2. Wyznaczenie równania prostej  $AD$ .

Wiemy, że prosta  $AD$  jest równoległa do prostej  $BC$ , zatem współczynnik kierunkowy  $a$  tej prostej będzie równy  $\sqrt{3}$ . Możemy więc powiedzieć, że nasza prosta będzie się wyrażać równaniem  $y = \sqrt{3}x + b$ . Musimy jeszcze poznać wartość współczynnika  $b$ , a dokonamy tego podstawiając współrzędne punktu przez które ta prosta przechodzi, czyli punktu  $A = (-2\sqrt{3}, 0)$ :

$$y = \sqrt{3}x + b, 0 = \sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{3}) + b, 0 = -2 \cdot 3 + b, b = 6$$

Skoro współczynnik  $b = 6$ , to nasza prosta  $AD$  wyraża się równaniem  $y = \sqrt{3}x + 6$ .

Na rysunku pokazano ciąg kwadratów. Każdy następny kwadrat ma z poprzednim wspólny tylko jeden wierzchołek i dwa razy większą niż on długość boku. Wiedząc, że czwarty kwadrat ma bok długości 8, oblicz długość łamanej narysowanej pogrubioną linią, ograniczającą kwadraty od pierwszego do dziesiątego.



**Odpowiedź:**  $L = 3069$

Krok 1. Dostrzeżenie ciągu geometrycznego.

Patrząc się na opisaną sytuację powinniśmy dostrzec, że długości boków kolejnych kwadratów układają się w ciąg geometryczny w którym  $a_4 = 8$  (bo czwarty kwadrat ma długość boku równą 8) oraz  $q = 2$  (bo każdy kolejny kwadrat jest dwukrotnie większy).

Krok 2. Obliczenie wartości pierwszego wyrazu.

Za chwilę do naszych obliczeń będziemy potrzebować wartości pierwszego wyrazu, zatem już teraz możemy ją wyznaczyć. Korzystając ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymamy, że:

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

Skoro  $a_4 = 8$  oraz  $q = 2$ , to:

$$8 = a_1 \cdot 2^3, \quad 8 = a_1 \cdot 8, \quad a_1 = 1$$

Krok 3. Obliczenie długości poszukiwanej łamanej.

Skorzystamy tutaj ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Jest jednak pewne zastrzeżenie, które musimy sobie zrobić i to jest chyba główna pułapka w tym zadaniu. Jak podstawimy sobie do powyższego wzoru  $n = 10$  to otrzymamy tak naprawdę informację o tym jaka jest suma długości pojedynczych boków pierwszych dziesięciu kwadratów (czyli tak na chłopski rozum dowiemy się ile to jest  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ ). Tymczasem na naszą łamaną składają się aż trzy boki każdego kwadratu, zatem nas interesowałoby poznanie długości  $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8 + 8 \dots$ . Z tego też względu długość naszej łamanej (oznaczymy ją sobie jako  $L$ ) będzie trzykrotnie dłuższa od obliczonego  $S_{10}$ . Całość możemy rozpisać następująco:

$$L = 3 \cdot S_{10}, \quad L = 3 \cdot a_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q}, \quad L = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2}, \quad L = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2}, \quad L = 3 \cdot \frac{1 - 1024}{-1}, \quad L = 3 \cdot 1023, \quad L = 3069$$

W koszyku jest pięć kul o numerach 1, 2, 3, 6, 9. Losujemy kolejno bez zwracania trzy kule i zapisujemy ich numery, tworząc liczbę trzycyfrową: numer pierwszej wylosowanej kuli jest cyfrą setek, drugiej - cyfrą dziesiątek, a trzeciej - cyfrą jedności zapisanej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy liczbę podzielną przez 3. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

**Odpowiedź:**  $P(A) = \frac{2}{5}$

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Skoro kule losowane są bez zwracania i losujemy trzy kule, to za pierwszym razem możemy wyciągnąć jedną z pięciu kul, za drugim razem jedną z czterech kul (bo jedna jest już odrzucona), a za trzecim razem jedną z trzech kul (bo dwie są już odrzucone). To oznacza, że zgodnie z regułą mnożenia wszystkich zdarzeń elementarnych będziemy mieć  $|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ .

