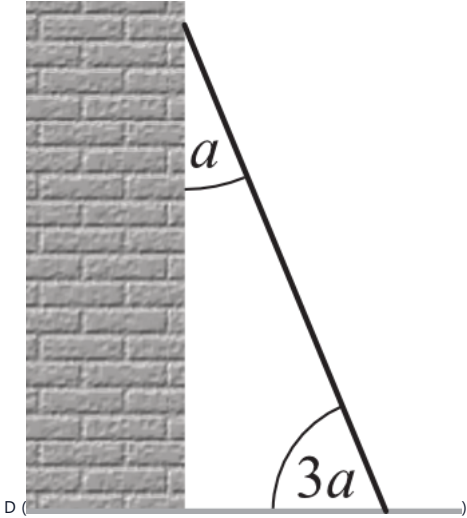


Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Próbny egzamin ósmoklasisty z matematyki - Operon 2018

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	B (42km), C (11.05)	1
3	A (I ćwiartce)	1
4	C (3, 4)	1
6	B ($3\frac{1}{3} \cdot 0, 3kg$)	1
8	B (nie mniejsze niż -4)	1
10	B ($a = 27$), D (8)	1
11		1
12	C ($27 \cdot 10^{-6}m^3$)	1
13	D (równoramienny rozwartokątny)	1
14	B ($-2(a + 1) + 5b$), D ($-6a + 3b + 4$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Bartek wyruszył rowerem na trasę o długości 70km o godzinie 8.20. Trasę tę pokonał, jadąc ze średnią prędkością $28\frac{\text{km}}{\text{h}}$. W trakcie jazdy, o godzinie 9.50, Bartek zrobił sobie piętnastominutową przerwę.

Uzupełnij zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A lub B oraz spośród C lub D.

Bartek zrobił sobie przerwę po przejechaniu / . Bartek dojechał do końca trasy o godzinie / .

Odpowiedź: B (42km), C (11.05)

Krok 1. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Skoro Bartek wystartował o godzinie 8:20 i zrobił przerwę o godzinie 9:50, to znaczy że jechał półtorej godziny, czyli $t = 1,5\text{h}$. Z treści zadania wiemy też, że średnia prędkość jazdy Bartka wyniosła $v = 28\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Musimy policzyć jak długą trasę pokonał Bartek, a zrobimy to korzystając z przekształconego wzoru na prędkość:

$$v = \frac{s}{t}, s = v \cdot t, s = 28\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,5\text{h}, s = 42\text{km}$$

Krok 2. Rozwiązanie drugiej części zadania.

Policzmy ile czasu zajęłoby pokonanie trasy o długości $s = 70\text{km}$ jadąc ze średnią prędkością $v = 28\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ponownie skorzystamy tutaj z przekształcenia naszego wzoru na prędkość:

$$v = \frac{s}{t}, vt = s, t = \frac{s}{v}, t = \frac{70\text{km}}{28\frac{\text{km}}{\text{h}}}, t = 2,5\text{h}$$

Skoro więc Bartek wyruszył na trasę o godzinie 8:20, to na końcu tej trasy powinien pojawić się o godzinie 10:50. Musimy jeszcze jednak pamiętać o tym, że Bartek zrobił sobie dodatkowo 15 minut przerwy, zatem ostatecznie na mecie był o godzinie 11:05.

Zadanie 2

0-1 pkt

Na rysunku przedstawiono kartkę z kalendarza na rok 2019.

Lipiec						
Pn.	Wt.	Śr.	Czw.	Pt.	Sob.	Ndz.
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Oceń prawdziwość podanych zdań. Druga niedziela czerwca 2019r. przypadnie w dziewiątym dniu miesiąca.
Pierwszy dzień września w 2019r. wypadnie w niedzielę.

Druga niedziela czerwca 2019r. przypadnie w dziewiątym dniu miesiąca.

Prawda

Fałsz

Pierwszy dzień września w 2019r. wypadnie w niedzielę.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

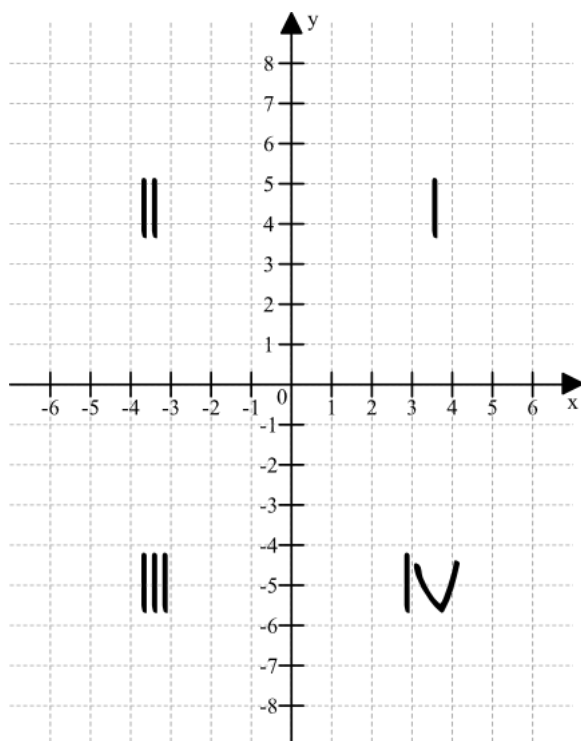
Wiemy, że czerwiec ma 30 dni i z przedstawionej kartki kalendarza wynika, że skoro 1 lipca jest w poniedziałek, to 30 czerwca będzie w niedzielę. Skoro tak, to cofając się ze niedziele wypadną także 23 czerwca, 16 czerwca, 9 czerwca oraz 2 czerwca. Pierwsze zdanie jest więc prawdą, bo pierwszą niedzielą miesiąca jest ta, która wypada 2 c niedzielą będzie ta wypadająca 9 czerwca.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Skoro 31 lipca wypada w środę, to 1 sierpnia wypada w czwartek. Analogicznie 8 sierpnia, 15 sierpnia, 22 sierpnia oraz 29 sierpnia wypadną także w czwartek. W związku to będzie piątek, 31 sierpnia to będzie sobota, czyli 1 września to będzie niedziela.

