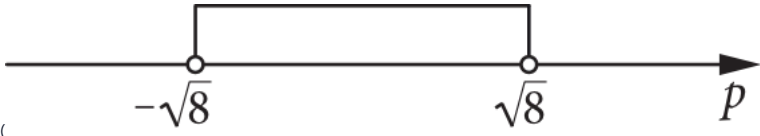


Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Matura próbna z matematyki (poziom podstawowy) - Nowa Era 2015

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	B (0, 042)	1
2	D (125%)	1
3	A ($3 - 2\sqrt{2}$)	1
4	A ($(-\frac{3}{2}, +\infty)$)	1
5	B ($\sqrt{(-125)^2} = -125$)	1
6	B ($f(x) = (\sqrt{2})^x + 1$)	1
7	B (2)	1
8	C ($g(x) = -3x - 2$)	1
9	 C (	1
10	A ($m < 2$)	1
11	C ($2\sqrt{6}$)	1
12	B ($a_3 = 9$)	1
13	B (64)	1
14	A	1
15	D ($0\ 9^\circ\ F$)	1
16	B ($\frac{1}{6\pi}$)	1
17	D (18)	1
18	A ($\cos\alpha = -\frac{4}{5}$)	1
19	A (9)	1
20	B (72)	1
21	D (6)	1
22	B ($2a^3$)	1
23	A ($8\sqrt{3}\pi$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Marek obserwował zwycięski skok Kamila Stocha i oszacował jego długość na $138m$. Oficjalny wynik zawodnika to $132,5m$. Jaki błąd względny popełnił Marek (w zaokrągleniu do części tysięcznych)?

Odpowiedź: B (0,042)

Krok 1. Zapisanie danych z treści zadania.

Błąd względny obliczymy korzystając ze wzoru $\delta = \frac{|x-p|}{x}$, gdzie:

δ - błąd względny

x - dokładna wartość

p - wartość przybliżona

W naszym przypadku:

$x = 132,5$

$p = 138$

Krok 2. Obliczenie błędu względnego.

Korzystając z powyższych informacji błąd względny obliczymy w następujący sposób:

$$\frac{|132,5 - 138|}{132,5} = \frac{|-5,5|}{132,5} = \frac{5,5}{132,5} \approx 0,042$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Liczba a jest o 20% mniejsza od liczby b . Jaki procent liczby a stanowi liczba b ?

Odpowiedź: D (125%)

Z treści zadania wynika, że:

$$a = 0,8b$$

My musimy policzyć jaki procent liczby a stanowi liczba b , czyli musimy tak naprawdę obliczyć $\frac{b}{a}$. W związku z tym:

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{0,8b} = 1,25 = 125\%$$

Tak na marginesie: w tym zadaniu bardzo łatwo jest o błąd, zwłaszcza że nie wszyscy wiedzą dlaczego akurat zapis $a = 0,8b$ jest tym poprawnym. Aby lepiej zrozumieć istotę tego zapisu, to można sobie to wyjaśnić na konkretnych przykładach liczbowych, przyjmując że np. $b = 10$. Jeżeli $b = 10$, to a będzie o 20% mniejsze będzie równe $a = 8$. Teraz znacznie łatwiej będzie zrozumieć dlaczego $a = 0,8b$ i dlaczego liczymy $\frac{b}{a}$.

Zadanie 3

0-1 pkt

Iloraz $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ jest równy:

Odpowiedź: A ($3 - 2\sqrt{2}$)

Naszym zadaniem jest tak naprawdę usunięcie niewymierności z mianownika. W tym konkretnym przypadku wymnożenie licznika i mianownika przez $\sqrt{3}$ nic nam nie da. Tutaj należy pomnożyć licznik i mianownik przez $6 - \sqrt{3}$, dzięki czemu w mianowniku będziemy mogli skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Przy okazji także w liczniku będziemy mogli zastosować wzór skróconego mnożenia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Całość będzie wyglądać następująco:

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2}{6-3} = \frac{6-2\sqrt{18}+3}{3} = \frac{9-2\sqrt{18}}{3} = \frac{9-2\sqrt{9 \cdot 2}}{3} = \frac{9-6\sqrt{2}}{3} = 3-2\sqrt{2}$$

Zadanie 4

0-1 pkt

Zbiorem rozwiązań nierówności $(x-2)^2 \leq 14 - (2-x)(x+2)$ jest przedział:

Odpowiedź: A ($(-\frac{3}{2}, +\infty)$)

Wymnażając przez siebie poszczególne wyrazy oraz korzystając ze wzorów skróconego mnożenia otrzymamy:

$$(x-2)^2 \leq 14 - (2-x)(x+2), \quad x^2 - 4x + 4 \leq 14 - (2x + 4 - x^2 - 2x), \quad x^2 - 4x + 4 \leq 14 - 2x - 4 + x^2 + 2x, \quad x^2 - 4x + 4 \leq x^2 + 10, \quad -4x + 4 \leq 10$$

To oznacza, że zbiorem rozwiązań nierówności będzie przedział $(-\frac{3}{2}, +\infty)$.

Zwróć też uwagę na to, że dzieląc (lub mnożąc) obydwie strony nierówności przez liczbę ujemną zmienia się znak nierówności.

Zadanie 5

0-1 pkt

Wskaż zdanie nieprawdziwe:

Odpowiedź: B ($\sqrt{(-125)^2} = -125$)

Sprawdźmy po kolei każdą z odpowiedzi:

Odp. A.

Zacznijmy od lewej strony. Skoro $\sqrt[3]{125} = 5$, to $-\sqrt[3]{125} = -5$.

Po prawej stronie mamy $\sqrt[3]{-125} = -5$, bo $-5 \cdot -5 \cdot -5 = -125$.

Pierwsze równanie jest więc prawdziwe.

Odp. B.

Wartość $\sqrt{(-125)^2}$ jest równa 125, a nie -125 . Dlaczego akurat tak? Wynikiem pierwiastkowania w przypadku parzystego stopnia pierwiastka może być tylko liczba dodatnia. Z tego też względu jak mamy np. $\sqrt{25}$, co moglibyśmy analogicznie zapisać jako chociażby $\sqrt{(-5)^2}$, to wynik tego pierwiastkowania jest równy tylko i wyłącznie 5, mimo iż przecież $-5 \cdot (-5)$ także daje wynik równy 25.

Odp. C.

Po lewej stronie mamy $\sqrt[3]{-64}$. Wyłączając czynnik przed znak pierwiastka otrzymamy $\sqrt[3]{-32 \cdot 2} = -2\sqrt[3]{2}$. To jest dokładnie ten sam wynik co po prawej stronie równania, zatem zdanie jest prawdziwe.

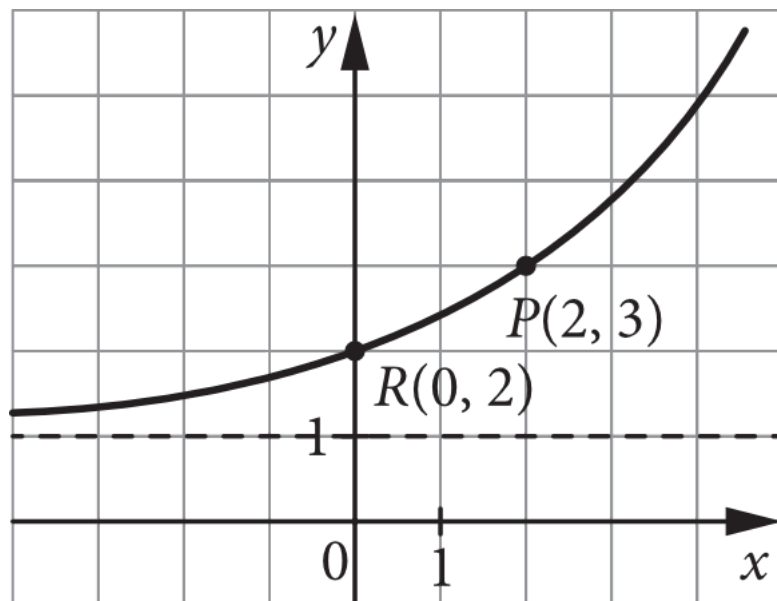
Odp. D.

Po lewej stronie mamy $5^{\frac{7}{3}}$. Zamieniając postać potęgi na postać pierwiastka otrzymamy: $5^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{5^7} = \sqrt[3]{5^6 \cdot 5} = 5^2 \sqrt[3]{5} = 25 \sqrt[3]{5}$. Zdanie jest więc prawdziwe, bo po lewej i prawej stronie mamy tę samą wartość.

Zadanie 6

0-1 pkt

Po przesunięciu wykresu funkcji wykładniczej wzdłuż osi Oy układu współrzędnych otrzymano wykres przedstawiony na rysunku. Jest to wykres funkcji:



Odpowiedź: B ($f(x) = (\sqrt{2})^x + 1$)

Krok 1. Dostrzeżenie rodzaju przesunięcia wykresu funkcji.

Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest funkcją, która posiada dwie kluczowe cechy: dąży do zera oraz przecina oś igreków w punkcie $A = (0; 1)$. My na rysunku widzimy, że nasza funkcja dąży do jedynki i przecina oś igreków w punkcie $R = (0; 2)$, a to oznacza, że jest to funkcja przesunięta o jedną jednostkę do góry. Skoro tak, to jej wzorem będzie $f(x) = a^x + 1$. Do poznania pełnego wzoru tej funkcji musimy jeszcze ustalić wartość a .

Krok 2. Zapisanie wzoru funkcji wykładniczej.

Z wykresu możemy odczytać, że funkcja przechodzi przez punkt $P = (2; 3)$. Podstawiając zatem $x = 2$ oraz $y = 3$ do wzoru $f(x) = a^x + 1$ otrzymamy:

$$3 = a^2 + 1, \quad a^2 = 2, \quad a = \sqrt{2} \quad \vee \quad a = -\sqrt{2}$$

Z rysunku wynika, że funkcja jest rosnąca, a funkcje wykładnicze są rosnące jedynie dla $a > 1$. To oznacza, że $a = \sqrt{2}$. Znając wartość a możemy już zapisać, że wzorem tej funkcji będzie $f(x) = (\sqrt{2})^x + 1$.

Zadanie 7

0-1 pkt

Liczby a i b są dodatnie, $b \neq 1$ i $\log_b a = 4$. Wyrażenie $\log_b \sqrt[3]{ab^2}$ przyjmuje wartość:

Odpowiedź: B (2)

Krok 1. Zapisanie relacji między liczbą a oraz b .

Skoro $\log_b a = 4$, to zamieniając postać logarytmu na postać potęgi wyjdzie nam, że $a = b^4$. Z tej relacji skorzystamy za chwilę podczas rozpisywania całego logarytmu.

Krok 2. Rozwiązanie logarytmu.

Korzystając z zamiany pierwiastków na potęgi otrzymamy:

$$\log_b \sqrt[3]{ab^2} = \log_b (a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}})$$

Podstawiając teraz $a = b^4$ wyjdzie nam, że:

$$\log_b ((b^4)^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}) = \log_b (b^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}) = \log_b b^2 = 2$$

Zadanie 8

0-1 pkt

Wykres funkcji liniowej $f(x) = 3x - 2$ odbito symetrycznie względem osi Oy . Otrzymano wykres funkcji:

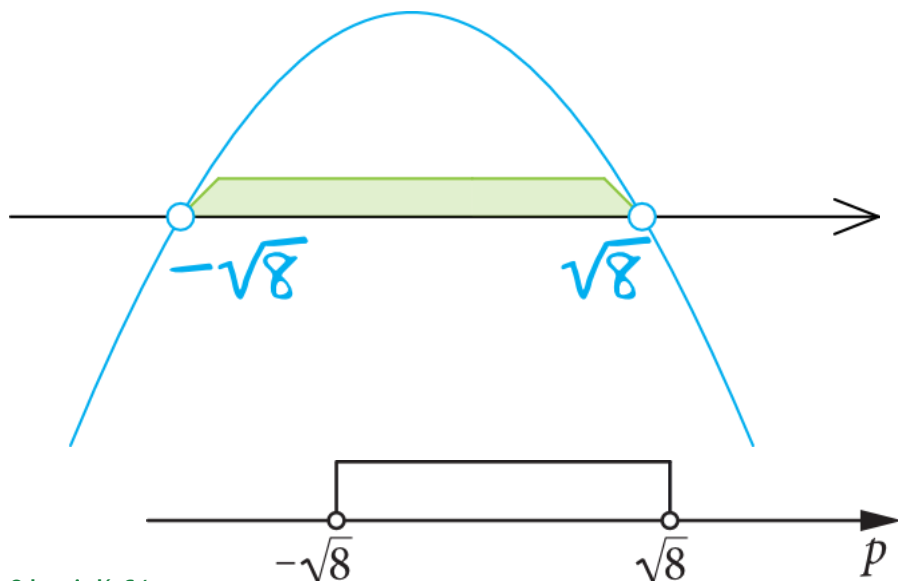
Odpowiedź: C ($g(x) = -3x - 2$)

Wykonując symetrię funkcji względem osi igreków zmienia nam się na przeciwny znak współczynnika kierunkowego a . Skoro początkowa funkcja ma $a = 3$, to jej odbicie symetryczne względem osi igreków będzie mieć $a = -3$. To oznacza, że poszukiwana przez nas funkcja przyjmuje wzór $g(x) = -3x - 2$.

