

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Próbny egzamin ósmoklasisty z matematyki - Operon 2019

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl.
Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D ($\frac{10}{7}$)	1
2	A ($x^2 + 5x - 10$)	1
3	A (-6)	1
5	C (II i III)	1
6	B (126), C (mniej)	1
8	D (2)	1
9	B (Prędkość jazdy Agaty jest większa ok. 33% od prędkości Kamila)	1
10	C ($4\sqrt{6}cm$)	1
12	B (65%)	1
13	B (5^3)	1
14	B ($24^\circ C$)	1
15	B (25cm), D (1 : 800)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Jakim ułamkiem liczby 3, 5 jest liczba 5?

Odpowiedź: D ($\frac{10}{7}$)

Aby odpowiedzieć sobie na to pytanie, musimy dowiedzieć się ile to jest $\frac{5}{3,5}$. Zazwyczaj w podobnych zadaniach przeliczamy ten ułamek na procenty, ale tutaj wszystkie odpowiedzi mamy zapisane w postaci ułamków zwykłych, więc do nich musimy się teraz dostosować. W tym celu musimy wykonać operację rozszerzania ułamka i zapisać, że:

$$\frac{5}{3,5} = \frac{10}{7}$$

Zadanie 2

0-1 pkt

Dane jest wyrażenie $(2x - 3)(x + 3) - (x - 1)^2$. Po doprowadzeniu do najprostszej postaci danego wyrażenia otrzymamy:

Odpowiedź: A ($x^2 + 5x - 10$)

Wymnażając przez siebie dwa nawiasy i korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ możemy zapisać, że:

$$(2x - 3)(x + 3) - (x - 1)^2, 2x^2 + 6x - 3x - 9 - (x^2 - 2x + 1), 2x^2 + 3x - 9 - (x^2 - 2x + 1), 2x^2 + 3x - 9 - x^2 + 2x - 1, x^2 + 5x - 10$$

Zadanie 3

0-1 pkt

Dane jest równanie $\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{3}$. Jaka liczba jest rozwiązaniem tego równania?

Odpowiedź: A (-6)

Rozwiązanie tego równania najprościej będzie zacząć od pozbycia się ułamków. W tym celu musimy pomnożyć obydwie strony równania przez 6 (mnożymy przez 6, bo jest to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 2 oraz 3, czyli liczb które znalazły się w mianownikach ułamków).

Podczas wymnażania musimy pamiętać o tym, że skoro po prawej stronie mamy dodawanie, to jedynkę także trzeba będzie pomnożyć przez 6. W związku z tym całość obliczeń będzie wyglądać następująco:

$$\frac{x}{2} + 1 = \frac{x}{3} \quad / \cdot 6, \quad \frac{6x}{2} + 6 = \frac{6x}{3}, \quad 3x + 6 = 2x, \quad x + 6 = 0, \quad x = -6$$

Czy liczby 216 i 621 są wielokrotnościami tej samej nieparzystej liczby dwucyfrowej? **A)** sumy cyfr w obu liczbach są równe

B) jedna z liczb jest parzysta, a druga jest nieparzysta

C) dzielnikiem każdej z danych liczb jest liczba 3^3

Odpowiedź: Tak ponieważ opcja

Do zadania można podejść na kilka sposobów.

I sposób - korzystając z cech podzielności liczb.

Powinniśmy zauważyć, że obydwie liczby są podzielne przez 9 (bo suma ich cyfr jest równa 9). Dostrzegając to, moglibyśmy zobaczyć jaki jest wynik tego dzielenia przez 9, a będzie to:

$$216 : 9 = 24, \quad 621 : 9 = 69$$

Widzimy, że powstałe liczby są jeszcze podzielne przez 3 (bo suma ich cyfr jest podzielna przez 3). Te dwa spostrzeżenia powinny nas doprowadzić do tego, że zarówno 216 jak i 621 będą w takim razie podzielne przez $9 \cdot 3 = 27$. To oznacza, że faktycznie te dwie liczby są wielokrotnościami nieparzystej liczby dwucyfrowej (czyli wielokrotnościami liczby 27), którą można zapisać jako 3^3 .

II sposób - rozkładając liczby na czynniki pierwsze.

Równie dobrze do rozwiązania tego zadania moglibyśmy dojść wykonując rozkład liczb na czynniki pierwsze:

216		3
72		3
24		3
8		2
4		2
2		2
1		

621		3
207		3
69		3
23		23
1		

Patrząc się na trzy pierwsze czynniki każdej z liczb możemy stwierdzić, że jedna i druga liczba jest podzielna przez $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$.

W tabeli podano trzy wyrażenia.

I	$(-4)^3 + (-10)^2$
II	$(-54) : 9 + 7 \cdot (-6)$
III	$(-4) \cdot ((-2)^3)^2$

Które wyrażenia z tabeli mają wartość ujemną?

Odpowiedź: C (II i III)

Sprawdźmy wartości każdego z podanych wyrażeń:

$$(-4)^3 + (-10)^2 = -64 + 100 = 36, \quad (-54) : 9 + 7 \cdot (-6) = -6 + (-42) = -48, \quad (-4) \cdot ((-2)^3)^2 = -4 \cdot (-2)^6 = -4 \cdot 64 = -256$$

To oznacza, że II i III wyrażenie jest ujemne.

Zadanie 6

0–1 pkt

W pewnej szkole co szósty uczeń klasy ósmej deklaruje, że będzie kontynuował edukację w technikum. W tej szkole jest 21 takich uczniów.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Do danej szkoły uczęszcza $\boxed{A}$ / $\boxed{B}$ uczniów klas ósmych. Uczniowie, którzy chcą się uczyć w technikum, stanowią $\boxed{C}$ / $\boxed{D}$ niż 20% wszystkich ósmoklasistów tej szkoły.

Odpowiedź: B (126), C (mniej)

Krok 1. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Skoro co szósty uczeń chce iść do technikum i takich osób jest łącznie 21, to uczniów w tej szkole jest:

$$6 \cdot 21 = 126$$

Ewentualnie moglibyśmy to zapisać w postaci równania, gdzie niewiadomą x jest liczba uczniów szkoły:

$$\frac{1}{6}x = 21, \quad x = 126$$

Krok 2. Rozwiązanie drugiej części zadania.

