

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Próbny egzamin ósmoklasisty z matematyki - Nowa Era 2019

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl. Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D (Dominika)	1
3	B (4%)	1
4	A (o 100%), D (250%)	1
8	B (16)	1
9	C (3)	1
10	B (120), C (o jedną trzecią)	1
11	B (około 300 razy)	1
12	B (1. i 3.)	1
13	C ($P_I = P_{II} < P_{III}$)	1
14	A ($\sqrt{a^2} = 6^2$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Dominika obliczyła wartość wyrażenia: $3 - \frac{1}{2} : \frac{2}{5} \cdot 0,5$ i otrzymała wynik 2,375. Jej koledzy: Antek, Bartek i Czarek, nie zgodzili się z jej odpowiedzią i postanowili wykonać to zadanie samodzielnie. Każdy z nich uzyskał inny wynik: Antek: 0,5; Bartek: 3,125; Czarek: 12,5.

Kto rozwiązał zadanie poprawnie?

Odpowiedź: D (Dominika)

W tym zadaniu musimy pamiętać o kolejności wykonywania działań - najpierw wykonujemy mnożenie i dzielenie (w kolejności występowania, od lewej do prawej), a na koniec wykonamy odejmowanie, które znalazło się na samym początku. Dobrze jest też od razu zamienić sobie ostatnią liczbę 0,5 na ułamek zwykły, dzięki czemu będziemy mieć proste działania na ułamkach zwykłych. Pamiętaj też, że dzielenie możemy zastąpić mnożeniem przez odwrotność danej liczby. Całość rozpisując wszystko bardzo dokładnie będzie wyglądać następująco:

$$3 - \frac{1}{2} : \frac{2}{5} \cdot 0,5 = 3 - \frac{1}{2} : \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = , = 3 - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = 3 - \frac{5}{8} = 2\frac{3}{8} = 2,375$$

To oznacza, że Dominika poprawnie rozwiązała zadanie.

Zadanie 2

0-1 pkt

Dane są dwie liczby: $x = \sqrt{2} - 1$ oraz $y = 1 + \sqrt{2}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F - jeśli jest fałszywe. Liczba $x - y$ jest liczbą całkowitą.

Liczba $x \cdot y$ jest liczbą naturalną.

Liczba $x - y$ jest liczbą całkowitą.

Prawda

Fałsz

Liczba $x \cdot y$ jest liczbą naturalną.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Musimy odjąć od siebie te dwie liczby, zatem:

$$\sqrt{2} - 1 - (1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 - 1 - \sqrt{2} = -2$$

-2 jest liczbą całkowitą, więc zdanie jest prawdą.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Tym razem nasze dwie liczby musimy pomnożyć, otrzymując:

$$(\sqrt{2} - 1) \cdot (1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} + 2 - 1 - \sqrt{2} = 1$$

1 jak najbardziej jest liczbą naturalną, czyli zdanie jest prawdą.

Tak na marginesie, to zamieniając miejscami wyrazy w drugim nawiasie (a możemy to zrobić, bo dodawanie jest przemienne), otrzymalibyśmy wzór skróconego mnożenia $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$ i całość moglibyśmy zapisać jako:

$$(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

Zadanie 3

0–1 pkt

W 48g wody rozpuszczono 2g soli. Jaki procent masy otrzymanego roztworu stanowi masa soli?

Odpowiedź: B (4%)

Krok 1. Obliczenie masy całego roztworu.

Nasz roztwór składa się z wody oraz soli. Łącznie te dwa produkty mają masę równą:

$$48g + 2g = 50g$$

Krok 2. Obliczenie procentu udziału soli w roztworze.

Sól stanowi 2g z 50g roztworu, czyli stanowi:

$$\frac{2}{50} = \frac{4}{100} = 4\%$$

Zadanie 4

0–1 pkt

Dana jest liczba $a = 100$.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedzi spośród oznaczonych literami A i B oraz C i D.

Liczba $2a$ jest / większa niż liczba a . Liczba $5a$ stanowi / liczby $2a$.

Odpowiedź: A (o 100%), D (250%)

Krok 1. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Liczba $2a$ jest dwa razy większa od liczby a , zatem jest od niej o 100% większa.

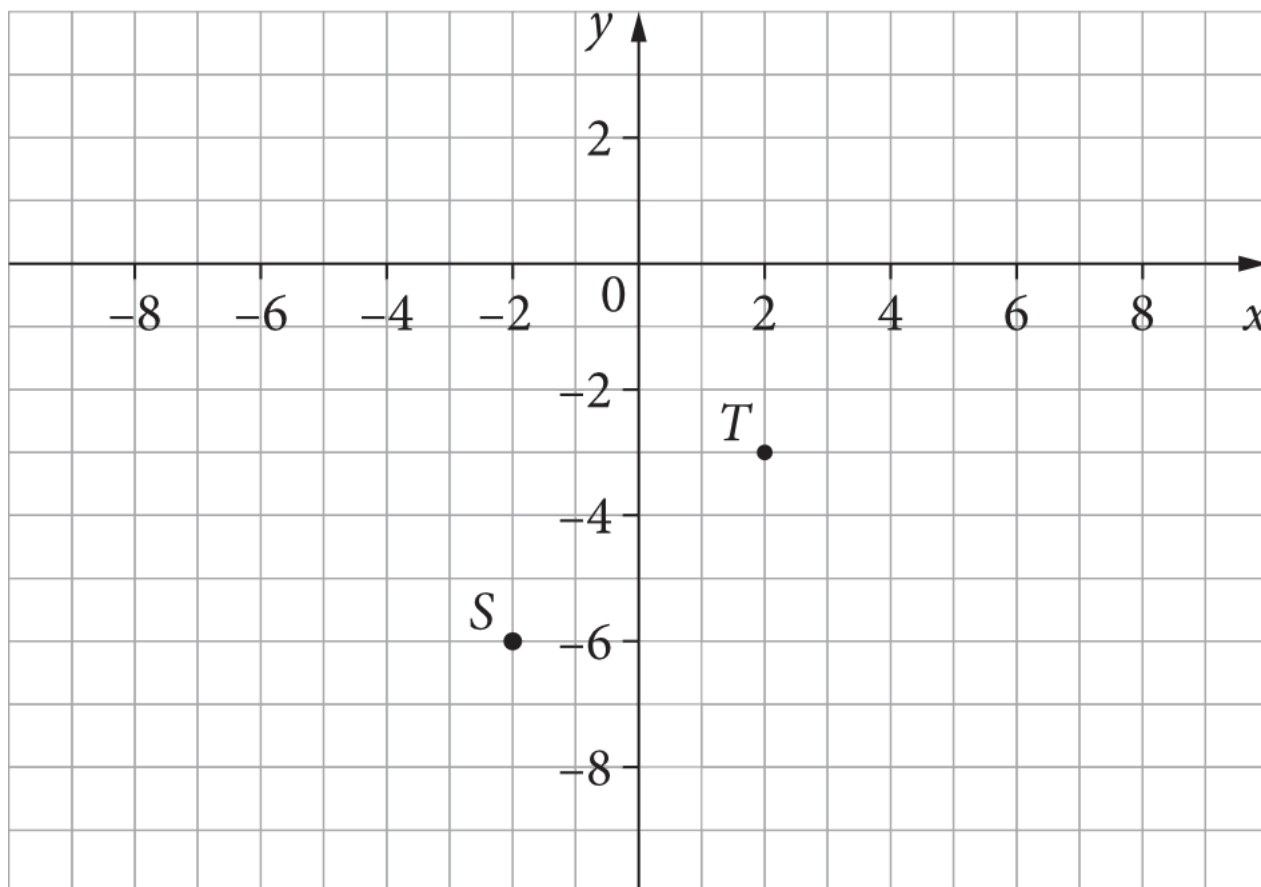
Krok 2. Rozwiązanie drugiej części zadania.

$5a$ stanowi $\frac{5a}{2a} = \frac{5}{2}$ liczby $2a$. Zamieniając ułamek $\frac{5}{2}$ na procenty otrzymamy wartość 250%.

Zadanie 5

0-1 pkt

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznaczono dwa punkty: $S = (-2, -6)$ oraz $T = (2, -3)$. Dzielą one odcinek AB na trzy równe części.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F - jeśli jest fałszywe. Obie współrzędne punktu A i obie współrzędne punktu B są ujemne.
Odcinek AB ma długość 15.

Obie współrzędne punktu A i obie współrzędne punktu B są ujemne.

Prawda

Fałsz

Odcinek AB ma długość 15.