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Sprzyjającymi zdarzeniami są wszystkie te sytuacje w których wylosowana liczba jest podzielna przez 3. Aby liczba była podzielna przez 3 to suma jej cyfr musi być podzielna przez 3. Musimy się więc najpierw zastanowić jakie komplety trzech cyfr dadzą nam oczekiwaną sumę. Przy okazji trzeba pamiętać, że liczby nie mogą się powtarzać (bo losowanie jest bez zwracania). W związku z tym pasującymi kompletami będą:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 9\}, \{3, 6, 9\}$$

Ale to nie koniec. To, że mamy cztery komplety takich cyfr nie kończy obliczania liczby zdarzeń sprzyjających, bo tak przykładowo z kompletu cyfr 1, 2, 3 możemy otrzymać np. 123, 132, 321 i inne. Musimy się więc jeszcze zastanowić ile liczb z każdej takiej "trójki" cyfr możemy ułożyć. Z reguły mnożenia wynika, że z każdej takiej trójki ułożymy  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  liczb. Skoro mamy cztery takie komplety trójek, to łącznie wszystkich zdarzeń sprzyjających będziemy mieć  $4 \cdot 6 = 24$ , stąd też możemy napisać, że  $|A| = 24$ .

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

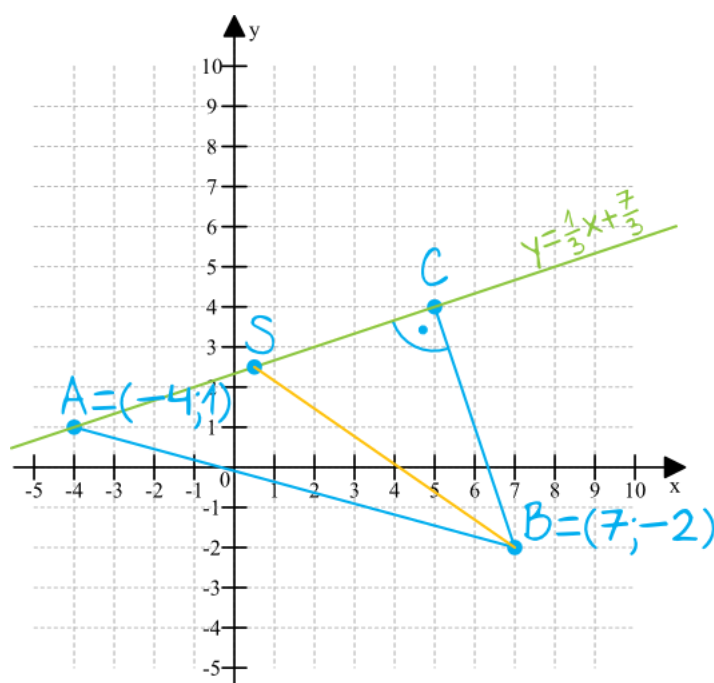
Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

## Zadanie 32

0-4 pkt

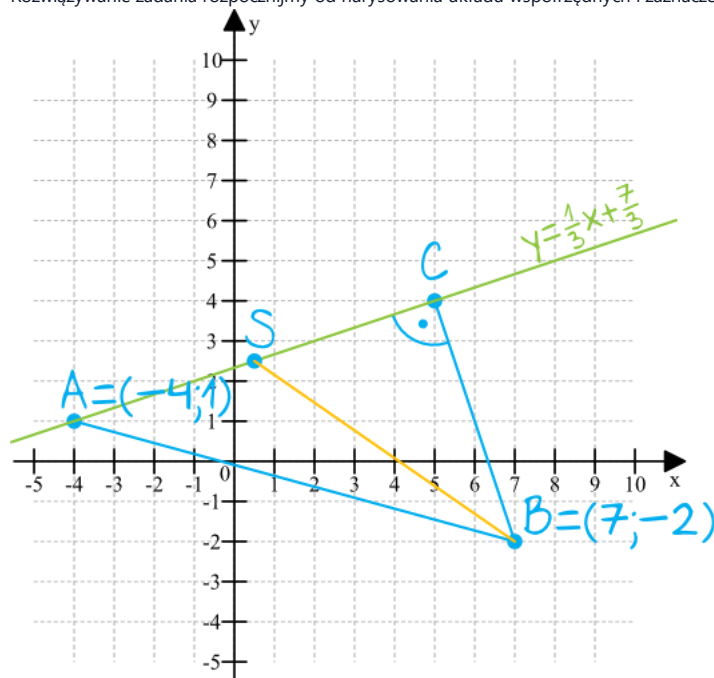
W trójkącie prostokątnym  $ABC$  punkty  $A = (-4, 1)$  i  $B = (7, -2)$  są końcami przeciwprostokątnej. Prosta o równaniu  $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$  zawiera jedną z przyprostokątnych tego trójkąta. Oblicz długość środkowej  $BS$  w trójkącie  $ABC$ .