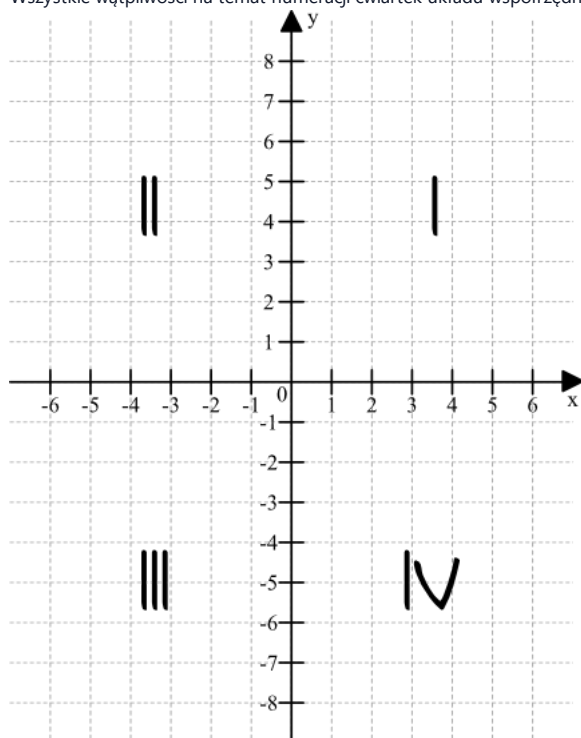
Zadanie 3

W prostokątnym układzie współrzędnych punkt $K = (-\sqrt{3} + 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ leży w:



Odpowiedź: A (I ćwiartce)

Zadanie z pozoru wydaje się dość niejasne, dlatego opiszmy sobie co się tutaj tak naprawdę dzieje. Mamy podany punkt K , którego współrzędna xkowa jest równa natomiast współrzędna ykowa przyjmuje postać $y = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$. Naszym zadaniem jest tak naprawdę zaokrąglenie tych wartości, aby móc zaznaczyć sobie ten punkt w układzie współrzędnych. Precyzyjniej rzecz ujmując interesuje nas przede wszystkim ustalenie znaku współrzędnej xkowej oraz ykowej tego punktu K . Jeżeli przykładowo współrzędna xkowa oraz ykowa byłyby ujemne, to niezależnie od tego czy nasz punkt K miałby współrzędne $K = (-1; -2)$ czy też $K = (-100; -200)$, to leżałby on w II. Wszystkie wątpliwości na temat numeracji ćwiartek układu współrzędnych wyjaśni poniższy rysunek:



Krok 1. Ustalenie znaku współrzędnej xkowej.

Musimy sprawdzić, czy wartość $-\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ jest dodatnia, czy też ujemna. Stosując przybliżenia $\sqrt{3} \approx 1,73$ oraz $\sqrt{2} \approx 1,41$ możemy zapisać, że:

$$-\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \approx -1,73 + 2 \cdot 1,41 \approx -1,73 + 2,82 \approx 1,09$$

To oznacza, że współrzędna x-owa jest z pewnością dodatnia (jest nieco większa od 1).

Krok 2. Ustalenie znaku współrzędnej y-owej.

Korzystając z tych samych przybliżeń co w poprzednim kroku możemy zapisać, że:

$$3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \approx 3 \cdot 1,41 - 2 \cdot 1,73 \approx 4,23 - 3,46 \approx 0,77$$

To oznacza, że współrzędna y-owa jest także dodatnia (jest nieco mniejsza od 1).

Krok 3. Ustalenie ćwiartki układu współrzędnych.

Skoro obydwa współrzędne są dodatnie, to znaczy że punkt K leży w I ćwiartce.

Zadanie 4

Dane jest równanie: $-4(3 - 2x) = -2,05 + 5x + (-0,5)^2$. Rozwiązaniem danego równania jest liczba:

Odpowiedź: C (3, 4)

Zaczynając od wymnożenia liczby -4 przez wartości w nawiasie oraz od wykonania potęgowania możemy zapisać, że:

$$-4(3 - 2x) = -2,05 + 5x + (-0,5)^2, \quad -12 + 8x = -2,05 + 5x + 0,25 \quad / -5x, \quad -12 + 3x = -2,05 + 0,25, \quad -12 + 3x = -1,8 \quad / +12, \quad 3x$$

Zadanie 5

Oceń prawdziwość podanych zdań. 60% liczby 4,5 wynosi tyle samo, co $\frac{2}{3}$ liczby 4,05.