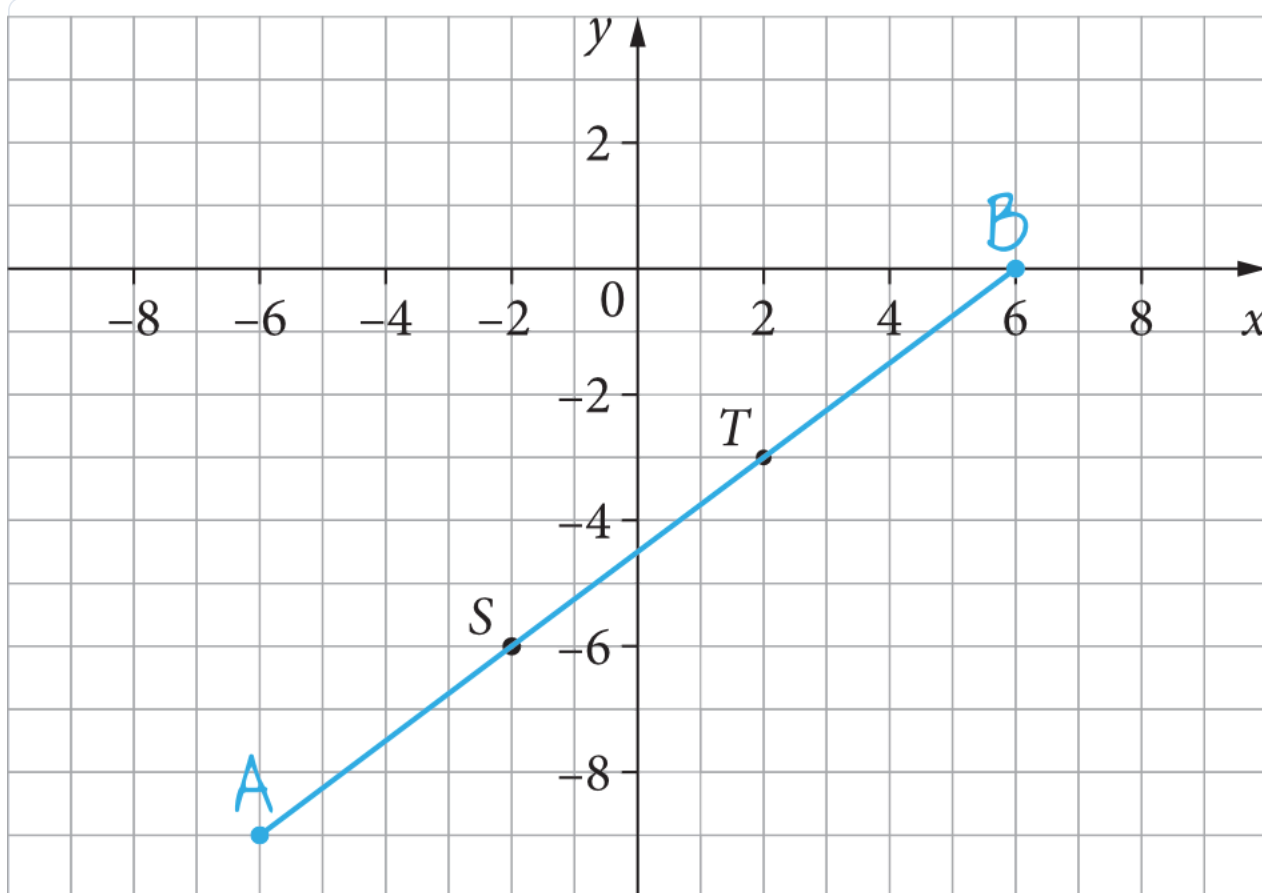
Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Jeżeli punkty S oraz T mają nam podzielić odcinek AB na trzy równe części, to odległość od punktu A do punktu S oraz od T do B musi być taka sama jak odległość punktu S od punktu T . Na rysunku będzie to wyglądać w następujący sposób:

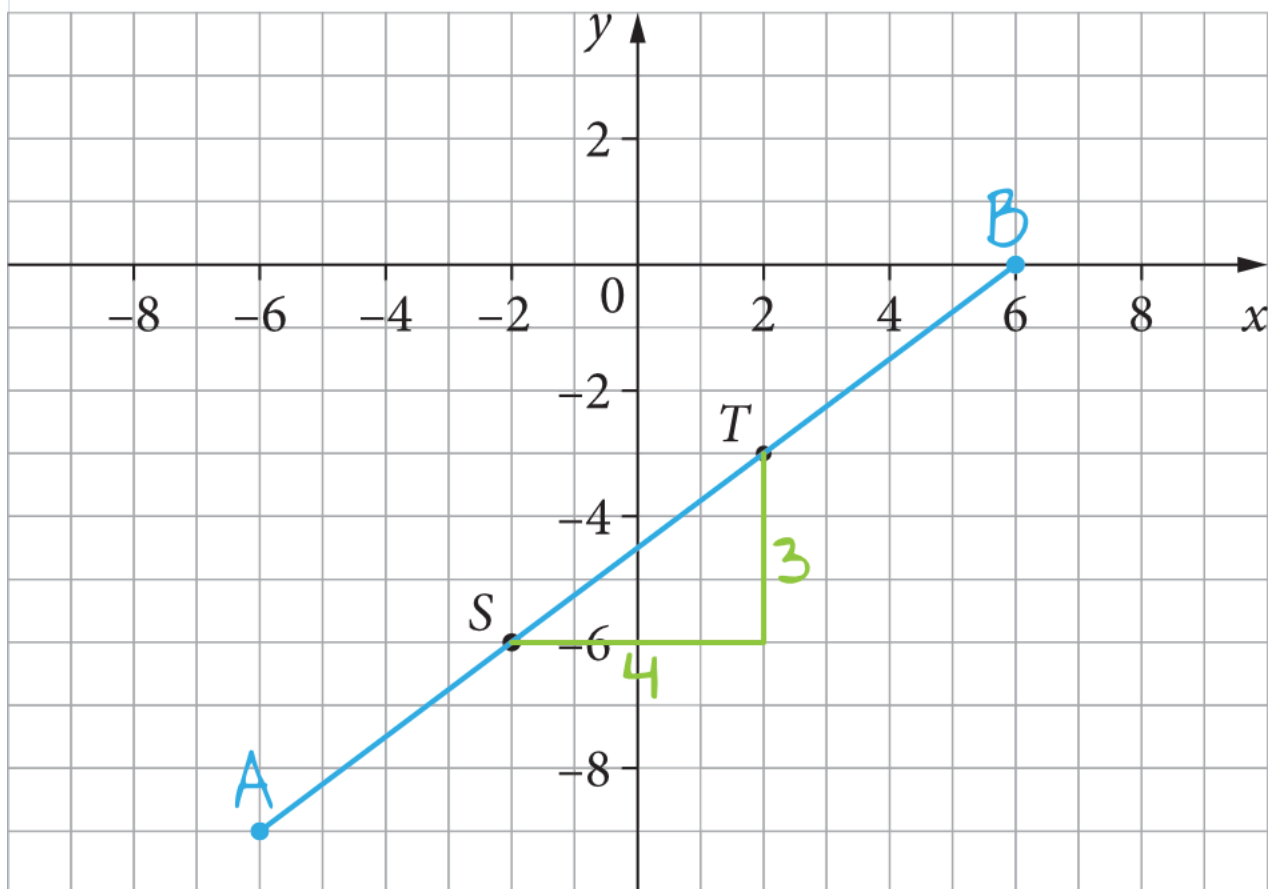


Krok 2. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Niezależnie od tego jak szczegółowo zrobimy nasz rysunek szkicowy, to powinniśmy zauważyć, że to zdanie jest fałszem. Faktycznie, obie współrzędne punktu A są ujemne, ale nie można tego powiedzieć o współrzędnych punktu B . Na pewno współrzędna x tego punktu jest dodatnia, a y współrzędna y nie jest ujemna (będzie ona równa 0).