Zadanie 9

0-1 pkt

Wskaż oś liczbową, na której przedstawiono zbiór wszystkich wartości p , dla których funkcja liniowa $f(x) = (8 - p^2)x + p$ jest rosnąca.



Odpowiedź: C (

)

Krok 1. Zapisanie nierówności.

Funkcja liniowa w postaci $y = ax + b$ jest rosnąca wtedy, gdy współczynnik kierunkowy a jest większy od zera. W naszym przypadku $a = 8 - p^2$, zatem musimy rozwiązać następującą nierówność:

$$8 - p^2 > 0$$

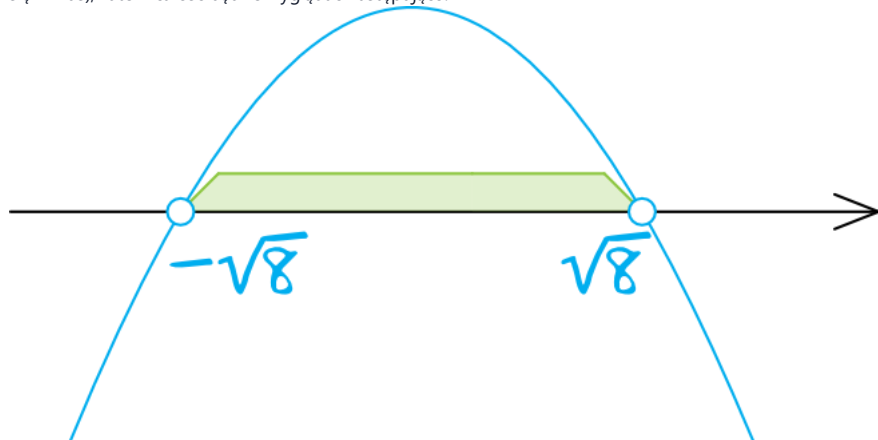
Krok 2. Wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu.

Powstała nam nierówność kwadratowa, którą precyzyjniej moglibyśmy jeszcze zapisać jako $-p^2 + 8 > 0$. Aby rozwiązać taką nierówność, to jak to zwykle bywa, musimy zacząć od wyznaczenia miejsc zerowych, czyli sprawdzenia kiedy $8 - p^2 = 0$, zatem:

$$-p^2 + 8 = 0, \quad p^2 = 8, \quad p = \sqrt{8} \quad \vee \quad p = -\sqrt{8}$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

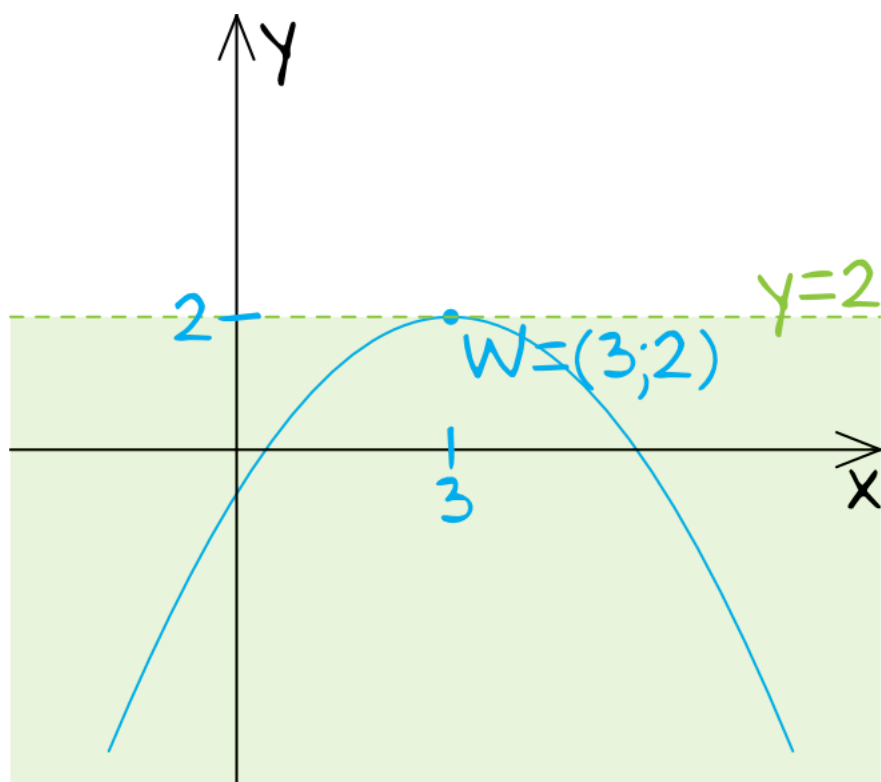
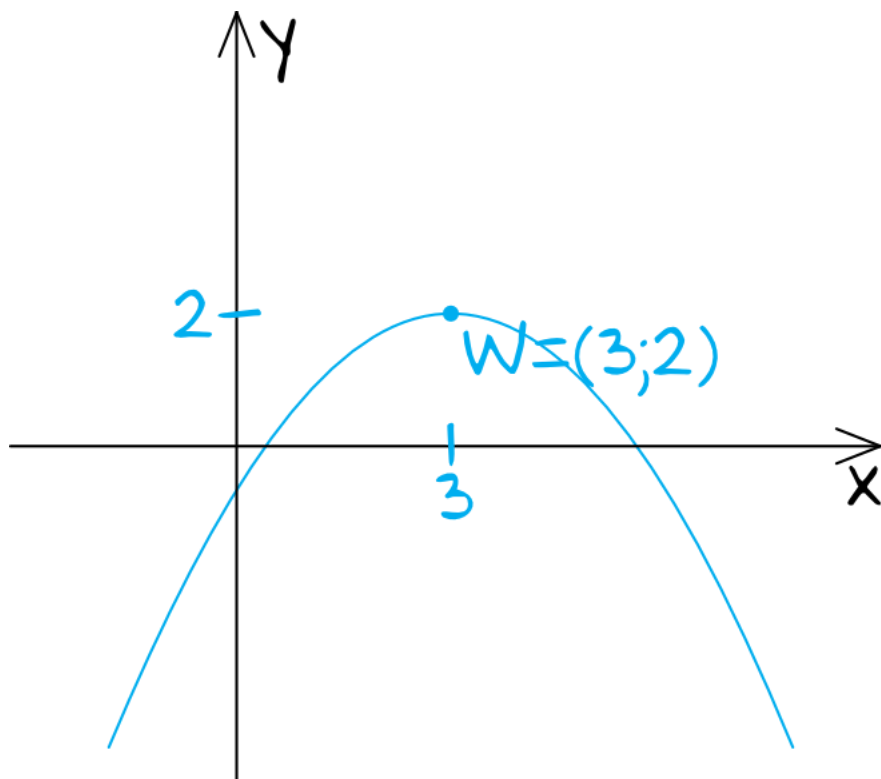
Zaznaczając na osi liczbowej wartości wyznaczone przed chwilą możemy przystąpić do rysowania paraboli. Jej ramiona będą skierowane do dołu (bo przed p^2 pojawił się minus), zatem całość będzie wyglądała następująco:



Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

Z rysunku wynika, że wartości większe od zera są przyjmowane dla $p \in (-\sqrt{8}; \sqrt{8})$. To z kolei oznacza, że właśnie dla takich wartości naszego p funkcja liniowa będzie rosnąca. Omawiany przedział został zaprezentowany w trzeciej odpowiedzi.

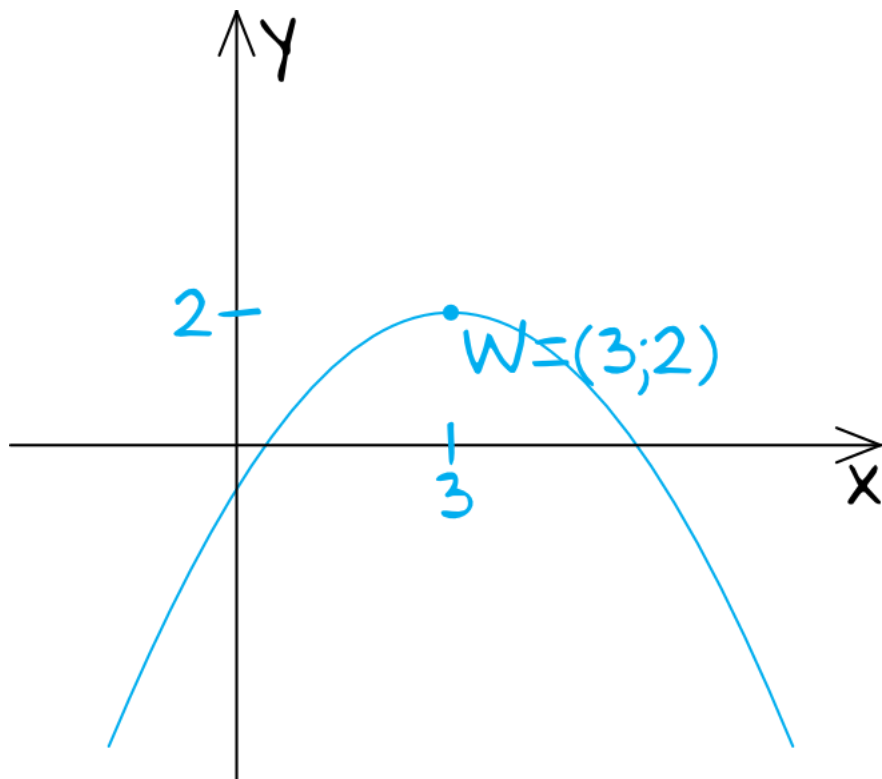
Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ ma dwa punkty wspólne z prostą o równaniu $y = m$, jeżeli:



Odpowiedź: A ($m < 2$)

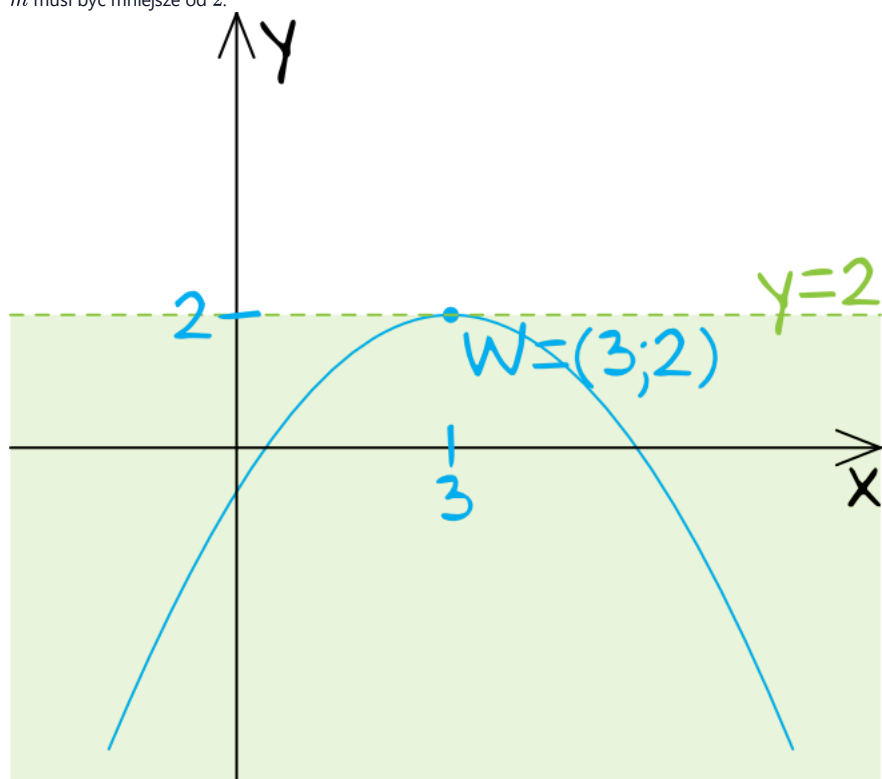
Krok 1. Szkicowanie wykresu paraboli.

