

Klucz odpowiedzi i rozwiązania — Próbny egzamin ósmoklasisty z matematyki - Nowa Era 2018

Opracowanie Matematix.pl na podstawie rozwiązań zadań w serwisie — nie jest to oficjalny dokument CKE ani wydawnictwa. Zadania i rozwiązania online: matematix.pl.
Wygenerowano 26.09.2026.

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	Odpowiedź	Pkt
1	D (o 7 : 59)	1
2	D (Stanisław Ignacy Witkiewicz)	1
5	B (dwa), C (niewymierna)	1
6	C (16)	1
7	C ($\frac{2}{7}$)	1
8	B (3km)	1
12	A (20%), D (25%)	1
13	A (tyle samo co Pola), C (4zł)	1
14	A ($x + 2$)	1
16	D ($P_{II} < P_{III} < P_I$)	1

Rozwiązania krok po kroku

Zadanie 1

0-1 pkt

Kasia pokonuje drogę z domu do szkoły pieszo i autobusem. Z domu wychodzi o godzinie 7 : 00 i idzie na przystanek, z którego ma autobus o 7 : 06. Po przejechaniu 30 minut wysiada i idzie stamtąd do szkoły kwadrans. Pewnego dnia autobus stał w korku i dojechał na przystanek docelowy 8 minut później. O której godzinie Kasia dotarła do szkoły, jeśli szła tym samym tempem co zwykle?

Odpowiedź: D (o 7 : 59)

Rozpiszmy sobie po kolei całą trasę pokonywaną przez Kasię:

30 minut - tyle trwa podróż autobusem

15 minut (kwadrans) - tyle trwa dojście do szkoły

8 minut - tyle opóźnienia miał autobus

Łącznie podróż tego dnia trwała: $30 + 15 + 8 = 53$ minuty.

Skoro podróż autobusem zaczęła się o 7 : 06 i trwała w sumie 53 minuty, to do szkoły Kasia dotarła o godzinie 7 : 59.

Zadanie 2

0-1 pkt

Pod portretami polskich pisarzy w muzeum zapisano następujące daty urodzin i śmierci:

Adam Mickiewicz *MDCCXCVIII – MDCCCLV*

Cyprian Kamil Norwid *MDCCCXXI – MDCCCLXXXIII*

Jan Kasproicz *MDCCCLX – MCMXXVI*

Stanisław Ignacy Witkiewicz *MDCCCLXXXV – MCMXXXIX*

Który z pisarzy żył najkrócej?

Odpowiedź: D (Stanisław Ignacy Witkiewicz)

Krok 1. Zapisanie dat urodzin i śmierci pisarzy.

Spróbujmy zapisać daty urodzin i śmierci polskich pisarzy za pomocą liczb arabskich:

Adam Mickiewicz: 1798 – 1855

Cyprian Kamil Norwid: 1821 – 1883

Jan Kasproicz: 1860 – 1926

Stanisław Ignacy Witkiewicz: 1885 – 1939

Krok 2. Obliczenie długości życia każdego z pisarzy.

Znając daty urodzin i śmierci możemy obliczyć długość życia każdego z pisarzy:

Adam Mickiewicz: $1855 - 1798 = 57$ lat

Cyprian Kamil Norwid: $1883 - 1821 = 62$ lata

Jan Kasproicz: $1926 - 1860 = 66$ lat

Stanisław Ignacy Witkiewicz: $1939 - 1885 = 54$ lata

To oznacza, że najkrócej żył Stanisław Ignacy Witkiewicz.

Zadanie 3

0-1 pkt

Trzech kolegów zamówiło po jednej pizzy tej samej wielkości. Antek zjadł $\frac{2}{3}$ pizzy, Bartek $\frac{5}{8}$ pizzy, a Czarek $\frac{3}{4}$ pizzy.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F - jeśli jest fałszywe. Antkowi zostało mniej pizzy niż Czarkowi. Antek, Bartek i Czarek zjedli razem więcej niż dwie całe pizze.

Antkowi zostało mniej pizzy niż Czarkowi.

Prawda

Fałsz

Antek, Bartek i Czarek zjedli razem więcej niż dwie całe pizze.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Sprawdźmy ile pizzy zostało Antkowi i Czarkowi.

Antkowi zostało $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ pizzy.

Czarkowi zostało $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ pizzy.

Mniejszym ułamkiem jest $\frac{1}{4}$, zatem mniej pizzy zostało Czarkowi. Zdanie jest więc nieprawdą.

Do zadania można było też podejść nieco inaczej. Wystarczyło sprawdzić kto zjadł więcej pizzy, co analogicznie oznaczałoby, że zostało mu mniej pizzy. Antek zjadł $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ pizzy, a Czarek zjadł $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ pizzy. Skoro więcej pizzy zjadł Czarek, to znaczy że mniej mu jej zostało.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Aby dowiedzieć się ile pizzy zjedli chłopcy musimy wykonać następujące działanie:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{16}{24} + \frac{15}{24} + \frac{18}{24} = \frac{49}{24} = 2\frac{1}{24}$$

Z obliczeń wyszło, że chłopcy zjedli wspólnie więcej niż dwie całe pizze, zatem zdanie jest prawdą.

Zadanie 4

0-1 pkt

Dane są liczby:

$$a = 4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3$$

$$b = (2^4)^2$$

$$c = 2^4$$

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F - jeśli jest fałszywe. Liczby a i b są równe. Liczba b jest dwa razy większa niż liczba c .

Liczby a i b są równe.

Prawda

Fałsz

Liczba b jest dwa razy większa niż liczba c .

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Sprowadzenie liczb do jednakowej podstawy potęgi.

Aby móc porównać te wszystkie liczby musimy sprowadzić je do jednakowej podstawy potęgi lub jednakowego wykładnika potęgi. W tym przypadku będziemy sprowadzać liczby do jednakowej podstawy potęgi, która będzie równa 2. Rozpiszmy sobie zatem każdą z liczb po kolei.

W przypadku liczby a musimy najpierw wykonać dodawanie potęg. Wiemy, że na dodawanie i odejmowanie potęg nie ma jakichś specjalnych wzorów (nie możemy dodawać wykładników potęg, bo wykładniki dodajemy przy mnożeniu potęg!). Trzeba się tutaj posłużyć pewnym sprytem i zauważyć, że czterokrotnie dodajemy tę samą potęgę, czyli 4^3 . Całość rozpisać możemy więc w następujący sposób:

$$a = 4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 4 \cdot 4^3 = 4^1 \cdot 4^3 = 4^{1+3} = 4^4$$

Chcemy jeszcze sprowadzić tę liczbę do podstawy potęgi równej 2, zatem zapisując 4 jako 2^2 i korzystając z działań na potęgach otrzymamy:

$$a = 4^4 = (2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8$$

Teraz przejdźmy do liczby b . Tutaj sprawa jest prosta, bo mamy potęgę do potęgi, więc wykładniki musimy wymnożyć:

$$b = (2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8$$

Na koniec liczba c . Z nią nic nie musimy robić, bo jest ona już zapisana w pożądanej przez nas postaci, zatem $c = 2^4$.

Krok 2. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

W poprzednim kroku udało nam się ustalić, że $a = 2^8$ oraz że $b = 2^8$. Te dwie liczby są więc sobie równe, czyli zdanie jest prawdą.

Krok 3. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Wiemy, że $b = 2^8$ oraz że $c = 2^4$. Już w tym momencie powinniśmy dostrzec, że liczba b nie jest dwa razy większa niż liczba c , ale jeśli tego nie dostrzegamy, to zawsze możemy podzielić te dwie liczby przez siebie:

$$2^8 : 2^4 = 2^{8-4} = 2^4 = 16$$

To oznacza, że liczba b jest 16 razy większa od liczby c .

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Liczba $3\sqrt{32}$ jest $\boxed{A}$ / $\boxed{B}$ razy większa od liczby $2\sqrt{18}$. Liczba $\sqrt{\sqrt{16} + \sqrt{81}}$ jest $\boxed{C}$ / $\boxed{D}$.