Krok 3. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Aby poznać długość odcinka AB musimy skorzystać z Twierdzenia Pitagorasa w układzie współrzędnych. Da się to zrobić w sumie na dwa sposoby. Możemy narysować sobie bardzo duży trójkąt prostokątny w którym odcinek AB jest przeciwprostokątną, ale jest to dość ryzykowne, bo rysunek szkicowy musi być wtedy naprawdę bardzo dokładny. Wydaje się, że drugi sposób będzie nieco prostszy, a mianowicie łatwiej będzie nam obliczyć długość odcinka ST , rysując znacznie mniejszy trójkąt prostokątny. Jak poznamy długość odcinka ST (który jest trzy razy krótszy od odcinka AC), to bardzo szybko obliczymy długość odcinka AB . Wybierzmy może ten drugi sposób i narysujmy sobie taki oto trójkąt prostokątny:

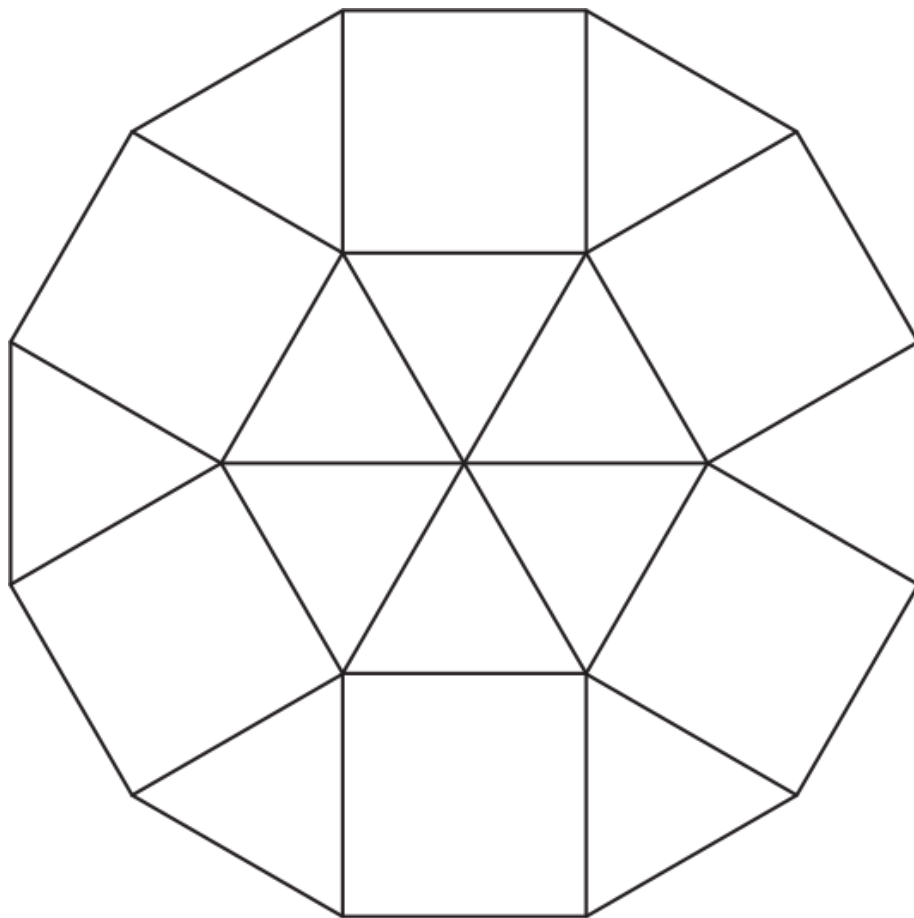


Z rysunku wynika, że odcinek ST jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 3 i 4, zatem albo z własnego doświadczenia możemy już zapisać, że $ST = 5$, albo też możemy obliczyć to sobie po kolei z Twierdzenia Pitagorasa:

$$3^2 + 4^2 = c^2, \quad 9 + 16 = c^2, \quad c^2 = 25, \quad c = 5 \quad \vee \quad c = -5$$

Ujemny wynik nas nie interesuje, zostaje nam zatem $c = 5$, czyli wiemy już, że odcinek ST ma długość równą 5. Nasz odcinek AB będzie trzy razy dłuższy od odcinka ST , zatem: $|AB| = 3 \cdot 5 = 15$. Zdanie jest więc prawdą.

Na stole leżą płytki w kształcie trójkątów równobocznych o bokach długości 3cm i płytki kwadratowe, których boki także mają długość 3cm . Marysia ułożyła z nich figurę taką, jak na rysunku.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F - jeśli jest fałszywe. Otrzymana figura to dwunastokąt foremny.

Łączna powierzchnia trójkątnych płytek jest większa niż łączna powierzchnia płytek kwadratowych.

Otrzymana figura to dwunastokąt foremny.

Prawda

Fałsz

Łączna powierzchnia trójkątnych płytek jest większa niż łączna powierzchnia płytek kwadratowych.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

To, że figura nasza jest dwunastokątem nie podlega raczej wątpliwości - wystarczy policzyć boki lub kąty. Pytanie jednak, czy jest to dwunastokąt foremny (czyli czy wszystkie boki są jednakowej długości). Jak najbardziej jest to dwunastokąt foremny, bo zarówno kwadraty jak i trójkąty równoboczne (z których zbudowana jest figura) mają krawędź o długości 3cm , czyli każdy bok naszego dwunastokąta ma długość 3cm . Zdanie jest więc prawdą.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Aby się przekonać o tym, czy jest to prawda, musimy obliczyć pola powierzchni kwadratów i trójkątów. Zacznijmy od kwadratów. Z rysunku wynika, że mamy 6 kwadratów o boku 3cm . Pole pojedynczego kwadratu obliczamy ze wzoru $P = a^2$, zatem skoro takich kwadratów mamy 6 to otrzymamy:

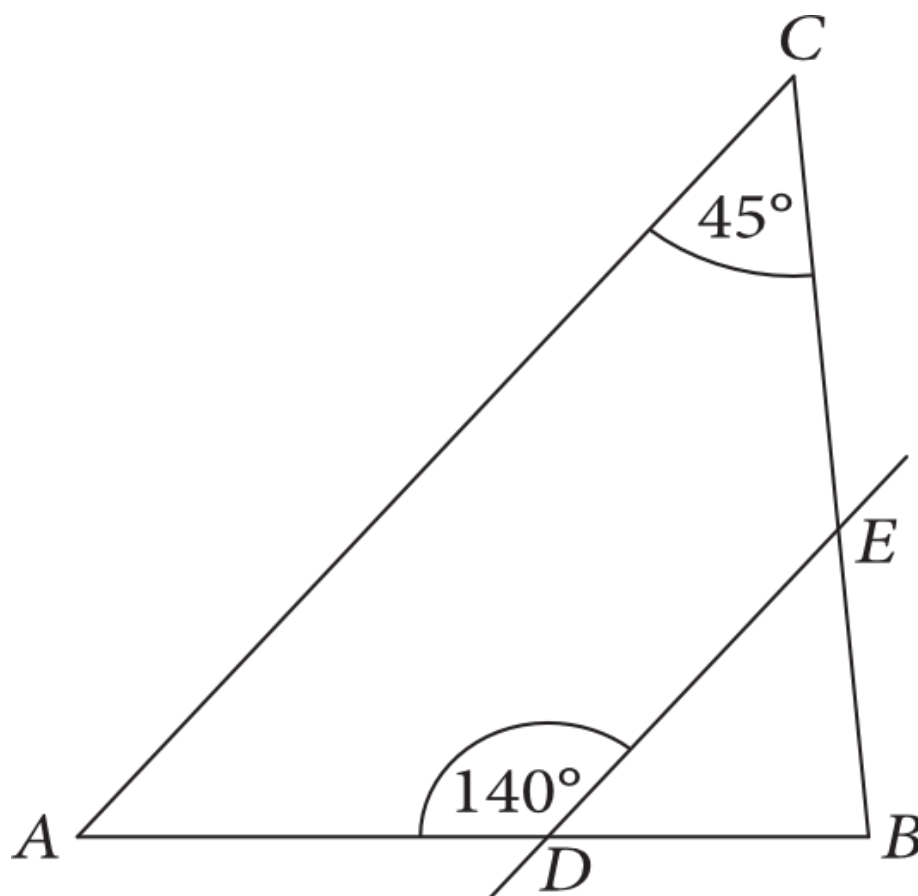
$$P_k = 6 \cdot 3^2, P_k = 6 \cdot 9, P_k = 54$$

Teraz obliczmy łączną powierzchnię trójkątów. Widzimy, że mamy 12 trójkątów równobocznych o boku 3cm . Pole każdego pojedynczego trójkąta możemy obliczyć ze wzoru $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, zatem łączne pole wszystkich trójkątów będzie równe:

$$P_t = 12 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4}, P_t = 12 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4}, P_t = 3 \cdot 9\sqrt{3}, P_t = 27\sqrt{3}$$

Jeżeli przyjmiemy, że $\sqrt{3} \approx 1,73$, to możemy wtedy zapisać, że $P_t \approx 27 \cdot 1,73 \approx 46,71$. To oznacza, że pole powierzchni trójkątów jest mniejsze od pola powierzchni kwadratów, zatem to zdanie jest fałszem.

Dany jest trójkąt ABC , w którym kąt przy wierzchołku C ma miarę 45° . Na bokach AB i BC zaznaczono punkty D i E , przez które poprowadzono prostą równoległą do boku AC . Prosta DE tworzy z bokiem AB kąt o mierze 140° (jak na rysunku).



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F - jeśli jest fałszywe. Kąt BAC ma miarę 45° .

Kąty trójkąta DBE i kąty trójkąta ABC mają równe miary.