Liczba 2,7 jest o 10% większa od liczby $2\frac{2}{3}$.

60% liczby 4,5 wynosi tyle samo, co $\frac{2}{3}$ liczby 4,05.

Prawda

Fałsz

Liczba 2,7 jest o 10% większa od liczby $2\frac{2}{3}$.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

60% liczby 4,5 możemy zapisać jako $0,6 \cdot 4,5$ natomiast $\frac{2}{3}$ liczby 4,05 możemy zapisać jako $\frac{2}{3} \cdot 4,05$. Obliczając wartości tych wyrażeń otrzymamy:

$$0,6 \cdot 4,5 = 2,7, \quad \frac{2}{3} \cdot 4,05 = \frac{2}{3} \cdot \frac{405}{100} = \frac{810}{300} = 2,7$$

Otrzymaliśmy jednakowe wyniki, zatem zdanie jest prawdą.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Liczba o 10% większa od liczby $2\frac{2}{3}$ to $1,1 \cdot 2\frac{2}{3}$, czyli:

$$1,1 \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{11}{10} \cdot \frac{8}{3} = \frac{88}{30} = 2\frac{28}{30} \approx 2,9$$

Zdanie jest więc nieprawdą.

więcej truskawek, bo $\frac{6}{3} = 2$. Dla 9 osób potrzebowalibyśmy trzy razy więcej truskawek, bo $\frac{9}{3} = 3$. Analogicznie więc dla 10 osób potrzebujemy $3\frac{1}{3}$ razy więcej truskawek, bo $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$. To oznacza, że prawidłowym wyrażeniem będzie $3\frac{1}{3} \cdot 30dag$, czyli $3\frac{1}{3} \cdot 0,3kg$.

Zadanie 6

Według przepisu wykonania koktajlu owocowego dla przygotować 3 truskawek. Ilość jaką zgodnie z przepisem trzeba przygotować wykonania koktajlu dla 10 osób, można o pomoc wyrażenia

Odpowiedź: 1)

Do przygotowania 3 osób potrzebujemy 3 truskawek. Dla 10 osób potrzebujemy 10 truskawek.

Zadanie 7

Gosia kupiła dwie cebulki kwiatów. Obie zasadzi w jednej doniczce. Ma do dyspozycji trzy doniczki ceramiczne i dwie plastikowe.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Gosia może zasadzić kwiaty w doniczkach na 6 różnych sposobów.

Prawdopodobieństwo, że obie cebulki Gosia zasadzi w doniczce ceramicznej, wynosi $\frac{1}{5}$.

Gosia może zasadzić kwiaty w doniczkach na 6 różnych sposobów.

Prawda

Fałsz

Prawdopodobieństwo, że obie cebulki Gosia zasadzi w doniczce ceramicznej, wynosi $\frac{1}{5}$.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

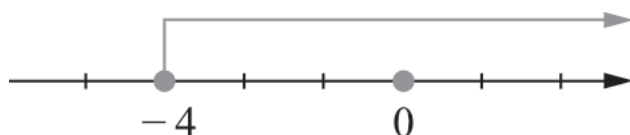
Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Skoro obie cebulki mają znaleźć się w jednej doniczce, a mamy pięć różnych doniczek (trzy ceramiczne oraz dwie plastikowe), to Gosia może zasadzić kwiaty na 5 różnych sposobów (zasadzi kwiaty albo w pierwszej, albo w drugiej, albo w trzeciej, albo w czwartej, albo w piątej doniczce). Zdanie jest więc fałszem.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Gosia może zasadzić kwiaty w jednej z pięciu doniczek. Z tych pięciu doniczek aż trzy są ceramiczne. Prawdopodobieństwo, że Gosia zasadzi kwiaty w ceramicznej, więc równe $\frac{3}{5}$, czyli zdanie było fałszem.

Na osi liczbowej zaznaczono zbiór liczb spełniających pewien warunek.



Zaznaczony zbiór to wszystkie liczby:

Odpowiedź: B (nie mniejsze niż -4)

Chcąc poprawnie odczytać zaznaczony zbiór musimy na samym wstępie zwrócić uwagę na kropki znajdujące się na osi liczbowej, szczególnie na tę którą znalazł początek zbioru przy liczbie -4 , bo to ona jest tutaj kluczowa. Ta kropka jest zamalowana, zatem liczba -4 należy do tego zbioru. Oprócz niej do zbioru należy większa od -4 , bo widzimy wyraźnie że strzałka z zaznaczonym zbiorem skierowana jest w prawą stronę.

Z naszych rozważań wynika, że do zbioru należą wszystkie liczby większe lub równe -4 . Z tego też względu prawidłową odpowiedzią nie może być "większe niż" by znaczyło że liczba -4 do tego zbioru nie należy, a ustaliliśmy już, że zamalowana kropka oznacza, że ta liczba w tym zbiorze także się znajduje. Jedyną pasującą odpowiedzią jest odpowiedź "nie mniejsze niż -4 ".