Odpowiedź: B (dwa), C (niewymierna)

Krok 1. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

W tym zadaniu musimy poprawnie wyłączyć czynniki przed znak pierwiastka, tak aby pod pierwiastkami jednej i drugiej liczby znalazła się ta sama wartość - dopiero wtedy będziemy w stanie powiedzieć ile razy jedna liczba jest większa od drugiej.

Zacznijmy od pierwszej liczby. Rozbijając 32 na iloczyn $16 \cdot 2$ otrzymamy:

$$3\sqrt{32} = 3 \cdot \sqrt{16 \cdot 2} = 3 \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

Teraz czas na drugą liczbę. Rozbijając 18 na iloczyn $9 \cdot 2$ otrzymamy:

$$2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \cdot 2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

To oznacza, że pierwsza liczba jest dwa razy większa od drugiej, bowiem $12\sqrt{2} : 6\sqrt{2} = 2$.

Krok 2. Rozwiązanie drugiej części zadania.

Wiedząc, że $\sqrt{16} = 4$ oraz że $\sqrt{81} = 9$ otrzymamy:

$$\sqrt{\sqrt{16} + \sqrt{81}} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Liczba wymierna to taka, którą da się zapisać w postaci ułamka zwykłego, którego licznik jest liczbą całkowitą, a mianownik jest różny od zera. Liczby $\sqrt{13}$ nie uda się zapisać w ten sposób i jest to klasyczny przykład liczby niewymiernej.

Zadanie 6

0-1 pkt

Marysia zapisała dwie sumy:

$$\underbrace{2^3 + 2^3 + \dots + 2^3}_{8 \text{ składników}} \quad \underbrace{2^2 + 2^2 + \dots + 2^2}_{? \text{ składników}}$$

Ile składników musi być w drugiej sumie, aby jej wartość była taka jak sumy pierwszej?

Odpowiedź: C (16)

Krok 1. Obliczenie wartości pierwszej sumy.

Nasza pierwsza suma polega na ośmiokrotnym dodaniu do siebie wartości 2^3 , co możemy zapisać jako $8 \cdot 2^3$. Wiedząc, że 8 to jest 2^3 możemy całość rozisać w następujący sposób:

$$8 \cdot 2^3 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$$

Krok 2. Analiza drugiej sumy.

W drugiej sumie dodajemy do siebie wartość 2^2 . Nie wiemy ile jest tych składników, więc możemy przyjąć że jest ich x . Chcemy, aby suma tych składników wyniosła 2^6 . Można więc powiedzieć, że analogicznie do pierwszego kroku, musimy się zastanowić kiedy $x \cdot 2^2 = 2^6$. Z działań na potęgach powinniśmy zauważyć, $2^4 \cdot 2^2 = 2^6$, stąd też naszą niewiadomą x jest 2^4 , czyli 16. Krótko mówiąc - aby otrzymać wartość 2^6 musimy 16 razy dodać do siebie 2^2 .

Zadanie 7

0-1 pkt

Na loterii fantowej w szkole jest 50 losów, a wśród nich 14 wygrywających. Ania jako pierwsza wzięła udział w loterii i wyciągnęła los pusty. Ile jest równe prawdopodobieństwo, że Hania, która losuje po Ani, wyciągnie los wygrywający?

Odpowiedź: C ($\frac{2}{7}$)

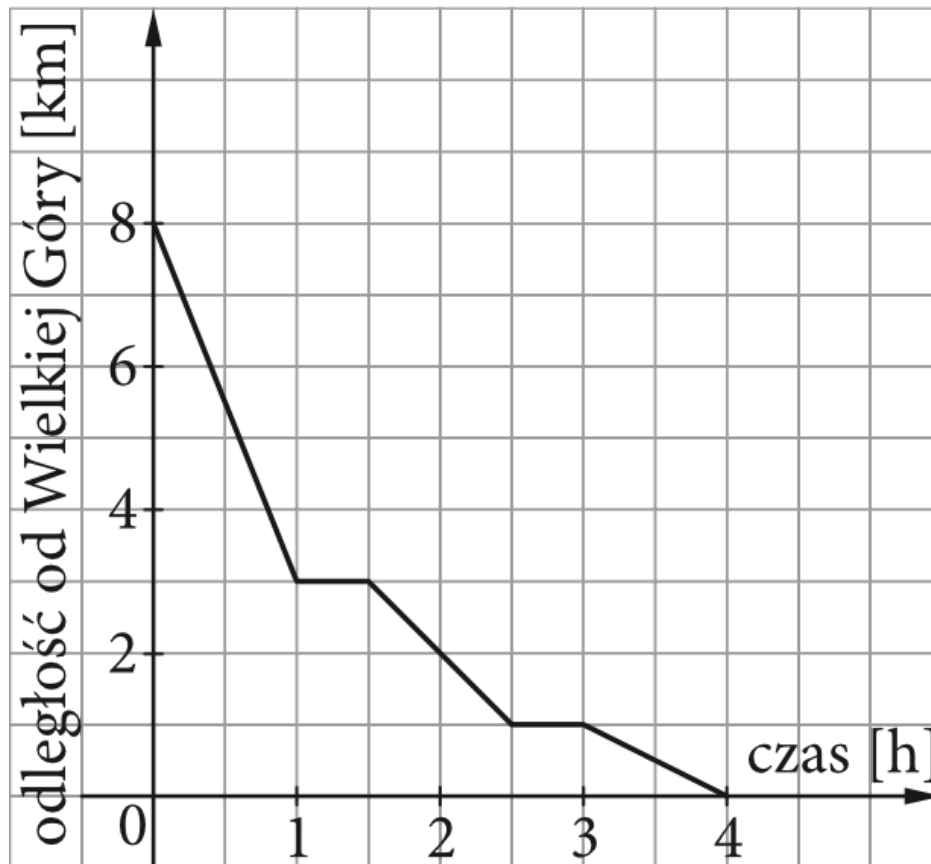
Omówmy całą sytuację - na początku mamy 14 losów wygrywających, a wszystkich losów jest łącznie 50. Ania wyciąga swój los i jest on pusty. To oznacza, że w puli nadal mamy 14 losów wygrywających, ale wszystkich losów jest już łącznie 49. Szanse Hani na to, że wyciągnie los zwycięski, wynoszą teraz:

$$P(A) = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}$$

Zadanie 8

0-1 pkt

Grupa harcerzy wyruszyła o godzinie 9 : 00 z miejsca zakwaterowania na szczyt Wielkiej Góry. W czasie wędrówki harcerze dwukrotnie zatrzymali się, by odpocząć. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniła się odległość harcerzy od celu wędrówki w zależności od czasu.



O godzinie 10 : 30 harcerze znajdowali się w miejscu oddalonym od celu wędrówki o:

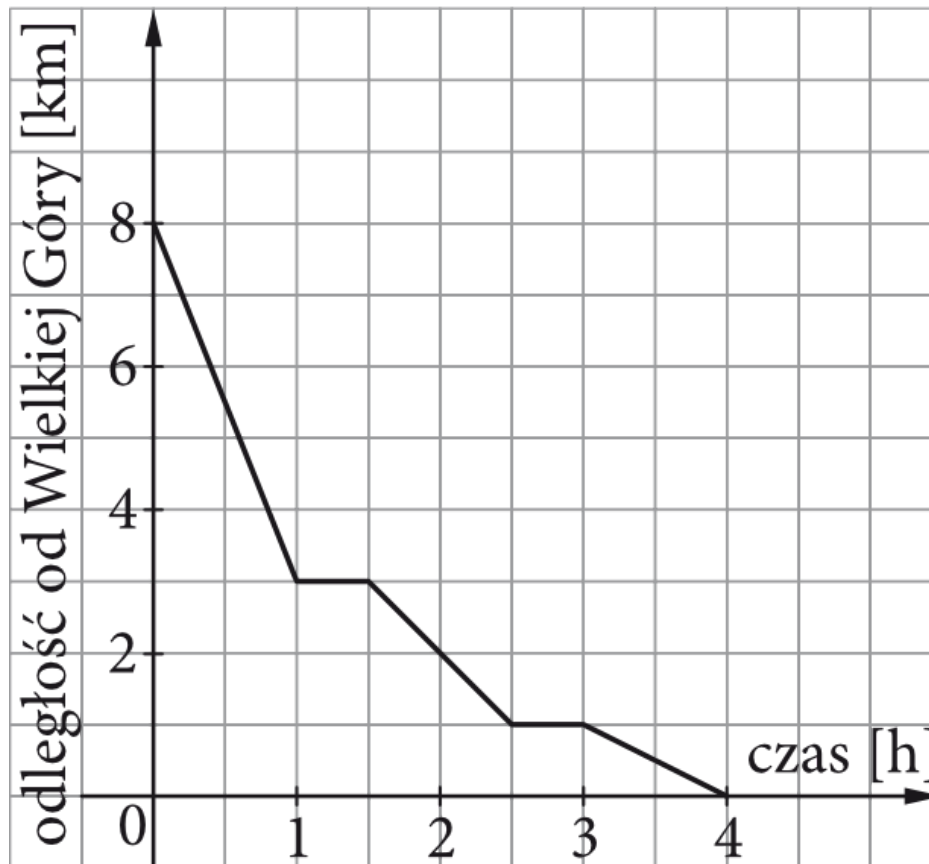
Odpowiedź: B (3km)