Odpowiedź:  $\sqrt{BS} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Rozwiązanie zadania rozpoczniemy od narysowania układu współrzędnych i zaznaczenia na nim danych z treści zadania:



Krok 2. Wyznaczenie równania prostej  $BC$ .

Z rysunku wynika, że prosta o równaniu  $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$  przechodzi przez bok  $AC$ . Widzimy też, że prosta  $BC$  jest prostopadła do tej prostej, a to pozwoli nam wyznaczyć współczynnik kierunkowy  $a$  prostej  $BC$ . Dwie proste są względem siebie prostopadłe tylko wtedy, gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy  $-1$ . Skoro pierwsza prosta ma  $a = \frac{1}{3}$ , to druga prosta będzie mieć  $a = -3$ , bo  $\frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$ . To oznacza, że prosta  $BC$  wyraża się wzorem  $y = -3x + b$ . Do poznania pełnego wzoru musimy jeszcze tylko wyznaczyć współczynnik  $b$  tej prostej.

Współczynnik  $b$  prostej  $BC$  wyznaczmy podstawiając do postaci  $y = -3x + b$  współrzędne jednego z punktów, który do tej prostej należy. Podstawiając zatem współrzędne punktu  $B = (7, -2)$  otrzymamy:

$$y = -3x + b, \quad -2 = -3 \cdot 7 + b, \quad -2 = -21 + b, \quad b = 19$$

To oznacza, że prosta  $BC$  wyraża się równaniem  $y = -3x + 19$ .

Krok 3. Wyznaczenie współrzędnych punktu  $C$ .

Punkt  $C$  jest miejscem przecięcia się prostej  $AC$  oraz prostej  $BC$ . Z geometrycznej interpretacji układu równań wiemy, że tworząc układ równań składający się z dwóch prostych otrzymamy miejsce ich przecięcia się. W związku z tym musimy rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \\ y = -3x + 19 \end{cases}$$

Ten układ równań najprościej będzie rozwiązać korzystając z metody podstawiania. Otrzymamy wtedy:

$$\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} = -3x + 19, \quad 3 \cdot \frac{1}{3}x = 16 - \frac{2}{3}, \quad \frac{10}{3}x = \frac{50}{3}, \quad x = 5$$

Znamy już wartość współrzędnej  $x$  punktu  $C$ , a współrzędną  $y$  obliczymy podstawiając  $x = 5$  do dowolnego z równań (np. drugiego), zatem:

$$y = -3x + 19, \quad y = -3 \cdot 5 + 19, \quad y = -15 + 19, \quad y = 4$$

To oznacza, że  $C = (5; 4)$ .

Krok 4. Wyznaczenie współrzędnych punktu  $S$ .

Punkt  $S$  jest środkiem odcinka  $AC$ , zatem korzystając ze wzoru na środek odcinka wyjdzie nam, że:

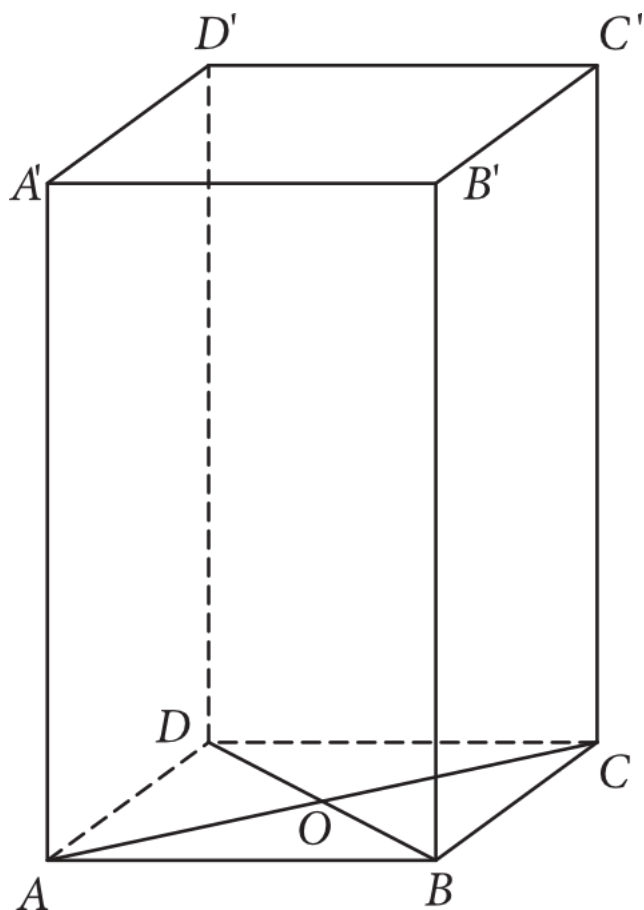
$$S = \left( \frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right), \quad S = \left( \frac{-4 + 5}{2}; \frac{1 + 4}{2} \right), \quad S = \left( \frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right)$$

Krok 5. Obliczenie długości odcinka  $BS$ .

Znając współrzędne punktu  $B = (7, -2)$  oraz  $S = (\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$  możemy bez problemu obliczyć poszukiwaną długość odcinka  $BS$ :

$$|BS| = \sqrt{(x_S - x_B)^2 + (y_S - y_B)^2}, \quad |BS| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 7\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - (-2)\right)^2}, \quad |BS| = \sqrt{\left(-6\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} + 2\right)^2}, \quad |BS| = \sqrt{\left(-\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2}, \quad |BS| = \sqrt{\frac{169}{4} + \frac{81}{4}}, \quad |BS| = \sqrt{\frac{250}{4}}, \quad |BS| = \frac{\sqrt{250}}{2}, \quad |BS| = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

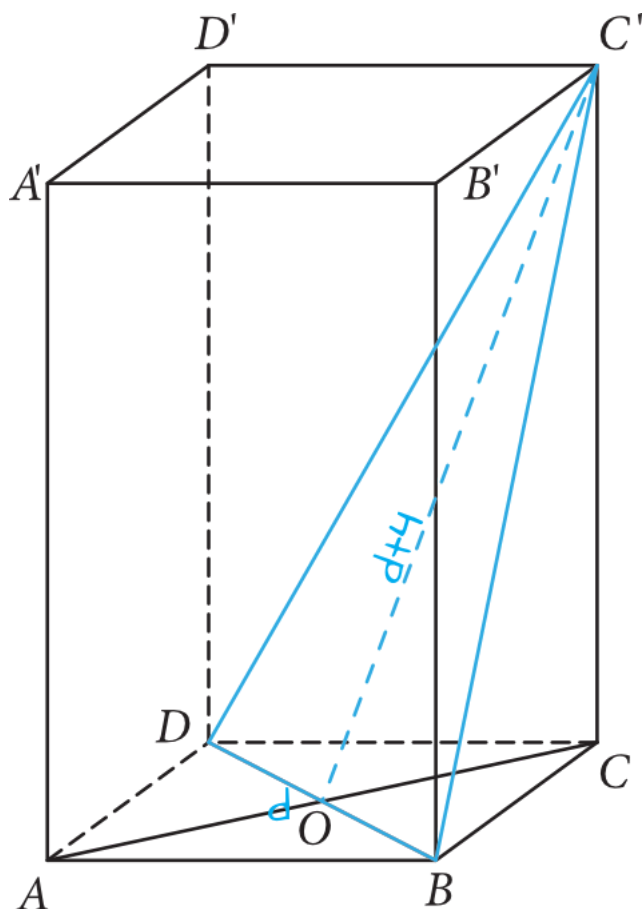
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym (zobacz rysunek poniżej) punkt  $O$  jest punktem przecięcia przekątnych podstawy dolnej, a odcinek  $OC'$  jest o 4 dłuższy od przekątnej podstawy. Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną  $BD$  podstawy dolnej i wierzchołek  $C'$  podstawy górnej. Pole figury otrzymanej w wyniku przekroju jest równe 48. Zaznacz tę figurę na rysunku poniżej i oblicz objętość graniastosłupa.