Zadanie 9

Czy romb jest równoległobokiem? Wybierz odpowiedź T (tak) lub N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C. **A)** wszystkie boki rombu są przystające

B) romb ma dwie pary boków równoległych

C) przekątne rombu są prostopadłe

Odpowiedź: Tak ponieważ opcja

Równoległobok nie ma boków przystających (czyli jednakowej długości), ani też przekątne równoległoboku nie przecinają się pod kątem prostym. Te cechy nie wskazują, że romb jest równoległobokiem. Romb jest równoległobokiem, bo ma dwie pary boków równoległych i to jest poprawna odpowiedź.

Zadanie 10

Uzupełnij zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A lub B oraz spośród C lub D.

Wyrażenie $\sqrt[3]{a^2}$ przyjmuje wartość 9 dla $\boxed{A}$ / $\boxed{B}$. Wartość iloczynu $\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{2}$ wynosi $\boxed{C}$ / $\boxed{D}$.

Odpowiedź: B ($a = 27$), D (8)

Krok 1. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Aby rozwiązać pierwszą część zadania wystarczy podstawić te dwie proponowane liczby i sprawdzić kiedy otrzymamy wynik równy 9. Tak naprawdę podstawiając otrzymamy bardzo brzydką liczbę, bo $\sqrt[3]{a}$ jest liczbą niewymierną równą około 1,44. Musimy zatem podstawić $a = 27$ i otrzymamy wtedy następującą sytuację

$$\sqrt[3]{27^2} = 3^2 = 9$$

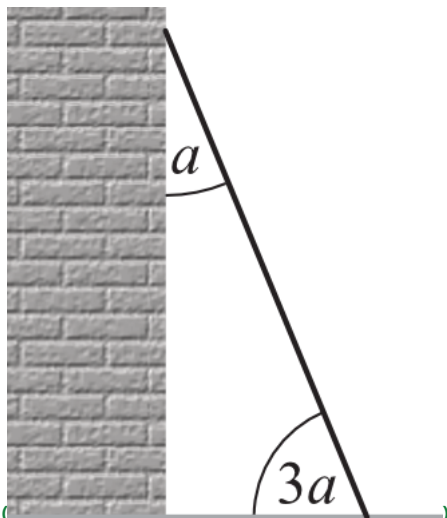
Krok 2. Rozwiązanie drugiej części zadania.

Korzystając z działań na pierwiastkach możemy zapisać, że:

$$\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \dots = 2 \cdot \sqrt{8 \cdot 2} = 2 \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$$

Zadanie 11

Dla zachowania bezpieczeństwa kąt nachylenia między poziomym podłożem a drabiną przystawną powinien wynosić od 65° do 75° . Na którym rysunku przedstawił ustawienie drabiny zgodne z wymaganiami bezpieczeństwa?



Odpowiedź: D ()

Kluczowym spostrzeżeniem pozwalającym na rozwiązanie tego zadania jest dostrzeżenie, że ściana, podłoga oraz drabina tworzą trójkąt prostokątny. Dzięki temu mogli skorzystać z różnych własności trójkątów prostokątnych, wiedząc przy okazji że miara jednego z kątów jest równa 90° . Rozpatrzmy każdy z przypadków

I drabina:

Korzystając z własności kątów wierzchołkowych wiemy, że kąt między ścianą i drabiną ma także 12° . Wiemy też, że kąt między ścianą i podłogą ma 90° , zatem tego trójkąta (czyli kąt między podłożem i drabiną) będzie mieć miarę:

$$180^\circ - 90^\circ - 12^\circ = 78^\circ$$

II drabina:

Tym razem skorzystamy z kątów przyległych. Suma kątów przyległych jest równa 180° . Skoro jeden kąt ma miarę 118° , to drugi (czyli ten, który nas interesuje)

$$180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$$

III drabina:

Tutaj powinniśmy się zorientować, że jest to trójkąt prostokątny o kątach 30° , 60° , 90° . Skąd to wiemy? Wynika to z faktu, że przeciwprostokątna jest dwa razy dłuższa niż przyprostokątna, a to cecha charakterystyczna właśnie dla trójkątów o kątach 30° , 60° , 90° . Interesujący nas kąt między podłożem i drabiną ma zatem

IV drabina:

Wiemy, że suma kątów w trójkącie wynosi 180° . Wiemy też, że jeden z kątów ma miarę 90° , zatem na dwa pozostałe kąty zostaje nam $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Możemy zapisać, że:

$$\alpha + 3\alpha = 90^\circ, \quad 4\alpha = 90^\circ, \quad \alpha = 22,5^\circ$$

Interesujący nas kąt między podłożem i drabiną ma miarę 3α , czyli $3 \cdot 22,5^\circ = 67,5^\circ$. Z prezentowanych odpowiedzi tylko ta mieści się w przedziale od 65° do

Zadanie 12

Objętość prostopadłościanu o wymiarach $3\text{cm} \times 0,3\text{dm} \times 0,03\text{m}$ wynosi:

Odpowiedź: C ($27 \cdot 10^{-6}\text{m}^3$)

Krok 1. Obliczenie objętości prostopadłościanu.