Kąt BAC ma miarę 45° .

Prawda

Fałsz

Kąty trójkąta DBE i kąty trójkąta ABC mają równe miary.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Z własności kątów wiemy, że kąt BAC oraz BDE będą miały jednakową miarę (są to kąty odpowiadające).

Miarę kąta BDE możemy wyznaczyć w dość prosty sposób, bowiem tworzy on z kątem 140° parę kątów przyległych. Wiedząc, że kąty przyległe mają miarę 180° możemy zapisać, że:

$$|\angle BDE| = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

Jak już ustaliliśmy, kąt BAC ma taką samą miarę co BDE , zatem $|\angle BAC| = 40^\circ$. Zdanie jest więc fałszem.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Wiemy już, że kąty BDE oraz BAC mają jednakową miarę (i wiemy nawet, że jest to dokładnie 40°). Wiemy też z samego rysunku, że trójkąty ABC oraz DBE mają jednakowy kąt przy wierzchołku B . Wniosek z tego płynie taki, że już w tym momencie mamy pewność, że ten duży i mały trójkąt mają jednakowe miary dwóch kątów, zatem i miara trzeciego kąta musi być jednakowa (nie ma innej możliwości, bo każdy trójkąt ma taką samą sumę wszystkich kątów). Zdanie jest więc prawdą.

Gdyby ktoś nie był jeszcze o tym przekonany, to zawsze można obliczyć miarę kąta przy wierzchołku B . Z poprzedniego kroku wiemy, że zarówno kąty BDE jak i BAC mają miarę 40° , zatem patrząc się na trójkąt ABC możemy stwierdzić, że:

$$|\angle ABC| = 180^\circ - 45^\circ - 40^\circ = 95^\circ$$

Teraz patrzymy się na trójkąt DBE . Wiemy już, że kąt przy wierzchołku D ma miarę 40° , kąt przy wierzchołku B ma miarę 95° , zatem kąt przy wierzchołku E będzie miał miarę:

$$|\angle DEB| = 180^\circ - 40^\circ - 95^\circ = 45^\circ$$

W tym momencie widzimy wyraźnie, że obydwie te trójkąty mają miary kątów 40° , 45° , 95° .

Tak na marginesie to zwróć uwagę na to, że rysunek szkicowy podany w treści zadania był sporą zmyłką, bo z rysunku nie wynika to, że kąt przy wierzchołku B jest rozwarty.

Zadanie 8

0-1 pkt

Ile wierzchołków ma ostrosłup o 30 krawędziach?

Odpowiedź: B (16)

Krok 1. Wyznaczenie figury znajdującej się w podstawie ostrosłupa.

Ostrosłup mający w podstawie n -kąt ma $2n$ krawędzi. Skoro więc nasza bryła ma 30 krawędzi, to:

$$2n = 30, n = 15$$

To oznacza, że w podstawie znajduje się piętnastokąt.

Krok 2. Obliczenie liczby wierzchołków.

Z własności ostrosłupów wiemy, że ostrosłup mający n -kąt w podstawie ma $n + 1$ wierzchołków. Skoro w naszej podstawie znajduje się piętnastokąt, to wierzchołków będziemy mieć $15 + 1 = 16$.

Zadanie 9

0-1 pkt

Liczba k jest najmniejszą liczbą całkowitą, dla której wyrażenie $60 + 15k$ przyjmuje wartość dodatnią. Wskaż liczbę przeciwną do liczby k .

Odpowiedź: C (3)

Krok 1. Zapisanie i rozwiązanie nierówności.

Musimy sprawdzić kiedy wyrażenie $60 + 15k$ przyjmuje wartości dodatnie, czyli kiedy $60 + 15k$ jest większe od 0. W związku z tym:

$$60 + 15k > 0, 15k > -60, k > -4$$

Wiemy już, że k musi być większe od -4 . Szukamy teraz najmniejszej liczby całkowitej, która spełnia tę nierówność. Najmniejszą liczbą całkowitą, która spełnia tę nierówność jest -3 . Zwróć uwagę na to, że -4 nie spełnia tej nierówności, bo muszą to być wartości większe od -4 .

Krok 2. Zapisanie liczby przeciwnej.

To jednak nie jest koniec zadania. Musimy jeszcze zapisać liczbę przeciwną do tej, którą uzyskaliśmy w pierwszym kroku. Liczbą przeciwną do -3 jest oczywiście 3 i taka też jest odpowiedź do naszego zadania.

Zadanie 10

0-1 pkt

W sklepie Sporton w koszu znajdują się pudełka z piłkami do ping-ponga w dwóch kolorach: białym i pomarańczowym. Piłki białe są zapakowane po 6 sztuk, a pomarańczowe - po 4 sztuki. Jakub policzył pudełka i piłki, po czym stwierdził, że pudełek z piłkami pomarańczowymi jest o 5 więcej niż pudełek z piłkami białymi, ale łącznie w pudełkach jest tyle samo piłek białych, co piłek pomarańczowych.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedzi spośród oznaczonych literami A i B oraz C i D.

W koszu znajduje się łącznie $\boxed{A}$ / $\boxed{B}$ piłek. Pudełek z piłkami białymi jest $\boxed{C}$ / $\boxed{D}$ mniej niż pudełek z piłkami pomarańczowymi.

Odpowiedź: B (120), C (o jedną trzecią)

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

Wprowadźmy do zadania następujące oznaczenia:

x - liczba opakowań piłeczek białych

$x + 5$ - liczba opakowań piłeczek pomarańczowych

Wiemy, że w każdym opakowaniu białych piłeczek jest 6 sztuk. Skoro mamy x takich pudełek, a w każdym jest 6 piłeczek, to łącznie białych piłeczek będzie $6x$.

Wiemy też, że w każdym opakowaniu pomarańczowych piłeczek są 4 sztuki. Skoro mamy $x + 5$ takich pudełek, a w każdym są 4 piłeczki, to łącznie pomarańczowych piłeczek będzie $4 \cdot (x + 5)$.

Krok 2. Zapisanie i rozwiązanie równania.

Z treści zadania wynika, że piłeczek białych oraz pomarańczowych jest taka sama ilość, czyli możemy zapisać następujące równanie:

$$6x = 4 \cdot (x + 5), \quad 6x = 4x + 20, \quad 2x = 20, \quad x = 10$$

Krok 3. Obliczenie liczby białych i pomarańczowych piłeczek.

Skoro poprzez x oznaczyliśmy sobie liczbę pudełek z białymi piłeczkami to wiemy już, że takich pudełek jest łącznie 10. W każdym pudełku jest 6 piłeczek, czyli łącznie białych piłeczek jest 60.

Pudełek z pomarańczowymi piłeczkami mamy $x + 5$, czyli będzie to $10 + 5 = 15$ pudełek. W każdym pudełku znajdują się 4 piłeczki, zatem łącznie będzie to $15 \cdot 4 = 60$.

Krok 4. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Z poprzedniego kroku wiemy, że mamy 60 piłeczek białych oraz 60 pomarańczowych, zatem wszystkich piłeczek jest łącznie:

$$60 + 60 = 120$$

Krok 5. Rozwiązanie drugiej części zadania.

Przed chwilą obliczyliśmy sobie, że pudełek z białymi piłeczkami jest 10, a pudełek z pomarańczowymi jest 15. Pudełek z białymi piłeczkami jest więc o 5 mniej niż z pomarańczowymi, zatem jest ich mniej o $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, czyli o jedną trzecią.

Tak na marginesie - bardzo łatwo tutaj o pomyłkę. Nie możemy zapisać, że pudełek z białymi piłeczkami

jest mniej o $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, czyli o połowę, bo naszym punktem odniesienia są pudełka z pomarańczowymi piłeczkami (i dlatego to 15 jest w mianowniku, a nie 10).

Zadanie 11

0-1 pkt

Merkury i Neptun to planety Układu Słonecznego. Masa Merkurego to około $3,3 \cdot 10^{23} kg$, a masa Neptuna - około $1,0 \cdot 10^{26} kg$. Ile razy masa Neptuna jest większa od masy Merkurego?

Odpowiedź: B (około 300 razy)

Naszym zadaniem jest tak naprawdę obliczenie ile jest równe $\frac{1,0 \cdot 10^{26}}{3,3 \cdot 10^{23}}$. Aby rozwiązać to działanie, to najprościej będzie zamienić sobie $1,0 \cdot 10^{26}$ na $10 \cdot 10^{25}$. Co nam da taka zamiana? Dzięki niej będziemy mogli skrócić liczbę 10 z liczbą 3,3 (w zaokrągleniu $10 : 3,3$ będzie równe 3) Całość będzie wyglądać następująco:

$$\frac{1,0 \cdot 10^{26}}{3,3 \cdot 10^{23}} = \frac{10 \cdot 10^{25}}{3,3 \cdot 10^{23}} \approx 3 \cdot 10^{25-23} \approx 3 \cdot 10^2 \approx 3 \cdot 100 \approx 300$$

Niżej przedstawiono fragment rozkładu jazdy pociągów ze stacji Warszawa Śródmieście PKP do Żyrardowa.