Uczniowie, którzy chcą pójść do technikum stanowią będą $\frac{1}{6}$ wszystkich uczniów. Musimy więc zamienić ten ułamek na procenty:

$$\frac{1}{6} \cdot 100\% = \frac{100}{6}\% = 16\frac{2}{3}\%$$

To oznacza, że takich uczniów jest mniej niż 20%.

Zadanie 7

0–1 pkt

Blokada rowerowa ma zapięcie z szyfrowanym zamkiem z trzema zapadkami. Na każdej z zapadek można ustawić cyfry od 0 do 9. Szyfr otwierający zamek tej blokady tworzą trzy cyfry, które są kolejnymi liczbami parzystymi.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F - jeśli jest fałszywe. Prawdopodobieństwo, że pierwszą cyfrą szyfru jest cyfra 0, wynosi $\frac{1}{9}$.

Istnieją trzy możliwości wyboru szyfru dla zamka w takiej blokadzie.

Prawdopodobieństwo, że pierwszą cyfrą szyfru jest cyfra 0, wynosi $\frac{1}{9}$.

Prawda

Fałsz

Istnieją trzy możliwości wyboru szyfru dla zamka w takiej blokadzie.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Sprawdźmy jakie kombinacje spełniają warunku otwarcia zamka. Muszą to być trzy kolejne liczby parzyste, zatem mogą to być następujące kombinacje cyfr:

$$(0, 2, 4); (2, 4, 6); (4, 6, 8)$$

Cyfra 0 pojawia się tylko w jednym z tych trzech przypadków, zatem prawdopodobieństwo, iż pierwszą cyfrą szyfru jest 0, wynosi $\frac{1}{3}$. Zdanie jest więc fałszem.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Zgodnie z tym co zapisaliśmy w poprzednim kroku, są trzy możliwości zakodowania zamka, zatem zdanie jest prawdą.

Wartość wyrażenia $3a - a^2$ dla $a = \sqrt{5}$ w przybliżeniu do całości jest równa:

Odpowiedź: D (2)

Podstawiając do wyrażenia $3a - a^2$ wartość $a = \sqrt{5}$ otrzymamy:

$$3 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5}^2 = 3\sqrt{5} - 5$$

Korzystając z przybliżenia $\sqrt{5} \approx 2,24$ otrzymamy:

$$3\sqrt{5} - 5 \approx 3 \cdot 2,24 - 5 \approx 6,72 - 5 \approx 1,72 \approx 2$$

Z
8

Zadanie 9

0-1 pkt

Jeśli Kamil jedzie rowerem ze średnią prędkością $18 \frac{km}{h}$, a Agata na hulajnodze elektrycznej pokonuje każde $400m$ w ciągu minuty, to znaczy, że:

Odpowiedź: B (Prędkość jazdy Agaty jest większa ok. 33% od prędkości Kamila)

Krok 1. Obliczenie prędkości jazdy Agaty.

Agata pokonuje $400m$ w ciągu minuty. Korzystając ze wzoru $v = \frac{s}{t}$ moglibyśmy błyskawicznie obliczyć prędkość jej jazdy, ale... dobrze byłoby już na wstępie ujednolicić jednostki. Skoro prędkość Kamila podana jest w $\frac{km}{h}$, to do obliczeń prędkości Agaty najlepiej będzie przyjąć $s = 0,4km$ oraz $t = \frac{1}{60}h$. Teraz śmiało możemy przejść do rozwiązywania:

$$v = \frac{s}{t}, v = \frac{0,4}{\frac{1}{60}}, v = 0,4 : \frac{1}{60}, v = 0,4 \cdot 60, v = 24[\frac{km}{h}]$$

Krok 2. Wybór prawidłowej odpowiedzi.

Sprawdźmy zatem poprawność każdej z odpowiedzi:

Odp. A. To nieprawda. Prędkość półtora raza mniejsza od prędkości Agaty to $24 \frac{km}{h} : 1,5 = 16 \frac{km}{h}$, a Kamil jedzie z prędkością $18 \frac{km}{h}$.

Odp. B. To prawda. Agata jedzie szybciej o $24 \frac{km}{h} - 18 \frac{km}{h} = 6 \frac{km}{h}$. To oznacza, że jej prędkość jest większa o $\frac{6 \frac{km}{h}}{18 \frac{km}{h}} = \frac{1}{3} \approx 33\%$.

Odp. C. To nieprawda, bowiem poruszają się oni z różną prędkością.

Odp. D. To nieprawda, gdyż Agata jedzie z prędkością o $6 \frac{km}{h}$ większą (a nie mniejszą) niż Kamil.

Zadanie 10

0-1 pkt

Dany jest kwadrat o polu powierzchni $48cm^2$. Ile wynosi długość przekątnej tego kwadratu?

Odpowiedź: C ($4\sqrt{6}cm$)

Krok 1. Obliczenie długości boku kwadratu.

Korzystając ze wzoru na pole kwadratu możemy zapisać, że:

$$P = a^2, a^2 = 48, a = \sqrt{48} \quad \vee \quad a = -\sqrt{48}$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $a = \sqrt{48}$. Z tego pierwiastka możemy jeszcze wyłączyć czynnik, zatem:

$$a = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}[cm]$$

Krok 2. Obliczenie długości przekątnej kwadratu.

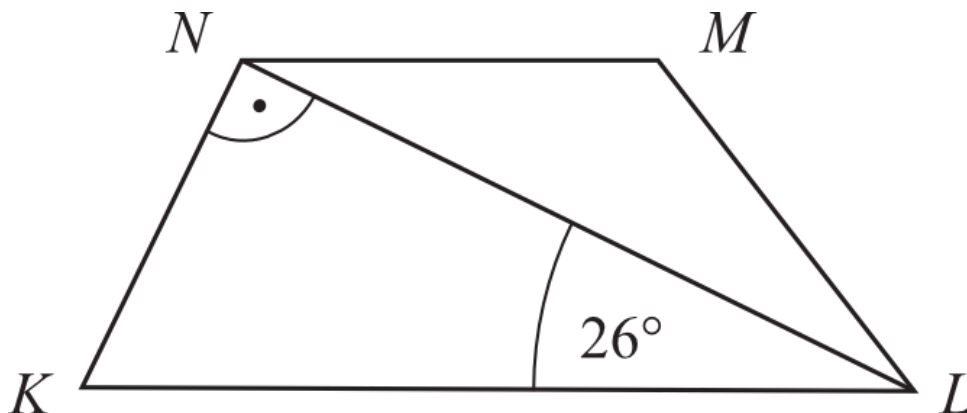
Kwadrat o boku a ma przekątną o długości $d = a\sqrt{2}$. Skoro nasz kwadrat ma bok o długości $4\sqrt{3}$, to jego przekątna będzie równa:

$$d = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}, d = 4\sqrt{6}$$

Zadanie 11

0-1 pkt

Dany jest trapez $KLMN$, w którym boki LM i MN są przystające, a przekątna LN jest prostopadła do boku KN .