To co musimy zrobić na wstępie to ujednolicić jednostki. Nie wiemy na którą jednostkę opłaci nam się zamienić najbardziej (w odpowiedziach występują zarówno centymetry jak i metry). Wydaje się, że najprościej będzie zamienić wszystko na centymetry, a w razie czego zamienimy sobie potem jednostki objętości na te, które potrzebne.

$$0,3\text{dm} = 3\text{cm}, \quad 0,03\text{m} = 3\text{cm}$$

W związku z tym objętość prostopadłościanu jest równa:

$$V = 3\text{cm} \cdot 3\text{cm} \cdot 3\text{cm}, \quad V = 27\text{cm}^3$$

Krok 2. Zamiana jednostek objętości.

Skoro $1\text{cm} = 0,01\text{m} = 10^{-2}\text{m}$, to $1\text{cm}^3 = 10^{-6}\text{m}^3$.

W związku z tym $27\text{cm}^3 = 27 \cdot 10^{-6}\text{m}^3$.

Zadanie 13

W pewnym trójkącie dwa kąty mają miary po 35° . Oznacza to, że trójkąt ten jest:

Odpowiedź: D (równoramienny rozwartokątny)

Krok 1. Obliczenie miary trzeciego kąta w tym trójkącie.

Suma kątów w trójkącie jest równa 180° , zatem skoro pierwszy i drugi kąt mają 35° , to trzeci kąt ma miarę:

$$180^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 110^\circ$$

Krok 2. Wybór właściwej odpowiedzi.

Skoro dwa kąty w trójkącie są jednakowej miary, to na pewno jest to trójkąt równoramienny. Dodatkowo wiemy, że w tym trójkącie jeden z kątów ma miarę 110° rozwarty. Stąd też łącząc ze sobą te dwie informacje możemy powiedzieć, że jest to trójkąt równoramienny rozwartokątny.

Zadanie 14

Dane są liczby $x = 2a + b - 3$ oraz $y = -4(a - b) + 1$. Uzupełnij zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A lub B oraz spośród C lub D.

Suma liczb x i y wynosi $\boxed{A}$ / $\boxed{B}$. Różnica liczb y i x wynosi $\boxed{C}$ / $\boxed{D}$.

Odpowiedź: B ($-2(a + 1) + 5b$), **D** ($-6a + 3b + 4$)

Krok 1. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Chcąc obliczyć sumę liczb musimy po prostu dodać do siebie te dwa wyrażenia i ostrożnie uprościć cały zapis:

$$2a + b - 3 + (-4(a - b) + 1) = 2a + b - 3 - 4(a - b) + 1 = , = 2a + b - 3 - 4a + 4b + 1 = -2a + 5b - 2$$

Takiej odpowiedzi nie mamy podanej, choć możemy już wykluczyć pierwszą odpowiedź, bo w niej nie ma jednomianu z wartością b . Aby zweryfikować czy druga jest poprawna musimy wyłączyć -2 przed nawias, otrzymując:

$$-2a + 5b - 2 = -2a - 2 + 5b = -2(a + 1) + 5b$$

Krok 2. Rozwiązanie drugiej części zadania.

Tym razem musimy odjąć od siebie te dwa wyrażenia. Uważając na znaki możemy zatem zapisać, że:

$$-4(a - b) + 1 - (2a + b - 3) = -4a + 4b + 1 - 2a - b + 3 = -6a + 3b + 4$$

Zadanie 15

Oceń prawdziwość podanych zdań. Każdy graniastosłup prosty, który ma sześć ścian, jest prostopadłościanem.
 Ostrosłup, który ma sześć krawędzi, jest czworościanem.

Każdy graniastosłup prosty, który ma sześć ścian, jest prostopadłościanem.

Prawda
 Fałsz

Ostrosłup, który ma sześć krawędzi, jest czworościanem.

Prawda
 Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Graniastosłup prosty to taki, którego ściany boczne są prostokątami. Aby graniastosłup prosty był prostopadłościanem, to także w swojej podstawie musi mieć informacji podanej w zadaniu wynika, że graniastosłup ma sześć ścian, co z kolei oznacza że w podstawie znalazł się czworokąt (nie ma innej możliwości - będą 4 ściany boczne i 2 ściany podstawy). Niestety nie mamy pewności, czy tym czworokątem jest prostokąt, bo równie dobrze może to być np. romb lub trapez. Z tego zdanie jest fałszem, bo nie każdy taki graniastosłup będzie prostopadłościanem.

Krok 2. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Czworościan to ostrosłup mający (jak sama nazwa wskazuje) cztery ściany w kształcie trójkąta. W związku z tym w podstawie takiego ostrosłupa musi znaleźć się musi to być trójkąt równoboczny, bo nie musi to być czworościan foremny).

Tu warto przypomnieć, że ostrosłup mający w podstawie n -kąt ma $2n$ krawędzi oraz $n + 1$ ścian. Skoro nasz ostrosłup ma 6 krawędzi, to znaczy że $2n = 6$, czyli $n = 3$, oznacza, że w podstawie faktycznie znajduje się trójkąt, a cała bryła ma $n + 1$, czyli $3 + 1 = 4$ ściany. W związku z tym zdanie jest prawdą.

Oblicz sumę wszystkich czynników pierwszych liczby 9350, jeżeli największy z nich wynosi 17.