	Godzina odjazdu	Godzina przyjazdu
1	15:34	16:24
2	16:04	17:05
3	16:42	17:32
4	17:12	18:09

Na trasie Warszawa Śródmieście PKP-Żyrardów pociągi pokonują 43 km . Które pociągi przebywają tę trasę ze średnią prędkością większą niż $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Odpowiedź: B (1. i 3.)

Krok 1. Obliczenie czasu jazdy poszczególnych pociągów.

Korzystając z informacji zawartych w tabelce możemy powiedzieć, że:

1. pociąg pokonuje trasę w 50 minut.
2. pociąg pokonuje trasę w 61 minut.
3. pociąg pokonuje trasę w 50 minut.
4. pociąg pokonuje trasę w 57 minut.

W tym momencie moglibyśmy się wykazać sprytem i od razu wskazać prawidłową odpowiedź do tego zadania. W każdej z odpowiedzi mamy wymienione dwa numery pociągów, czyli zgodnie z logiką - muszą to być te dwa pociągi, które naszą trasę pokonały najszybciej. Już po tak prostej analizie możemy stwierdzić, że na pewno prawidłową odpowiedzią do tego zadania jest odpowiedź druga. Spróbujmy jednak obliczyć to sobie nieco bardziej matematycznie.

Krok 2. Obliczenie oczekiwanego czasu jazdy przy prędkości $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Możemy oczywiście obliczyć prędkość jazdy każdego z pociągów i sprawdzić kiedy pociąg porusza się z prędkością większą niż $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jest to jednak dość czasochłonne, zwłaszcza że bazując na czasach z pierwszego kroku trzeba jeszcze zamienić minuty na godziny, zatem będziemy mieć w działaniach dość "brzydkie" liczby.

Znacznie łatwiej jest obliczyć w jakim czasie pociąg pokona tę trasę z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, co pozwoli nam później porównać ten czas do czasu jazdy naszych czterech pociągów. Korzystając ze wzoru $v = \frac{s}{t}$ możemy zapisać, że:

$$v = \frac{s}{t} \quad \left/ \cdot t, s = v \cdot t \right/ \quad \left/ : v, t = \frac{s}{v} \right/$$

Podstawiając teraz $s = 43km$ oraz $v = 50\frac{km}{h}$ otrzymamy:

$$t = \frac{43km}{50\frac{km}{h}}, t = \frac{43}{50}h, t = 0,86h$$

Skoro godzina ma 60 minut, to:

$$t = 0,86 \cdot 60min = 51,6min$$

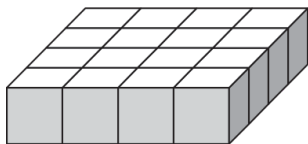
Krok 3. Interpretacja otrzymanego wyniku.

Wiemy już, że pociąg pokona trasę $43km$ ze średnią prędkością $50\frac{km}{h}$ w ciągu 51,6 minuty. My chcemy, by ta średnia prędkość była wyższa, czyli czas jazdy musi być krótszy niż 51,6 minuty. Z tego też względu pociągami, które pojadą szybciej są pociągi o numerach 1 oraz 3.

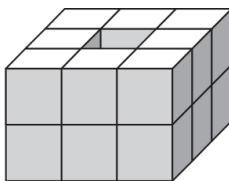
Zadanie 13

0-1 pkt

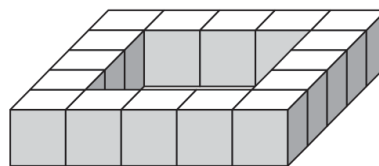
Każda z poniższych figur jest zbudowana z szesnastu jednakowych sześciennych kostek o krawędzi 1cm.



I



II



III

Niech P_I, P_{II}, P_{III} oznaczają pola powierzchni całkowitej odpowiednio figur: I, II i III. Która zależność między polami tych figur jest prawdziwa?

Odpowiedź: C ($P_I = P_{II} < P_{III}$)

Tak prawdę mówiąc nie musimy liczyć pole powierzchni jako takiej. Wystarczy, że sprawnie obliczymy liczbę "kwadracików" każdej z podstaw oraz ścian bocznych. Ta figura, która tych "kwadracików" będzie miała najwięcej, będzie miała jednocześnie największe pole powierzchni.

Krok 1. Obliczenie pola powierzchni pierwszej figury.

W podstawie dolnej i górnej pierwszej figury mamy po 16 kwadratów. W każdej z czterech ścian bocznych mamy 4 kwadraty. Pole powierzchni będzie więc równe:

$$P_I = 2 \cdot 16 + 4 \cdot 4, P_I = 32 + 16, P_I = 48$$

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni drugiej figury.

W podstawie dolnej i górnej pierwszej figury mamy po 8 kwadratów. W każdej z czterech ścian bocznych mamy 6 kwadratów. Ale to nie koniec, bo mamy jeszcze kwadraty wewnątrz naszej bryły - jak się dobrze przyjrzymy, to doliczymy się, że tych wewnętrznych kwadratów jest 8 (po dwa na każdej z czterech wewnętrznych ścian). Pole powierzchni będzie więc równe:

$$P_{II} = 2 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 8, P_{II} = 16 + 24 + 8, P_{II} = 48$$

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni trzeciej figury.

W podstawie dolnej i górnej pierwszej figury mamy po 16 kwadratów. W każdej z czterech ścian bocznych mamy 5 kwadratów. I tu także mamy jeszcze kwadraty wewnątrz naszej figury, a jest ich dokładnie 12 (po trzy na każdej z czterech wewnętrznych ścian). Pole powierzchni będzie więc równe:

$$P_{III} = 2 \cdot 16 + 4 \cdot 5 + 12, P_{III} = 32 + 20 + 12, P_{III} = 64$$

To oznacza, że $P_I = P_{II} < P_{III}$.

Zadanie 14

0-1 pkt

Pierwiastek kwadratowy z liczby a jest równy 36. Która z podanych równości jest nieprawdziwa?

Odpowiedź: A ($\sqrt{a^2} = 6^2$)

Krok 1. Obliczenie wartości liczby a .

Nie jest to krok konieczny, ale na pewno pomaga w zrozumieniu istoty zapisów, które pojawiają się w odpowiedziach i pozwala też szybko zweryfikować poprawność naszego wyboru. Skoro pierwiastek kwadratowy z a jest równy 36, to a jest równe 36^2 , czyli 1296.

Krok 2. Sprawdzenie poprawności odpowiedzi.

Sprawdźmy teraz poprawność każdej z odpowiedzi.

Odp. A. To jest nieprawda, bo zgodnie z definicją pierwiastków, $\sqrt{a^2}$ będzie równe $|a|$, czyli w naszym przypadku byłoby to 1296. Tymczasem po prawej stronie równania mamy 6^2 które jest równe 36.

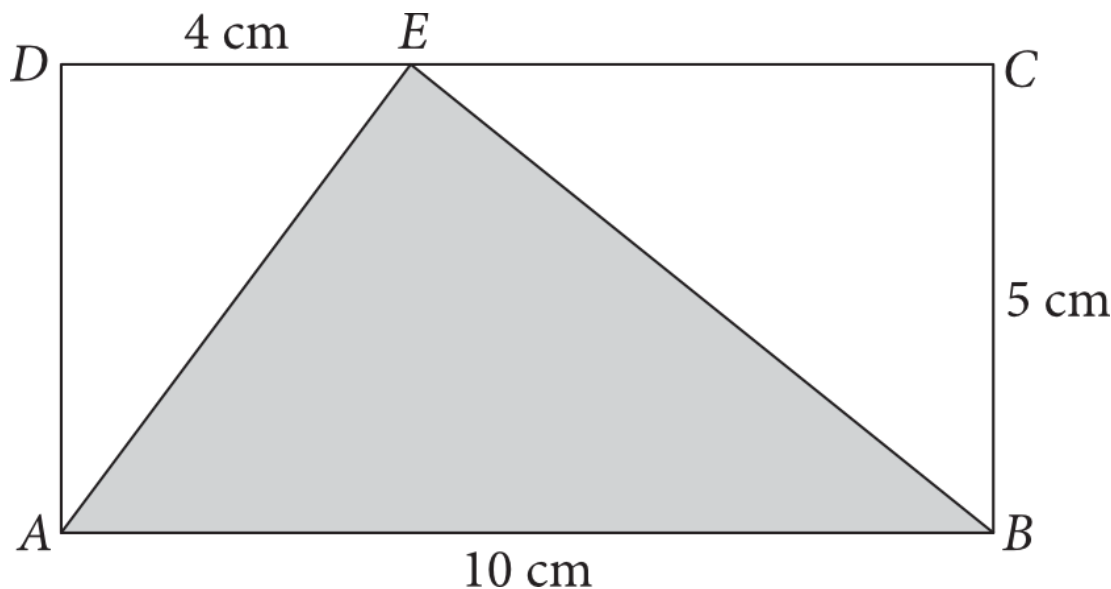
Odp. B. To prawda, co zresztą wykorzystaliśmy do poznania wartości tej liczby w pierwszym kroku.