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F - jeśli jest fałszywe. Kąt ostry NKL ma miarę 64° . Trapez $KLMN$ jest trapezem równoramiennym.

Kąt ostry NKL ma miarę 64° .

Prawda

Fałsz

Trapez $KLMN$ jest trapezem równoramiennym.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Trójkąt KLN jest trójkątem prostokątnym w którym znamy już miary dwóch kątów: 26° oraz 90° . Musimy ustalić teraz jaka jest miara trzeciego kąta, czyli kąta NKL , zatem:

$$|\angle NKL| = 180^\circ - 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$$

To oznacza, że zdanie jest prawdą.

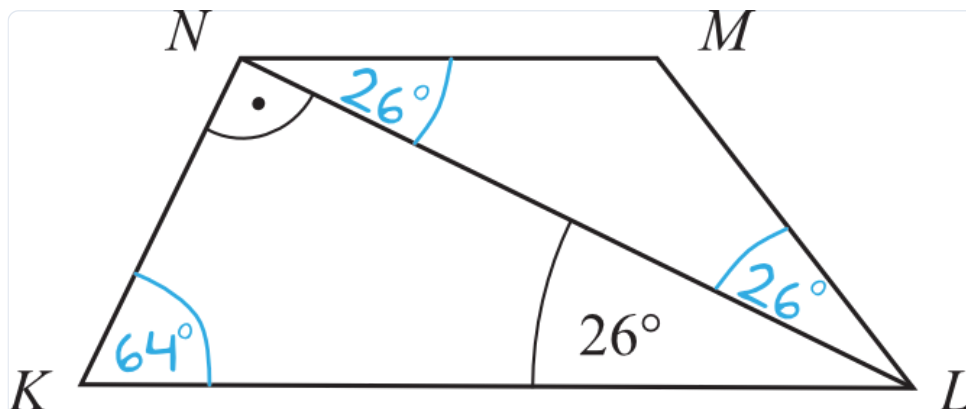
Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Korzystając z własności kątów naprzemianległych powinniśmy dostrzec, że kąty KLN oraz LMN będą miały jednakową miarę, czyli kąt LMN będzie miał także 26° .

Na kąt KNM składają się dwa kąty: KNL oraz LMN . Skoro kąt KNL ma miarę 90° , to kąt LMN ma miarę:

$$|\angle LNM| = 116^\circ - 90^\circ = 26^\circ$$

Z treści zadania wynika, że trójkąt NLM jest równoramienny (bo boki LM oraz MN są sobie równe). Trójkąty równoramienne mają jednakową miarę kąta przy swojej podstawie. To by oznaczało, że w takim razie kąt NLM ma także miarę 26° .

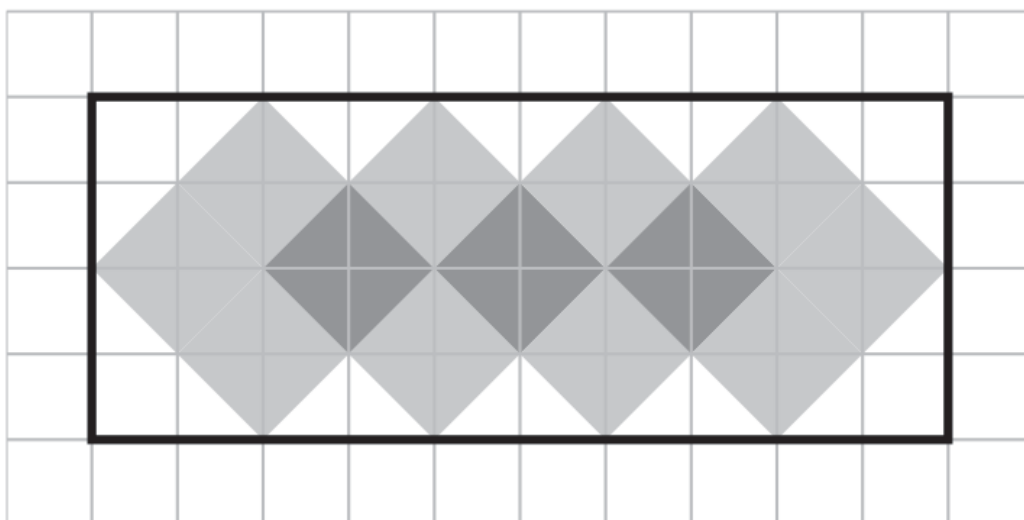


Skoro tak, to kąt KLM , na który składają się kąty KLN oraz NLM będzie miał miarę:

$$|\angle KLM| = 26^\circ + 26^\circ = 52^\circ$$

Wiemy już zatem, że kąt NKL ma miarę 64° , natomiast KLM ma miarę 52° . W trapezach równoramiennych kąty przy podstawie muszą mieć jednakową miarę, a tu widzimy że tak się nie stało. To oznacza, że ten trapez nie jest równoramienny.

Prostokąt przedstawiony na rysunku został częściowo pomalowany.



Jaki procent prostokąta został pomalowany?