Odpowiedź: 40

Krok 1. Rozkład liczby na czynniki pierwsze.

Rozkładając liczbę na czynniki pierwsze należy pamiętać o tym, by korzystać jedynie z liczb pierwszych (czyli takich, które dzielą się tylko przez jedynkę oraz siebie samą). My z treści zadania wiemy, że jednym z takich czynników jest liczba 17, dlatego od tej liczby możemy rozpocząć nasz rozkład:

$$\begin{array}{r|l} 9350 & 17 \\ 550 & 5 \\ 110 & 11 \\ 10 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

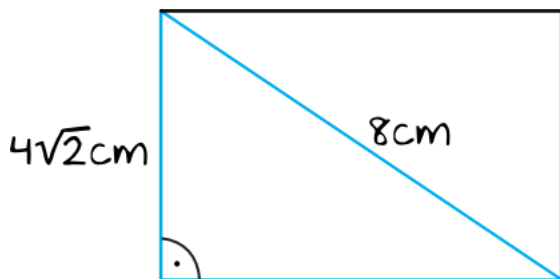
Krok 2. Obliczenie sumy czynników pierwszych.

Zgodnie z treścią zadania musimy jeszcze obliczyć sumę czynników pierwszych, zatem:

$$17 + 5 + 11 + 5 + 2 = 40$$

Zadanie 17

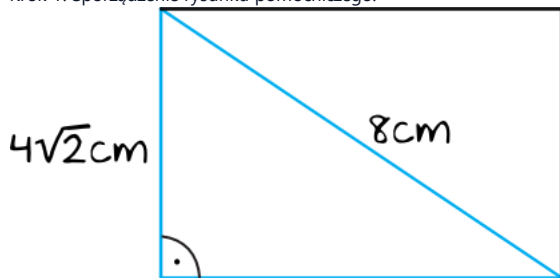
Uzasadnij, że prostokąt o przekątnej długości 8cm i szerokości $4\sqrt{2}\text{cm}$ jest kwadratem.



Odpowiedź: Udowodniono obliczaj

I sposób: Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa:

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.



Krok 2. Obliczenie szerokości prostokąta.

Jeżeli uda nam się udowodnić, że bok o nieznannej nam długości b ma taką samą miarę co bok o długości $a = 4\sqrt{2}$, to będziemy mogli z całą pewnością stwierdzić, że prostokąt jest kwadratem. W tym celu skorzystamy po prostu z Twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + b^2 = c^2, (4\sqrt{2})^2 + b^2 = 8^2, 16 \cdot 2 + b^2 = 64, 32 + b^2 = 64, b^2 = 32, b = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

Krok 3. Zakończenie dowodzenia.

Udało nam się wykazać, że boki oznaczone jako a oraz b mają identyczną miarę, zatem ten prostokąt jest kwadratem.

II sposób: Korzystając z własności przekątnych kwadratu.

Z własności kwadratów wynika, że kwadrat o boku a ma przekątną o długości $a\sqrt{2}$. Jeżeli więc pokażemy, że w przypadku tego prostokąta zachodzi taka zależność, będziemy mogli stwierdzić, że faktycznie jest on kwadratem.

W związku z tym skoro $a = 4\sqrt{2}$ to przekątna kwadratu powinna mieć długość:

$$a\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot 2 = 8$$

Otrzymany wynik jest dokładnie taki sam jak długość przekątnej podanej w treści zadania, zatem możemy z całą pewnością stwierdzić, iż ten prostokąt jest kwadratem.

Zadanie 18

Wyznacz T ze wzoru $s = \frac{F-T}{2m} \cdot t^2$.

Odpowiedź: $T = F - \frac{2ms}{t^2}$

Przekształcanie wzoru najprościej jest zacząć od pozbycia się wartości $2m$ znajdującej się w mianowniku ułamka:

$$s = \frac{F-T}{2m} \cdot t^2 \quad \left| : \cdot 2m, s \cdot 2m = (F-T) \cdot t^2 \right| : t^2, \frac{2ms}{t^2} = F-T \quad \left| + T, T + \frac{2ms}{t^2} = F \right| - \frac{2ms}{t^2}, T = F - \frac{2ms}{t^2}$$

Zadanie 19

Wojtek przechowuje 24 standardowe sześcienné kostki do gry w zamkniętym pudełku o pojemności 0,6 litra. Każda z tych kostek ma krawędź o długości 1. Oblicz, ile procent pojemności pudełka wypełniają wszystkie te kostki. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: Kostki zajmują 13,

Krok 1. Obliczenie pojemności pojedynczej kostki.

Każda kostka jest sześcianem o krawędzi długości $a = 1,5\text{cm}$. Możemy więc bez przeszkód obliczyć objętość tego sześcianu, ale zanim to zrobimy, to może jeszcze jedną sprytną rzecz, która znacznie uprości nam obliczenia. Widzimy wyraźnie, że w zadaniu będziemy operować jednostką litrów, a wiemy że $1\text{l} = 1\text{dm}^3$. Zamieńmy więc długość kostki na decymetry, tak aby potem nie mieć problemu z przekształcaniem jednostek objętości.

$$a = 1,5\text{cm} = 0,15\text{dm}$$

Teraz możemy przystąpić do obliczenia objętości pojedynczej kostki:

$$V = a^3, V = (0,15\text{dm})^3, V = 0,003375\text{dm}^3$$

Krok 2. Obliczenie objętości wszystkich kostek do gry.