W treści zadania mamy podaną funkcję w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ z której wprost możemy odczytać współrzędne wierzchołka paraboli $W = (p; q)$. Przyrównując wzór $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ do postaci kanonicznej widzimy wyraźnie, że $p = 3$ oraz $q = 2$. Dodatkowo też możemy odczytać, że współczynnik $a = -\frac{1}{2}$, co z kolei będzie oznaczać, że ramiona paraboli będą skierowane do dołu. Nasz wykres będzie więc wyglądał mniej więcej w ten oto sposób:



Krok 2. Odczytanie rozwiązania zadania.

Musimy ustalić dla jakiego parametru m prosta $y = m$ będzie przecinać naszą parabolę w dwóch miejscach. Po wykresie widzimy wyraźnie, że aby tak się stało, to m musi być mniejsze od 2:



To oznacza, że interesującym nas rozwiązaniem będzie $m < 2$.

Zadanie 11

0-1 pkt

Punkty $M = (-2, 0)$ i $N = (2, 4)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Wysokość tego trójkąta jest równa:

Odpowiedź: C ($2\sqrt{6}$)

Krok 1. Obliczenie długości odcinka MN .

Odcinek MN jest bokiem trójkąta równobocznego, a jego długość obliczymy ze wzoru:

$$|MN| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$$

Podstawiając współrzędne punktów M oraz N otrzymamy:

$$|MN| = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (4 - 0)^2}, |MN| = \sqrt{4^2 + 4^2}, |MN| = \sqrt{16 + 16}, |MN| = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

Krok 2. Obliczenie wysokości trójkąta równobocznego.

Wiemy już, że bok trójkąta równobocznego ma długość $a = 4\sqrt{2}$. Naszym celem jest poznanie wysokości tego trójkąta. Korzystając więc ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego otrzymamy:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, h = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}, h = \frac{4\sqrt{6}}{2}, h = 2\sqrt{6}$$

Zadanie 12

0-1 pkt

Wzór ogólny ciągu (a_n) określonego dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$ ma postać $a_n = \sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$. Wynika stąd, że:

Odpowiedź: B ($a_3 = 9$)

Patrząc się na odpowiedzi widzimy, że musimy obliczyć wartość trzeciego wyrazu. Naszym zadaniem będzie więc podstawienie $n = 3$ do wzoru ciągu:

$$a_3 = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}, a_3 = 3^{\frac{3}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}, a_3 = 3^{\frac{3}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}, a_3 = 3^{\frac{9}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}}, a_3 = 3^2, a_3 = 9$$

Zadanie 13

0-1 pkt

Dany jest nieskończony ciąg (a_n) , w którym $a_1 = 4^{10}$, a każdy następny wyraz jest dwukrotnie mniejszy od poprzedniego. Wtedy wyraz a_{15} jest równy:

Odpowiedź: B (64)

Krok 1. Ustalenie wartości ilorazu ciągu geometrycznego.

Skoro każdy następny wyraz ma być dwa razy mniejszy od poprzedniego, to mamy do czynienia z ciągiem geometrycznym w którym $q = \frac{1}{2}$.

Krok 2. Wyznaczenie wartości a_{15} .

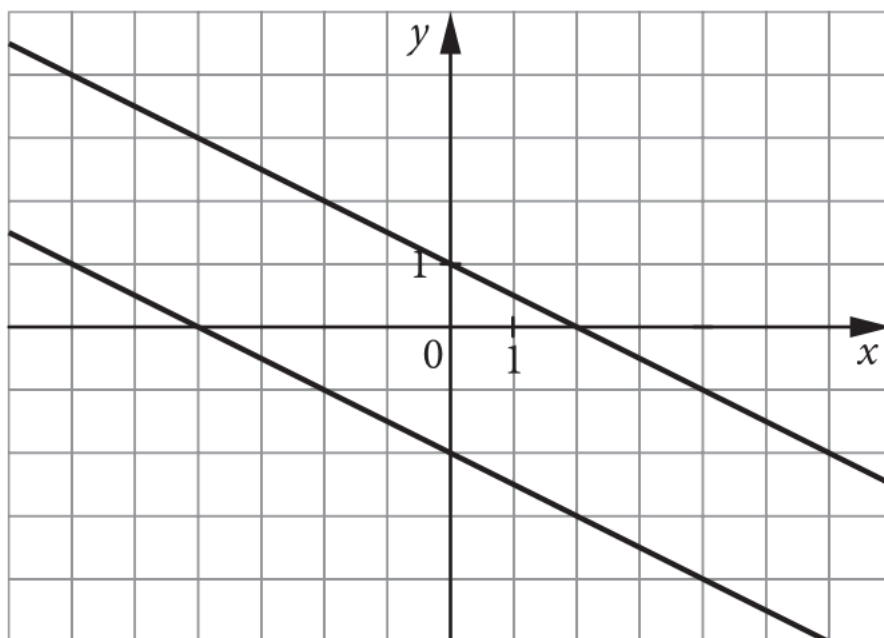
Wiedząc, że $a_1 = 4^{10}$ oraz $q = \frac{1}{2}$ możemy skorzystać ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego i zapisać, że:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, a_{15} = 4^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15-1}, a_{15} = 4^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14}, a_{15} = (2^2)^{10} \cdot (2^{-1})^{14}, a_{15} = 2^{20} \cdot 2^{-14}, a_{15} = 2^6, a_{15} = 64$$

Zadanie 14

0-1 pkt

Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną jednego z niżej zapisanych układów równań.



Wskaż ten układ:

Odpowiedź: A

Krok 1. Odczytanie z rysunku kluczowych informacji na temat prostych.

Z rysunku wynika, że obydwie proste są malejące, czyli na pewno muszą mieć współczynnik kierunkowy a mniejszy od 0. Oprócz tego jesteśmy też w stanie odczytać konkretne wartości współczynnika b , patrząc się na miejsce przecięcia się prostych z osią igreków. Jedna prosta przecina oś igreków dla $y = 1$, czyli współczynnik $b = 1$, natomiast druga prosta przecina oś igreków dla $y = -2$, czyli ma współczynnik $b = -2$.

Krok 2. Wskazanie prawidłowego układu równań.

Proste zapisane w układach równań mają postać $y = ax + b$. Ustaliliśmy już sobie, że współczynnik a jednej i drugiej prostej musi być ujemny, co sprawia że możemy odrzucić drugą i czwartą odpowiedź.

Wiemy też, że współczynnik b jednej prostej ma być równy 1, a drugiej ma być równy -2 i taką sytuację mamy w pierwszym układzie równań. Możemy więc bez wykonywania specjalnych obliczeń wskazać, że poszukiwaną prawidłową odpowiedzią jest pierwszy układ równań.

Zadanie 15

0-1 pkt

Zależność temperatury w skali Fahrenheita ($^{\circ}F$) od temperatury w skali Celsjusza ($^{\circ}C$) wyraża się wzorem: $f = \frac{9}{5}c + 32$, gdzie f oznacza temperaturę w skali Fahrenheita, a c - w skali Celsjusza. 25 maja 2014 r. o godzinie 12 czasu lokalnego temperatura w Warszawie wynosiła $20^{\circ}C$, a w Nowym Jorku $77^{\circ}F$. O ile stopni temperatura w Nowym Jorku była wyższa od temperatury w Warszawie?

Odpowiedź: D (o $9^{\circ}F$)

Krok 1. Zapisanie temperatury w Warszawie w skali Fahrenheita.

Skoro temperatura w Warszawie wyniosła $20^{\circ}C$, to zgodnie ze wzorem podanym w treści zadania możemy zapisać, że:

$$f = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32, f = 36 + 32, f = 68$$

To oznacza, że w Warszawie mieliśmy temperaturę $68^{\circ}F$.

Krok 2. Wyznaczenie różnicy temperatur między dwoma miastami.

Skoro w Nowym Jorku mamy $77^{\circ}F$, a w Warszawie $68^{\circ}F$, to różnica temperatur wyniesie:

$$77^{\circ}F - 68^{\circ}F = 9^{\circ}F$$

Zadanie 16

0-1 pkt

Rzucono równocześnie trzema sześciennymi kostkami do gry. Prawdopodobieństwo, że na wszystkich kostkach wypadła taka sama liczba oczek, jest równe:

Odpowiedź: B ($\frac{1}{6^2}$)

Krok 1. Ustalenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych.

Na każdej kostce może wypaść jeden z sześciu wyników, a skoro rzucamy niezależnie trzema kostkami, to liczba wszystkich kombinacji będzie równa $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$.

Krok 2. Ustalenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Sprzyjającymi zdarzeniami (czyli takimi, które spełniają warunki naszego zadania) będą następujące rzuty:

$$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5), (6, 6, 6)$$

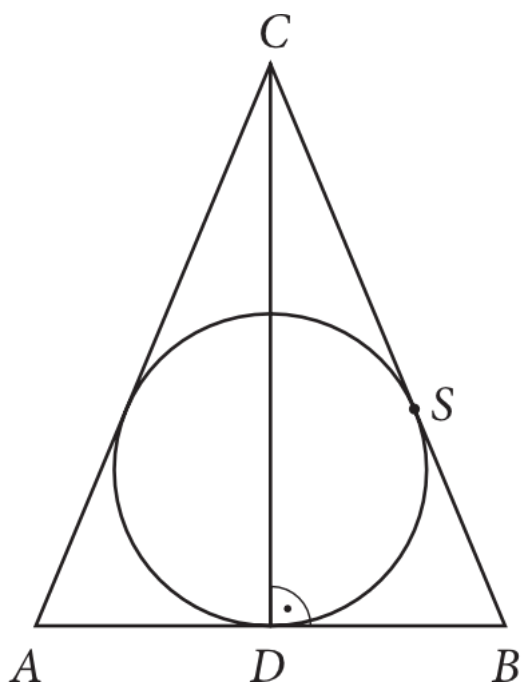
To oznacza, że tylko sześć przypadków spełnia warunki zadania, stąd też możemy napisać, że $|A| = 6$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo obliczymy korzystając ze wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^3} = \frac{6}{6^2 \cdot 6} = \frac{1}{6^2}$$

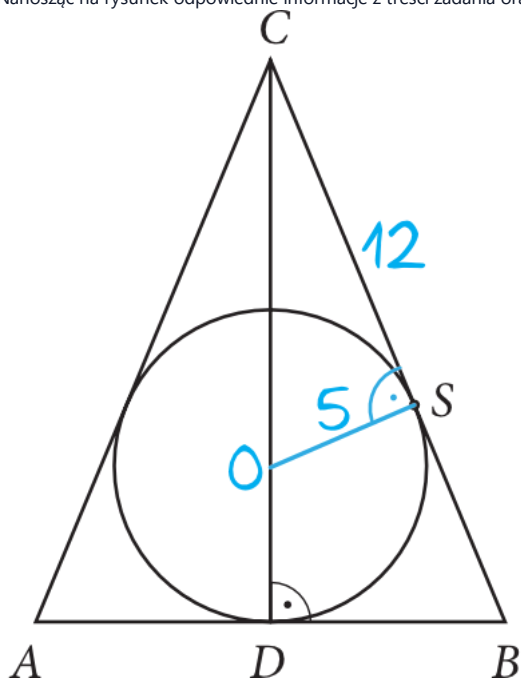
W trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB wpisano okrąg o promieniu 5. Odległość wierzchołka C od punktu styczności S okręgu z ramieniem BC jest równa 12. Wysokość CD tego trójkąta ma długość:



Odpowiedź: D (18)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanosząc na rysunek odpowiednie informacje z treści zadania oraz łącząc środek okręgu z punktem styczności S otrzymamy następującą sytuację:



Krok 2. Obliczenie długości odcinka CO .