Odpowiedź: B (65%)

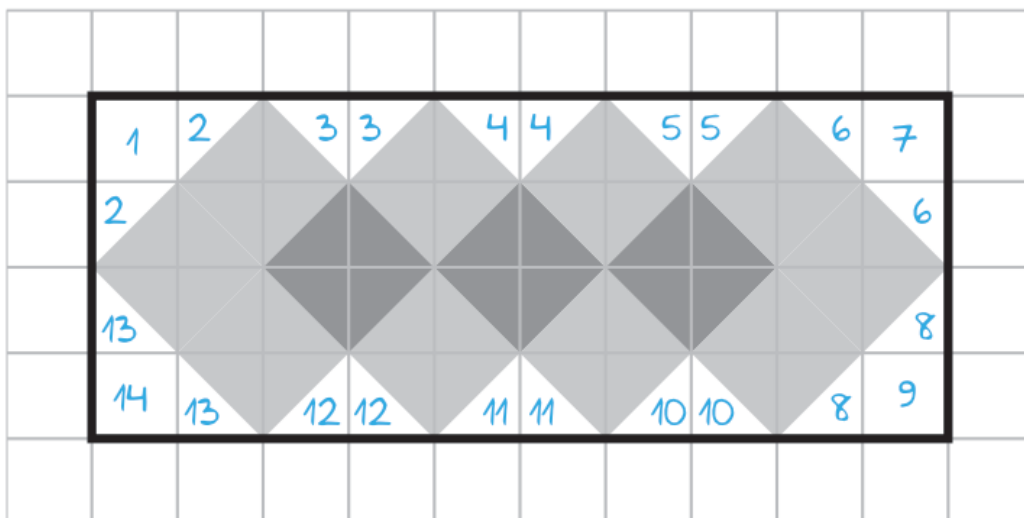
Krok 1. Obliczenie liczby wszystkich kwadracików.

Nasz prostokąt ma wymiary 10×4 , zatem wszystkich kwadracików mamy:

$$10 \cdot 4 = 40$$

Krok 2. Obliczenie liczby kwadracików niezamalowanych i zamalowanych.

Podążmy do tego zadania nieco sprytniej. Widzimy wyraźnie, że pomalowanych kawałków jest znacznie więcej niż niepomalowanych, więc policzmy ile kawałków jest niezamalowanych. Zwróć uwagę na to, że dwie połówki dają tak naprawdę jeden cały kwadracik:



Widzimy wyraźnie, że niezamalowanych kwadracików jest 14, a to oznacza, że zamalowanych kwadracików mamy:

$$40 - 14 = 26$$

Krok 3. Obliczenie jaki procent prostokąta został zamalowany.

Zamalowano 26 z 40 kwadracików, zatem zamalowano:

$$\frac{26}{40} = \frac{13}{20} = \frac{65}{100} = 65\%$$

Zadanie 13

0-1 pkt

Kolejne liczby wstawiono do poniższej tabeli w pewien uporządkowany sposób. W przedstawionej tabeli brakuje jednej liczby.

1	8	9	64	?	216
---	---	---	----	---	-----

Jakiej liczby brakuje w tabeli?

Odpowiedź: B (5^3)

W tym zadaniu niezłą podpowiedzią jest sam sposób zapisania odpowiedzi *ABCD*. Widzimy, że są one zapisane w formie potęg, co powinno nam zasugerować, że wszystkie te liczby mając coś wspólnego z potęgowaniem. Po analizie tabelki powinniśmy dostrzec, że:

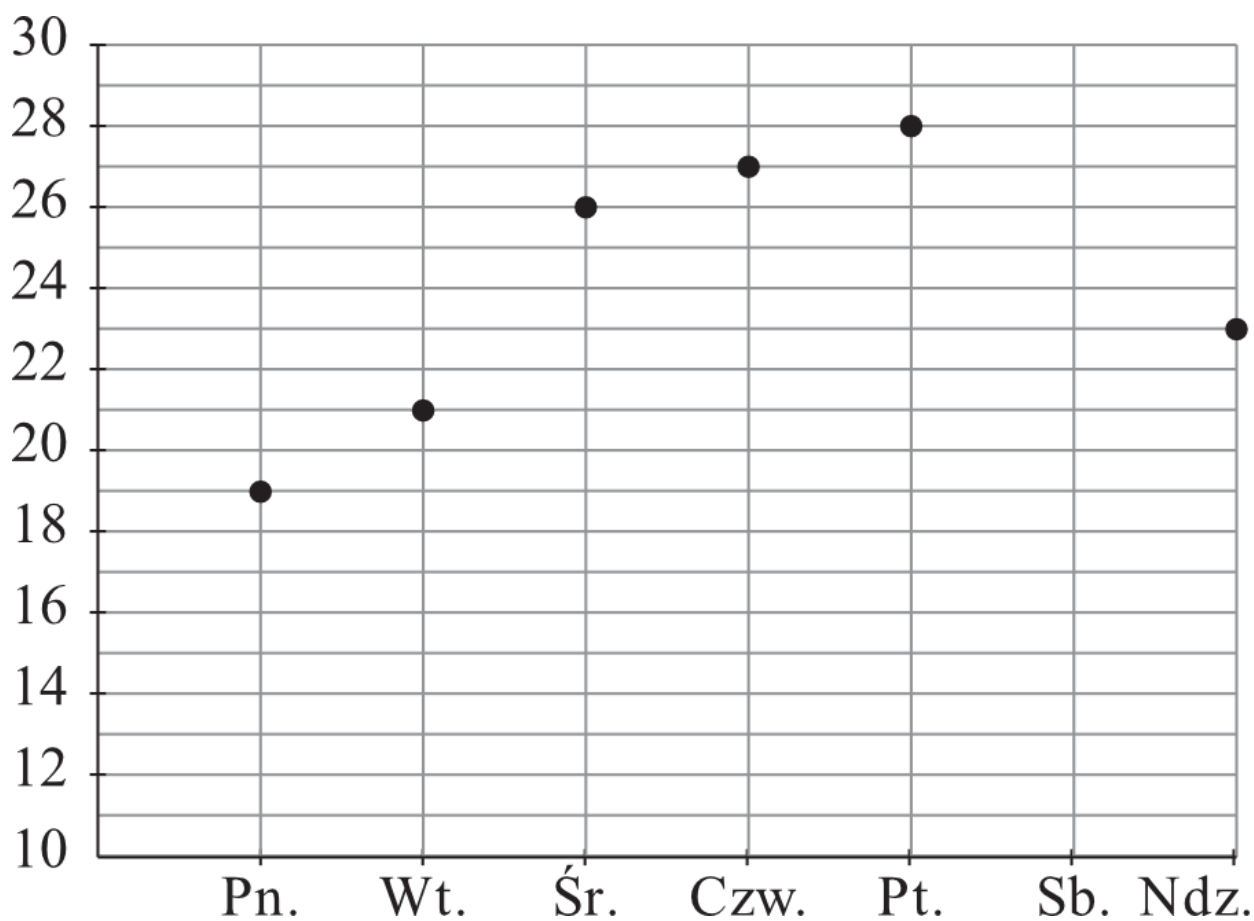
$$1 = 1^2, 8 = 2^3, 9 = 3^2, 64 = 4^3, \dots, 216 = 6^3$$

Widzimy, że zasada dopisywania kolejnych liczb jest następująca: podstawa potęgi zwiększa się o 1, a wykładniki potęg to naprzemiennie 2 oraz 3. To oznacza poszukiwaną przez nas liczbą będzie 5^2 .