Wykres pokazuje nam jak z biegiem czasu zmieniła się odległość harcerzy od celu wędrówki. Skoro harcerze wyruszyli w trasę o godzinie 9 : 00, a nas interesuje jak daleko znajdowali się od celu o godzinie 10 : 30, to musimy sprawdzić na wykresie jak daleko od celu są harcerze po upływie 1, 5 godziny. Z wykresu możemy odczytać, że w tym momencie harcerze byli 3 kilometry od celu.

Zadanie 9

0-1 pkt

Grupa harcerzy wyruszyła o godzinie 9 : 00 z miejsca zakwaterowania na szczyt Wielkiej Góry. W czasie wędrówki harcerze dwukrotnie zatrzymali się, by odpocząć. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się odległość harcerzy od celu wędrówki w zależności od czasu.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F - jeśli jest fałszywe. W ciągu pierwszej godziny wędrówki prędkość harcerzy była pięć razy większa niż w ciągu ostatniej godziny. Średnia prędkość harcerzy na całej trasie wyniosła $2 \frac{km}{h}$.

W ciągu pierwszej godziny wędrówki prędkość harcerzy była pięć razy większa niż w ciągu ostatniej godziny.

Prawda

Fałsz

Średnia prędkość harcerzy na całej trasie wyniosła $2 \frac{km}{h}$.

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Z wykresu możemy odczytać, że w ciągu pierwszej godziny harcerze pokonali $8km - 3km = 5km$. Ich prędkość podróży zgodnie ze wzorem $v = \frac{s}{t}$ wyniosła więc:

$$v = \frac{5km}{1h}, v = 5 \frac{km}{h}$$

Teraz patrzmy się na ostatnią godzinę podróży. Z wykresu możemy odczytać, że w ostatniej godzinie harcerze pokonali $1km - 0km = 1km$. W związku z tym średnia prędkość w tym momencie wyniosła:

$$v = \frac{1km}{1h}, v = 1 \frac{km}{h}$$

To oznacza, że zdanie jest prawdą, bo faktycznie w pierwszej godzinie prędkość wędrowki harcerzy była pięć razy większa niż w ciągu ostatniej godziny.

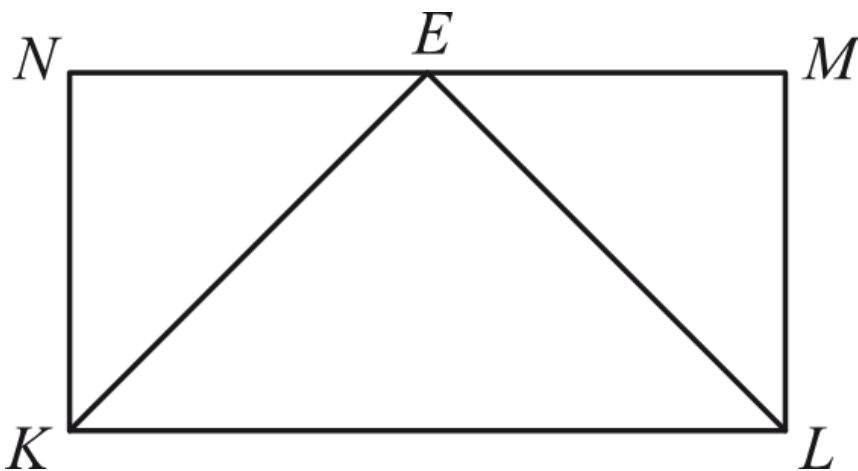
Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Z wykresu możemy odczytać, że cała trasa miała długość $8km$. Czas podróży wyniósł 4 godziny. W związku z tym średnia prędkość na całej trasie wyniosła:

$$v = \frac{4km}{2h}, v = 2 \frac{km}{h}$$

Zdanie jest więc prawdą.

Dany jest prostokąt $KLMN$ o wymiarach $1cm$ i $2cm$. Punkt E jest środkiem jego dłuższego boku NM .



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F - jeśli jest fałszywe. Trójkąty KEN i KEL są przystające.

Pole trójkąta MEL jest dwa razy mniejsze od pola trójkąta KEL .

Trójkąty KEN i KEL są przystające.

Prawda

Fałsz

Pole trójkąta MEL jest dwa razy mniejsze od pola trójkąta KEL .

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) FAŁSZ

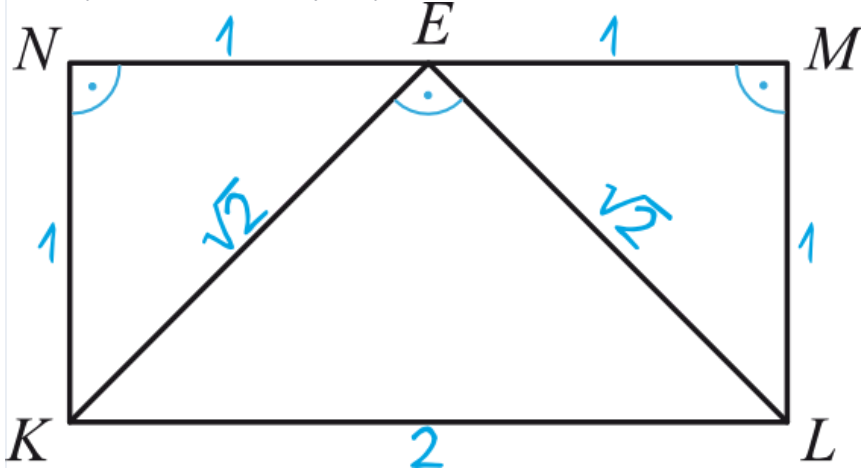
Krok 1. Obliczenie długości odcinków KE oraz EL .

Spójrzmy na mały trójkąt KEN . Z treści zadania możemy wywnioskować, że odcinki NK oraz NE mają długość $1cm$. Skoro tak, to wiemy już, że jest to trójkąt prostokątny równoramienny, czyli krótko mówiąc - jest to trójkąt o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. W takich trójkątach przeciwprostokątna jest $\sqrt{2}$ razy większa od długości przyprostokątnych (podobna sytuacja jak z przekątną kwadratu), zatem odcinek KE ma miarę $\sqrt{2}cm$. Gdybyśmy o tej własności nie pamiętali, to moglibyśmy wyliczyć długość odcinka KE z Twierdzenia Pitagorasa.

Teraz spójrzmy na mały trójkąt ELM . Tutaj sytuacja jest identyczna jak przed chwilą, ten trójkąt także ma przyprostokątne o

długości 1cm , zatem odcinek EL ma także długość $\sqrt{2}\text{cm}$.

Nanieśmy teraz te nasze informacje na rysunek:



Przy okazji zwróć uwagę na to, że kąt KEL jest kątem prostym. Skąd to wiemy? Możemy to udowodnić z Twierdzenia Pitagorasa, bowiem zachodzi tutaj równość:

$$(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2^2, \quad 2 + 2 = 4, \quad 4 = 4, \quad L = P$$

To oznacza, że trójkąt KEL jest prostokątny.