Odp. C. To prawda, bowiem skoro pierwiastek z a to 36, to mamy ułamek $\frac{36}{6}$, co faktycznie jest równe 6.

Odp. D. To prawda. Po lewej stronie równania pierwiastek z potęgą się skróci, czyli zostanie nam a (o którym wiemy już, że to jest 1296). Po prawej stronie mamy 6^4 , co jest równe właśnie 1296.

Nieprawdziwa była więc pierwsza równość.

Dany jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości 5cm i 10cm . Na boku CD , w odległości 4cm od punktu D , zaznaczono punkt E , który połączono z punktami A i B tak, jak na rysunku.



Czy trójkąt ABE jest prostokątny? **A)** $|AE| + |EB| > |AB|$

B) $|AE|^2 + |EB|^2 > |AB|^2$

C) $|AE| + |EB| = |AB|$

Odpowiedź: Nie ponieważ opcja

Krok 1. Obliczenie długości boku AE .

Spójrzmy na biały trójkąt ADE . Jest to na pewno trójkąt prostokątny (bo kąt przy wierzchołku D jest kątem prostokąta). Odcinek AD ma długość 5cm , natomiast odcinek DE ma długość 4cm . Korzystając więc z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$4^2 + 5^2 = |AE|^2, \quad 16 + 25 = |AE|^2, \quad |AE|^2 = 41, \quad |AE| = \sqrt{41} \quad \vee \quad |AE| = -\sqrt{41}$$

Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, bo długość boku nie może być ujemna, zatem zostaje nam $|AE| = \sqrt{41}$.

Krok 2. Obliczenie długości boku BE .

Spoglądamy na trójkąt BCE . Sytuacja jest analogiczna do tej przed chwilą - to także jest trójkąt prostokątny i to właśnie z niego wyliczymy długość boku BE . Odcinek BC ma długość 5cm , natomiast odcinek EC ma długość $10\text{cm} - 4\text{cm} = 6\text{cm}$. W związku z tym:

$$6^2 + 5^2 = |BE|^2, \quad 36 + 25 = |BE|^2, \quad |BE|^2 = 61, \quad |BE| = \sqrt{61} \quad \vee \quad |BE| = -\sqrt{61}$$

Ujemny wynik także odrzucamy, zatem zostaje nam $|BE| = \sqrt{61}$.

Krok 3. Sprawdzenie, czy trójkąt ABE jest prostokątny.

Jeżeli trójkąt miałby być prostokątny to zgodnie z Twierdzeniem Pitagorasa $|AE|^2 + |BE|^2$ powinno być równe $|AB|^2$. Jeżeli taka równość nie zajdzie, to trójkąt nie będzie prostokątny. Sprawdźmy zatem ile jest równe $|AE|^2 + |BE|^2$:

$$|AE|^2 + |BE|^2 = \sqrt{41}^2 + \sqrt{61}^2 = 41 + 61 = 102$$

Teraz sprawdźmy ile jest równe $|AB|^2$:

$$|AB|^2 = 10^2 = 100$$

Widzimy wyraźnie, że suma kwadratów potencjalnych długości przyprostokątnych jest większa niż kwadrat długości potencjalnej przeciwprostokątnej. Stąd też płynie wniosek, że ten trójkąt nie jest prostokątny, ponieważ $|AE|^2 + |EB|^2 > |AB|^2$.

Zadanie 16

0-2 pkt

W przepisie na ciasto do pizzy znajdują się następujące składniki:

- 250g mąki pszennej,
- 150ml ciepłej wody,
- 25g drożdży świeżych lub 7g drożdży instant,
- 1 łyżeczka soli,
- pół łyżeczki cukru,
- 1 łyżka oliwy z oliwek.

Ewa chce przygotować ciasto z 600g mąki pszennej i drożdży instant. Musi przeliczyć składniki, aby zachować proporcje z przepisu. Uzupełnij zdanie.

Do przygotowania pizzy z 600g mąki pszennej Ewa powinna użyć ml ciepłej wody oraz g drożdży instant.

Odpowiedź: Ewa powinna użyć 360

Krok 1. Obliczenie współczynnika proporcji.

Podany przepis mówi nam, że do przygotowania pizzy potrzeba 250g mąki. Skoro Ewa chce wykorzystać 600g, to znaczy że chce zrobić pizzę, która jest $600 : 250 = 2,4$ razy większa. To oznacza, że każdego ze składników pizzy trzeba użyć w ilości 2,4 razy większej niż jest to podane w przepisie.

Krok 2. Obliczenie ilości wody oraz drożdży.

W przepisie mamy informację, że potrzebujemy 150ml wody, a skoro musimy jej użyć 2,4 razy więcej, to zużyjemy jej:

$$150ml \cdot 2,4 = 360ml$$

Analogicznie postąpimy z drożdżami. W przepisie jest informacja, że potrzebujemy 7g drożdży instant, a skoro musimy ich użyć 2,4 razy więcej, to zużyjemy ich w ilości:

$$7g \cdot 2,4 = 16,8g$$

Zadanie 17

0-2 pkt

Dane są dwie liczby: $a = 7^7 : 7^2 : 7^5$ oraz $b = \sqrt{9}$. Oblicz wartość wyrażenia $|a - b|$.

Odpowiedź: $|a - b| = 2$

Krok 1. Obliczenie wartości liczb a oraz b .

Zacznijmy od liczby a . Korzystając z działań na potęgach możemy zapisać, że:

$$7^7 : 7^2 : 7^5 = 7^{7-2} : 7^5 = 7^5 : 7^5 = 1$$

Teraz obliczmy wartość liczby b . Tutaj raczej problemów być nie powinno, bo po prostu $\sqrt{9} = 3$.

Krok 2. Obliczenie wartości wyrażenia $|a - b|$.

Wiemy już, że $a = 1$ oraz $b = 3$, zatem:

$$|a - b| = |1 - 3| = |-2| = 2$$

Zadanie 18

0-2 pkt

W pewnej rodzinie tata Krzysztof obchodzi urodziny 17 lipca, syn Mateusz - 17 kwietnia, a syn Szymon - 17 października. Który z synów ma urodziny w ten sam dzień tygodnia co tata?

Odpowiedź: Urodziny w ten sam d

Krok 1. Obliczenie liczby dni między datą urodzin taty oraz syna Mateusza.

Musimy obliczyć ile dni jest od 17 kwietnia do 17 lipca. Możemy to zrobić dowolnie wybraną przez siebie metodą, ale najbezpieczniej będzie chyba przeanalizować to w ten sposób:

- 18 kwietnia to 1. dzień po urodzinach
- 30 kwietnia to 13. dzień po urodzinach
- 31 maja to 44. dzień po urodzinach
- 30 czerwca to 74. dzień po urodzinach
- 17 lipca to 91. dzień po urodzinach

Krok 2. Obliczenie liczby dni między datą urodzin taty oraz syna Szymona.

Rozpiszmy to tak samo jak przed chwilą, tyle że tym razem liczymy od 17 lipca do 17 października:

- 18 lipca to 1. dzień po urodzinach
- 31 lipca to 14. dzień po urodzinach
- 31 sierpnia to 45. dzień po urodzinach
- 30 września to 75. dzień po urodzinach
- 17 października to 92. dzień po urodzinach

Krok 3. Interpretacja otrzymanych wyników.

Aby urodziny były w ten sam dzień tygodnia, to liczba dni dzieląca poszczególne urodziny musi być podzielna przez 7.