Zadanie 14

0-1 pkt

Wykres przedstawia temperatury w stopniach Celsjusza, jakie odnotowano w wybranym tygodniu lipca. Temperatura w sobotę wynosiła tyle, ile średnia temperatura z pozostałych dni tygodnia. Jaką temperaturę odnotowano w danym tygodniu w sobotę?



Odpowiedź: B (24 °C)

Wiemy, że temperatura w sobotę jest średnią arytmetyczną temperatur z pozostałych sześciu dni, zatem:

$$\text{średnia} = \frac{19 + 21 + 26 + 27 + 28 + 23}{6}, \text{średnia} = \frac{144}{6}, \text{średnia} = 24$$

To oznacza, że w sobotę odnotowano temperaturę 24 °C.

Zadanie 15

0-1 pkt

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Na mapie, która pomniejsza 600 tys. razy, rzeczywista odległość 150 km będzie odcinkiem o długości $\boxed{A}$ / $\boxed{B}$. Na planie wykonanym w skali $\boxed{C}$ / $\boxed{D}$ budynek o rzeczywistej długości 28 m to odcinek o długości $3,5\text{ cm}$.

Odpowiedź: B (25 cm), D ($1 : 800$)

Krok 1. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Na samym początku musimy ujednolicić jednostki, bowiem jedna miara podana jest w km , a druga w cm .

Odległość 150 km to $150\,000\text{ m}$, czyli $15\,000\,000\text{ cm}$.

Skoro mapa pomniejsza rzeczywistą odległość 600 tysięcy razy, to odcinek ten na mapie będzie miał długość:

$$150\,000\,000\text{ cm} : 6\,000\,000 = 25\text{ cm}$$

Krok 2. Rozwiązanie drugiej części zadania.

Tutaj także musimy ujednolicić jednostki, bowiem jedna miara podana jest w m , a druga w cm .

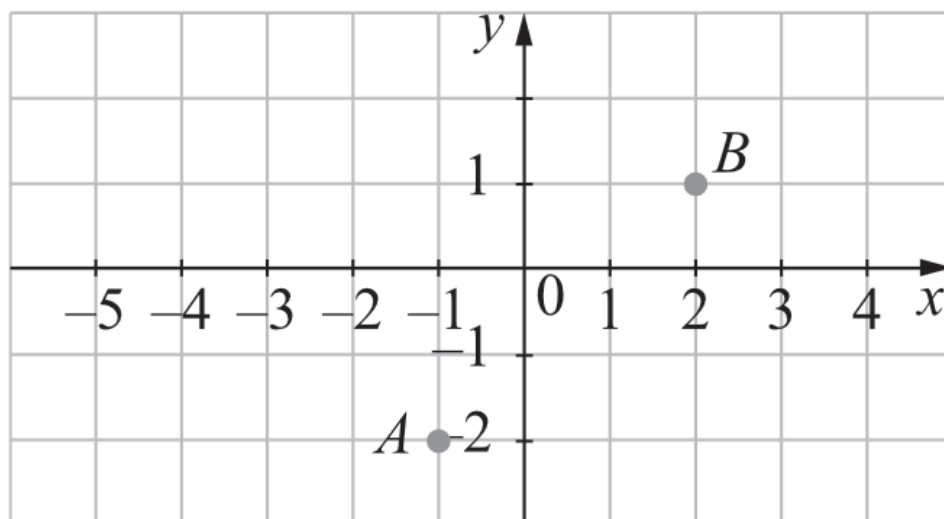
Długość 28 m to 2800 cm .

Skoro długość 2800 cm jest reprezentowana na mapie przez odcinek o długości $3,5\text{ cm}$, to znaczy że mapa pomniejsza nam obiekt $2800 : 3,5 = 800$ razy. Z tego też względu skala mapy będzie równa $1 : 800$.

Zadanie 16

0-2 pkt

W prostokątnym układzie współrzędnych dane są dwa punkty: $A = (-1; -2)$ i $B = (2; 1)$.



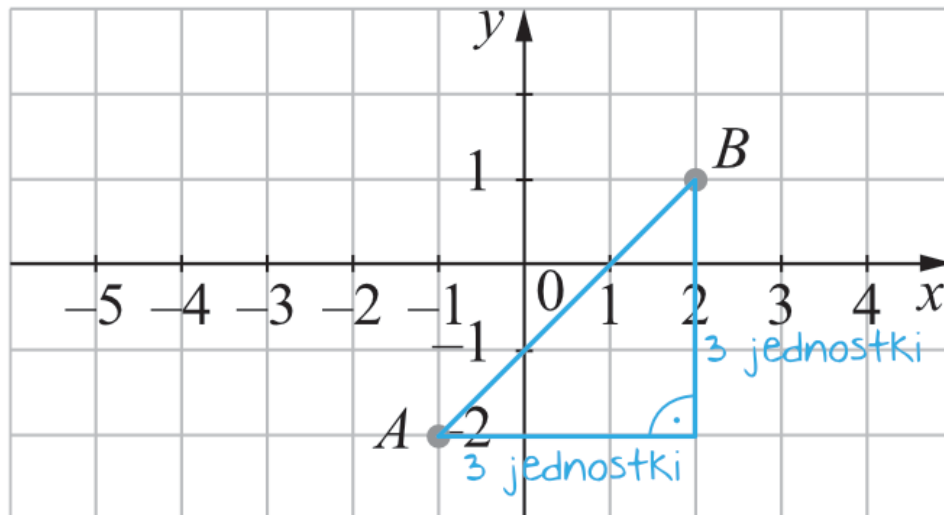
Czy punkt B leży w kole o środku w punkcie A i promieniu $r = 4$? Odpowiedź uzasadnij.

Odpowiedź: Punkt B nie leży

Krok 1. Obliczenie długości odcinka AB .