Skoro Wojtek ma 24 kostki do gry, to ich objętość będzie równa:

$$V = 24 \cdot 0,003375\text{dm}^3, V = 0,081\text{dm}^3$$

Krok 3. Obliczenie procentu wypełnienia pudełka.

Skoro pudełko ma objętość 0,6l, czyli $0,6\text{dm}^3$, a kostki zajmują $0,081\text{dm}^3$ to:

$$\frac{0,081\text{dm}^3}{0,6\text{dm}^3} \cdot 100\% = \frac{81}{6}\% = 13,5\%$$

Zadanie 20

Siostry Basia i Kasia zbierają pieniądze na wycieczkę. Basia zbierała 115% kwoty, którą zebrała Kasia. Gdy każda dziewczynka dostała od dziadków dodatków 232zł, okazało się, że kwota zbierana przez Kasię stanowi 92% kwoty zebranej przez Basię. Oblicz, ile pieniędzy zbierała każda z dziewcząt. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: Oszczędności Kasi to

Krok 1. Wprowadzenie poprawnych oznaczeń.

W tym zadaniu musimy koniecznie wprowadzić sobie pewne oznaczenia, zapisując przy okazji zależności wynikające z treści zadania:

x - oszczędności Kasi przed otrzymaniem pieniędzy od dziadków

$1,15x$ - oszczędności Basi przed otrzymaniem pieniędzy od dziadków

$x + 232$ - oszczędności Kasi po otrzymaniu pieniędzy od dziadków

$1,15x + 232$ - oszczędności Basi po otrzymaniu pieniędzy od dziadków

Z treści zadania wynika, że:

$$x + 232 = 0,92 \cdot (1,15x + 232)$$

Krok 2. Rozwiązanie powstałego równania.

Rozwiązanie powstałego równania zaczniemy od wymnożenia liczby znajdującej się przed nawiasem:

$$x + 232 = 0,92 \cdot (1,15x + 232), x + 232 = 1,058x + 213,44 \quad \left| -213,44 \right., x + 18,56 = 1,058x \quad \left| -x \right., 18,56 = 0,058x \quad \left| : 0,058 \right., x$$

Krok 3. Obliczenie kwoty zbieranych pieniędzy przez Kasię oraz Basię.

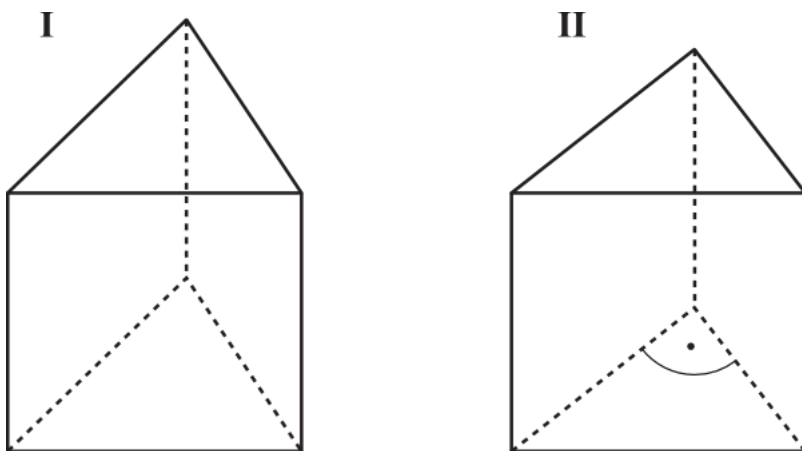
Obliczenie wartości $x = 320\text{zł}$ nie kończy naszego zadania. Musimy obliczyć ile pieniędzy ostatecznie zebrała każda z dziewczyn. W tym celu wracamy do naszych oznaczeń z kroku pierwszego i możemy zapisać, że:

Oszczędności Kasi: $320\text{zł} + 232\text{zł} = 552\text{zł}$

Oszczędności Basi: $1,15 \cdot 320\text{zł} + 232\text{zł} = 368\text{zł} + 232\text{zł} = 600\text{zł}$

Zadanie 21

Na rysunku I przedstawiono graniastosłup prawidłowy, którego wszystkie krawędzie są przystające, a suma ich długości wynosi 90cm . Na II rysunku przedstawiono graniastosłup, który ma w podstawie trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6cm i 8cm . Obie bryły mają taką samą wysokość.



Oba te graniastosłupy połączono w taki sposób, że otrzymano jeden graniastosłup czworokątny. Oblicz pole powierzchni całkowitej otrzymanego graniastosłupa czworokątnego. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $(P=388+50\sqrt{3})\text{cm}$

Krok 1. Obliczenie długości krawędzi pierwszego graniastosłupa.