Spójrzmy na trójkąt prostokątny OSC . Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$|OS|^2 + |SC|^2 = |CO|^2, \quad 5^2 + 12^2 = |CO|^2, \quad 25 + 144 = |CO|^2, \quad |CO|^2 = 169, \quad |CO| = 13 \quad \vee \quad |CO| = -13$$

Długość odcinka nie może być ujemna, zatem zostaje nam jedynie $|CO| = 13$.

Krok 3. Obliczenie wysokości CD .

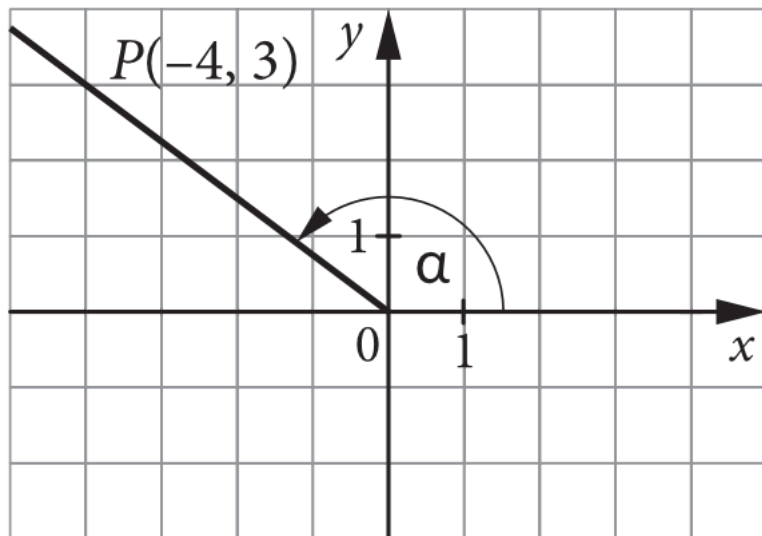
Patrząc się na rysunek możemy teraz zauważyć, że wysokość trójkąta będzie równa sumie długości odcinka CO (którą obliczyliśmy przed chwilą) oraz OD (który jest równy długości promienia okręgu), zatem:

$$|CD| = 13 + 5, |CD| = 18$$

Zadanie 18

0-1 pkt

Wskaż poprawną wartość funkcji trygonometrycznej kąta rozwartego α (rysunek obok).



Odpowiedź: A ($\cos \alpha = -\frac{4}{5}$)

Z tablic matematycznych możemy odczytać, że jeżeli mamy taką sytuację jak na powyższym rysunku, czyli kiedy jedno ramię kąta pokrywa się z osią x, a drugie ramię przechodzi przez punkt $P = (x; y)$, to:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

gdzie r to odległość od punktu P do początku układu współrzędnych, którą możemy policzyć ze wzoru $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Krok 2. Obliczenie długości r .

W naszym przypadku ramię kąta przechodzi przez punkt $P = (-4; 3)$, czyli $x = -4$ oraz $y = 3$. Korzystając z podanego powyżej wzoru możemy zapisać, że:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, r = \sqrt{(-4)^2 + 3^2}, r = \sqrt{16 + 9}, r = \sqrt{25}, r = 5$$

Krok 3. Obliczenie wartości poszczególnych funkcji trygonometrycznych.

Wiemy już, że $x = -4$, $y = 3$ oraz $r = 5$, zatem możemy obliczyć każdą z wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}, \tan \alpha = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Porównując otrzymane wyniki z odpowiedziami widzimy wyraźnie, że prawidłowa jest pierwsza odpowiedź.

Zadanie 19

0-1 pkt

Na trójkącie ABC opisano okrąg o środku S i promieniu równym 6. Kąt wpisany ACB ma miarę 15° . Pole trójkąta ABS jest równe:

Odpowiedź: A (9)

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Sytuację z treści zadania możemy przedstawić na rysunku w następujący sposób:

--rysunek 408--

Krok 2. Obliczenie miary kąta ASB .

Kąt ASB jest kątem środkowym, opisanym na tym samym łuku co kąt ACB . Zgodnie z własnościami takich kątów wiemy, że w takim razie miara kąta ASB będzie dwukrotnie większa od miary kąta ACB , zatem:

$$|\angle ASB| = 2 \cdot 15^\circ, \quad |\angle ASB| = 30^\circ$$

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni trójkąta ABS .

W trójkącie ABS mamy dwa ramiona o długości 6 (są to promienie okręgu) i wiemy, że kąt między tymi ramionami ma długość 30° . Korzystając więc ze "wzoru na pole trójkąta z sinusem" możemy zapisać, że:

$$P = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \alpha, \quad P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ, \quad P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}, \quad P = 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}, \quad P = 18 \cdot \frac{1}{2}, \quad P = 9$$

Zadanie 20

0-1 pkt

Ile jest wszystkich naturalnych liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5, w których cyfra dziesiątek jest liczbą pierwszą? (Uwaga: 1 nie jest liczbą pierwszą.)

Odpowiedź: B (72)

Liczyby podzielne przez 5 zawsze mają ostatnią cyfrę równą 5 lub 0. Ustalmy zatem ile cyfr możemy umieścić w rzędzie setek, dziesiątek i jedności:

- rząd setek - tutaj pasuje nam każda cyfra od 1 do 9 (bez 0, bo nie istnieje coś takiego jak 035). Mamy więc dziewięć możliwości uzupełnienia rzędu setek.
- rząd dziesiątek - tutaj pasują nam cyfry 2, 3, 5 oraz 7, bo mają to być liczby pierwsze. Mamy więc cztery możliwości uzupełnienia rzędu dziesiątek.
- rząd jedności - tutaj pasują nam cyfry 5 oraz 0, bo liczba musi być podzielna przez 5. Mamy więc dwie możliwości uzupełnienia rzędu jedności.

W związku z tym wszystkich liczb trzycyfrowych spełniających warunki naszego zadania będziemy mieć zgodnie z regułą mnożenia:

$$9 \cdot 4 \cdot 2 = 72$$

Zadanie 21

0-1 pkt

Wszystkie oceny Ani z matematyki to 5, 4, 6, 5, 5 i nieznana ocena x . Średnia arytmetyczna wszystkich ocen Ani jest większa niż ich mediana. Tą oceną może być:

Odpowiedź: D (6)

Krok 1. Obliczenie średniej ocen Ani.

Na razie policzmy średnią ocen bez niewiadomej oceny x . Mamy pięć znanych ocen, zatem:

$$\bar{s}r = \frac{5 + 4 + 6 + 5 + 5}{5}, \quad \bar{s}r = \frac{25}{5}, \quad \bar{s}r = 5$$

Krok 2. Wyznaczenie mediany ocen.

Aby wyznaczyć medianę z pięciu znanych ocen musimy najpierw uszeregować wyniki w porządku niemalejącymi (czyli od najmniejszego do największego).

Otrzymamy w ten sposób:

$$4, 5, 5, 5, 6$$

Liczba ocen jest nieparzysta, zatem mediana będzie równa wartości środkowego wyrazu, czyli $m = 5$.

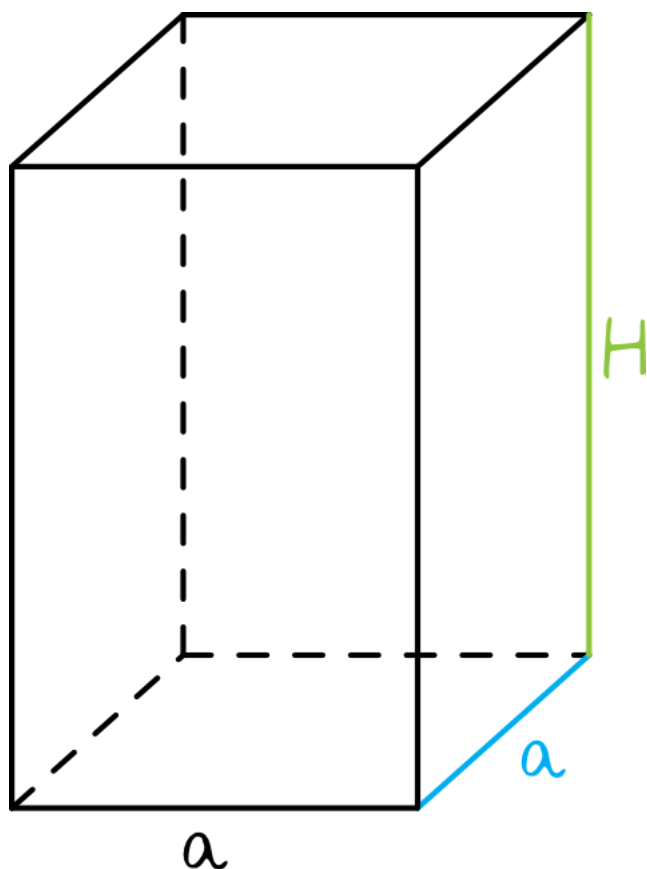
Krok 3. Interpretacja wartości niewiadomej x .

Spójrzmy na naszą medianę. Gdybyśmy dopisali jeszcze jedną liczbę, to otrzymamy parzystą ilość liczb, czyli medianę będziemy wyliczać ze średniej arytmetycznej dwóch środkowych wyrazów. Niezależnie od tego jaką ocenę byśmy Ani dopisali, to środkowymi wyrazami będą 5 oraz 5, zatem mediana po dodaniu niewiadomej x będzie i tak równa 5.

W związku z tym, skoro średnia arytmetyczna znanych ocen jest równa 5, a wiemy że średnia ma być większa od mediany, to niewiadoma x musi być większa od pięćki, czyli to musi być po prostu szóstka. Otrzymamy wtedy:

$$\bar{s}r = \frac{5 + 4 + 6 + 5 + 5 + 6}{6}, \quad \bar{s}r = \frac{31}{6}, \quad \bar{s}r \approx 5,17$$

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym, którego krawędź podstawy ma długość a , pole powierzchni bocznej jest 8 razy większe od pola podstawy. Objętość tego graniastosłupa wynosi:



Odpowiedź: B ($2a^3$)

Krok 1. Obliczenie pola podstawy.

Graniastosłup jest prawidłowy, więc w podstawie musi znaleźć się figura foremna, a skoro jest to graniastosłup czworokątny, to w podstawie będziemy mieć kwadrat. Wiemy, że bok kwadratu ma długość a , zatem:

$$P_p = a^2$$

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni bocznej.

Wiemy, że pole powierzchni bocznej jest 8 razy większe od pola podstawy, zatem:

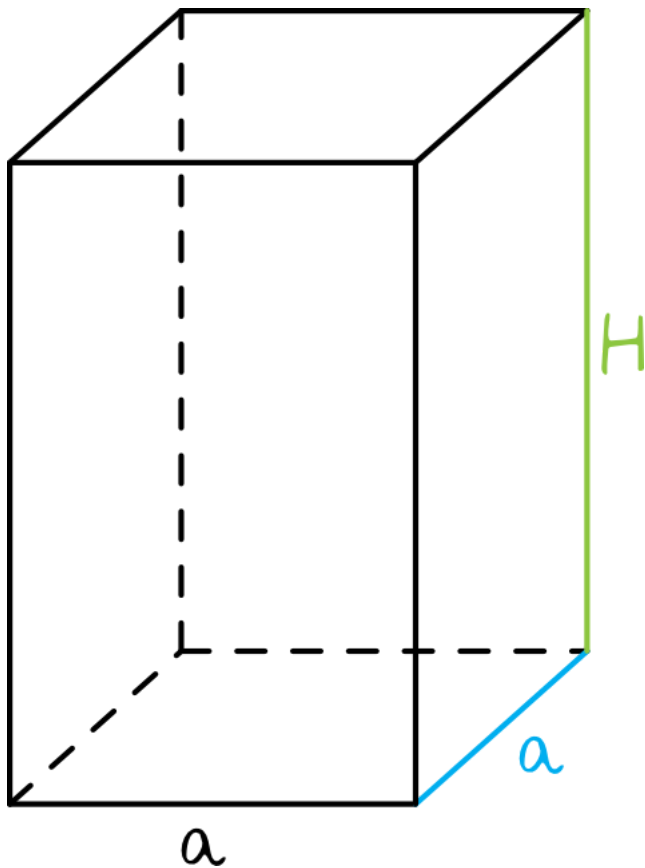
$$P_b = 8a^2$$

Krok 3. Obliczenie wysokości graniastosłupa.