Krok 2. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Aby trójkąty były względem siebie przystające, to muszą mieć jednakowe długości wszystkich boków. Widzimy wyraźnie, że trójkąty KEN oraz KEL mają różne miary, więc na pewno nie są przystające. Zdanie jest więc fałszem.

Tak na marginesie - te trójkąty są podobne (a nie przystające) i to jest główna pułapka w tym zadaniu. Skala podobieństwa tych trójkątów będzie równa $k = \sqrt{2}$, bowiem każdy bok trójkąta KEL jest $\sqrt{2}$ razy większy od boku trójkąta KEN .

Krok 3. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Do zadania możemy podejść na dwa sposoby. Jeżeli ustalimy sobie (tak jak w poprzednim kroku), że skala podobieństwa tych trójkątów jest równa $k = \sqrt{2}$, to bardzo szybko będziemy w stanie ustalić, że pole trójkąta KEL będzie 2 razy większe od pola trójkąta MEL , bowiem $k^2 = \sqrt{2}^2 = 2$. To będzie więc jednocześnie oznaczało, że faktycznie pole trójkąta MEL jest dwa razy mniejsze od pola trójkąta KEL .

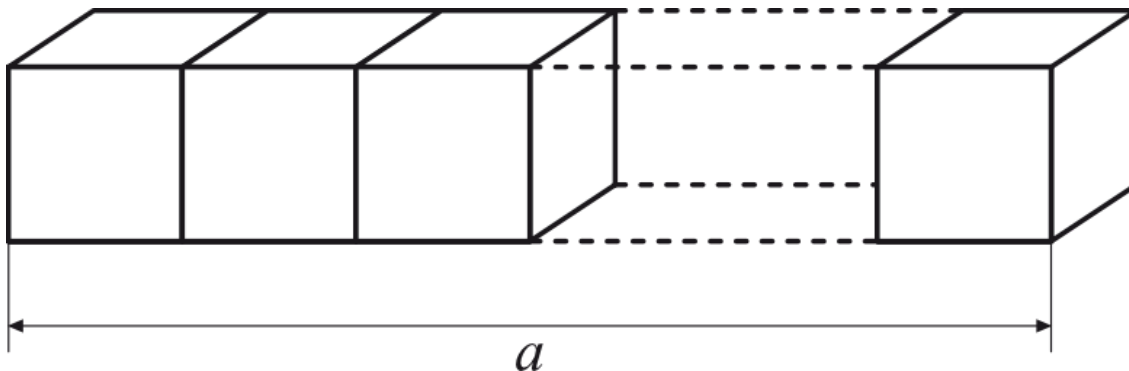
Jeżeli jednak nie dostrzeżliśmy podobieństwa trójkątów, to posłużyć możemy się standardowymi wzorami na pole trójkąta, wszak w trójkątach prostokątnych długości przyprostokątnych są jednocześnie podstawą oraz wysokością. Zatem:

$$P_{MEL} = \frac{1}{2}ah, \quad P_{MEL} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1, \quad P_{MEL} = 0,5[\text{cm}^2]$$

$$P_{KEL} = \frac{1}{2}ah, \quad P_{KEL} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}, \quad P_{KEL} = 1[\text{cm}^2]$$

Teraz widzimy wyraźnie, że pole trójkąta MEL jest faktycznie dwa razy mniejsze od pola trójkąta KEL . Zdanie jest więc prawdą.

Sześcian o objętości 1dm^3 rozcięto na sześćcienne klocki o boku długości 1cm , a następnie ułożono je jeden obok drugiego, tak jak przedstawiono na rysunku.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F - jeśli jest fałszywe. Objętość powstałej bryły jest równa 1000cm^3 .

Długość a zaznaczona na rysunku to 10m .

Objętość powstałej bryły jest równa 1000cm^3 .

Prawda

Fałsz

Długość a zaznaczona na rysunku to 10m .

Prawda

Fałsz

Odpowiedź: 1) PRAWDA

Krok 1. Ocena prawdziwości pierwszego zdania.

Niezależnie od tego jak te małe klocki zostaną ułożone, to objętość powstałej bryły będzie równa objętości początkowego sześcianu. Sześcian na początku miał objętość 1dm^3 , zatem chcąc sprawdzić czy nowa bryła ma objętość równą 1000cm^3 , musimy jedynie poprawnie zamienić jednostki objętości. Pamiętając o tym, że $1\text{dm} = 10\text{cm}$ możemy zapisać, że:

$$1\text{dm}^3 = 10\text{cm} \cdot 10\text{cm} \cdot 10\text{cm} = 1000\text{cm}^3$$

Zdanie jest więc prawdą.

Krok 2. Ocena prawdziwości drugiego zdania.

Musimy ustalić ile małych kostek powstało po rozcięciu naszego początkowego sześcianu. Skoro po rozcięciu powstały nam sześciennie klocki o boku 1cm , to każdy taki klocek ma objętość:

$$V = (1\text{cm})^3, V = 1\text{cm}^3$$

Ustaliliśmy już, że objętość całej bryły jest równa 1000cm^3 , więc takich małych klocków o objętości $V = 1\text{cm}^3$ jest na pewno 1000. To oznacza, że na rysunku mamy 1000 klocków ułożonych obok siebie. Każdy klocek ma długość 1cm , zatem długość nowej bryły będzie równa 1000cm , czyli właśnie 10m . Zdanie jest więc prawdą.

Zadanie 12

0–1 pkt

Cenę deskorolki, która początkowo kosztowała 480zł, obniżono do 384zł.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Cenę deskorolki obniżono o $\boxed{A}$ / $\boxed{B}$. Aby wrócić do ceny początkowej, obecną cenę deskorolki należałoby podwyższyć o $\boxed{C}$ / $\boxed{D}$.

Odpowiedź: A (20%), D (25%)

Krok 1. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Jeżeli cena deskorolki została obniżona z 480zł na 384zł, to znaczy że obniżka wyniosła 96zł. Skoro więc obniżka wyniosła 96zł z kwoty 480zł, to procentowo była to zniżka o:

$$\frac{96}{480} \cdot 100\% = 20\%$$

Krok 2. Rozwiązanie drugiej części zadania.

Chcemy, by cena z 384zł wzrosła do ceny 480zł, czyli chcemy teraz podwyższyć cenę o 96zł z ceny 384zł.

Procentowo podwyżka wyniesie więc:

$$\frac{96}{384} \cdot 100\% = 25\%$$

Zadanie 13

0–1 pkt

W lodziarni Rożek kulka lodów śmietankowych kosztuje o połowę mniej niż kulka lodów karmelowych. Pola kupiła 3 kulki lodów śmietankowych oraz 1 kulkę lodów karmelowych i zapłaciła 10zł.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Mela kupiła 1 kulkę lodów śmietankowych oraz 2 kulki lodów karmelowych i zapłaciła $\boxed{A}$ / $\boxed{B}$. Ala kupiła 1 kulkę lodów śmietankowych oraz 3 kulki lodów karmelowych i zapłaciła o $\boxed{C}$ / $\boxed{D}$ więcej niż Pola.

Odpowiedź: A (tyle samo co Pola), C (4zł)

Krok 1. Obliczenie ceny lodów śmietankowych oraz karmelowych.

Wprowadźmy sobie do zadania następujące oznaczenia:

x - cena lodów śmietankowych

$2x$ - cena lodów karmelowych (bo z treści zadania wynika, że lody karmelowe są dwukrotnie droższe)

Pola kupiła 3 lody śmietankowe oraz 1 lód karmelowy i zapłaciła za niego 10zł. Na podstawie tych informacji możemy ułożyć następujące równanie:

$$3 \cdot x + 1 \cdot 2x = 10, \quad 3x + 2x = 10, \quad 5x = 10, \quad x = 2$$

To oznacza, że lody śmietankowe kosztują 2zł, a tym samym lody karmelowe kosztują 4zł (bo $2 \cdot 2zł = 4zł$).