Aby dowiedzieć się, czy punkt B należy do koła, to musimy sprawdzić jaka jest odległość od punktu A do punktu B . Jeżeli ta odległość jest mniejsza lub równa promieniowi koła, to punkt B będzie leżeć w kole. Jeżeli ta odległość jest większa od długości promienia, to punkt B będzie poza kołem.

Aby obliczyć długość odcinka AB możemy skorzystać z Twierdzenia Pitagorasa:



Nasz odcinek AB jest przeciwprostokątną trójkąta o przyprostokątnych równych 3, zatem:

$$3^2 + 3^2 = |AB|^2, \quad 9 + 9 = |AB|^2, \quad |AB|^2 = 18, \quad |AB| = \sqrt{18} \quad \vee \quad |AB| = -\sqrt{18}$$

Ujemną długość oczywiście odrzucamy, bo długość odcinka jest na pewno dodatnia, zatem wiemy już, że $AB = \sqrt{18}$. Na upartego moglibyśmy jeszcze wyłączyć czynnik przez znak pierwiastka i zapisać, że $AB = 3\sqrt{2}$, ale nie jest to konieczne, bo postać $\sqrt{18}$ będzie dla nas za chwilę bardzo pożyteczna.

Krok 2. Ustalenie, czy punkt B leży w kole.

Promień naszego koła to $r = 4$. Odległość od punktu A do punktu B wynosi $\sqrt{18}$. Powinniśmy dostrzec, że $\sqrt{18}$ jest na pewno większy od 4. Skąd to wiemy? Po prostu $\sqrt{16} = 4$, więc $\sqrt{18}$ musi być większy od 4. To oznacza, że punkt B znajduje się poza kołem.

Zadanie 17

0-2 pkt

W prostokącie o obwodzie 98cm stosunek długości sąsiednich boków wynosi $2 : 5$. Oblicz pole tego prostokąta.

Odpowiedź: $P = 490\text{cm}^2$

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie równania.

Skoro stosunek długości sąsiednich boków wynosi $2 : 5$, to możemy wprowadzić do zadania następujące oznaczenia:

$2x$ - długość krótszego boku

$5x$ - długość dłuższego boku

Obwód prostokąta wyliczamy dodając przez siebie długości wszystkich boków, zatem:

$$2 \cdot 2x + 2 \cdot 5x = 98$$

Krok 2. Obliczenie długości boków prostokąta.

Powstało nam proste równanie liniowe, które musimy teraz rozwiązać:

$$2 \cdot 2x + 2 \cdot 5x = 98, 4x + 10x = 98, 14x = 98, x = 7[\text{cm}]$$

Teraz musimy spojrzeć na nasze oznaczenia i obliczyć długości poszczególnych boków. Krótszy bok ma długość $2x$, czyli będzie miał on $2 \cdot 7\text{cm} = 14\text{cm}$. Dłuższy bok ma długość $5x$, czyli będzie to $5 \cdot 7\text{cm} = 35\text{cm}$.

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni prostokąta.

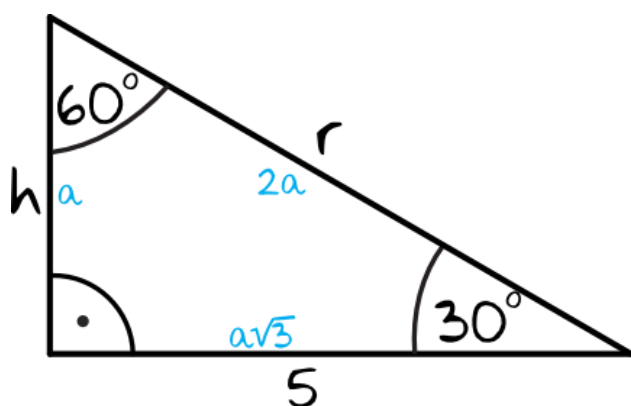
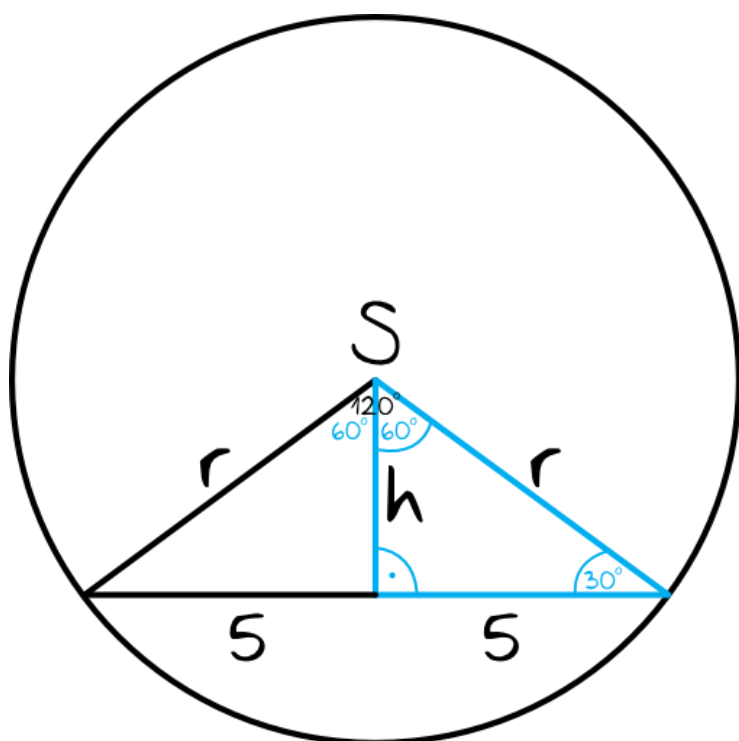
Na sam koniec musimy obliczyć jeszcze pole powierzchni prostokąta, zatem:

$$P = ab, P = 14\text{cm} \cdot 35\text{cm}, P = 490\text{cm}^2$$

Zadanie 18

0-2 pkt

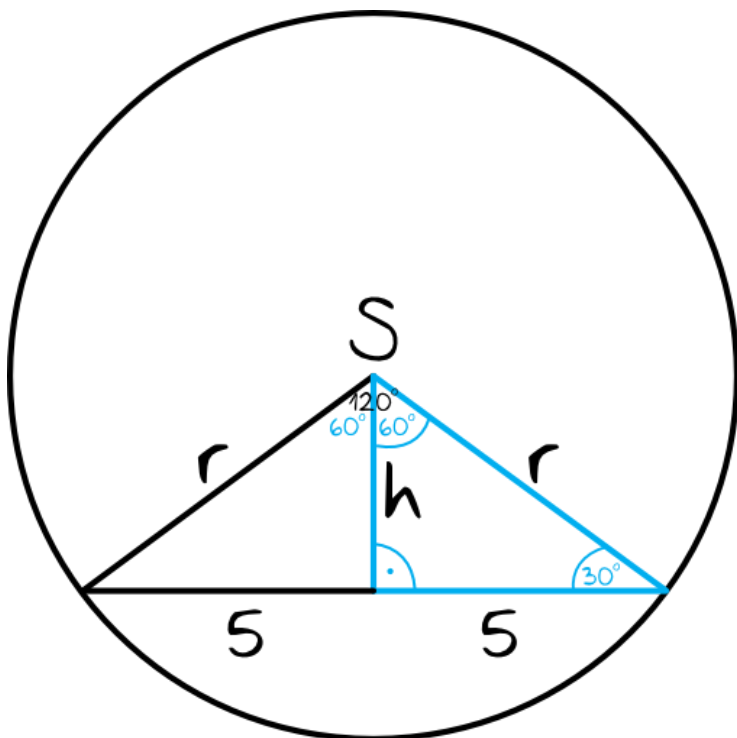
W kole narysowano cięciwę o długości 10cm , a jej końce połączono odcinkami ze środkiem koła, tak że powstał trójkąt, którego jeden z kątów ma miarę 120° . Oblicz, jaką długość ma promień tego koła.



Odpowiedź: $r = \frac{10}{3}\sqrt{3}$

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

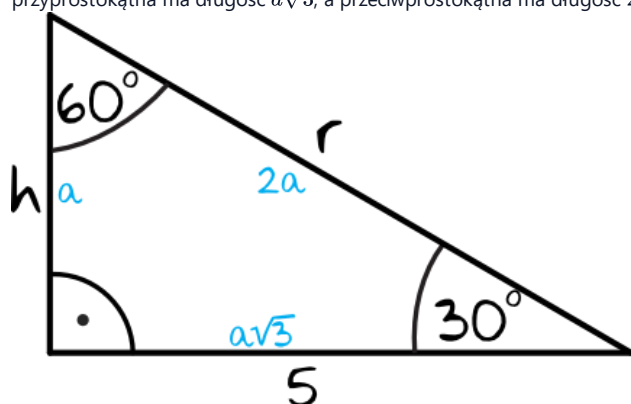
Zanim zaczniemy liczyć, to narysujmy sobie szkic tej całej sytuacji, zaznaczając przy okazji kluczowy kąt 120° :



Zwróćmy uwagę na to, że powstał nam trójkąt prostokątny o kątach 30° , 60° , 90° . To właśnie on będzie kluczem do rozwiązania tego zadania. Musimy też zauważyć, że dolna przyprostokątna ma długość 5, bowiem w trójkątach równoramiennych wysokość dzieli nam podstawę na dwie równe części, a podstawa była równa 10.

Krok 2. Obliczenie promienia koła.

Korzystając z własności trójkątów o kątach 30° , 60° , 90° wiemy, że jeżeli przyprostokątna leżąca przy kącie 60° ma długość a , to druga przyprostokątna ma długość $a\sqrt{3}$, a przeciwprostokątna ma długość $2a$.



Zgodnie z naszymi oznaczeniami widzimy, że dolna przyprostokątna ma długość 5, zatem:

$$a\sqrt{3} = 5, \quad a = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Nas interesuje długość przeciwprostokątnej, czyli długość $2a$. W związku z tym:

$$r = 2a = 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Otrzymana odpowiedź jest już poprawna, ale powinniśmy jeszcze usunąć niewymierność z mianownika, a zrobimy to mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{3}$, zatem:

$$r = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Łączny koszt zakupu dwóch książek o różnych tytułach wynosił 82zł. Do biblioteki zakupiono po 5 sztuk każdej z nich w promocyjnej cenie o 20% niższej. Koszt zakupu pierwszego tytułu wyniósł 152zł. Oblicz cenę każdej z książek przed promocją.

Odpowiedź: 38zł oraz 44zł

Krok 1. Obliczenie ceny promocyjnej pierwszej książki.

Najpierw obliczmy promocyjną cenę pierwszej książki. Wiemy, że pięć książek zakupionych po promocyjnej cenie kosztuje 152zł. Skoro tak, to taka pojedyncza książka kosztuje:

$$152zł : 5 = 30,40zł$$

Krok 2. Obliczenie ceny pierwszej książki (przed promocją).

Wiemy, że pierwszy tytuł w promocji kosztuje 30,40zł. Promocyjna cena jest o 20% niższa od początkowej. To oznacza, że cena promocyjna stanowi 80% ceny początkowej. Możemy więc ułożyć prostą proporcję:

Skoro 80% ceny początkowej jest równe 30,40zł

To 100% ceny początkowej jest równe 38zł

Więc 100% ceny początkowej jest równe 38zł

Ewentualnie moglibyśmy przyjąć, że x to początkowa cena pierwszej książki i zapisać, że:

$$0,8x = 30,40zł, \quad x = 38zł$$

Krok 3. Obliczenie ceny drugiej książki (przed promocją).

Wiemy już, że pierwsza książka kosztuje 38zł. Koszt zakupu pierwszej i drugiej książki wynosi 82zł, zatem druga książka kosztuje:

$$82zł - 38zł = 44zł$$

Firma remontowa otrzymała zlecenie na położenie nowych podłóg w dwóch mieszkaniach o łącznej powierzchni $159m^2$. W pierwszym mieszkaniu wyłożono już $24m^2$ nowej podłogi, co stanowi $\frac{3}{8}$ powierzchni podłogi w tym mieszkaniu. W drugim natomiast pozostała jeszcze do położenia tylko podłoga w pokoju o wymiarach $3,8m \times 5m$. Czy firma położyła już podłogę na $\frac{2}{3}$ powierzchni w obu mieszkaniach? Odpowiedź uzasadnij.

Odpowiedź: Nie, ponieważ

Krok 1. Obliczenie pola powierzchni podłogi w pierwszym mieszkaniu.