W graniastosłupie mamy cztery prostokątne ściany. Wiemy, że pole powierzchni bocznej (czyli pole wszystkich ścian bocznych) jest równe $8a^2$. To oznacza, że pojedyncza ściana będzie mieć powierzchnię:

$$P_{sb} = 8a^2 : 4, P_{sb} = 2a^2$$

Pojedyncza ściana boczna jest prostokątem w którym jeden bok jest taki jak krawędź podstawy, czyli ma długość a , a drugi bok jest wysokością graniastosłupa.



Skoro pole pojedynczej ściany bocznej ma wynosić $2a^2$, to:

$$P_{sb} = a \cdot H, 2a^2 = a \cdot H, H = 2a$$

Krok 4. Obliczenie objętości.

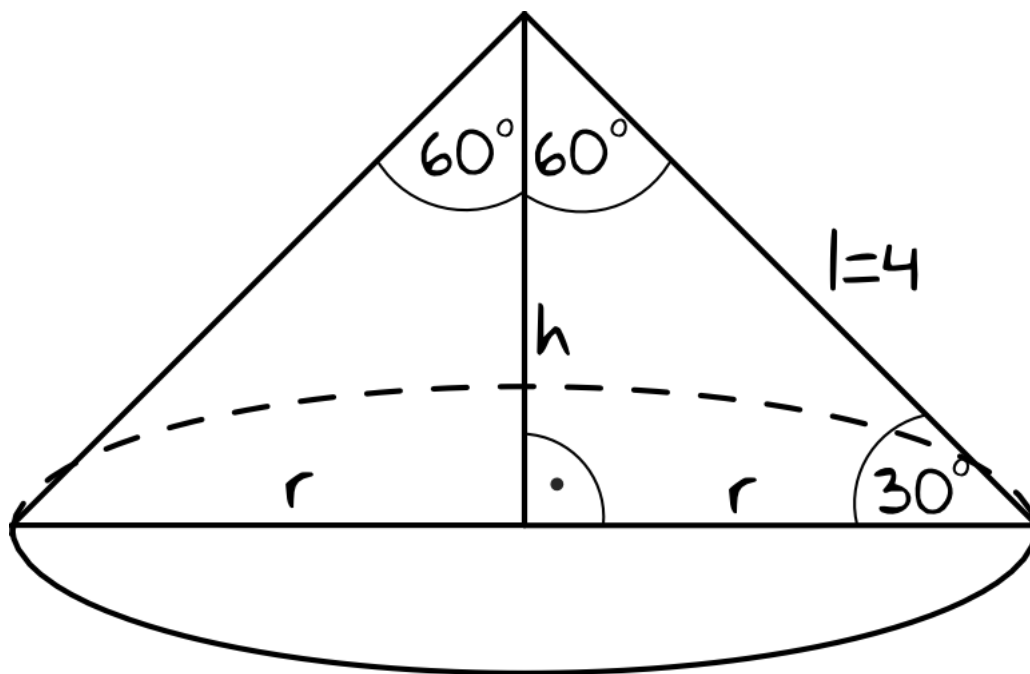
Podstawiając do wzoru na objętość graniastosłupa znane nam dane otrzymamy:

$$V = P_p \cdot H, V = a^2 \cdot 2a, V = 2a^3$$

Zadanie 23

0-1 pkt

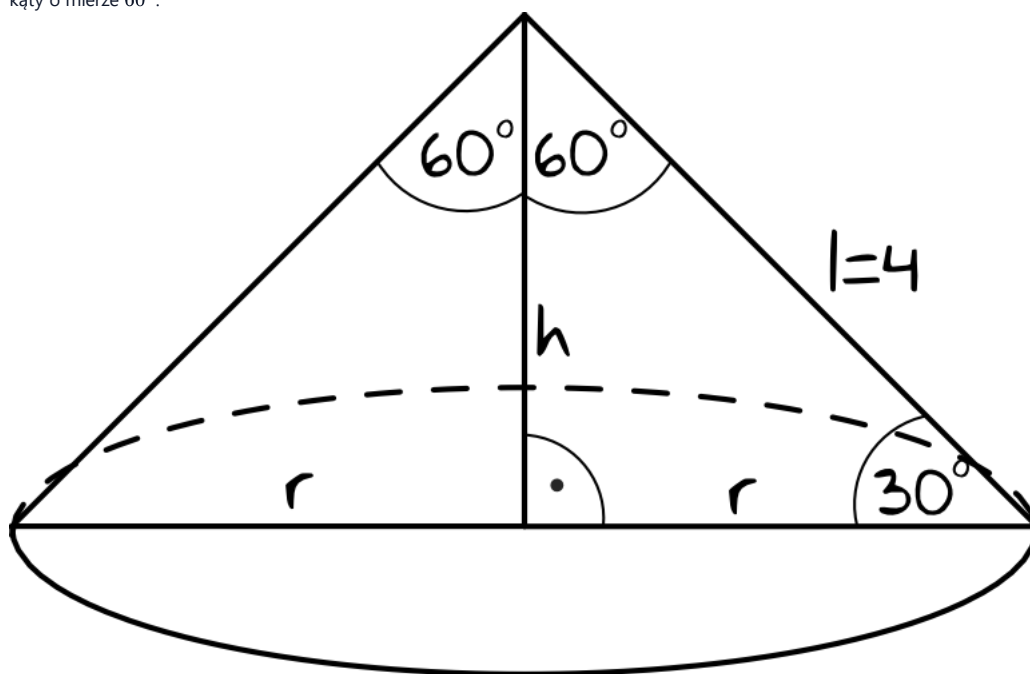
Dany jest stożek, którego tworząca ma długość 4, a kąt rozwarcia wynosi 120° . Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe:



Odpowiedź: A $(8\sqrt{3}\pi)$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Nanosząc na stożek dane z treści zadania otrzymamy tak naprawdę trójkąty o kątach 30° , 60° , 90° , bowiem wysokość stożka podzieli nam kąt rozwarcia na dwa kąty o mierze 60° :



Krok 2. Obliczenie długości promienia podstawy.

Długość promienia możemy obliczyć korzystając z własności trójkątów o kątach 30° , 60° , 90° lub też z funkcji trygonometrycznych. W przypadku funkcji trygonometrycznych możemy skorzystać np. z sinusa:

$$\sin 60^\circ = \frac{r}{4}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{4}, \quad r = 2\sqrt{3}$$

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni bocznej.

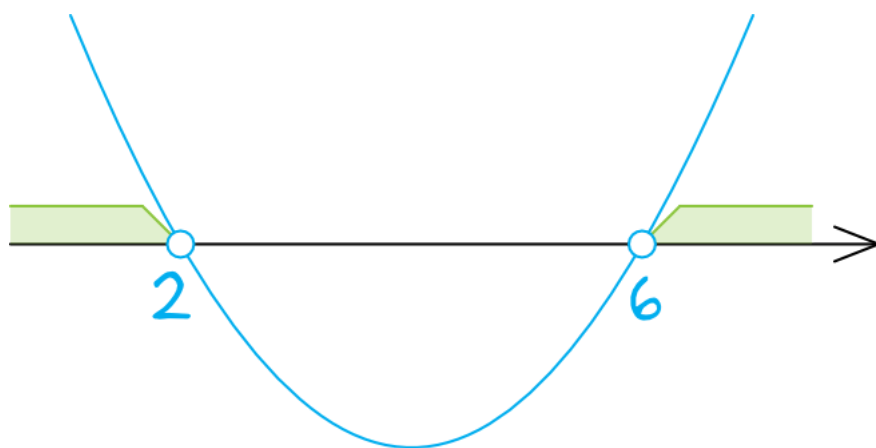
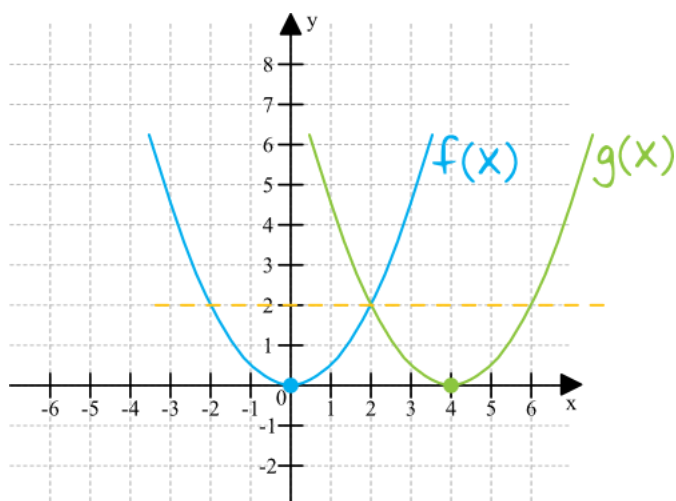
Mamy już wszystkie potrzebne miary, czyli $r = 2\sqrt{3}$ oraz $l = 4$, zatem pole powierzchni bocznej będzie równe:

$$P_b = \pi r l, \quad P_b = \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4, \quad P_b = 8\sqrt{3}\pi$$

Zadanie 24

0-2 pkt

Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ przesunięto o cztery jednostki w prawo i otrzymano wykres funkcji $g(x)$. Wyznacz zbiór wszystkich argumentów x , dla których funkcja $g(x)$ przyjmuje wartości większe od 2.

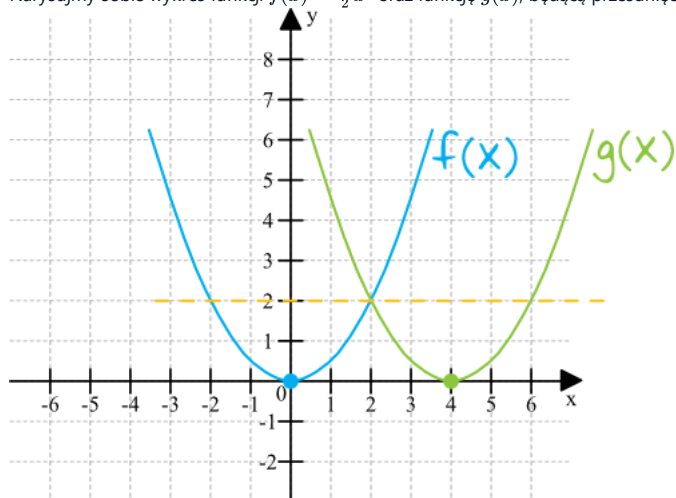


Odpowiedź: $x \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$

I sposób - korzystając z rysunku:

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Narysujmy sobie wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ oraz funkcję $g(x)$, będącą przesunięciem funkcji $f(x)$ o cztery jednostki w prawo:



Krok 2. Odczytanie rozwiązania zadania.

Z rysunku wynika, że funkcja $g(x)$ przyjmuje wartości większe od 2 dla:

$$x \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$$

II sposób - korzystając ze wzoru funkcji:

Krok 1. Zapisanie wzoru funkcji $g(x)$.

Przesunięcie funkcji o cztery jednostki w prawo powoduje, że we wzorze funkcji wartość stojącą przy x musimy pomniejszyć o 4. To oznacza, że $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$.

Krok 2. Zapisanie i rozwiązanie nierówności kwadratowej.