**Odpowiedź:**  $V = 256\sqrt{2}$  (p)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Na początek nanieśmy na rysunek dane z treści zadania i przy okazji wykonajmy jeden z celów tego zadania, czyli zaznaczmy poszukiwaną figurę:



Krok 2. Obliczenie długości odcinka  $BD$ .

Odcinek  $BD$  jest podstawą naszego trójkąta, który znalazł się w przekroju. Jeżeli oznaczymy sobie tę długość jako  $d$ , to z treści zadania wynika, że wysokość tego trójkąta  $OC'$  ma długość  $d + 4$ . Skoro pole trójkąta jest równe 48, to otrzymamy następujące równanie:

$$P = \frac{1}{2}ah, 48 = \frac{1}{2} \cdot d \cdot (d + 4), 48 = \frac{1}{2}d^2 + 2d \quad / \cdot 2, 96 = d^2 + 4d, d^2 + 4d - 96 = 0$$

Powstało nam równanie kwadratowe w postaci ogólnej, które możemy rozwiązać obliczając klasyczną deltę:

Współczynniki:  $a = 1$ ,  $b = 4$ ,  $c = -96$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-96) = 16 - (-384) = 16 + 384 = 400, \sqrt{\Delta} = \sqrt{400} = 20$$

$$d_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 20}{2 \cdot 1} = \frac{-24}{2} = -12, d_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 20}{2 \cdot 1} = \frac{16}{2} = 8$$

Otrzymaliśmy dwie możliwości, ale ujemny wynik musimy odrzucić, bo długość przekątnej podstawy musi być liczbą dodatnią. W związku z tym  $d = 8$ .

Krok 3. Obliczenie wysokości graniastosłupa.

Spójrzmy na trójkąt prostokątny  $OCC'$ . Dolna podstawa będzie miała długość połowy przekątnej (którą przed chwilą wyznaczyliśmy). Możemy nawet zapisać, że:

$$|OC| = \frac{1}{2}d, |OC| = \frac{1}{2} \cdot 8, |OC| = 4$$

Praktycznie znamy też długość przeciwprostokątnej tego trójkąta, bo z treści zadania wynika, że jest ona o 4 dłuższa od przekątnej podstawy, zatem:

$$|OC'| = d + 4, |OC'| = 8 + 4, |OC'| = 12$$

Znając miary dwóch boków trójkąta  $OCC'$  możemy korzystając z Twierdzenia Pitagorasa obliczyć długość trzeciego boku, który jest jednocześnie wysokością naszego graniastosłupa:

$$|OC'|^2 + H^2 = |OC|^2, 4^2 + H^2 = 12^2, 16 + H^2 = 144, H^2 = 128, H = \sqrt{128} \quad \vee \quad H = -\sqrt{128}$$

Wysokość nie może być oczywiście ujemna, zatem zostaje nam  $H = \sqrt{128}$ , co możemy jeszcze rozpisać jako  $H = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$ .

Krok 4. Obliczenie długości krawędzi podstawy.

Wiemy już, że w podstawie znajduje się kwadrat o przekątnej długości  $d = 8$ . Z własności kwadratów wynika, że kwadrat o boku  $a$  ma przekątną o długości  $a\sqrt{2}$ , zatem:

$$a\sqrt{2} = 8, \quad a = \frac{8}{\sqrt{2}}, \quad a = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}, \quad a = \frac{8\sqrt{2}}{2}, \quad a = 4\sqrt{2}$$

Krok 5. Obliczenie objętości graniastosłupa.

W podstawie graniastosłupa znajduje się kwadrat o boku  $a = 4\sqrt{2}$ , wiemy też że wysokość bryły jest równa  $H = 8\sqrt{2}$ , zatem:

$$V = P_p \cdot H, \quad V = a^2 \cdot H, \quad V = (4\sqrt{2})^2 \cdot 8\sqrt{2}, \quad V = 16 \cdot 2 \cdot 8\sqrt{2}, \quad V = 256\sqrt{2}$$