Wiemy, że w pierwszym mieszkaniu wyłożono już $24m^2$ nowej podłogi i że jest to $\frac{3}{8}$ powierzchni podłogi całego mieszkania. Jeżeli więc oznaczymy sobie jako x pole powierzchni podłogi pierwszego mieszkania, to otrzymamy następujące równanie:

$$\frac{3}{8}x = 24m^2, \quad \frac{1}{8}x = 8m^2, \quad x = 64m^2$$

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni podłogi w drugim mieszkaniu.

Skoro suma podłóg w pierwszym i drugim mieszkaniu jest równa $159m^2$, a nasze pierwsze mieszkanie ma $64m^2$ podłóg, to drugie mieszkanie będzie mieć:

$$159m^2 - 64m^2 = 95m^2$$

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni podłogi, która jest już wyłożona w pierwszym i drugim mieszkaniu.

Z treści zadania wiemy, że w pierwszym mieszkaniu wyłożono $24m^2$ nowej podłogi. Policzmy teraz ile podłogi wyłożono w drugim mieszkaniu.

Wiemy, że w drugim mieszkaniu firmie remontowej zostało do wyłożenia $3,8m \times 5m$, czyli zostało im do wyłożenia:

$$3,8m \cdot 5m = 19m^2$$

Skoro całe mieszkanie ma $95m^2$, a do wyłożenia zostało im $19m^2$, to wyłożono już:

$$95m^2 - 19m^2 = 76m^2$$

To oznacza, że w pierwszym i drugim mieszkaniu wyłożono łącznie:

$$24m^2 + 76m^2 = 100m^2$$

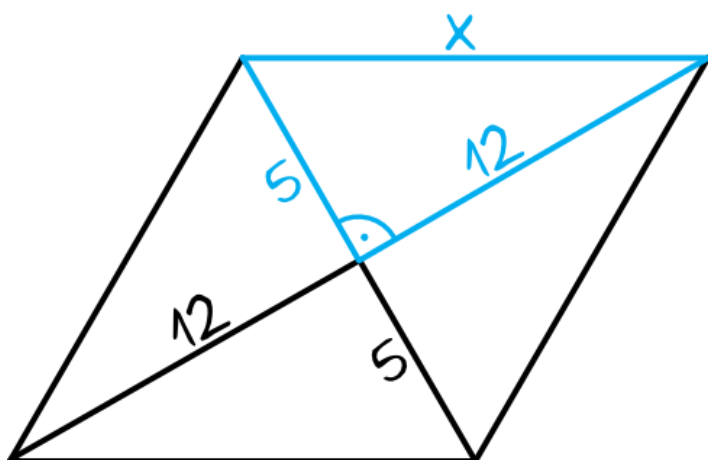
Krok 4. Zakończenie zadania.

Pytają się nas, czy firma zdołała już wyłożyć podłogę na $\frac{2}{3}$ powierzchni w obu mieszkaniach. Wiemy, że firma wyłożyła $100m^2$ ze $159m^2$, czyli wyłożyła $\frac{100}{159}$ metrów kwadratowych podłogi. Ułamek $\frac{100}{159}$ jest na pewno mniejszy od $\frac{2}{3}$, bowiem $\frac{2}{3} = \frac{100}{150}$ lub jak kto woli $\frac{2}{3} = \frac{106}{159}$. To oznacza, że firma wyłożyła mniej niż $\frac{2}{3}$ podłóg.

Zadanie 21

0-3 pkt

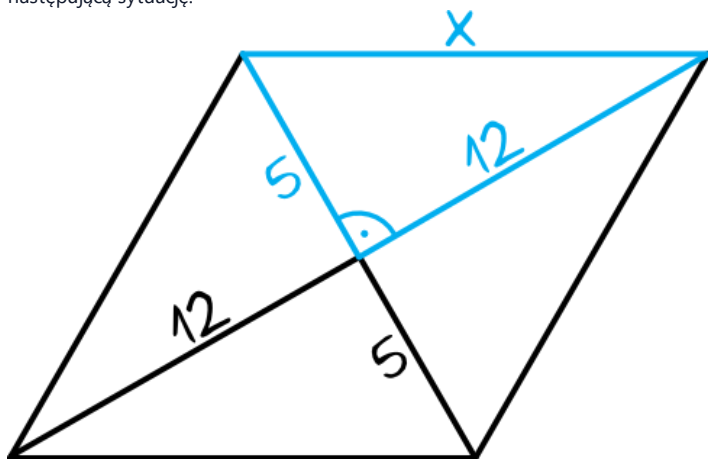
W ostrosłupie prostym podstawą jest romb o przekątnych 10cm i 24cm . Wysokość ostrosłupa jest dwa razy dłuższa niż bok rombu. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Odpowiedź: $V = 1040\text{cm}^3$

Krok 1. Obliczenie długości boku rombu.

Z własności rombów wiemy, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym w połowie swojej długości. To oznacza, że otrzymamy następującą sytuację:



Powstały nam na rysunku trójkąty prostokątne z których możemy obliczyć długość boku rombu. Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$5^2 + 12^2 = x^2, \quad 25 + 144 = x^2, \quad x^2 = 169, \quad x = 13 \quad \vee \quad x = -13$$

Bok rombu jest na pewno liczbą dodatnią, zatem zostaje nam $x = 13$.

Krok 2. Obliczenie wysokości ostrosłupa.

Z treści zadania wynika, że ostrosłup ma wysokość dwa razy dłuższą od boku rombu. Skoro więc bok rombu miał długość 13cm , to wysokość będzie równa:

$$H = 2 \cdot 13\text{cm}, \quad H = 26\text{cm}$$

Krok 3. Obliczenie pola podstawy ostrosłupa.

Znamy długości przekątnych rombu, zatem możemy bez przeszkód obliczyć jego pole powierzchni, które jednocześnie będzie polem podstawy ostrosłupa:

$$P_p = \frac{1}{2}ef, \quad P_p = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24, \quad P_p = 5 \cdot 24, \quad P_p = 120[\text{cm}^2]$$

Krok 4. Obliczenie objętości ostrosłupa.

Wiemy już, że $P_p = 120\text{cm}^2$ oraz że $H = 26\text{cm}$, zatem objętość ostrosłupa będzie równa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H, \quad V = \frac{1}{3} \cdot 120\text{cm}^2 \cdot 26\text{cm}, \quad V = 40\text{cm}^2 \cdot 26\text{cm}, \quad V = 1040\text{cm}^3$$