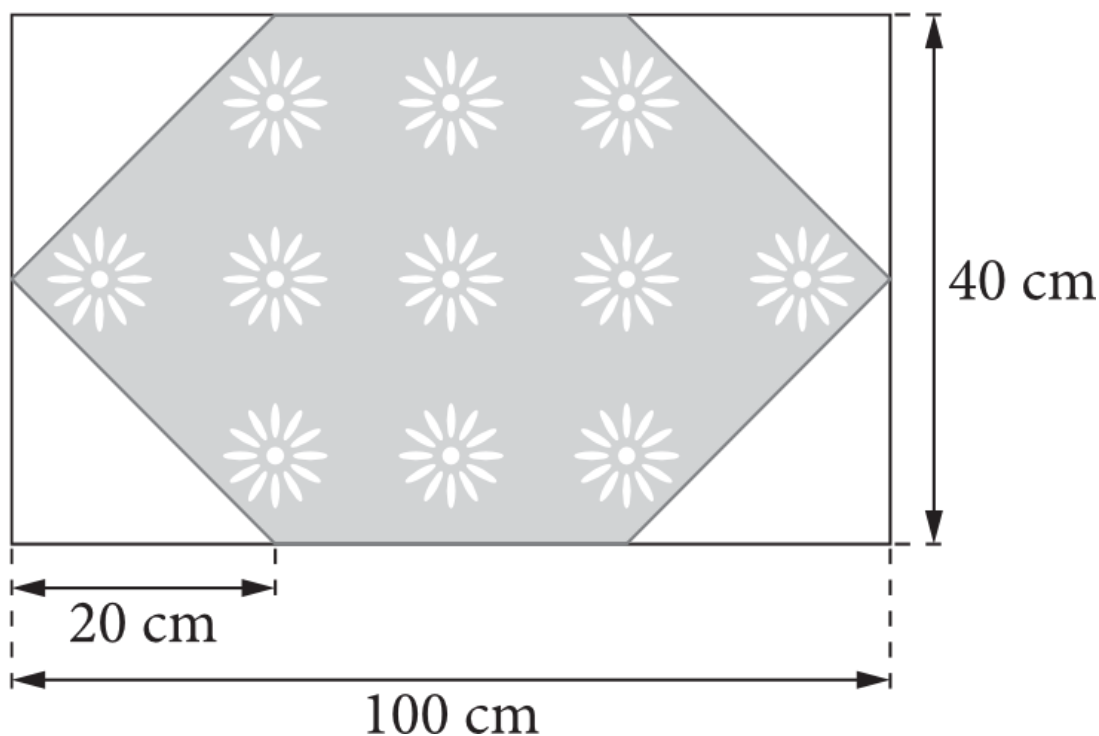
Urodziny taty od urodzin Mateusza dzieli 91 dni, czyli $91 : 7 = 13$ pełnych tygodni. Tata z Mateuszem będą więc mieć urodziny w ten sam dzień tygodnia.

Urodziny taty od urodzin Szymona dzielą 92 dni, czyli 13 pełnych tygodni i jeszcze 1 dzień. Z tego też względu tata z Szymonem nie będą mieć urodzin tego samego dnia.

Zadanie 19

0-3 pkt

Ciocia Jola uszyła serwetę ze skośnymi brzegami, która pasuje do prostokątnego stolika o wymiarach 100cm i 40cm (jak na rysunku).

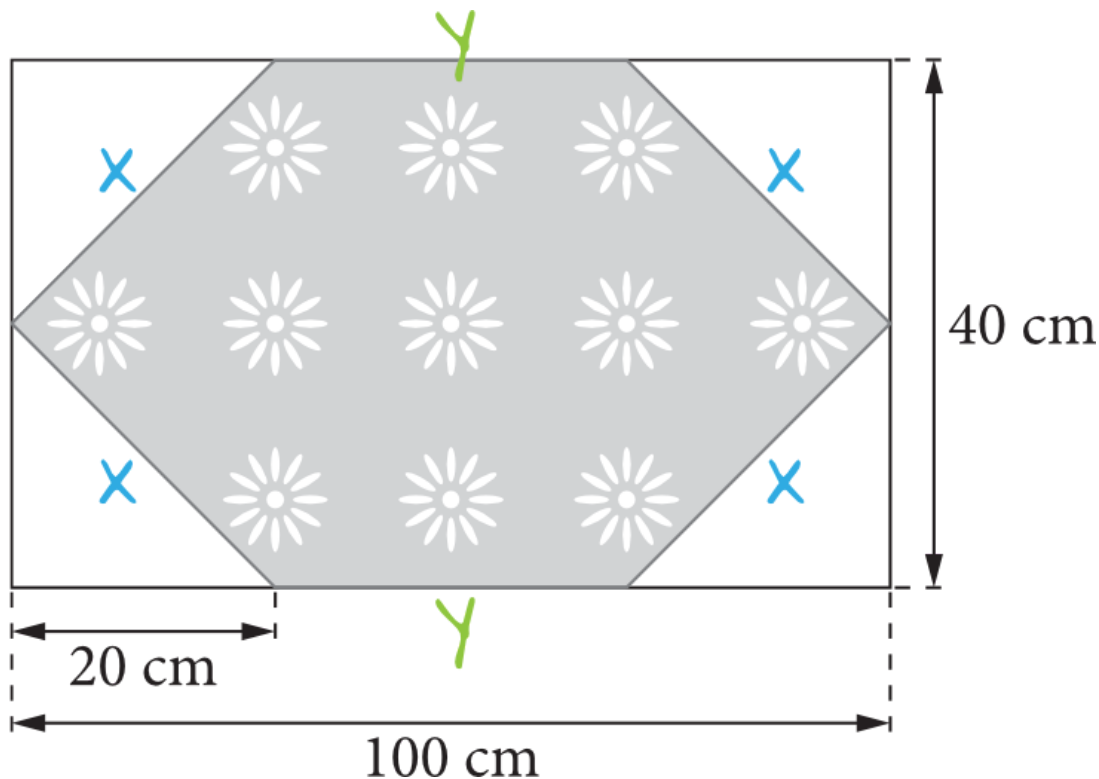


Brzeg serwetki chce obszyć kolorową tasiemką. Czy na obszycie wystarczy $2,5\text{m}$ tasiemki? Przyjmij $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Odpowiedź: Tasiemka o długości

Krok 1. Sporządzenie rysunku pomocniczego.

Powinniśmy zauważyć, że w rogach rysunku mamy trójkąty prostokątne, których przyprostokątne mają długość 20cm . Wspominamy sobie o tych trójkątach, bowiem na obwód serwetki składają się m.in. przeciwprostokątne tychże trójkątów (oznaczymy je sobie na szkicu jako x). Dodatkowo na dole i górze mamy fragmenty serwetki, które oznaczymy sobie jako y . Całość na rysunku z oznaczeniami będzie wyglądać następująco:



Krok 2. Obliczenie długości odcinków oznaczonych jako x .

Na rysunku mamy cztery odcinki oznaczone jako x , zatem obliczmy miarę każdego z takich boków. Możemy skorzystać tutaj wprost z Twierdzenia Pitagorasa i zapisać, że $20^2 + 20^2 = x^2$, ale możemy też postąpić nieco sprytniej. Tak naprawdę nasze trójkąty prostokątne są klasycznymi trójkątami o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ (wiemy to, bo przyprostokątne mają jednakową długość). Z własności takich trójkątów wynika, że ich przeciwprostokątna jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od długości przyprostokątnych, zatem możemy zapisać od razu, że $x = 20\sqrt{2}cm$.

Krok 3. Obliczenie długości odcinków oznaczonych jako y .

Odcinki oznaczone jako y są dość proste do policzenia, bowiem będzie to długość $100cm$, która jest pomniejszona z lewej i prawej strony o $20cm$. Możemy więc zapisać, że:

$$y = 100cm - 2 \cdot 20cm, y = 100cm - 40cm, y = 60cm$$

Krok 4. Obliczenie obwodu całej serwety.

Na obwód naszej serwety składają się cztery odcinki oznaczone jako x oraz dwa odcinki oznaczone jako y , zatem:

$$Obw = 4 \cdot 20 \cdot 2 + 2 \cdot 60, Obw = 80\sqrt{2} + 120[cm]$$

Przyjmując przybliżenie $\sqrt{2} \approx 1,4$ otrzymamy:

$$Obw \approx 80 \cdot 1,4 + 120, Obw \approx 112 + 120, Obw \approx 232[cm] \approx 2,32m$$

To oznacza, że tasiemka o długości $2,5m$ jak najbardziej wystarczy do obszycia naszej serwety.

Pływalnia Wodny Raj oferuje bilety na wejścia jednorazowe oraz miesięczne karnety.

Oferta pływalni Wodny Raj

Rodzaj usługi	Czas korzystania	Cena usługi	Cena za przekroczenie limitu czasu
Bilet normalny	45 minut	10 zł	1 zł za każde rozpoczęte 5 minut
Bilet ulgowy	45 minut	6,50 zł	0,50 zł za każde rozpoczęte 5 minut
Karnet normalny	720 minut	125 zł	---
Karnet ulgowy	720 minut	90 zł	---

Michał i jego tata bywają na pływalni regularnie. Spędzają tam 60 minut. W ostatnim miesiącu kupili karnety - normalny dla taty i ulgowy dla Michała. Każdy z nich był na pływalni 11 razy. Czy zakup karnetów dla każdego z nich był korzystny?