Musimy odpowiedzieć na pytanie kiedy nasza funkcja przyjmuje wartości większe od 2, czyli kiedy zajdzie nierówność:

$$\frac{1}{2}(x-4)^2 > 2$$

Najprościej będzie chyba wymnożyć obydwie strony przez 2 i doprowadzić nierówność do postaci ogólnej z której potem obliczymy deltę:

$$\frac{1}{2}(x-4)^2 > 2 \quad / \cdot 2, (x-4)^2 > 4, x^2 - 8x + 16 > 4, x^2 - 8x + 12 > 0$$

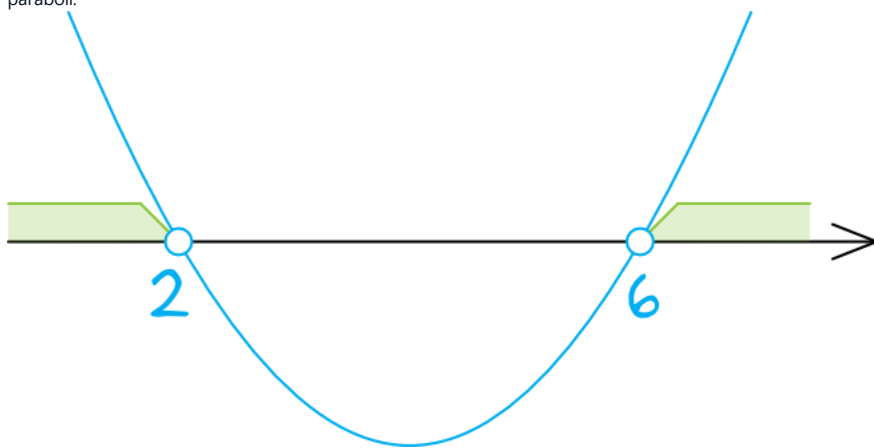
Współczynniki: $a = 1$, $b = -8$, $c = 12$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16, \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - 4}{2 \cdot 1} = \frac{8 - 4}{2} = \frac{4}{2} = 2, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + 4}{2 \cdot 1} = \frac{8 + 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Krok 3. Szkicowanie wykresu paraboli.

Współczynnik a jest dodatni, więc parabola będzie mieć ramiona skierowane ku górze. Zaznaczamy na osi miejsca zerowe obliczone przed chwilą i szkicujemy wykres paraboli:



Punkty $x = 2$ oraz $x = 6$ mają niezamalowane kropki, bo w nierówności wystąpił znak $>$.

Krok 4. Odczytanie rozwiązania.

Z wykresu możemy odczytać, że funkcja przyjmuje wartości większe od zera dla $x \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$ i taka też jest nasza ostateczna odpowiedź.

Zadanie 25

0-2 pkt

Rozwiąż równanie $\frac{x^2-9}{x+3} = 1 - x$.

Odpowiedź: $x = 2$

Krok 1. Zapisanie założeń.

Z racji tego, iż na matematyce nie istnieje dzielenie przez zero, to wartość w mianowniku musi być różna od zera. Z tego też względu:

$$x + 3 \neq 0, \quad x \neq -3$$

Krok 2. Rozwiązanie równania.

To równanie najprościej jest rozwiązać dostrzegając, że zgodnie ze wzorami skróconego mnożenia $x^2 - 9$ to jest to samo co $(x + 3)(x - 3)$. Kiedy dostrzeżemy ten fakt, to całe zadanie jest już bardzo proste:

$$\frac{x^2-9}{x+3} = 1-x, \quad \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = 1-x, \quad x-3 = 1-x, \quad 2x = 4, \quad x = 2$$

Otrzymane rozwiązanie nie wyklucza się z założeniami, zatem poprawną odpowiedzią będzie $x = 2$.

Gdybyśmy jednak nie dostrzegli tego sprytnego sposobu, to nie pozostaje nam nic innego jak wymnożyć lewą i prawą stronę przez $x + 3$, otrzymując:

$$\frac{x^2-9}{x+3} = 1-x \quad \Big/ \cdot (x+3), \quad x^2-9 = (1-x)(x+3), \quad x^2-9 = x+3-x^2-3x, \quad x^2-9 = -x^2-2x+3, \quad 2x^2+2x-12=0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe w postaci ogólnej, zatem możemy skorzystać z niezawodnej delty:

Współczynniki: $a = 2$, $b = 2$, $c = -12$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 4 - (-96) = 4 + 96 = 100, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 10}{2 \cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 10}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Ale to nie koniec, bo musimy jeszcze sprawdzić zgodność z założeniami. Okazuje się, że rozwiązanie $x = -3$ musimy odrzucić, zatem jedynym rozwiązaniem jakie nam zostanie będzie $x = 2$.

Zadanie 26

0-2 pkt

W pudełku znajduje się 10 piłeczek: 3 białe i 7 czarnych. Z pudełka losujemy kolejno dwie piłeczki bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie będą czarne.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{7}{15}$

Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Najpierw losujemy jedną z 10 piłeczek. Losowanie jest bez zwracania, więc drugą piłeczkę losujemy już tylko z puli 9 piłeczek. To oznacza, że wszystkich zdarzeń elementarnych zgodnie z regułą mnożenia będziemy mieć $|\Omega| = 10 \cdot 9 = 90$.

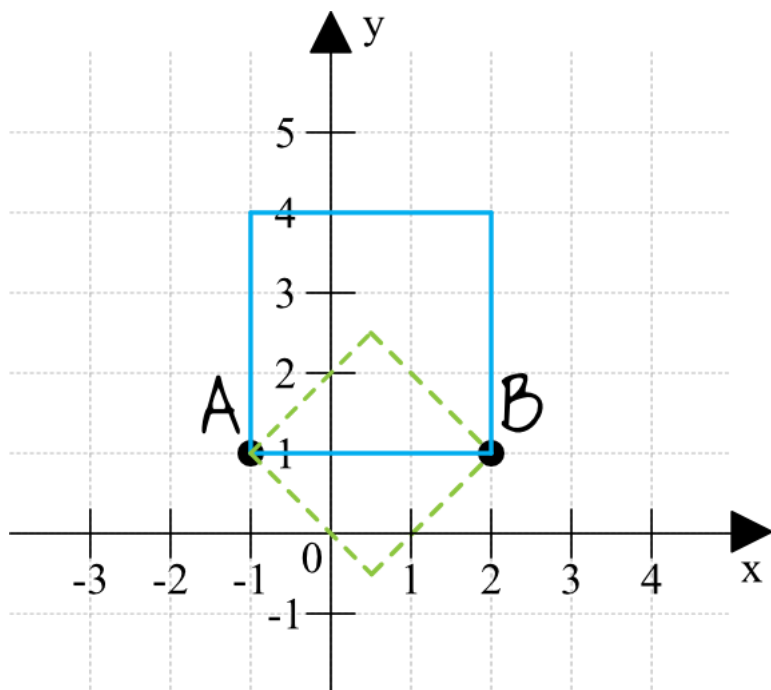
Krok 2. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających.

Sprzyjającym zdarzeniem jest sytuacja w której wylosujemy dwie czarne piłeczki. W pierwszym losowaniu możemy trafić na jedną z siedmiu takich piłeczek. Jak już wylosujemy czarną piłeczkę, to w drugim losowaniu możemy trafić na jedną z sześciu piłeczek. W związku z tym zgodnie z regułą mnożenia, liczba zdarzeń sprzyjających będzie równa $|A| = 7 \cdot 6 = 42$.

Krok 3. Obliczenie prawdopodobieństwa.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

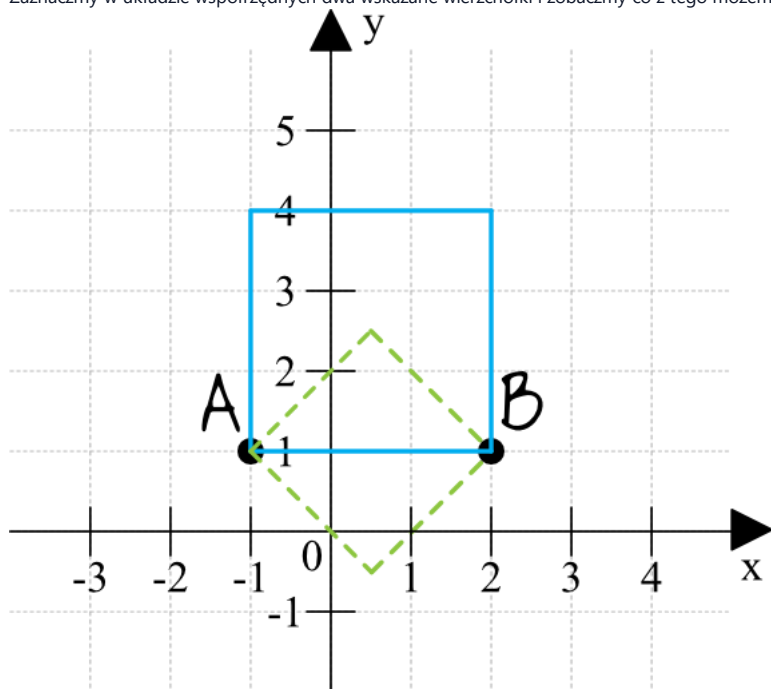
Oblicz pole kwadratu, gdy dane są współrzędne dwóch jego wierzchołków $(-1, 1)$ i $(2, 1)$. Rozpatrz różne przypadki.



Odpowiedź: $P = 9$ lub $\sqrt{P=4,5}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zaznaczmy w układzie współrzędnych dwa wskazane wierzchołki i zobaczmy co z tego możemy otrzymać:



Tu powinniśmy dostrzec, że zaznaczony odcinek może być bokiem kwadratu, ale może też być jego przekątną, co sprawi że otrzymamy w tym zadaniu tak naprawdę dwie różne odpowiedzi.

Krok 2. Obliczenie długości odcinka AB .

Z rysunku jasno wynika, że odcinek AB ma długość 3. Gdybyśmy jednak nie dostrzegli tego (albo gdyby nie było to tak oczywiste do odczytania) to możemy posłużyć się wzorem na długość odcinka w układzie współrzędnych:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, |AB| = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (1 - 1)^2}, |AB| = \sqrt{3^2 + 0^2}, |AB| = \sqrt{9}, |AB| = 3$$

Krok 3. Obliczenie pola kwadratu.

I tu właśnie rozpatrujemy dwie możliwości:

- Pierwsza możliwość - jeżeli odcinek AB jest bokiem kwadratu, to:

$$P = a^2, P = 3^2, P = 9$$

- Druga możliwość - jeżeli odcinek AB jest przekątną kwadratu, to wiedząc że przekątna kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$ możemy zapisać, że:

$$a\sqrt{2} = 3, a = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Moglibyśmy usunąć jeszcze niewymierność z mianownika, otrzymalibyśmy wtedy $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, ale tak prawdę mówiąc, to nie trzeba wykonywać tej operacji, bo obliczając pole powierzchni i tak pozbędziemy się pierwiastka. Skoro więc $a = \frac{3}{\sqrt{2}}$, to pole powierzchni będzie równe:

$$P = a^2, P = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2, P = \frac{9}{2} = 4,5$$

Zadanie 28

0-2 pkt

Uzasadnij, że funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 - 3^9x + 27^7$ nie ma miejsc zerowych.

Odpowiedź: Udowodniono obliczaj

Krok 1. Wyznaczenie miejsc zerowych.

Potraktujmy to zadanie tak, jakby to nie było zadanie dowodowe i spróbujmy wyznaczyć miejsca zerowe naszej funkcji. Aby wyznaczyć miejsca zerowe musimy przyrównać wzór funkcji do zera, zatem musimy rozwiązać następujące równanie:

$$2x^2 - 3^9x + 27^7 = 0$$

Równanie kwadratowe zapisane jest w postaci ogólnej, zatem możemy przystąpić do liczenia delty:

Współczynniki: $a = 2$, $b = 3^9$, $c = 27^7$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3^9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 27^7 = 3^{18} - 8 \cdot 27^7 = 3^{18} - 8 \cdot (3^3)^7 = 3^{18} - 8 \cdot 3^{21}$$

Krok 2. Interpretacja otrzymanej delty.

Wyraźnie widzimy, że 3^{18} jest mniejsze od $8 \cdot 3^{21}$, zatem nasza delta jest ujemna. Moglibyśmy to nawet rozpisać w taki sposób:

$$3^{18} - 8 \cdot 3^{21} = 3^{18} - 8 \cdot 3^{18} \cdot 3^3 = 3^{18} \cdot (1 - 8 \cdot 3^3) = 3^{18} \cdot (-215)$$

Z własności funkcji kwadratowych wiemy, że gdy delta jest ujemna, to taka funkcja nie ma miejsc zerowych i właśnie to trzeba było udowodnić.

Zadanie 29

0-2 pkt

Bartek w czasie wakacji podjął pracę w pizzerii. Pracodawca zaproponował mu następujące warunki płacy: za pierwszy dzień pracy 20zł, a za każdy następny o 3zł więcej niż za poprzedni. Bartek w każdym tygodniu pracuje przez 5 dni. Ile łącznie zarobi po 8 tygodniach pracy?