Krok 2. Rozwiązanie pierwszej części zadania.

Mela kupiła 1 kulkę lodów śmietankowych oraz 2 kulki lodów karmelowych, zatem zapłaciła:

$$2zł + 2 \cdot 4zł = 2zł + 8zł = 10zł$$

To oznacza, że Mela wydała na lody tyle samo co Pola.

Krok 3. Rozwiązanie drugiej części zadania.

Ala kupiła 1 kulkę lodów śmietankowych oraz 3 kulki lodów karmelowych, zatem zapłaciła:

$$2zł + 3 \cdot 4zł = 2zł + 12zł = 14zł$$

To oznacza, że zapłaciła o 4zł więcej od Poli, bo $14zł - 10zł = 4zł$.

Zadanie 14

0-1 pkt

Dominika ma obecnie x lat i jest o dwa lata starsza od swojej siostry Kasi oraz dwa razy młodsza od swojej mamy. Ile lat miała mama, gdy urodziła się Kasia?

Odpowiedź: A ($x + 2$)

Krok 1. Wprowadzenie oznaczeń do treści zadania.

Na podstawie treści zadania możemy zapisać, że:

x - wiek Dominiki

$x - 2$ - wiek Kasi (bo Kasia jest o dwa lata młodsza od Dominiki)

$2x$ - wiek mamy (bo mama jest dwa razy starsza od Dominiki)

Krok 2. Obliczenie różnicy wieku między mamą i Kasią.

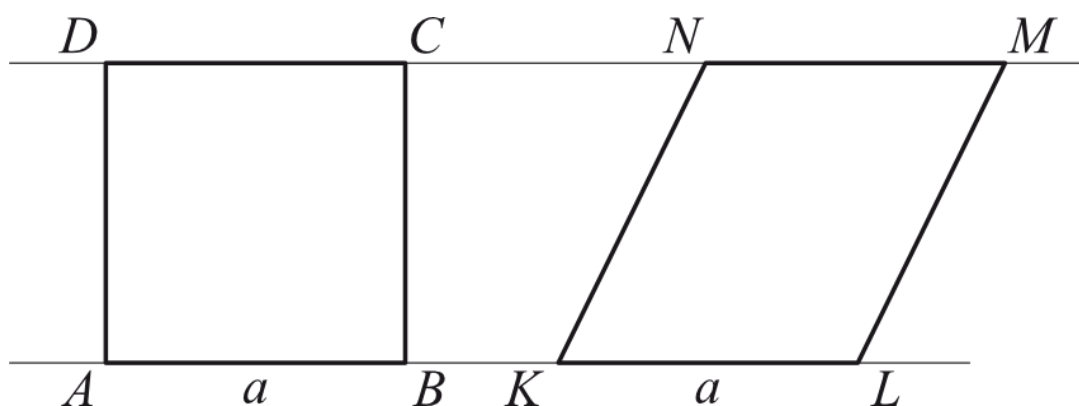
Aby się dowiedzieć ile lat miała mama kiedy urodziła się Kasia wystarczy od wieku mamy odjąć wiek Kasi, zatem:

$$2x - (x - 2) = 2x - x + 2 = x + 2$$

Zadanie 15

0-1 pkt

Czy kwadrat $ABCD$ i równoległobok $KLMN$, przedstawione na rysunku, mają równe pola?



Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B albo C. **A)** obwód równoległoboku jest większy niż obwód kwadratu.

B) kwadrat i równoległobok mają równy jeden bok oraz równe wysokości poprowadzone na ten bok.

C) bok AD kwadratu ma mniejszą długość niż bok KN równoległoboku.

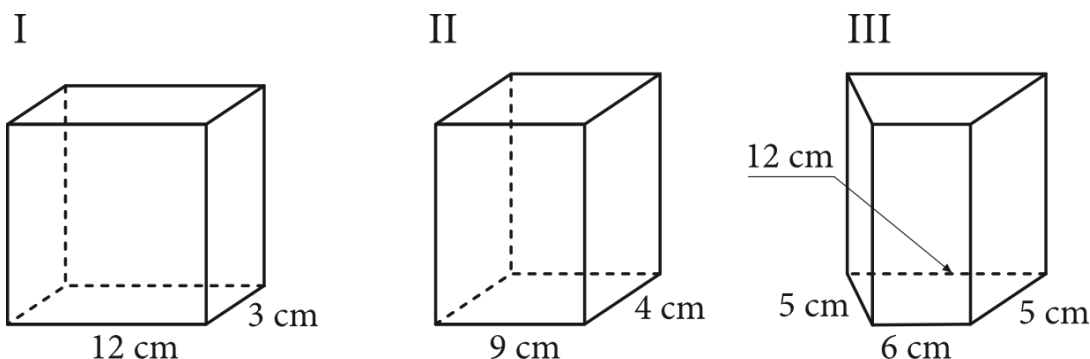
Odpowiedź: Tak ponieważ opcja

Powinniśmy na rysunku zauważyć, że kwadrat oraz równoległobok mają równy jeden bok (ten dolny) oznaczony jako a . Dodatkowo te dwie figury mają jednakowe wysokości (możemy nawet stwierdzić, że ta wysokość jest także równa a skoro figura $ABCD$ jest kwadratem). Zapiszmy teraz wzory na pola tych figur.

- Pole kwadratu $ABCD$ możemy wyrazić wzorem $P = a \cdot a = a^2$.
- Pole równoległoboku $KLMN$ zwyczajowo zapisujemy jako $P = a \cdot h$, ale skoro a jest równe h to mamy $P = a \cdot a = a^2$.

Wynika więc z tego, że te dwa pola są sobie równe, gdyż te dwie figury mają równy jeden bok oraz równe wysokości poprowadzone na ten bok.

Na rysunku przedstawiono trzy graniastosłupy: dwa o podstawie prostokąta i jeden o podstawie trapezu. Bryły te mają równe pola podstaw oraz jednakową objętość.



Uporządkuj pola powierzchni bocznej P_I , P_{II} i P_{III} tych brył od najmniejszego do największego.

Odpowiedź: D ($P_{II} < P_{III} < P_I$)

Krok 1. Dostrzeżenie, że wszystkie bryły muszą mieć jednakową wysokość.

Wzór na objętość graniastosłupa to $V = P_p \cdot H$. Skoro wszystkie bryły mają jednakowe pola podstawy i mają jednakową objętość, to muszą mieć także jednakową wysokość samej bryły. To ważne spostrzeżenie, bowiem dzięki temu możemy zapisać, że krawędzie boczne wszystkich brył (które są przecież wysokościami naszych graniastosłupów) mają jednakową długość x .

Krok 2. Obliczenie pola powierzchni bocznej pierwszej bryły.

Pole powierzchni bocznej to suma pól wszystkich ścian bocznych. W przypadku pierwszej bryły ścianami bocznymi są dwa prostokąty o wymiarach $3\text{ cm} \times x\text{ cm}$ oraz dwa prostokąty o wymiarach $12\text{ cm} \times x\text{ cm}$. W związku z tym:

$$P_I = 2 \cdot (3 \cdot x) + 2 \cdot (12 \cdot x) = 6x + 24x = 30x$$

Krok 3. Obliczenie pola powierzchni bocznej drugiej bryły.