Z treści zadania wynika, że krawędzie pierwszego graniastosłupa są przystające, czyli mają jednakową miarę. Nasz graniastosłup ma 9 krawędzi, a skoro suma długości jest równa 90cm , to każda krawędź ma długość:

$$a = 90\text{cm} : 9, a = 10\text{cm}$$

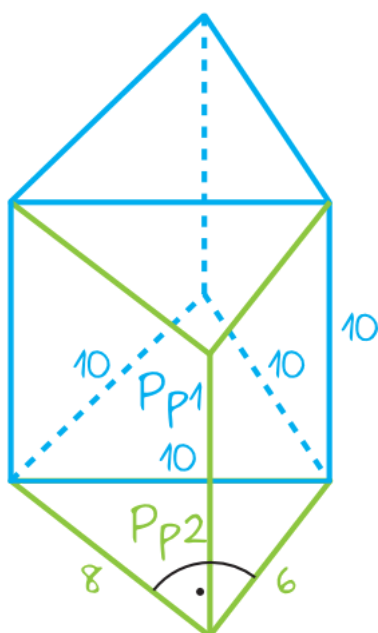
Krok 2. Obliczenie długości nieznanej krawędzi podstawy drugiego graniastosłupa.

O drugim graniastosłupie wiemy to, że w podstawie jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6cm oraz 8cm . Korzystając więc z Twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć długość przeciwprostokątnej (czyli trzeciej krawędzi podstawy), zatem:

$$a^2 + b^2 = c^2, 6^2 + 8^2 = c^2, 36 + 64 = c^2, c^2 = 100, c = 10[\text{cm}]$$

Krok 3. Ustalenie wyglądu bryły po połączeniu graniastosłupów.

Ustalmy jak będzie wyglądać nasza bryła, która powstanie po połączeniu się pierwszego i drugiego graniastosłupa. Skoro mamy otrzymać graniastosłup czworokątny to te dwa graniastosłupy trzeba będzie połączyć wzdłuż boku o jednakowej mierze, czyli w tym przypadku wzdłuż boku o długości 10cm . Każde inne połączenie spowoduje, że w podstawie nie będziemy mieli czworokąta. Wiemy też, że nowo powstała bryła ma wysokość 10cm , bo tak wynika z informacji na temat pierwszego graniastosłupa. W związku z tym nasz graniastosłup będzie wyglądać mniej więcej w ten sposób:



Krok 4. Obliczenie pól podstawy pierwszego i drugiego graniastoslupa.

Pole podstawy nowego graniastoslupa jest sumą pól podstaw pierwszego i drugiego graniastoslupa. Musimy zatem wyliczyć te dwa pola i je ze sobą zsumować.

W pierwszej podstawie mamy trójkąt równoboczny o boku $a = 10\text{cm}$. Pole pierwszego graniastoslupa jest więc proste do policzenia jeśli znamy wzór na pole równobocznego $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Wystarczy wtedy podstawić znaną nam miarę i otrzymamy, że:

$$P_{p1} = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4}, P_{p1} = \frac{100\sqrt{3}}{4}, P_{p1} = 25\sqrt{3}[\text{cm}^2]$$

Niestety w niektórych szkołach ten wzór nie jest omawiany, ale omawiany jest za to wzór na wysokość trójkąta równobocznego $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i dzięki niemu tak obliczyć pole powierzchni. Obliczmy zatem wysokość naszego trójkąta równobocznego o boku $a = 10\text{cm}$:

$$h = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2}, h = 5\sqrt{3}[\text{cm}]$$

Teraz korzystając ze standardowego wzoru na pole trójkąta możemy zapisać, że:

$$P_{p1} = \frac{1}{2}ah, P_{p1} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3}, P_{p1} = 5 \cdot 5\sqrt{3}, P_{p1} = 25\sqrt{3}[\text{cm}^2]$$

Obliczenie pola powierzchni podstawy drugiego graniastoslupa jest już mniej problematyczne, bo z własności trójkątów prostokątnych wiemy, że przyprostokątne takiego trójkąta są jednocześnie długościami podstawy i wysokości trójkąta, zatem:

$$P_{p2} = \frac{1}{2}ah, P_{p2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8, P_{p2} = 3 \cdot 8, P_{p2} = 24[\text{cm}^2]$$

Krok 5. Obliczenie pola powierzchni bocznej graniastoslupa czworokątnego.

Mamy cztery ściany boczne, każda z nich jest prostokątem o wysokości 10cm . Zgodnie z naszym rysunkiem możemy zapisać, że:

$$P_b = 6 \cdot 10 + 8 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10, P_b = 60 + 80 + 100 + 100, P_b = 340[\text{cm}^2]$$

Krok 6. Obliczenie pola powierzchni całkowitej graniastoslupa czworokątnego.

Pole podstawy nowo powstałego graniastoslupa to suma obliczonych w czwartym kroku pól P_{p1} oraz P_{p2} . Pole powierzchni bocznej obliczyliśmy w kroku pięć. Jesteśmy więc gotowi do obliczenia pola powierzchni całkowitej, ale musimy pamiętać o tym, by pole podstawy graniastoslupa czworokątnego pomnożyć przez 2, ponieważ graniastosłup ma przecież podstawę dolną i górną. Zatem:

$$P = 2 \cdot (P_{p1} + P_{p2}) + P_b, P = 2 \cdot (25\sqrt{3} + 24) + 340, P = 50\sqrt{3} + 48 + 340, P = 388 + 50\sqrt{3}[\text{cm}^2]$$