Odpowiedź: 3140 złotych

Krok 1. Dostrzeżenie ciągu arytmetycznego.

Patrząc się na opisaną sytuację powinniśmy dostrzec, że zarobki Bartka układają się w ciąg arytmetyczny w którym $a_1 = 20$ oraz $r = 3$.

Wiemy też, że ten ciąg jest skończony i będzie miał $5 \cdot 8 = 40$ wyrazów.

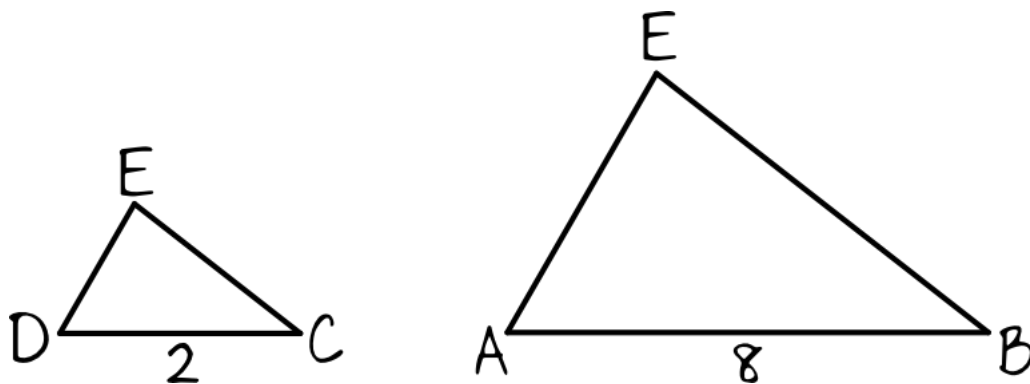
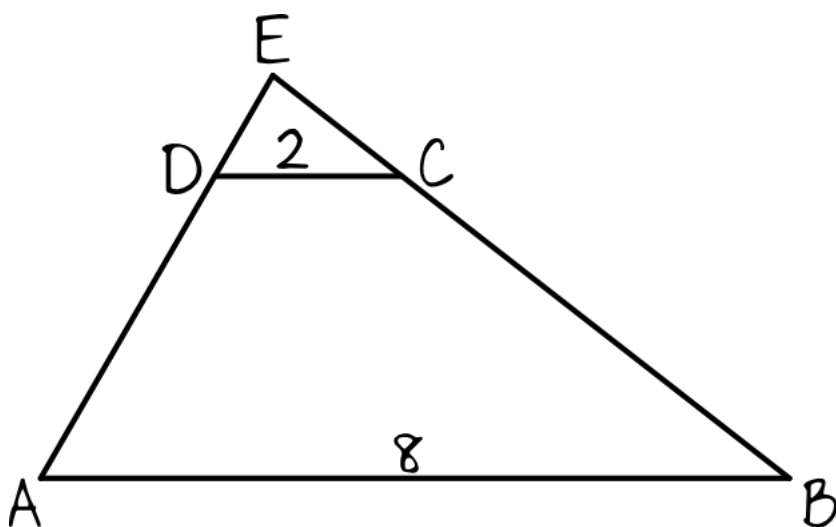
Krok 2. Obliczenie zarobków Bartka.

Korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów i podstawiając znane nam dane wypisane w poprzednim kroku możemy zapisać, że:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n, S_{40} = \frac{2 \cdot 20 + (40-1) \cdot 3}{2} \cdot 40, S_{40} = \frac{40 + 39 \cdot 3}{2} \cdot 40, S_{40} = \frac{40 + 117}{2} \cdot 40, S_{40} = \frac{157}{2} \cdot 40, S_{40} = 157 \cdot 20, S_{40} = 3140$$

To oznacza, że Bartek zarobi 3140 złotych.

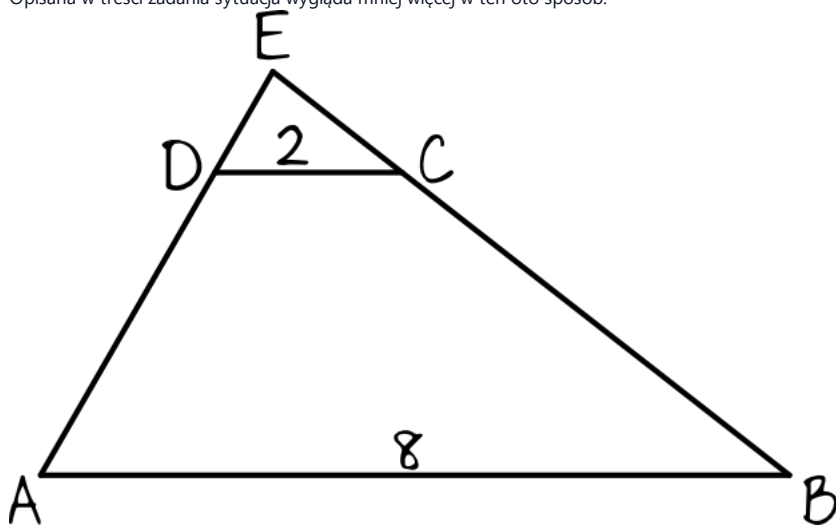
W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przedłużono ramiona AD i BC tak, aby przecięły się w punkcie E . Wiadomo, że $AB = 8\text{cm}$, $CD = 2\text{cm}$, a pole powstałego trójkąta DCE jest równe 2cm^2 . Oblicz pole trapezu $ABCD$.



Odpowiedź: $P_{ABCD} = 30\text{cm}^2$

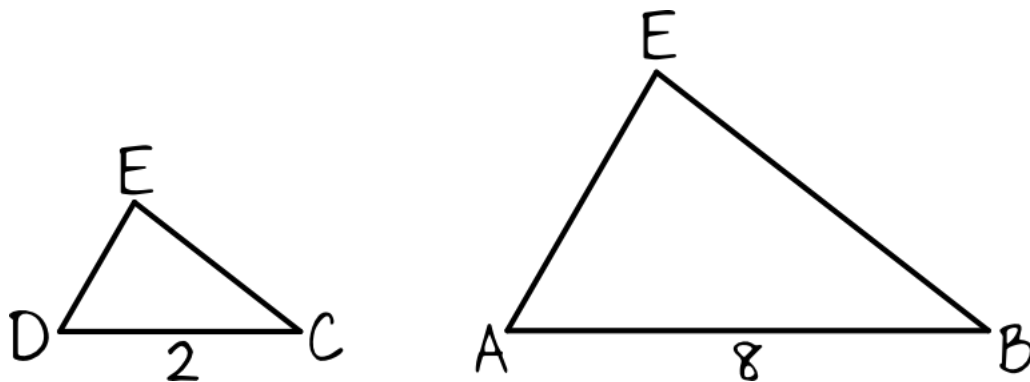
Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Opisana w treści zadania sytuacja wygląda mniej więcej w ten oto sposób:



Krok 2. Dostrzeżenie trójkątów podobnych.

Powinniśmy dostrzec, że na rysunku pojawiły nam się dwa trójkąty podobne: ABE oraz DCE . Ich podobieństwo wynika z cechy kąt-kąt-kąt, bowiem skoro prosta CD jest równoległa do prostej AB , to kąty przy podstawach mają jednakową miarę, a kąt przy wierzchołku E jest wspólny dla obydwu trójkątów. Możemy więc dla ułatwienia wyodrębnić sobie na rysunku te dwa trójkąty:



Krok 3. Obliczenie skali podobieństwa.

Jeżeli przyjmiemy sobie, że mniejszy trójkąt DCE jest trójkątem podstawowym, a trójkąt ABE jest trójkątem podobnym, to skala podobieństwa będzie równa:

$$k = \frac{|AB|}{|DC|}, \quad k = \frac{8}{2}, \quad k = 4$$

Uwaga: Gdybyśmy przyjęli, że trójkąt ABE jest podstawowy, a trójkąt DCE jest podobny, to skala podobieństwa będzie równa $k = \frac{1}{4}$ i jest to jak najbardziej poprawny tok rozwiązywania zadania. Różnica jest tylko taka, że w dalszych krokach trzeba konsekwentnie odnosić się do wybranej przez siebie figury podobnej.

Krok 4. Obliczenie pola powierzchni trójkąta ABE .

Z własności figur podobnych wiemy, że trójkąt podobny w skali k ma pole powierzchni k^2 razy większe od trójkąta podstawowego. Z treści zadania wynika, że $P_{DCE} = 2\text{cm}^2$, zatem:

$$P_{ABE} = k^2 \cdot P_{DCE}, \quad P_{ABE} = 4^2 \cdot 2\text{cm}^2, \quad P_{ABE} = 16 \cdot 2\text{cm}^2, \quad P_{ABE} = 32\text{cm}^2$$

Krok 5. Obliczenie pola powierzchni trapezu $ABCD$.

Pole trapezu jest różnicą między polem powierzchni dużego trójkąta ABE i małego trójkąta DCE , zatem:

$$P_{ABCD} = P_{ABE} - P_{DCE}, \quad P_{ABCD} = 32\text{cm}^2 - 2\text{cm}^2, \quad P_{ABCD} = 30\text{cm}^2$$

Janek, który chodzi ze średnią prędkością $4 \frac{km}{h}$ a biega ze średnią prędkością $6 \frac{km}{h}$ zauważył, że biegnąc na popołudniowy trening koszykówki, przybywa na miejsce o 4 minuty wcześniej niż idąc normalnym krokiem. Jak daleko od domu Janka znajduje się hala treningowa?

Odpowiedź: $s = \frac{4}{5} km$

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do zadania.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

s - odległość z hali do domu (w kilometrach)

t - czas pokonania trasy pieszo (w godzinach)

$t - \frac{1}{15}$ - czas pokonania trasy biegiem (w godzinach)

W przypadku czasu pokonania trasy biegiem odejmujemy wartość $\frac{1}{15}$, bo 4 minuty to $\frac{1}{15}$ godziny. Nie moglibyśmy zapisać, że czas ten wynosi $t - 4$, bo mielibyśmy niezgodność jednostek - czas mielibyśmy w minutach, a prędkość w $\frac{km}{h}$.

Krok 2. Obliczenie czasu pokonania trasy pieszo.

To co jest niezmiennie w przypadku pokonywania trasy pieszo i biegiem to droga jaką należy pokonać. Ze wzoru na prędkość $v = \frac{s}{t}$ wynika, że $s = v \cdot t$. Możemy więc ułożyć dwa następujące równania:

Pieszo: $s = 4 \cdot t$

Bieg: $s = 6 \cdot (t - \frac{1}{15})$

Te dwa równania możemy zapisać w postaci układu równań, dzięki któremu obliczymy czas pokonania trasy pieszo:

$$\begin{cases} s = 4 \cdot t \\ s = 6 \cdot (t - \frac{1}{15}) \end{cases}$$

Układ ten najprościej będzie rozwiązać metodą podstawiania, zatem:

$$4 \cdot t = 6 \cdot (t - \frac{1}{15}), 4t = 6t - \frac{6}{15}, -2t = -\frac{6}{15} \quad / \cdot (-\frac{1}{2}), t = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} [h]$$

Krok 3. Obliczenie odległości z hali do domu.

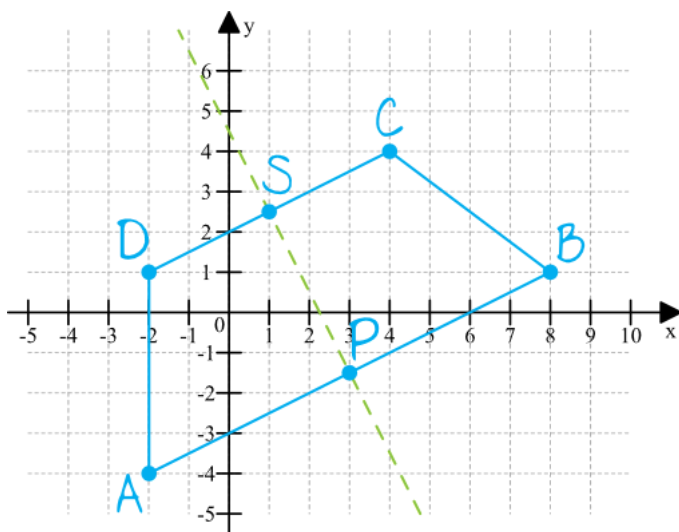
Skoro wyszło nam, że $t = \frac{1}{5}$, to korzystając z równania $s = 4 \cdot t$ możemy bez problemu obliczyć odległość z hali do domu:

$$s = 4 \cdot t, s = 4 \cdot \frac{1}{5}, s = \frac{4}{5} [km]$$

Punkty $A = (-2, -4)$, $B = (8, 1)$, $C = (4, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$ (niebędącego równoległobokiem) o podstawach AB oraz CD .

a) Wyznaczyć równanie prostej, która jest osią symetrii tego trapezu.