Analogicznie jak w poprzednim przypadku, tym razem ścianami bocznymi są dwa prostokąty o wymiarach $4\text{ cm} \times x\text{ cm}$ oraz dwa prostokąty o wymiarach $9\text{ cm} \times x\text{ cm}$, zatem:

$$P_{II} = 2 \cdot (4 \cdot x) + 2 \cdot (9 \cdot x) = 8x + 18x = 26x$$

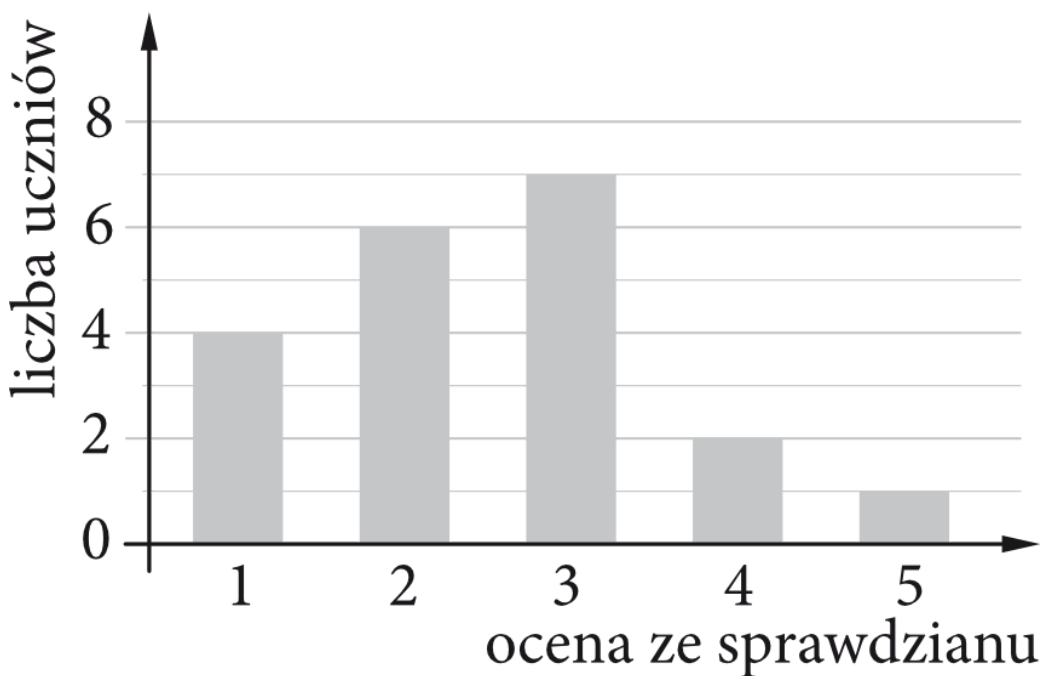
Krok 4. Obliczenie pola powierzchni bocznej trzeciej bryły.

Tutaj ścianami bocznymi są dwa prostokąty o wymiarach $5\text{ cm} \times x\text{ cm}$, jeden prostokąt o wymiarach $6\text{ cm} \times x\text{ cm}$ oraz jeden prostokąt o wymiarach $12\text{ cm} \times x\text{ cm}$, zatem:

$$P_{III} = 2 \cdot (5 \cdot x) + 1 \cdot (6 \cdot x) + 1 \cdot (12 \cdot x) = 10x + 6x + 12x = 28x$$

To oznacza, że $P_{II} < P_{III} < P_I$.

Janek otrzymał z kartkówki ocenę dostateczną, czyli 3. Postanowił porównać tę ocenę ze średnią ocen klasy z tego sprawdzianu. W tym celu przeanalizował diagram, na którym przedstawiono wyniki wszystkich uczniów tej klasy.



O ile ocena, którą uzyskał Janek, była wyższa niż średnia ocen klasy?

Odpowiedź: Ocena Janka była wyż

Krok 1. Obliczenie średniej ocen z kartkówki.

Z wykresu możemy odczytać, że:

- 4 uczniów otrzymało jedynkę
- 6 uczniów otrzymało dwójkę
- 7 uczniów otrzymało trójkę
- 2 uczniów otrzymało czwórkę
- 1 uczeń otrzymał piątkę

To oznacza, że średnia ocen uczniów wyniosła:

$$\bar{s} = \frac{4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{4 + 6 + 7 + 2 + 1}, \bar{s} = \frac{4 + 12 + 21 + 8 + 5}{20}, \bar{s} = \frac{50}{20}, \bar{s} = 2,5$$

Krok 2. Obliczenie o ile ocena, którą uzyskał Janek, była wyższa niż średnia ocen.

Janek otrzymał ocenę 3. Średnia klasy wyniosła 2,5. To oznacza, że ocena Janka jest wyższa od średniej ocen całej klasy o $3 - 2,5 = 0,5$ stopnia.

Trzy przyjaciółki umówiły się na popołudniowe spotkanie w kawiarni Sama słodycz. Ania zamówiła ciastko i herbatę, które kosztowały w sumie 24zł, Hania deser lodowy i espresso, w sumie za 36zł, a Lena torcik bezowy i świeży sok - za 40zł. Okazało się, że do rachunku został doliczony napiwek, i do zapłaty była łączna kwota 115zł. Ile powinna dopłacić do swojego zamówienia Lena, aby kwota ta była proporcjonalna do wartości zamówienia?

Odpowiedź: Lena powinna dopłacić

Krok 1. Obliczenie łącznej kwoty zamówienia (bez napiwku) oraz samego napiwku.

Zgodnie z treścią zadania zamówienie Ani kosztowało 24zł, Hani 36zł, a Leny 40zł. Łącznie więc koszt zamówionych rzeczy wyniósł:

$$24zł + 36zł + 40zł = 100zł$$

Skoro na rachunku była do zapłaty kwota 115zł, a zamówione produkty kosztowały 100zł, to napiwek wyniósł:

$$115zł - 100zł = 15zł$$

Krok 2. Ustalenie udziału Leny w całym zamówieniu.

Dziewczyny zamówiły produkty za 100zł, z czego Lena zamówiła za 40zł. Udział Leny w całym rachunku wyniósł więc:

$$\frac{40}{100} \cdot 100\% = 40\%$$

Krok 3. Ustalenie ile Lena powinna dopłacić na napiwek.

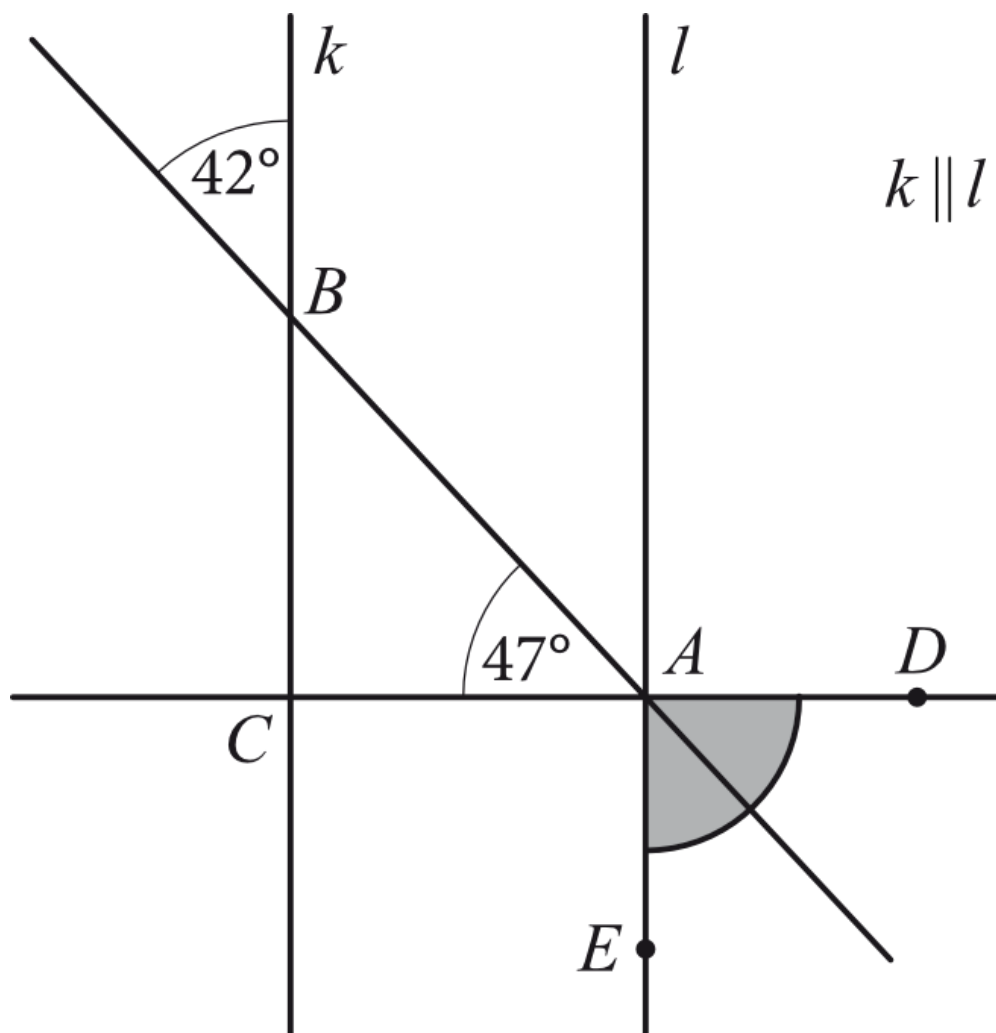
Jeżeli chcemy, by dziewczynki zapłaciły napiwek proporcjonalnie do swojego zamówienia, to Lena powinna zapłacić 40% kwoty napiwku. Wiemy już, że napiwek wyniósł 15zł, zatem Lena powinna zapłacić:

$$0,4 \cdot 15zł = 6zł$$

Zadanie 19

0-2 pkt

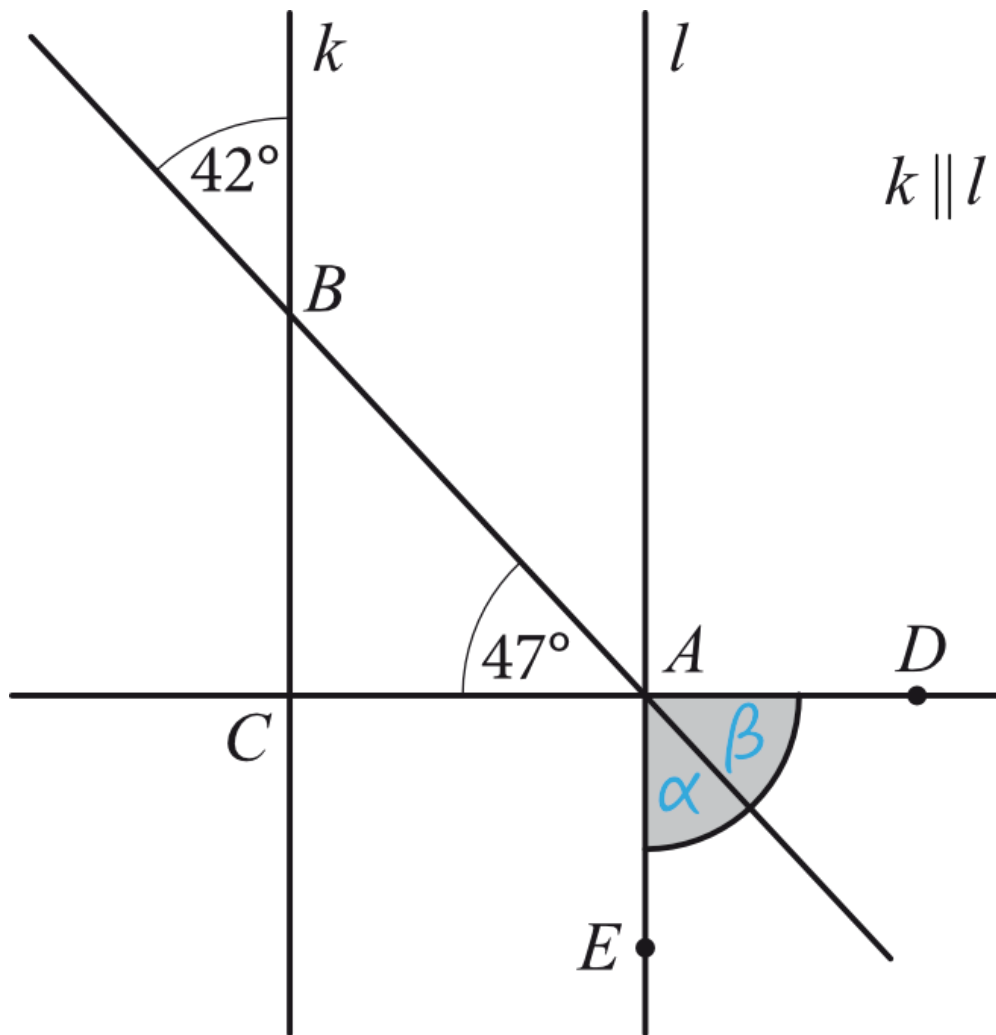
Proste k i l są równoległe.



Czy kąt DAE zaznaczony na rysunku jest ostry, prosty czy rozwarty? Uzasadnij odpowiedź.

Odpowiedź: Zacieniony kąt ma mi

Aby dobrze opisać co będziemy liczyć, to oznaczmy sobie zacieniony kawałek kąta przy boku AE jako α , natomiast zacieniony kawałek kąta przy boku AD jako β .



Krok 1. Obliczenie miary kąta α .

Spróbujmy ustalić jaka jest miara zaciennego kąta α . Powinniśmy dostrzec, że ten kąt oraz kąt o mierze 42° są kątami naprzemianległymi, zatem będą one miały jednakową miarę. Z tego też względu $\alpha = 42^\circ$.

Krok 2. Obliczenie miary kąta β .

Kąt o mierze 47° oraz nasz kąt β tworzą parę kątów wierzchołkowych. Z własności kątów wierzchołkowych wynika, że mają one tę samą miarę, stąd też możemy zapisać, że $\beta = 47^\circ$.

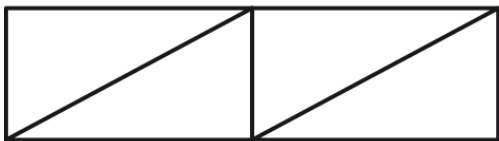
Krok 3. Obliczenie miary zaciennego kąta.

Nasz zacienny kąt jest sumą miar kątów α oraz β , zatem jego miara wyniesie:

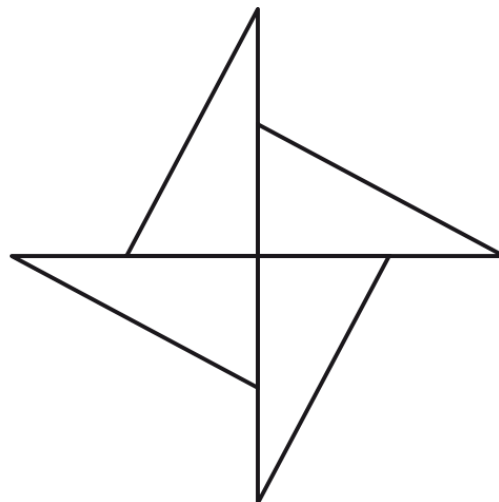
$$42^\circ + 47^\circ = 89^\circ$$

Zacienny kąt jest więc kątem ostrym.

Prostokąt o bokach długości 8cm i 30cm (rysunek 1) rozcięto na cztery przystające trójkąty, a następnie z tych trójkątów ułożono figurę, jak pokazano na rysunku 2.



Rysunek 1



Rysunek 2

Ile wynosi obwód figury przedstawionej na rysunku 2?

Odpowiedź: $Obw = 96\text{cm}$

Krok 1. Obliczenie długości przyprostokątnych oraz przeciwprostokątnej trójkąta.

Prostokąt został podzielony na cztery przystające (czyli jednakowe) trójkąty prostokątne. Spróbujmy poznać wymiary każdego z tych trójkątów. Ustalmy najpierw jakie są długości przyprostokątnych tego trójkąta. Z rysunku wynika, że $a = 8\text{cm}$ (bo krótsza przyprostokątna pokrywa się z krótszym bokiem prostokąta), natomiast $b = 15\text{cm}$ (bo dłuższa przyprostokątna to połowa długości całego prostokąta).