Odpowiedź: Karnet Michała nie b

Krok 1. Obliczenie ceny pojedynczego wejścia na basen (bez karnetu).

Michał i tata korzystają z basenu przez 60 minut. To oznacza, że zgodnie z cennikiem muszą zapłacić za taki pobyt cenę za 45 minut plus opłaty za przekroczenie limitu o 15 minut. Spójrzmy jak to będzie wyglądać w praktyce:

Michał musi zapłacić 6,50zł za 45 minut. Za przekroczenie czasu o 15 minut będzie musiał zapłacić dodatkowo $3 \cdot 0,50zł = 1,50zł$. Całe pojedyncze wyjście na basen kosztować więc będzie:

$$6,50zł + 1,50zł = 8zł$$

Tata musi zapłacić 10zł za 45 minut. Za przekroczenie czasu o 15 minut będzie musiał zapłacić dodatkowo $3 \cdot 1zł = 3zł$. Całe pojedyncze wyjście na basen kosztować więc będzie:

$$10zł + 3zł = 13zł$$

Krok 2. Obliczenie ceny biletów na 11 wejść na basen (bez karnetu).

Skoro cena biletu Michała wynosi 8zł, to na 11 wejść wyda on $8zł \cdot 11 = 88zł$.

Skoro cena biletu taty wynosi 13zł, to na 11 wejść wyda on $13zł \cdot 11 = 143zł$.

Krok 3. Analiza opłacalności karnetów.

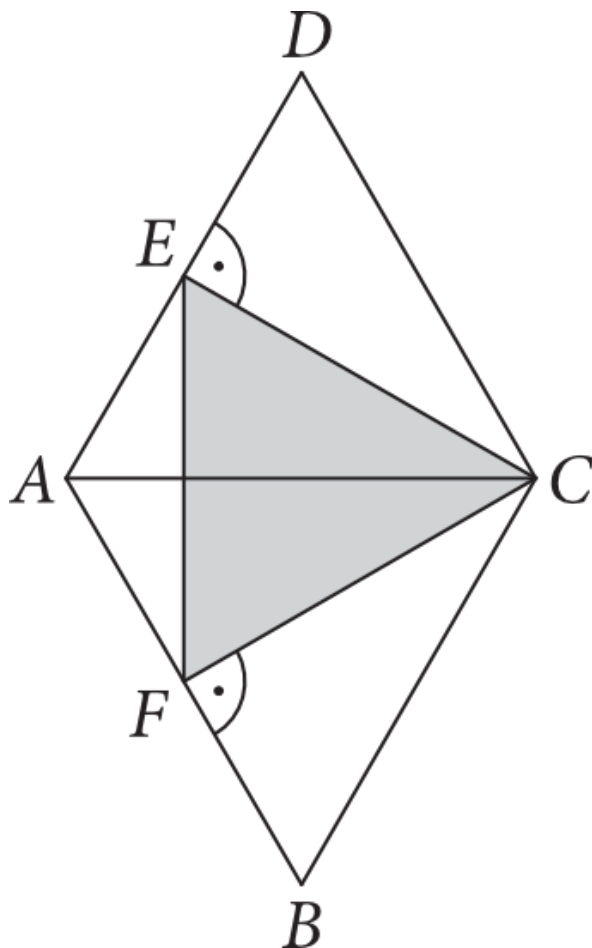
Michał za karnet zapłacił 90zł. Gdyby kupował bilety oddzielnie, to zapłaciłby 88zł. W przypadku Michała karnet nie był więc opłacalny.

Tata za karnet zapłacił 125zł. Gdyby kupował bilety oddzielnie, to zapłaciłby 143zł. W przypadku taty karnet był więc opłacalny.

Zadanie 21

0-3 pkt

Dwa trójkąty równoboczne o boku 4cm sklejono podstawami. W każdym z tych trójkątów poprowadzono wysokości CE i CF (jak na rysunku).



Uzasadnij, że trójkąt EFC jest równoboczny, i oblicz jego pole.

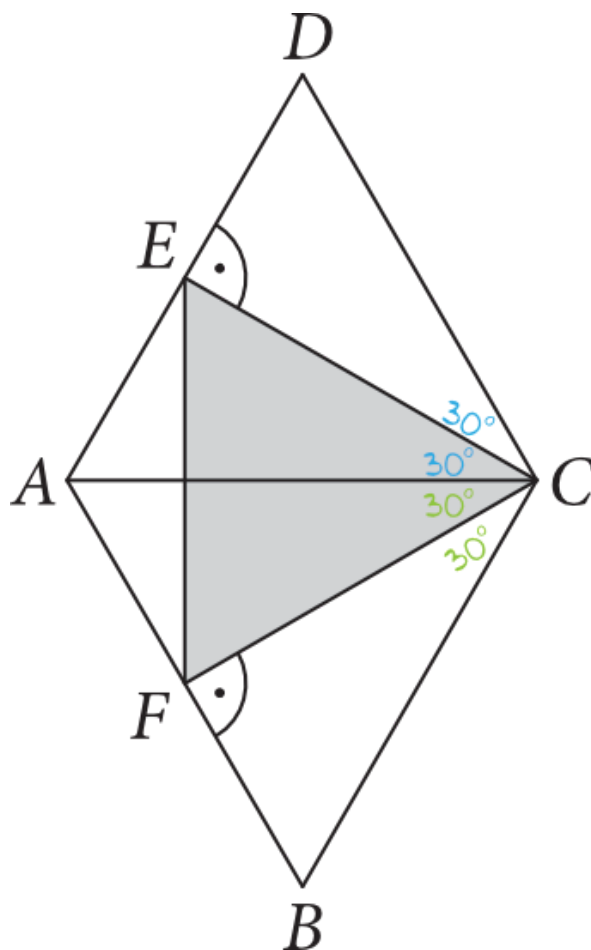
Odpowiedź: Uzasadniono korzysta

Krok 1. Dostrzeżenie, że boki EC oraz FC mają jednakową długość.

Spójrzmy na odcinki EC oraz FC . Jeden i drugi to wysokości trójkątów równobocznych (ACD oraz ABC) o boku $a = 4\text{cm}$. To z kolei prowadzi nas do bardzo ważnego wniosku, że odcinki EC oraz FC są jednakowej długości (w dalszych krokach obliczymy sobie jaka jest to dokładnie długość). Póki co możemy zapisać, że $|EC| = |FC|$. Mając tę informację wiemy już na pewno, że trójkąt EFC jest przynajmniej równoramienny (nie jesteśmy jeszcze pewni, czy jest równoboczny).

Krok 2. Dostrzeżenie, że kąt ECF ma miarę 60° .

Wysokość trójkąta równobocznego jest tak naprawdę dwusieczną kąta. Jeżeli więc spojrzymy np. na trójkąt ACD , to stwierdzimy, że wysokość EC dzieli kąt przy wierzchołku C na dwa kąty o mierze 30° . Podobnie będzie w przypadku trójkąta ABC . Na rysunku sytuacja będzie wyglądać następująco:



Możemy więc powiedzieć, że kąt ECF ma miarę 60° .

Krok 3. Zakończenie dowodzenia.

Wiemy już, że trójkąt jest przynajmniej równoramienny, bo ramiona EC oraz FC są jednakowej długości. Wiemy też, że kąt ECF ma miarę 60° . Z własności trójkątów równoramiennych wynika, że kąty przy podstawie mają jednakową miarę. U nas oznaczałoby to, że kąty przy podstawie EF muszą mieć łączną miarę $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, a to oznacza, że każdy z kątów przy podstawie musi mieć miarę:

$$120^\circ : 2 = 60^\circ$$

Wyszło nam więc, że każdy kąt trójkąta EFC ma miarę 60° , zatem jest to trójkąt równoboczny.

Krok 4. Obliczenie długości boków trójkąta EFC .

Do obliczenia pola powierzchni potrzebujemy poznać długość boku trójkąta. Widzimy wyraźnie, że bok np. EC jest wysokością trójkąta równobocznego ACD . Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego możemy zapisać, że:

$$|EC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, |EC| = \frac{4\sqrt{3}}{2}, |EC| = 2\sqrt{3}[cm]$$

To oznacza, że każdy bok naszego trójkąta EFC ma długość $2\sqrt{3}cm$.

Krok 5. Obliczenie pola powierzchni trójkąta EFC .

Wiemy już, że bok tego trójkąta ma długość $2\sqrt{3}cm$, zatem podstawiając te dane do wzoru na pole trójkąta równobocznego otrzymamy:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, P = \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}, P = \frac{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4}, P = 3\sqrt{3}[cm^2]$$