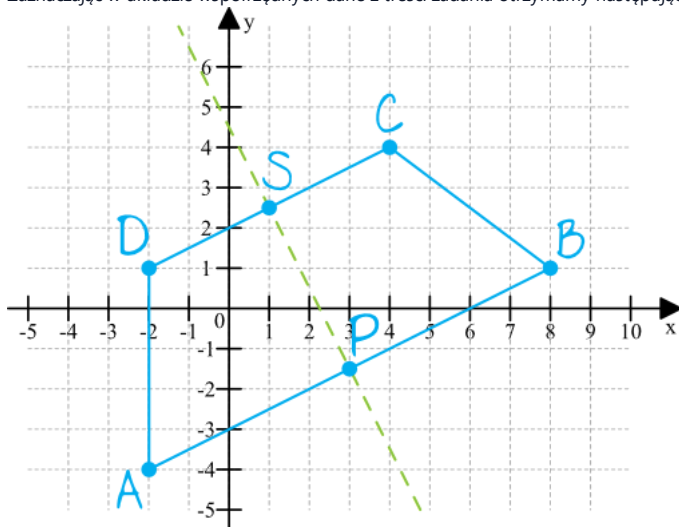
b) Obliczyć współrzędne punktu będącego środkiem podstawy CD .



Odpowiedź: $y = -2x + 4\frac{1}{2}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Zaznaczając w układzie współrzędnych dane z treści zadania otrzymamy następującą sytuację:



Krok 2. Wyznaczenie współrzędnych środka odcinka AB .

Korzystając ze wzoru na środek odcinka i podstawiając odpowiednie współrzędne punktów A oraz B otrzymamy:

$$P = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right), P = \left(\frac{-2 + 8}{2}; \frac{-4 + 1}{2} \right), P = \left(\frac{6}{2}; \frac{-3}{2} \right), P = \left(3; -\frac{3}{2} \right)$$

Krok 3. Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB .

Oś symetrii jest prostą prostopadłą do prostej AB , która przechodzi przez środek tego odcinka. Możemy wyznaczyć równanie prostej AB (np. metodą układu równań), ale nam tak naprawdę wystarczy poznanie współczynnika kierunkowego prostej AB , a ten jesteśmy w stanie policzyć z prostego wzoru:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, a = \frac{1 - (-4)}{8 - (-2)}, a = \frac{1 + 4}{8 + 2}, a = \frac{5}{10}, a = \frac{1}{2}$$

Krok 4. Wyznaczenie równania prostej będącej osią symetrii trapezu.

Wiemy już, że oś symetrii trapezu jest prostą prostopadłą do prostej AB , która przechodzi przez punkt P . Aby dwie proste były względem siebie prostopadłe, to iloczyn ich współczynników kierunkowych a musi być równy -1 . Skoro prosta AB ma współczynnik $a = \frac{1}{2}$, to oś symetrii będzie mieć współczynnik $a = -2$, bo $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

To oznacza, że oś symetrii da się opisać równaniem $y = -2x + b$. Musimy jeszcze wyznaczyć wartość współczynnika b , a dokonamy tego podstawiając do tego równania współrzędne punktu $P = (3; -\frac{3}{2})$, przez które ta prosta przechodzi. Otrzymamy w ten sposób:

$$y = -2x + b, \quad -\frac{3}{2} = -2 \cdot 3 + b, \quad -\frac{3}{2} = -6 + b, \quad b = 4\frac{1}{2}$$

Znając współczynnik b znamy już równanie naszej osi symetrii, a będzie to $y = -2x + 4\frac{1}{2}$.

Krok 5. Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej CD .

Prosta CD jest równoległa do prostej AB , zatem te dwie proste będą miały identyczny współczynnik kierunkowy a . Możemy więc już w tym momencie zapisać, że prosta CD ma współczynnik $a = \frac{1}{2}$.

Krok 6. Wyznaczenie równania prostej CD .

Wiemy już, że prosta CD ma współczynnik $a = \frac{1}{2}$, czyli możemy ją opisać równaniem $y = \frac{1}{2}x + b$. Brakujący współczynnik b poznamy podstawiając współrzędne jednego punktu przez które ta prosta przechodzi, czyli punktu $C = (4, 4)$. Otrzymamy wtedy:

$$y = \frac{1}{2}x + b, \quad 4 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b, \quad 4 = 2 + b, \quad b = 2$$

W związku z tym prosta CD wyraża się równaniem $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Krok 7. Wyznaczenie współrzędnych punktu S .

Punkt S jest środkiem odcinka CD i jednocześnie jest miejscem przecięcia się osi symetrii oraz prostej CD . Znamy równania jednej i drugiej prostej, zatem możemy ułożyć układ równań którego rozwiązaniem będą właśnie współrzędne punktu S :

$$\begin{cases} y = -2x + 4\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases},$$

Korzystając z metody podstawiania otrzymamy:

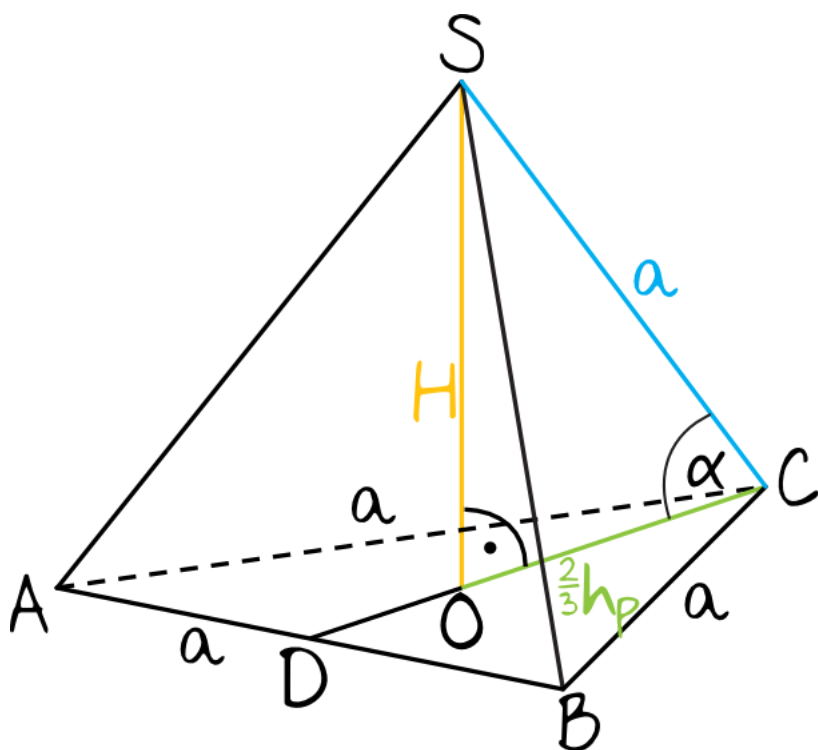
$$-2x + 4\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + 2, \quad -2\frac{1}{2}x = -2\frac{1}{2}, \quad x = 1$$

Znamy już współrzędną x-sową, więc jeszcze musimy obliczyć współrzędną y-ową, a poznamy ją podstawiając $x = 1$ do dowolnego równania (np. pierwszego):

$$y = -2x + 4\frac{1}{2}, \quad y = -2 \cdot 1 + 4\frac{1}{2}, \quad y = -2 + 4\frac{1}{2}, \quad y = 2\frac{1}{2}$$

To oznacza, że $S = (1; 2\frac{1}{2})$.

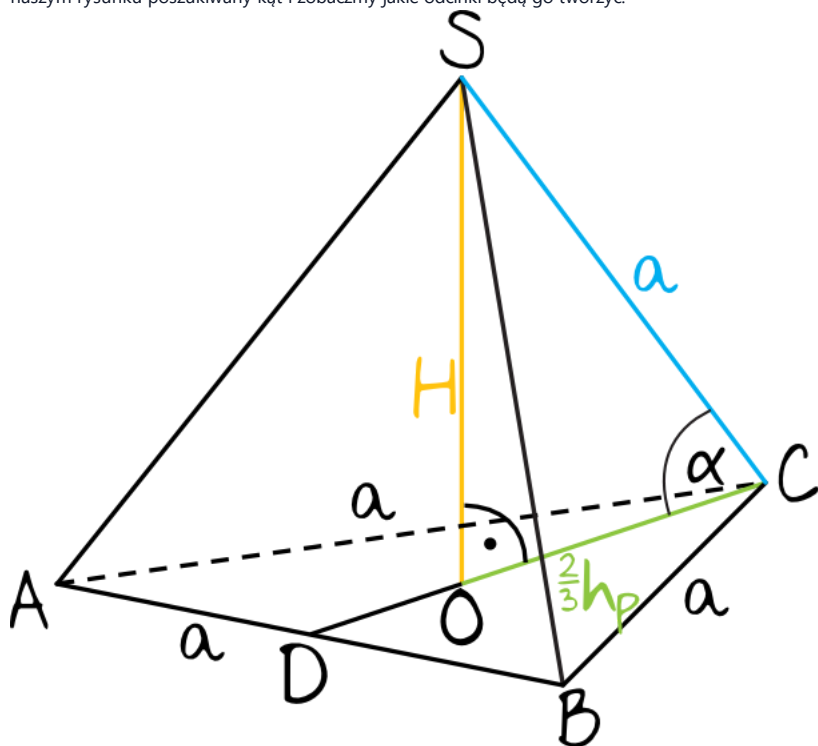
W czworościanie foremnym, którego krawędź ma długość a , kąt α jest kątem nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy. Oblicz wartość wyrażenia $\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos^2 \alpha$.



Odpowiedź: $\frac{1}{3}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Czworościan foremny to bryła mająca wszystkie krawędzie jednakowej długości. Tym samym każda ściana tej bryły jest trójkątem równobocznym. Zaznaczmy na naszym rysunku poszukiwany kąt i zobaczmy jakie odcinki będą go tworzyć:



Krok 2. Obliczenie długości odcinka OC .

Spójrzmy na rysunek pomocniczy. Wynika z niego, że odcinek OC będący dolną przyprostokątną trójkąta prostokątnego ma długość $\frac{2}{3}h_p$. Skoro w podstawie mamy trójkąt równoboczny o boku a , to:

$$|OC| = \frac{2}{3} \cdot h_p, \quad |OC| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad |OC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Krok 3. Obliczenie wartości cosinusa.

Cosinus opisuje nam stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie oraz przeciwprostokątnej, zatem:

$$\cos \alpha = \frac{|OC|}{|CS|}, \cos \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a}, \cos \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} : a, \cos \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{a}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Krok 4. Uproszczenie wyrażenia.

Na początek musimy uprościć nasze wyrażenie, korzystając ze wzorów redukcyjnych oraz z jedynki trygonometrycznej. Jeżeli chodzi o wzory redukcyjne to wykorzystamy tutaj zależność $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Po lewej stronie równania mamy $\cos^2(90^\circ - \alpha)$, zatem korzystając ze wspomnianego wzoru redukcyjnego możemy zapisać, że to będzie równe $\sin^2 \alpha$. Całość wyrażenia będzie więc wyglądać następująco:

$$\cos^2(90^\circ - \alpha) - \cos 2\alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

Z jedynki trygonometrycznej wiemy, że $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, czyli że $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$. Skoro tak, to podstawiając to do wyznaczonej przed chwilą postaci otrzymamy:

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha$$

Krok 5. Obliczenie wartości całego wyrażenia.

Skoro $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ to wartość naszego wyrażenia będzie równa:

$$1 - 2\cos^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = , = 1 - 2 \cdot \frac{3}{9} = 1 - \frac{6}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$