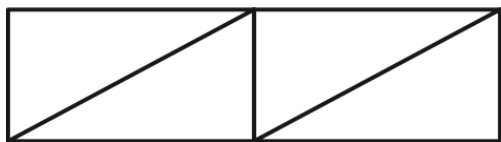
Znając długości przyprostokątnych możemy obliczyć długość przeciwprostokątnej, której długość potrzebujemy do obliczenia obwodu drugiej figury. Korzystając z Twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać, że:

$$8^2 + 15^2 = c^2, \quad 64 + 225 = c^2, \quad c^2 = 289, \quad c = \sqrt{289} \quad \vee \quad c = -\sqrt{289}, \quad c = 17 \quad \vee \quad c = -17$$

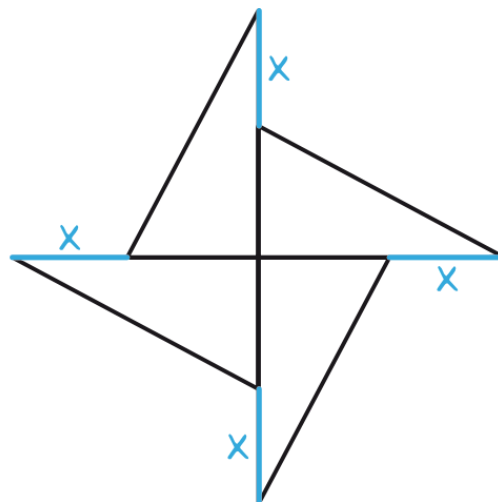
Ujemny wynik oczywiście odrzucamy, zatem zostaje nam $c = 17\text{cm}$.

Krok 2. Obliczenie różnicy między dłuższą i krótszą przyprostokątną.

Jak spojrzymy się na rysunek to zauważymy, że na obwód drugiej figury składają się jeszcze takie małe fragmenty, które są różnicą między długością dłuższej i krótszej przyprostokątnej.



Rysunek 1



Rysunek 2

Dłuższa przyprostokątna ma długość 15cm , krótsza ma długość 8cm , zatem każdy pojedynczy mały kawałeczek obwodu tej figury będzie miał długość:

$$15\text{cm} - 8\text{cm} = 7\text{cm}$$

Krok 3. Obliczenie obwodu figury.

Nasza figura składa się z czterech odcinków o długości przeciwprostokątnej (którą wyznaczyliśmy w 1. kroku) oraz czterech odcinków o długości będącej różnicą między przyprostokątnymi (którą wyznaczyliśmy w 2. kroku). W związku z tym:

$$Obw = 4 \cdot 17\text{cm} + 4 \cdot 7\text{cm} = 68\text{cm} + 28\text{cm} = 96\text{cm}$$

Dziadek Janusz chce pomalować jedno z pomieszczeń w swoim mieszkaniu. Oszacował, że powierzchnia ścian i sufitu to łącznie prawie $70m^2$. Z oferty sklepu wybrał wstępnie cztery rodzaje farb, które przedstawiono w poniższej tabeli.

Nazwa farby	Pojemność puszki	Cena za opakowanie	Wydajność
Śnieżynka	2 l	16 zł	$10 m^2/1 l$
Bielinka	3 l	22 zł	$10 m^2/1 l$
Aksamitna	4 l	35 zł	$12 m^2/1 l$
Welurowa	5 l	54 zł	$14 m^2/1 l$

Którą farbę powinien wybrać dziadek Janusz, by dwukrotnie pomalować tę powierzchnię i wydać jak najmniej?

Odpowiedź: Najkorzystniej wyjdzie

Krok 1. Obliczenie ile metrów kwadratowych da się pomalować pojedynczą puszką farby.

W ostatniej kolumnie mamy podaną wydajność każdej z farb w przeliczeniu na 1 liter. Spróbujmy zatem sprawdzić ile metrów kwadratowych pomalujemy mając każdą z wymienionych puszek. W tym celu musimy wymnożyć pojemność puszki przez jej wydajność:

- Śnieżynka: $2 \cdot 10 \frac{m^2}{l} = 20m^2$
- Bielinka: $3 \cdot 10 \frac{m^2}{l} = 30m^2$
- Aksamitna: $4 \cdot 12 \frac{m^2}{l} = 48m^2$
- Welurowa: $5 \cdot 14 \frac{m^2}{l} = 70m^2$

Krok 2. Obliczenie ile puszek trzeba kupić i jaka jest ich łączna cena.

Dziadek chce pomalować powierzchnię $70m^2$ i chce to zrobić dwukrotnie, czyli realnie pomaluje $2 \cdot 70m^2 = 140m^2$. Sprawdźmy zatem ile puszek farby potrzeba do pomalowania takiej powierzchni i ile trzeba za nie zapłacić:

- Śnieżynka - jedną puszką jesteśmy w stanie pomalować $20m^2$, zatem tych puszek potrzebujemy:

$$140m^2 : 20m^2 = 7$$

Cena pojedynczej puszki to 16zł, zatem malowanie Śnieżynką będzie kosztować:

$$7 \cdot 16zł = 112zł$$

- Bielinka - jedną puszką jesteśmy w stanie pomalować $30m^2$, zatem tych puszek potrzebujemy:

$$140m^2 : 30m^2 = 4\frac{2}{3} \approx 5$$

Musieliśmy zaokrąglić (do góry) liczbę puszek do pełnej wartości, bo nie da się przecież kupić $4\frac{2}{3}$ puszek. Stąd też potrzeba kupić 5 opakowań tej farby. Cena pojedynczej puszki to 22zł, zatem malowanie Bielinką będzie kosztować:

$$5 \cdot 22zł = 110zł$$

- Aksamitna - jedną puszką jesteśmy w stanie pomalować $48m^2$, zatem tych puszek potrzebujemy:

$$140m^2 : 48m^2 = 2\frac{11}{12} \approx 3$$

Musieliśmy zaokrąglić (do góry) liczbę puszek do pełnej wartości, bo nie da się przecież kupić $2\frac{11}{12}$ puszek. Stąd też trzeba kupić 3 opakowania tej farby. Cena pojedynczej puszkii to 35zł, zatem malowanie Aksamitną będzie kosztować:

$$3 \cdot 35\text{zł} = 105\text{zł}$$

• Welurowa - jedną puszką jesteśmy w stanie pomalować $70m^2$, zatem tych puszek potrzebujemy:

$$140m^2 : 70m^2 = 2$$

Cena pojedynczej puszkii to 54zł, zatem malowanie Welurową będzie kosztować:

$$2 \cdot 54\text{zł} = 108\text{zł}$$

To oznacza, że najkorzystniej wyjdzie kupić farbę Aksamitną.

Zadanie 22

0-4 pkt

Pan Karol rozważa kupno komputera. Przy płatności jednorazowej kosztuje on 2500zł. Przy zakupie na raty cena tego komputera jest o 8% wyższa - w momencie zakupu trzeba wpłacić 20% jego podwyższonej wartości, a pozostała kwota jest rozłożona na 12 równych części (rat). Oblicz wysokość każdej z tych rat.

Odpowiedź: Wysokość raty wynosi

Krok 1. Obliczenie ceny komputera przy płatności ratalnej.

Skoro komputer kosztuje 2500zł, a w ofercie ratalnej jego cena ulega podwyższeniu o 8%, to cena tego komputera wyniesie:

$$1,08 \cdot 2500\text{zł} = 2700\text{zł}$$

Krok 2. Obliczenie kwoty, która będzie rozłożona na raty.

Z treści zadania wynika, że trzeba od razu zapłacić 20% podwyższonej ceny komputera, czyli na starcie trzeba zapłacić:

$$0,2 \cdot 2700\text{zł} = 540\text{zł}$$

To oznacza, że na raty zostanie rozłożona kwota w wysokości:

$$2700\text{zł} - 540\text{zł} = 2160\text{zł}$$

Oczywiście moglibyśmy też zapisać od razu, że na raty zostanie rozłożone 80% podwyższonej kwoty. Wynik wyjdzie dokładnie ten sam:

$$0,8 \cdot 2700\text{zł} = 2160\text{zł}$$

Krok 3. Obliczenie wysokości raty.

Wiemy już, że na raty zostanie rozłożona kwota 2160zł. Skoro mamy mieć 12 rat, to każda z nich wyniesie:

$$2160\text{zł} : 12 = 180\text{zł}$$